T.C

NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VEKTÖR METRİK UZAYLAR

İlker PEKSÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: YRD. DOÇ. DR. ERDAL BAYRAM

TEKİRDAĞ-2015

Yrd. Doç. Dr. Erdal BAYRAM ‘ın danışmanlığında İlker PEKSÖZ tarafından hazırlanan “Vektör Metrik Uzaylar” isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı ‘nda Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT *İmza:*

Üye: Yrd. Doç. Dr. Yasin ÜNLÜTÜRK *İmza:*

Üye: Yrd. Doç. Dr. Erdal BAYRAM *İmza:*

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

VEKTÖR METRİK UZAYLAR

İlker PEKSÖZ

Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal BAYRAM

Bu tez çalışmasında yakın zamanlarda tanımlanan ve metrik uzayların bir genelleştirmesi olan vektör metrik uzaylar kavramı Çevik ve Altun (2009) ile Çevik (2014, 2015) çalışmaları temel alınarak incelenmiştir. Vektör metrik uzay kavramı ile klasik metrik uzaylar arasındaki paralellikler ve farklılıklar ortaya konmuş, konuyla ilgili ön bilgiler bir araya getirilmiş, kanıtlardaki boşluklar doldurularak gerekli bilgiler verilmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Vektör değerli metrikler, Sıralı vektör uzayları, Riesz uzayları.

2015, 56 sayfa

ABSTRACT

Msc. Thesis

VECTOR METRİC SPACES

İlker PEKSÖZ

Namik Kemal University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Erdal BAYRAM

In this thesis work, the concept of vector metric spaces which has been defined recently, and is generalization of metric spaces are studied on the basis of studies by Çevik and Altun (2009) and Çevik (2014, 2015). While definitions and theorems about the subject are reviewed, parallelism and differences between metric spaces and vector metric spaces are revealed, and gaps in proofs are filled by providing the necessary knowledge in an attempt to obtain some results.

Keywords: Vector valued metrics, Ordered vector spaces, Riesz spaces.

2015, 50 pages

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa</u>

SİMGE LİSTESİ

$x \vee y$ $sup\{x, y\}$

$x \wedge y$ $inf\{x, y\}$

$a_n \downarrow 0$ a_n dizisi azalan ve infumumu 0 dır.

$\in$ elemanıdır

$\notin$ elemanı değildir

$\leq$ küçük eşittir

1. GİRİŞ

Genel anlamda metrik kavramı, üzerinde hiçbir yapı olmasına gerek olmayan boş kümeden farklı bir kümeden reel sayılara giden bir fonksiyondur. Çok öncelerden beri geniş bir uygulama alanı olan metrik uzayların bazı genelleştirilmeleri vardır. Örneğin Menger uzayı, Fuzzy uzayı, K-metrik uzaylar, koni metrik uzaylar gibi. Zabreiko (1997) tarafından tanımlanan K-metrik uzaylarda metrik fonksiyonu reel sayılar yerine sıralı bir Banach uzayında değer alır. Aynı şekilde, Huang ve Zhang (2007) tarafından tanımlanan koni metrik uzaylardaki metrik fonksiyonu bir koni ile sıralanan Banach uzayında değer alır. Ancak Huang ve Zhang, Banach uzayının sıra yapısının getirdiği koninin iç noktaları yardımıyla yakınsaklığı tanımlamış ve teoriyi ilerletmiştir. Bu tanımlama ile birlikte, metrik uzaylarda bilinen sonuçlara paralel sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçlar sabit nokta teoremlerine uygulanmıştır.

E bir Banach uzayı ve $P \subset E$ olsun. Eğer,

i. P kapalı, $P \neq \varnothing$ ve $P \neq \{0\}$

ii. $a,b \geq 0$ olacak biçimde $a,b \in \mathbb{R}$ ve $x,y \in P$ için $ax+by \in P$

iii. $x \in P$ ve $-x \in P$ için $x=0$

ise P ‘ye E ‘nin bir *konisidir* denir.

$P \subset E$ bir koni olmak üzere “$x \leq y \Leftrightarrow y-x \in P$” şeklinde tanımlı $\leq$ bağıntısı, P üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca,

$x \leq y$ ve $x \neq y \Rightarrow x < y$

$x \ll y \Leftrightarrow y-x \in P^{\circ}$

tanımlamaları kullanılır. $\forall x,y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ iken $\|x\| \leq K\|y\|$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde bir $K>0$ sayısı varsa $P \subset E$ ’ye bir *normal koni* denir. Üstteki eşitsizliğini sağlayan en küçük K pozitif sayısına da P ’nin *normal sabiti* denir. Eğer P ’de ki her artan ve üstten sınırlı her dizi yakınsak ise P ’ye *düzenli koni* denir.

1.1. Tanım

E bir Banach uzayı, P bir kon ve $\operatorname{int} P \neq \varnothing$ olsun. X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow E$ fonksiyon olmak üzere $\forall x, y, z \in X$ için

d1) $0 < d(x,y) = 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

d2) $d(x,y) = d(y,x)$

d3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

şartlarını sağlayan *d* fonksiyonuna *X* üzerinde bir *koni metrik fonksiyonu,* (X,d,E) uzayına *koni metrik uzayı* denir. Dizilerin yakınsaklığı, Cauchy dizisi olma durumu, tamlık vb. özellikler klasik metrik uzaylarda verildiği gibi verilebilir.

Koni metrik uzaylar klasik metrik uzayların bir genelleştirmesi gibi görünse de, aslında koni metrik uzayların klasik metrik uzaylardan çok farklı olmadığı, yani koni metrik uzayların metriklenebilir topolojik uzaylar olduğu Khani ve Pourmahdian (2011) ile Ercan ve Çağlar (2014) ‘ın çalışmalarından görülebilir.

(X,E,K,d) koni metrik uzay olmak üzere, $B_{\ll}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \ll r\}$ açık yuvarlarının oluşturduğu $\{B_{\ll}(x,r) : x \in X, 0 \ll r\}$ sıralı kümesi *X* üzerinde tanımlı temel topolojidir. Khani ve Pourmadhian (2011) bu topolojiyi koni metrik topoloji olarak adlandırmış ve bu topolojinin metriklenebilir olduğunu göstermiştir. Aynı sonuç Ercan (2014) tarafından farklı bir teknik ile aşağıda verildiği şekilde elde edilmiştir.

3.11. Tanım

E sıralı vektör uzayı olmak üzere $\forall x \in E$ için $x \leq \lambda e$ olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa $e \in E$ elemanı sıra birim olarak adlandırılır. E ‘nin sıra birimlerinin kümesini $ou(E)$ile göstereceğiz. $ou(E) + ou(E) \subset ou(E)$ve $(0,\infty) ou(E) \subset ou(E)$özelliklerinin sağlandığı yukarıdaki tanımdan açıktır. *E* sıralı vektör uzayında her bir $y \in E$ için $\mathbb{Z}x \leq y$ iken $x = 0$ ise *E*’ye *Arşimedyan sıralı vektör uzayı* denir. *E* sıralı vektör uzayında her bir $\varepsilon > 0$ ve $x, y \in E$ için $-\varepsilon x \leq y \leq \varepsilon x$ iken $x = 0$ ise E ’ye *hemen hemen Arşimedyan sıralı vektör uzayı* denir.

Tanımlardan açıktır ki, her Arşimedyan sıralı vektör uzayı hemen hemen Arşimedyan sıralı vektör uzayıdır.

3.13. Teorem

(E,K,τ) sıralı topolojik vektör uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler denktir.

i) $e \in \operatorname{int}(K)$

ii) $[-e,e]$ sıfırın komşuluğudur.

3.14. Teorem

$\varnothing \neq X$, E sıralı vektör uzayı, K bir koni olmak üzere $e \in \operatorname{int}(K)$ olsun. $d : X \times X \to K$ koni metrik fonksiyonu olmak üzere $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}^{+}$, $\overline{d}(x,y) = \inf\{\lambda : d(x,y) \leq \lambda e\}$ şeklinde tanımlı $\overline{d}$ verilsin. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) d koni metrik ise $\overline{d}$ metriktir.

ii) Eğer $d : X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ metrik ise $d = \overline{\rho}$ olacak şekilde bir $\rho : X \times X \to K$ koni metriği vardır.

iii) (X,E,K,d) Arşimedyan koni metrik uzay ise, (X,E,K,d) koni metrik topolojisi $(X,\overline{d})$ metrik uzayın topolojisidir.

Diğer taraftan Çağlar ve Ercan (2014) sıra birim metrik uzaylar ile ilgili çalışmasında koni metrik uzay kavramında reel Banach uzay yerine $ou(E) \neq \varnothing$ olacak biçimde E sıralı vektör uzayları almıştır. Üstelik, (E,K,τ) sıralı topolojik vektör uzay olduğunda, $\operatorname{int}(E^{+}) \subseteq ou(K)$ sağlanacağından her bir koni metrik uzay aslında sıra birim metrik uzaydır.

Fakat bu tanımlamalara baktığımızda metrik fonksiyonunun değer aldığı Banach uzayının veya sıralı topolojik vektör uzayının içinin boş kümeden farklı olması kısıtlamasını görürüz. Halbuki bir uzayda sıra birim olmak zorunda değil ve bir konun içinin boş kümeden farklı olması zorunluluğu yoktur. Örneğin, sonsuz boyutlu AL-uzaylarının ($0 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^{p}[0,1]$ gibi) pozitif konunun içi boş kümedir. Diğer taraftan, yukarıda bahsedilen genelleştirmelerde metrik fonksiyonunun değer aldığı uzay üzerinde topolojik bir yapıya gereksinim duyulmuştur.

Cevik ve Altun (2009) tarafından tanımlanan ve metrik fonksiyonunun herhangi bir topolojik yapıya gerek duymayan Riesz uzay değerli olduğu vektör metrik uzaylar bu tez çalışmasının konusu olmuştur. İkinci bölümde esas çalışma konumuz olan vektör metrik uzaylarda kullandığımız Riesz uzayları temel özellikleri ve örnekleri üzerinde durulmuş ayrıca bildiğimiz metrik uzaylar ve özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde metrik uzayların bir genellemesi olan ve esas çalışma konumuz vektör metrik uzaylar tanımlanmış, örnekler verilmiş ve sağladığı temel özellikler kanıtlanmıştır. Ayrıca sınırlılık kavramı ve vektör metrik uzayların tam olma özellikleri ve tamlaştırılması bu bölümde yer almaktadır. Dördüncü bölümde ise vektör metrik uzaylarda süreklilik kavramlarına yer verilmiş topolojik süreklilik ve vektörel süreklilik üzerinde durulmuş ve bu iki kavram arasındaki ilişkiler ortaya konulmuştur. Sürekli fonksiyonların bazı genişleme durumları verilmiş ve vektörel sürekli fonksiyonların uzayının bir Riesz uzayı olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca bu bölümde vektör metrik uzaylarda kompaktlık kavramı ele alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında ele alınan vektör metrik uzaylarının klasik metrik uzaylardan ayıran kavram, sıralı vektör örgüleri de denilen, Riesz uzaylarıdır. Riesz uzayları teorisindeki ilk sonuçlar, F. Riesz, H. Freudenthal ve L.V. Kontorovitch ‘in birbirlerinden bağımsız olarak ve farklı konularda yaptığı çalışmalar ile elde edilmiştir. Sonrasında ise günümüze değin birçok matematikçi bu sıralı vektör uzayları ile önemli katkılar sağlamıştır. Uygulama alanında örnek vermek gerekirse, ekonomi teorisinde kullanılan bir çok uzay Riesz uzaylarıdır.

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel tanımlar ve bazı önermeler verilmiştir.

2.1. Tanım

E gerçel vektör uzayı üzerinde “ $\leq$ ” bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y \in E$ olmak üzere,

$\forall z \in E$ için $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$ için $x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

koşulları sağlanıyorsa, *E* uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ özelliğini sağlayan *x* elemanına *pozitiftir* denir ve *E*’nin tüm pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir.

2.2. Tanım

E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \vee y = \sup\{x, y\} \in E$ ve $x \wedge y = \inf\{x, y\} \in E$ ise E uzayına *sıralı vektör örgüsü* veya *Riesz uzayı* denir. $\vee, \wedge$ işlemlerine örgü işlemleri denir. *E* Riesz uzayı ve $G \subset E$ alt vektör uzayı olmak üzere $x, y \in G$ iken $x \vee y \in G$ ise yani G örgü işlemlerine göre kapalı ise G ’ye *Riesz alt uzayı* denir.

2.3. Örnek

Aşağıda Riesz uzayı ile ilgili bazı örnekler verilmiştir.

1. $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

"$x \le y \Leftrightarrow \forall i = 1,2,...,n$ için $x_i \le y_i$ sıralaması" ve $x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, ..., x_n \vee y_n)$ ile $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, ..., x_n \wedge y_n)$ örgü işlemlerine göre $\mathbb{R}^n$ bir Riesz uzayıdır.

2. Bilindiği üzere reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin kümesi c_0, yakınsak dizilerin kümesi c, ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x|^p < \infty \right\}$ dizi uzayları arasında $\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ ilişkisi vardır. $E = c_0,\ c$ veya $1 \le p \le \infty$ olmak üzere ℓ_p olsun. $(x_n),(y_n) \in E$ olmak üzere "$(x_n) \le (y_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le y_n$" sıralaması ve $(x_n) \vee (y_n) = (x_n \vee y_n)$ ile $(x_n) \wedge (y_n) = (x_n \wedge y_n)$ örgü işlemlerine göre E bir Riesz uzayıdır.

Riesz uzaylarının sık kullanılan tipik örnekleri fonksiyon uzaylarıdır.

3. $X \ne \varnothing$ olmak üzere $f, g \in B(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ , sınırlı} \}$, olsun. $f \le g \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $f(x) \le g(x)$ şeklinde tanımlı $\le$ sıralamasına göre $B(X)$ bir sıralı kümedir. Örgü işlemleri $(f \vee g)(x) = \underbrace{maks}_{x \in X}\{f(x), g(x)\}$ ile $(f \wedge g)(x) = \underbrace{\min}_{x \in X}\{f(x), g(x)\}$ şeklinde tanımlansın. $f, g \in B(X)$ olduğundan $\forall x \in X$ için $|f(x)| \le M_f$ ve $|g(x)| \le M_g$ olacak biçimde $M_f, M_g \in \mathbb{R}^+$ sayıları vardır. Dolayısıyla $|f \vee g|(x) \le M_f + M_g$ olur. Buradan da $f \vee g \in B(X)$ elde edilir. Benzer şekilde $f \wedge g \in B(X)$ olduğundan $B(X)$ Riesz uzayıdır.

Üstte fonksiyonlar için verilen sıralama ve örgü işlemlerine göre bazı Riesz uzayı olabilen fonksiyon sınıfları şunlardır.

a. R^{X}, *X* üzerindeki gerçel değerli fonksiyonların uzayı.

b. C(X), X topolojik uzayı üzerindeki gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı.

c. $\mathrm{C_b(X)}$, X topolojik uzayı üzerindeki sınırlı ve sürekli gerçel değerli fonksiyonların uzayı.

d. $0 < p < \infty$ ve $(\mathrm{X}, \Sigma, \mu)$ ölçüm uzayı olmak üzere, gerçel değerli μ-ölçülebilir ve $\int_{\mathrm{X}} |\mathrm{f}|^{\mathrm{p}}\, d\mu < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı $\mathrm{L_p}(\mu)$

e. $(\mathrm{X}, \Sigma, \mu)$ ölçüm uzayı olmak üzere, gerçel değerli μ-ölçülebilir ve hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonların uzayı $L_\infty(\mu)$.

f. Ω bir topolojik uzay olmak üzere $C(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R} \mid f \ \ \textit{sınırlı}\}$.

Bu çalışmada bundan sonra aksi belirtilmedikçe fonksiyon uzaylarında aynı sıralama ve aynı işlemler düşünülenecektir.

Sıralı vektör uzayı olup Riesz uzayı olamayan bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

1. X sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere $\vartheta=\{A\subset X : A \ \textit{sonlu ve card}A=2n, n\in\mathbb{N}\}$ olsun. $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ve $B=\{a_4,a_5\}\in\vartheta$ için $A\wedge B=A\cap B=\{a_4\}\notin\vartheta$ elde edilir. Dolayısıyla $(\vartheta,\subseteq)$ bir örgü değildir.

2. $C^1[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f$, sürekli, diferansellenebilir$\}$ fonksiyon uzayını alalım. $f,g\in C^1[0,1]$ olmak üzere, $f\le g \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f(x)\le g(x)$, $\le$ sıralamasına göre $C^1[0,1]$ bir sıralı vektör uzayıdır. Fakat aşağıda göreceğimiz bir örnek ile Riesz uzayı değildir. $f(x)=x$, $g(x)=1-x$,şeklinde tanımlı $f,g\in C^1[0,1]$ fonksiyonlarını seçelim. $C^1[0,1]$ fonksiyon uzayı $f\vee g=\begin{cases}1-x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ ve $f\wedge g=\begin{cases}x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ ile tanımlı örgü işlemlerine göre kapalı değildir. dolayısıyla $C^1[0,1]$ uzayı Riesz uzayı değildir.

2.4. Tanım

E bir Riesz uzayı olmak üzere, her $x\in E$ için $x^+=x\vee 0$ elemanına x 'in *pozitif kısmı*, $x^-=-x\vee 0$ elemanına x 'in *negatif kısmı* ve $|x|=x\vee(-x)$ elemanına x 'in *modülü* denir.

Tanımlardan hareketle her bir $x\in E$ için $x=x^+-x^-$, $|x|=x^++x^-$ ve $x^+\wedge x^-=0$ sağlanır. Ayrıca, E Riesz uzayında keyfi *x,y,z* elemanları için aşağıdaki özellikler sağlanır.ve

$x\vee y=-[(-x)\wedge(-y)]$

$x\wedge y=-[(-x)\vee(-y)]$

$$x \vee y = \frac{1}{2}\left(x + y + |x - y|\right)$$

$$x \wedge y = \frac{1}{2}\left(x + y - |x - y|\right)$$

Yukarıda verilen eşitlikler yardımıyla aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilebilir.

- ✓ E sıralı vektör uzayının Riesz uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x \in E$ için $|x| \in E$ olmasıdır.
- ✓ $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$
- ✓ $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$
- ✓ $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- ✓ $\alpha \geq 0$ için $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$ $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$

2.5. Önerme

E Riesz uzayı ve $A \subset E$ alt küme olsun. Eğer $\sup(A)$ varsa, aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\inf(-A)$ vardır ve $\inf(-A) = -\sup(A)$'dır.

ii. $x + A = \{x + a \mid a \in A\}$ olmak üzere $\sup(x + A)$ vardır ve $\sup(x + A) = x + \sup(A)$ olarak yazılabilir.

iii. Her bir $\alpha \geq 0$ için $\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$ ise $\sup(\alpha A) = \alpha(\sup A)$ olarak yazılabilir.

2.6. Tanım

E Riesz uzayında, I indeks kümesi için (x_α) bir ağ olsun. Her $\alpha, \beta \in I$ için $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ koşullarını sağlayan bir $\gamma \in I$ varsa (x_α) ağı *yukarı yönlendirilmiştir* denir ve $(x_\alpha)\uparrow$ şeklinde gösterilir. $(x_\alpha)\uparrow$ ve $\sup\{x_\alpha\} = x$ ise $(x_\alpha)\uparrow x$ ile gösterilir. Benzer şekilde her $\alpha, \beta \in I$ için $x_\alpha \geq x_\gamma$ ve $x_\beta \geq x_\gamma$ koşullarını sağlayan bir $\gamma \in I$ varsa (x_α) ağı *aşağı yönlendirilmiştir* denir ve $(x_\alpha)\downarrow$ şeklinde gösterilir. $(x_\alpha)\downarrow$ ve $\inf\{x_\alpha\} = x$ ise $(x_\alpha)\downarrow x$ ile gösterilir.

2.7. Tanım

E bir Riesz uzayı olmak üzere, $x \leq y$ koşulunu sağlayan $x, y \in E$ elemanları ile tanımlanan $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine *sıralı aralık* denir. E uzayının bir A alt kümesi bir sıralı aralık tarafından kapsanıyorsa, A kümesine *sıra sınırlı küme* denir.

2.8. Tanım

E Riesz uzayında her bir $x \in E^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ ise E ye *Arşimedyan Riesz uzayı* denir.

2.9. Örnek

$\mathbb{R}^2$ koordinat sıralama ile Arşimedyan fakat sözlük (lexicographical) sıralama ile Arşimedyan değildir.

2.10.Teorem

E Riesz uzayının Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul $nv \leq u, \ \forall n \in \mathbb{N}^+$ koşulunu sağlayan $u, v \in E^+$ için $v = 0$ olmasıdır.

Kanıt: **(⇒)**E Riesz uzayı Arşimedyan olsun $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $nv \leq u \Rightarrow v \leq \frac{1}{n}u \downarrow 0$ yazılabilir. $u \in E^+$ ve E Arşimedyan olduğundan $\frac{1}{n}u \downarrow 0$ olur. $v \leq 0$ olmalıdır. Diğer taraftan $v \in E^+$ yani $v \geq 0$ olduğundan (ters simetri özelliğinden) $v = 0$ olur.

$(\Leftarrow)$ $x \in E^+$ keyfi seçelim $\frac{1}{n}x \in E^+$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{1}{n}x \geq 0$ olur. 0, $\{n^{-1}x \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesi için bir alt sınırdır. Bu kümenin keyfi bir alt sınırı y olsun. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}^+, \ n^{-1}x \geq 0, \ n^{-1}x \geq y$ sağlanır. Buradan da $u = y \vee 0 \leq n^{-1}x, \ u = y \vee 0 \geq 0, \ u \in E^+$ ve $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $nu \leq x$ elde edilir. Hipotezden $u = 0$ olmalıdır. Yani $y \vee 0 = 0$ olur. Dolayısıyla $y \leq 0$, $\inf\{n^{-1}x \mid n \in \mathbb{N}^+\} = 0$ bulunur. Dolayısıyla E Arşimedyandır. $\square$

2.11. Tanım

E Riesz uzayının her sıra sınırlı kümesinin E içinde bir supremumu ve infimumu varsa E uzayına *Dedekind tam uzay* denir. Benzer olarak, sıra sınırlı sayılabilir her kümenin E içinde bir supremumu ve infimumu varsa E uzayına σ-*Dedekind tam uzay* denir.

2.12. Örnek

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere ℓ_p uzayları Dedekind tam uzaylardır.

2.13. Örnek

$C[0,1]$ uzayı Dedekind tam değildir çünkü $C[0,1]$ de tanımlı aşağıdaki (f_n) fonksiyon dizisi üstten **1** fonksiyonu ile sınırlı olmasına rağmen supremumu $C[0,1]$ uzayına ait değildir.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -n\left(x - \frac{1}{2}\right) & ,\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} \\ 0 & ,\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \sup f_n = f(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ,\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$0 \leq f_n \uparrow 1$ ve $f_n \in C[0,1]$ olmasına rağmen $\sup f_n \notin C[0,1]$ olduğundan $C[0,1]$ uzayı Dedekind tam Riesz uzayı değildir.

2.14. Tanım

E bir Riesz uzay, $(x_n) \subset E$ bir dizi ve $x \in E$ olsun.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x| \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi varsa (x_n) dizisi x e *sıra yakınsaktır* denir. $(x_n) \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir.

b. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x_m| \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi varsa (x_n) dizisine *sıra Cauchy dizisi* denir.

c. $Y \subset X$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x| \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi var iken $x \in Y$ ise $Y \subset X$ *sıra kapalıdır.*

3. VEKTÖR METRİK UZAYLAR

Birinci bölümde söz edildiği üzere metrik uzayların birçok genelleştirilmesi vardır. Bunlardan bazıları birbirini gerektirdiği gibi, bazıları ise aslında klasik metrik uzaylara homeomorftur. Klasik metrik fonksiyonu reel değerli bir fonksiyondur. Reel sayılar kümesi tam sıralı bir küme olduğu için sıralama ile ilgili bir işlem yapmak kolaydır. Bu bölümde tanımlayacağımız vektör metrik uzaylarda ise metrik fonksiyonu, reel sayılar yerine bir Riesz uzayında değerler alır. Şimdiye kadar tanımlanan genelleştirilmiş metrik uzaylarda, metrik fonksiyonunun değer aldığı küme üzerinde bir topolojik yapıya ihtiyaç duyuldu. Vektör metrik uzaylarda ise böyle bir zorunluluk yoktur. Bu bölüm Çevik ve Altun (2009) ve Çevik (2015) çalışmaları temel alınarak oluşturulmuştur.

3.1. Temel kavramlar ve Özellikler

3.1.1 Tanım

E bir Riesz uzay ve X boştan farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to E$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

Vm1 $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Vm2 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

şartlarını sağlıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde vektör metrik fonksiyon, (X,d,E) üçlüsüne de vektör metrik uzay denir.

Klasik metrik uzaylarda metrik fonksiyonu dört şart sağlaması gerekirken vektör metrik uzaylarda yukarıda verdiğimiz iki şartın sağlanması yeterlidir. Çünkü pozitiflik ve simetri bu iki aksiyomdan çıkarılır. Aşağıdaki teorem bunu verir.

3.1.2 Teorem

(X,d,E) vektör metrik uzay olmak üzere $x, y, z, w \in X$ için aşağıdakiler sağlanır.

i. $d(x,y) \geq 0$

ii. $d(x,y)=d(y,x)$

iii. $\left|d(x,z)-d(y,z)\right|\leq d(x,y)$

iv. $\left|d(x,z)-d(y,w)\right|\leq d(x,y)+d(z,w)$

Kanıt:

$x,y,z,w\in X$ olsun.

i. Vm2 ile $d(x,x)\leq d(x,z)+d(x,z)\Rightarrow 0\leq 2d(x,z)\Rightarrow 0\leq d(x,z)$

ii. Vm2 ile $d(x,y)\leq d(x,x)+d(y,x)\Rightarrow d(x,y)\leq d(y,x)$.

Benzer şekilde, $d(y,x)\leq d(y,y)+d(x,y)\Rightarrow d(y,x)\leq d(x,y)$ elde edilir. Dolayısıyla, $d(x,y)=d(y,x)$ olduğu görülür. □

iii. Her bir $x,y,z\in X$ için Vm2 gereği $d(x,z)\leq d(x,y)+d(z,y)$ olur. Dolayısıyla $d(x,z)-d(z,y)\leq d(x,y)$ sağlanır. Benzer şekilde, $d(y,z)\leq d(y,x)+d(z,x)$ ise $d(y,z)-d(z,x)\leq d(x,y)$ olur. Bu ise $d(x,y)\in E$ elemanının $\{d(x,z)-d(z,y),d(y,z)-d(x,z)\}$ kümesi için bir üst sınır olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\left|d(x,z)-d(z,y)\right|\leq d(x,y)$ elde edilir. □

iv. Her bir $x,y,z,w\in X$ için Vm2 ise $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,w)+d(w,z)$ olur. Dolayısıyla, $d(x,z)-d(y,w)\leq d(x,y)+d(w,z)$ sağlanır. Benzer şekilde, $d(y,w)\leq d(y,x)+d(x,z)+d(z,w)$ ise $d(y,w)-d(x,z)\leq d(x,y)+d(w,z)$ olur. Bu ise $(d(x,y)+d(w,z))\in E$ elemanının $\{(d(x,z)-d(y,w)),(d(y,w)-d(x,z))\}$ kümesi için bir üst sınır olduğunu gösterir. O halde,

$$(d(x,z)\text{-}d(y,w))\vee(d(y,w)-d(x,z))\leq d(x,y)+d(w,z)$$

olacağından, $\left|d(x,z)-d(y,w)\right|\leq d(x,y)+d(z,w)$ elde edilir. □

Vektör metrik uzaylar için aşağıdaki örnekler verilebilir.

3.1.3. Örnek

E bir Riesz uzay olmak üzere $d: E\times E \to E, d(x,y)=|x-y|$ şeklinde tanımlı fonksiyon E üzerinde bir vektör metrik olduğundan (E,d,E) vektör metrik uzaydır. Benzer şekilde E. reel Banach örgüsünün kompleksleştirilmesi E_C üzerinde $d: E_C \times E_C \to E_C$, $d(x_C, y_C)=|x_C - y_C|$ bir vektör metrik tanımlar.

3.1.4. Örnek

$E=\mathbb{R}^2$ koordinat sıralama ile bir Riesz uzayıdır. α, β pozitif reel sayılar olmak üzere,

i. $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to E,\ d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=(\alpha|x_1-x_2|, \beta|y_1-y_2|)$ şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir vektör metrik tanımladığından $(\mathbb{R}^2, d, \mathbb{R}^2)$ bir vektör metrik uzaydır.

ii. $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\alpha|x_1-x_2|+\beta|y_1-y_2|$ şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir vektör metrik, $(\mathbb{R}^2, d, \mathbb{R})$ vektör metrik uzaydır.

$\mathbb{R}^2$ sözlük (lexicographical) sıralama ile bir Riesz uzayı olduğundan yukarıdaki örnekler yeniden düzenlenebilir. Fakat, $\mathbb{R}^2$ ‘nin bu sıralamaya göre Arşimedyan olmadığı unutulmamalıdır.

3.1.5 Örnek

E ve F Riesz uzaylar olmak üzere, “$(e_1, f_1)\le(e_2, f_2) \Leftrightarrow e_1 \le e_2$ ve $f_1 \le f_2$” şeklinde tanımlı koordinat sıralama ile $E\times F$ bir Riesz uzayıdır. $\forall a=(e_1, f_1),\ b=(e_2, f_2)\in E\times F$ için, $d:(E\times F)\times(E\times F)\to(E\times F)$, $d(a,b)=|a-b|=(|e_1-e_2|, |f_1-f_2|)$ ile tanımlı d fonksiyonu bir vektör metriktir.

3.1.6 Örnek

(X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör metrik uzaylar olmak üzere $\forall x,y\in X$ için $\delta: X\times X \to E\times F$ $(x,y)\to\delta(x,y)=(d(x,y),\rho(x,y))$ ile tanımlı δ çift vektör metriktir.

3.1.7 Örnek

Genellersek $(X,d_1,E_1),(X,d_2E_2),...,(X,d_i,E_i)$ vektör metrik uzaylar olmak üzere $d: X\times X\to\prod_{i=1}^{n}E_i \quad (x,y)\to d(x,y)=\big(d_1(x,y),d_2(x,y),...,d_n(x,y)\big)$ ile tanımlı d fonksiyonu vektör metriktir.

3.1.8 Örnek

E bir Riesz uzay, k sonlu bir sayı ve i=1,2,...,k olmak üzere (X_i,d_i,E) vektör metrik uzaylar olsun. $X=X_1\times X_2\times...\times X_k$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde farklı vektör metrikler tanımlanabilir. $x=(x_1,x_2,...,x_k),y=(y_1,y_2,...,y_k)\in X$ için,

$$d_1: X\times X\to E,\quad d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{k}d_i(x_i,y_i)$$

$$d_\infty: X\times X\to E,\quad d_\infty(x,y)=\sup\{d_\infty(x_i,y_i)\,|\,i=1,2,...,k\}$$

şeklinde tanımlanan d_1 ve d_∞ fonksiyonları *X* kartezyen çarpım üzerinde vektör metriktir. Eğer *E* bir Banach örgüsü ve $1<p,q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere Krivine fonksiyonel hesabı ile,

$$d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{k}\big(d_i(x_i,y_i)\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}|a_i|d_i(x_i,y_i):(a_1,a_2,...,a_k)\in\mathbb{R}^k,\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\leq 1\right\}$$

ise $\left(\sum_{i=1}^{k}\big(d_i(x_i,y_i)\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\in E$ olur ve $d_p: X\times X\to E,\ d_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{k}\big(d_i(x_i,y_i)\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu X üzerinde vektör metrik tanımlar.

Klasik metrik uzaylarda metrik fonksiyonu reel değerli olduğu için bu metrik uzaylardaki yakınsaklık, Cauchy dizisi kavramları reel sayıların alışılmış metriğine göre tanımlanır. Vektör metrik uzaylarda ise metrik Riesz uzay değerli olduğu için bu kavramlar Riesz uzayının sıra yapısına göre tanımlanması gerekir.

3.1.9 Tanım

(X,d,E) vektör metrik uzay, $(x_n)\subset X$ bir dizi ve $x\in X$ olsun.

i. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x)\le a_n\downarrow 0$ olacak biçimde $\exists(a_n)\subset E$ dizisi varsa (x_n) dizisi x elemanına *vektörel yakınsak* veya *E-yakınsak* denir ve $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ şeklinde gösterilir.

ii. $\forall n,p\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x_{n+p})\le a_n\downarrow 0$ olacak biçimde $\exists(a_n)\subset E$ dizisi varsa (x_n) dizisine *E-Cauchy* dizisi denir.

iii. (X,d,E) vektör metrik uzayındaki her *E*- Cauchy dizisi *X* uzayında yakınsak ise (X,d,E) vektör metrik uzayına *E-tam uzay* denir.

iv. (X,d,E) vektör metrik uzay ve *X* in boştan farklı bir alt kümesi *Y* olsun. $\forall(x_n)\subset Y$ ve $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ iken $x\in Y$ ise Y kümesine *E-kapalı* küme denir.

3.1.10 Teorem

(X,d,E) vektör metrik uzay $(x_n)\subset X$ ve $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ ise aşağıdaki sonuçlara ulaşabiliriz.

i. $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ ve $(x_n)\xrightarrow{d,E}y$ ise $x=y$ dir.

ii. $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ ise (x_n) 'in her alt dizisi de *x* elemanına *E*- yakınsaktır.

iii. $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ ve $(y_n)\xrightarrow{d,E}y$ ise $d(x_n,y_n)\xrightarrow{o}d(x,y)$

Kanıt:

i. Kabul edelim ki $x\neq y$ için $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ ve $(x_n)\xrightarrow{d,E}y$ olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x)\le a_n\downarrow 0$ ve $d(x_n,y)\le b_n\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n)\subset E^+$ ve $(b_n)\subset E^+$ dizileri vardır. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $d(x,y)\le d(x,x_n)+d(y,y_n)\le a_n+b_n$ ve $(a_n+b_n)\downarrow 0$ olduğundan $x=y$ sağlanır. $\square$

ii. $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \le a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi vardır. Dolayısıyla herhangi bir (x_{n_k}) alt dizisi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_{n_k}, x) \le a_n$ sağlanır. Bu ise $x_{n_k} \xrightarrow{d,E} x$ *olduğunu gösterir.* $\square$

iii. $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ ve $(y_n) \xrightarrow{d,E} y$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \le a_n \downarrow 0$ ve $d(y_n, y) \le b_n \downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n) \subset E^+$ ve $(b_n) \subset E^+$ dizileri vardır. Teorem 3.1.2.(iv) ile $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y) \le a_n + b_n$ elde edilir. $(a_n + b_n) \downarrow 0$ olduğundan $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$ olduğu görülür. $\square$

Bilindiği üzere her metrik uzay bir topolojik uzaydır. Vektör metriklerde de paralel tanımlamalar ile topoloji elde edilebilir. İlk olarak metrik topolojide temel öneme sahip yuvar kavramını vektör metrik uzaylarda verelim.

3.1.11 Tanım

(X, d, E) vektör metrik uzay, $x \in X$ ve $r \in E^+$ için

a. $B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) \prec r \}$ şeklinde tanımlanan kümeye *x* merkezli *r* yarıçaplı açık yuvar denir.

b. $A \subset X$ olmak üzere, eğer $\forall x \in A$ için $\exists r > 0, r \in E$ bulunabilir ve $B(x,r) \subset A$ sağlanıyorsa, A kümesine açık küme denir. Tüm açık alt kümelerin ailesini $\Im_{\mathrm{d,E}}$ ile gösterelim.

$\Im = \{ A \subset X \mid \forall x \in A \textit{ için } \exists r > 0, r \in E^+ \text{ var}\textit{dır öyle ki } B(x,r) \subset A \} \subset P(X)$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Açıktır ki $\varnothing, X \in \Im$ olur. $U, V \in \Im$ olsun. $U \in \Im$ ise $\forall x \in U$ için $B(x, r_1) \subset U$ olacak biçimde $r_1 > 0, r_1 \in E^+$ vardır. $V \in \Im$ ise $\forall x \in V$ için $B(x, r_2) \subset V$ olacak biçimde $r_2 > 0, r_2 \in E^+$ vardır. $r = \min\{r_1, r_2\}$ olmak üzere $B(x,r) \subset U \bigcap V$ elde edilir. Son olarak her $i \in I$ için $U_i \in \Im$ ise her $x \in U_i$ için $B(x, r_i) \subset U_i$ olacak biçimde $r_i > 0, r_i \in E^+$ vardır, dolayısıyla $r = \min\{r_i\}, i \in I$ olmak üzere $B(x,r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ elde edilir. Kolayca gösterilebilir ki $\{B(x,r): x \in X,\ \ r \in E^{+}\}$ ailesi bir topoloji tabanıdır. Ayrıca metrik uzaylarda olduğu gibi kolayca gösterilebilir ki, vektör metrik uzaylar Hausdorff uzaylardır.

3.1.12 Önerme

(X,d,E) vektör metrik uzay ve $a \in X$ olsun. Her bir $x \in B(a,r)$ için öyle bir $q \in E$, $q > 0$ vardır ki $B(x,q) \subseteq B(a,r)$ olur. Yani her açık yuvar açıktır.

Kanıt:

$x \in B(a,r)$ ve $q = r - d(a,x) > 0$ olsun. Herhangi bir $y \in B(x,q)$ alalım. Bu durumda, $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < q + d(x,a) = r$ olur. Yani $y \in B(a,r)$ olacağından $B(p,\varepsilon) \subseteq B(a,r)$ içindeliği elde edilir.

3.2. Vektör Metrik Uzaylarda Sınırlılık ve Yoğun Kümeler

3.2.1 Tanım

(X,d,E) vektör metrik uzay $A \subset X$ ve $\mathrm{A} \neq \emptyset$ olsun. $\sup\{d(x,y) | x, y \in A\}$ değeri varsa bu supremum değerine *A* kümesinin *E- çapı* denir.

$\forall x, y \in A$ için $d(x,y) \leq a$ olacak şekilde *E* Riesz uzayında $\exists a > 0$ sayısı varsa *A* kümesine *E-sınırlı küme* denir. Diğer bir deyişle *A* kümesinin çapı sonlu ise *A* kümesi *E*-sınırlıdır.

3.2.2 Önerme

(X,d,E) vektör metrik uzay $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer *A*'nın elemanlarının x_0'a olan mesafeleri sınırlıysa, o zaman bu özellik x_0 yerine *X*'in her elemanı için geçerlidir. Ayrıca bu durumda her $a,b \in A$ için $d(a,b) \leq r$ eşitsizliğini sağlayan bir $r \in E,\ r \geq 0$ elemanı vardır.

Kanıt:

$\forall a \in A$ ve $r \in E$ için $d(a,x_0) \leq r$ olsun. x_1, *X*'in herhangi bir elemanı olmak üzere $\forall a \in A$ için, $d(a,x_1) \leq d(a,x_0) + d(x_0,x_1) \leq \lambda + d(x_0,x_1)$ olur. Demek ki *A*'nın elemanlarının x_1'e olan uzaklığı $\lambda + d(x_0, x_1)$ sayısından büyük olamaz. Diğer taraftan, a ile b, A 'nın herhangi iki elemanı ise, $d(a,b) \le d(a,x_0) + d(x_0,b) \le 2\lambda$ olur. Yani istenen için $r = 2\lambda$ almak yeterlidir.

3.2.3 Teorem

(X,d,E) vektör metrik uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

a. Her *E*-yakınsak dizi *E*-Cauchy dizisidir.

b. Her *E*-Cauchy dizisi *E*- sınırlıdır.

c. (x_n) *E*-Cauchy dizisi ve (x_{n_k}) alt dizi olmak üzere $(x_{n_k}) \xrightarrow{d,E} x$ ise $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ dir.

d. $(x_n),(y_n)$ *E*- Cauchy dizileri ise $(d(x_n, y_n))$ o-Cauchy dizisidir.

Kanıt:

a. $x_n \xrightarrow{d,E} x \Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) \le a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi vardır. $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \le d(x_n, x) + d(x_{n+p}, x) \le a_n + a_{n+p} \le 2a_n \downarrow 0$ olduğundan (x_n) *E*-Cauchy dizisidir. $\square$

b. (x_n) *E*-Cauchy dizisi ise $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \le a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi vardır. $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \le a_1$ ise (x_n) dizisi *E*-sınırlıdır. $\square$

c. (x_n) *E*- Cauchy dizisi ise $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \le a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E$ dizisi vardır. Diğer taraftan $(x_{n_k}) \xrightarrow{d,E} x$ ise $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $n_k = n + p$ olmak üzere $d(x_{n_k}, x) = d(x_{n+p}, x) \le b_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (b_n) \subset E$ dizisi vardır. $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) = d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \le a_n + b_{n+p} \le (a_n + b_n) \downarrow 0$ olacağından $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ elde edilir. $\square$

d. (x_n) *E*-Cauchy dizisi ise $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \le a_n \downarrow 0$ olacak biçimde

$\exists(a_n)\subset E$ dizisi vardır. (y_n) E-Cauchy dizisi ise $\forall n, p\in\mathbb{N}$ için $d(y_n, y_{n+p})\leq b_n\downarrow 0$ olacak biçimde $\exists(b_n)\subset E$ dizisi vardır.

$\forall n, p\in\mathbb{N}$ için $\left|d(x_n, y_n)-d(x_{n+p}, y_{n+p})\right|\leq d(x_n, x_{n+p})+d(y_n, y_{n+p})\leq a_n\downarrow 0+b_n\downarrow 0$ sağlanır. Buradan $(d(x_n, y_n))$ E 'de *o*-Cauchy dizisidir. □

Metrik uzaylarda yoğun kümeler önemlidir. Çünkü metrik uzayın herhangi bir noktasına yoğun bir kümenin noktaları ile yaklaşılabilir. Dolayısıyla sürekli fonksiyonların bazı özellikleri gibi, uzayın tamamı yerine bu yoğun kümelerle iş yapmak daha avantajlı olabilir.

3.2.4 Tanım

(X, d, E) vektör metrik uzay olmak üzere

a. $\forall x\in X$ *ve* $\forall r\in E, r>0$ için $B(x,r)\cap Y\neq\varnothing(\neq x)$ ise $Y\subset X$, X uzayında $\Im_{\mathrm{d,E}}$ *yoğundur* denir.

b. $\forall x\in X$ için $\exists(x_n)\subset Y$ dizisi vardır öyle ki $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ sağlanıyorsa $Y\subset X$, X uzayında *E-yoğundur* denir.

3.2.5 Önerme

(X, d, E) vektör metrik uzay, $Y\subset X$ ve E Arşimedian Riesz uzayı olsun. Eğer Y $\tau_{d,E}-$yoğun ise Y *E-yoğundur.*

Baire teoremini oluşturmak için vektör metrik topolojinin bazı özelliklerini kullanacağız. Aşağıdaki sonuç Cantor arakesit teoreminin vektör metrik uzaylardaki versiyonudur.

3.2.6 Teorem

(X, d, E) E-tam vektör metrik uzayı ve E-Dedekind tam olsun. Eğer E'nin boştan farklı E-kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisinin X'teki çaplarının limiti sıfır ise bu dizinin arakesiti tek bir noktadan oluşur.

Kanıt:

E-tam vektör metrik uzayının boştan farklı *E*-kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisi (F_n) olsun. Kabul edelim ki *E*-dedekind tam ve $\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0$ olsun. $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ olmak üzere $x, y \in F$ ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(x,y) \le d(F_n)$ sağlanacağından $d(x,y) = 0$ olur. Dolayısıyla $x = y$ elde edilir. Şimdi *F* kümesinin boştan farklı olduğunu gösterelim. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için F_n kümesinden bir x_n elemanı seçelim. Bu şekilde oluşturulan (x_n) dizisi, $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_{n+p}) \le d(F_n)$ sağlanacağından bir *E-Cauchy* dizisidir.

X E-tam olduğundan $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olacak biçimde bir tek $x \in X$ vardır. (F_n) dizisi azalan, her bir F_n kümesi *E*-kapalı ve $x_{n+p} \in F_n$ olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in F_n$ olur. Dolayısıyla $x \in F$ olacağından $F \ne \emptyset$'dir. $\square$

Açık ve yoğun kümelerin oluşturduğu dizilerin arakesitlerinin yine yoğun olduğu topolojik uzaylar *Baire uzayları* olarak adlandırılır. Örneğin her tam metrik uzay ve lokal kompakt Hausdorff uzaylar Baire uzaylarıdır.

Şimdi vektör metrik uzaylar için Baire teoremini verelim.

3.2.7 Teorem

(X, d, E) *E*-tam vektör metrik uzay ve *E* Riesz uzayı Arş*imedyan* ve Dedekind tam ise *X* bir Baire uzayıdır.

Kanıt:

X, *E*-tam vektör metrik uzay ve *E*-Arşimedian olsun. *X*'in $\tau_{d,E} - yoğun$ açık alt kümelerinin bir dizisi (A_n) ve $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. $x \in X$ ve $r > 0$ seçelim. A_1 $\tau_{d,E} - yoğun$ ve açık olduğundan $B(y_1, r_1) \subset B(x, r) \cap A_1$ olacak biçimde $y_1 \in X$ *ve* $0 < r_1 < a$, $a \in E$ vardır.

Benzer olarak A_2 $\tau_{d,E} - yoğun$ ve açık olduğundan $B(y_1, r_1) \cap A_2 \ne \emptyset$ 'dir, dolayısıyla $B(y_2, r_2) \subset B(y_1, r_1) \cap A_2$ olacak biçimde $y_2 \in X$ *ve* $0 < r_2 < \frac{a}{2}$ vardır. Bu işlemi devam ettirdiğimizde Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $B(y_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(y_n, r_n) \cap A_{n+1} \subset B(y_n, r_n)$ ve $r_n < \frac{a}{n}$ olacak

biçimde $(y_n) \subset X$ ile $0 < r_n$, $(r_n) \subset E$ dizileri vardır. Böylece Cantor arakesit teoremiyle $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n)$ kümesinin tek noktadan oluştuğunu elde ederiz. $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n) \subset B(x, r) \cap A$ kapsamasından $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ olduğunu görürüz. $\square$

3.3. Vektör Metrik Uzaylarda Sıra Tamlık

Klasik metrik uzaylarda yapılan ispatlara benzer şekilde $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ vektör metrik uzayının E-tam olduğu gösterilebilir. Yani tam olmayan (X, d, E) vektör metrik E-tam $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ vektör metrik uzayının yoğun bir alt kümesine izometriktir. Bu durumda, $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ vektör metrik uzayına, (X, d, E) vektör metrik uzayının E-tamlaması denir. Bu tamlama izometriler altında tektir.

3.3.1. Tanım

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = \rho(i(x), i(y))$ koşulunu sağlayan $i : X \to Y$ fonksiyonuna *E-izometridir* denir. Ek olarak i örten ise (X, d, E), (Y, ρ, F) vektör metrik uzayları *E-izometriktir* denir.

i izometri fonksiyonunun birebir olduğu kolayca görülebilir. $i(x) = i(y)$ olsun. Bu durumda $\rho(i(x), i(y)) = 0$ olur ki vektör metrik uzay tanımından $d(x, y) = 0$ ve dolayısıyla $x = y$ elde edilir. Bu da bize i fonksiyonunun birebir olduğunu verir.

E, sıra tam Riesz uzay olsun. $(x_n), (y_n)$ X de E-Cauchy dizileri olmak üzere X ‘de “$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$” şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten, $0 = d(x_n, x_n) \xrightarrow{o} 0$ ise $(x_n) \sim (y_n)$ olacağından yansıma özelliği, $d(y_n, x_n) = d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0$ ise $(x_n) \sim (y_n)$ iken $(y_n) \sim (x_n)$ olduğundan simetri özelliği,

$0 \le d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \xrightarrow{o} 0$ eşitsizliğinden $(x_n) \sim (y_n)$ ve $(y_n) \sim (z_n)$ iken $(x_n) \sim (z_n)$ olduğundan geçişme özelliğinin sağlandığını görürüz. Dolayısıyla bu bağıntı ayrık denklik sınıfları oluşturur. Bu denklik sınıflarını $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ ile gösterelim. Yani $\hat{x} = \left\{ (x_n) \subset X \,\middle|\, \forall (y_n) \in \hat{x} \text{ } için \text{ } d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0 \right\}$ olmak üzere $\hat{X} = \left\{ \hat{x} \,\middle|\, x \in X \right\}$ olsun. $\left(\hat{x} \cap \hat{y} = \varnothing \text{ ve } \bigcup_{\hat{x} \in \hat{X}} \hat{x} = \hat{X} \right)$

$\hat{X}$ üzerinde $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \to E,\ \forall \hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ için $d(\hat{x}, \hat{y}) = o - \lim d(x_n, y_n)$ fonksiyonunu tanımlayalım. (x_n) ve (y_n) *E*-Cauchy dizileri için $d(x_n, y_n)$ dizisi *E* ‘de Cauchy dizisi ve *E* Riesz uzayı *E*-sıra tam olduğundan $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} x$ olacak biçimde bir tek $x \in E$ vardır. Bu ise $\hat{d}$ ’nın anlamlı olduğunu verir. $(x_n), (z_n) \in \hat{x}$ ve $(y_n) \in \hat{y}$ olsun. $d(x_n, y_n) \le d(x_n, z_n) + d(y_n, z_n)$ ve $d(z_n, y_n) \le d(z_n, x_n) + d(y_n, x_n)$ eşitsizliklerinden $d(x_n, y_n) = d(y_n, z_n)$ elde edilir. Bu ise $\hat{d}$ ’nın $\hat{x}, \hat{y}$ denklik sınıflarından alınan $(x_n), (y_n)$ temsilci dizilerinden bağımsız olduğunu gösterir. Diğer taraftan limitin tekliğinden $\hat{d}$ iyi tanımlıdır.

3.3.2 Teorem

E sıra tam Riesz uzayı olmak üzere (X, d, E) vektör metrik uzayı ise $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ vektör metrik uzayıdır.

Kanıt:

Vm1. $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$ için $(x_n) \in \hat{x}$ ve $(y_n) \in \hat{y}$ olmak üzere,

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \Leftrightarrow o - \lim d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} 0 \Leftrightarrow (x_n) = (y_n) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

Vm2. $\forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \hat{X}$ için $(x_n) \in \hat{x}, (y_n) \in \hat{y}$ ve $(z_n) \in \hat{z}$ olmak üzere,

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, z_n) + d(y_n, z_n) \Rightarrow o - \lim d(x_n, y_n) \le o - \lim d(x_n, z_n) + o - \lim d(y_n, z_n)$$

olduğundan $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \le \hat{d}(\hat{x}, \hat{z}) + \hat{d}(\hat{y}, \hat{z})$ elde edilir. □

Diğer taraftan, $i: X \to \hat{X}$, $i(x) = (x, x, ...)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm ile (X, d, E) ve $(i(X), \hat{d}, E)$ vektör metrik uzayları E-izometriktir. Gerçekten, $\hat{d}(i(x), i(y)) = \hat{d}((x, x, ...), (y, y, ...)) = o - \lim d(x, y) = d(x, y)$ sağlanır.

3.3.3 Lemma

E sıra tam Riesz uzayı olmak üzere (X, d, E) vektör metrik uzayı ise $(i(X), \hat{d}, E)$ vektör metrik uzayı $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ içinde E-yoğundur.

Kanıt:

$\hat{x} \in \hat{X}$ olsun. $(x_n) \in \hat{x}$ E-Cauchy dizisini alalım. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_0}, x_{n_0}, ...)$ ile üretilmiş denklik sınıfı olan $i(x_{n_0}) \in i(X)$ elemanını düşünelim. (x_n), X 'de E-Cauchy dizisi olduğundan $\forall p \in \mathbb{N}$ için $d(x_{n_0}, x_{n_0+p}) \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $\exists (a_n) \subset E^+$ dizisi vardır. Diğer taraftan $\forall n \in \mathbb{N}$ elemanı için $n = n_0 + p$ olacak biçimde $p \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $\hat{d}(i(x_{n_0}), \hat{x}) = o - \lim d(x_{n_0}, x_n) \leq o - \lim d(x_{n_0}, x_{n+p}) \leq a_{n_0}$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\hat{d}(i(x_k), \hat{x}) \leq a_n \downarrow 0$ olduğundan $i(x_n) \xrightarrow{\hat{d}, E} \hat{x}$ olur. $\square$

3.3.4. Teorem

E sıra tam Riesz uzayı olmak üzere (X, d, E) vektör metrik uzayı tarafından üretilen E-tam vektör metrik uzayı $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ izometriler altında tektir.

Kanıt:

Öncelikle $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ E-tam olduğunu görelim. $(\hat{x}_n) \subset \hat{X}$ bir E-Cauchy dizisi olsun. $i(X), \hat{X}$ da E-yoğun olduğundan her bir $(\hat{x}_n) \subset \hat{X}$ için $\exists i(y_n) \subset i(X)$ vardır ve $\hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) \leq a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n) \subset E$ dizisi vardır. Diğer taraftan $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d(y_n, y_{n+p}) = \hat{d}(i(y_n), i(y_{n+p})) \leq \hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_{n+p}) + \hat{d}(\hat{x}_{n+p}, i(y_{n+p})) \leq 3a_n \downarrow 0$ olur. Bu da bize (y_n) dizisinin X 'de E-Cauchy dizisi olduğunu verir. $i: X \to \hat{X}$ dönüşümü izometri olduğundan $i(y_n), \hat{X}$ ’da E-Cauchy dizisi olur. $\hat{y} = \{(z_n) | \forall (y_n) \in \hat{y} \text{ için } d(z_n, y_n) \xrightarrow{o} 0\} = \langle (y_n) \rangle = i(y_n)$ olmak üzere $\hat{d}(i(y_n), \hat{y}) = \hat{d}(\langle y_n, y_n, ... \rangle, \langle y_n, y_n, ... \rangle) \xrightarrow{o} 0$ sağlanacağından $i(y_n) \xrightarrow{\hat{d},E} \hat{y}$ olur. $\forall n \in \mathbb{N}$ elemanı için $\hat{d}(\hat{y}, \hat{x}_n) \le \hat{d}(\hat{y}, i(y_n)) + \hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n)$ eşitsizliği geçerlidir. Buradan $\hat{d}(\hat{y}, \hat{x}_n) \le \hat{d}(\hat{y}, i(y_n)) + \hat{d}(i(y_n), \hat{x}_n) \le a_n + b_n$ ve $a_n \downarrow 0, b_n \downarrow 0$ olacak biçimde $a_n \subset E, b_n \subset E$ dizileri vardır. Her bir $(\hat{x}_n) \subset \hat{X}$ Cauchy dizisi için $\exists \hat{y} \in \hat{X}$ vardır $\hat{x}_n \xrightarrow{\hat{d},E} \hat{y}$ olur. O halde $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ *E*-tam vektör metriktir.

Son olarak $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ tamlamasının izometriler altında tek olduğunu gösterelim. $J : X \to \tilde{X}$ *E*-izometri ve $J(X), \tilde{X}$ da *E*-yoğun olacak biçimde başka bir *E*-tam vektör metrik uzay $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ olsun. $(\hat{X}, \hat{d}, E)$ ve $(\tilde{X}, \tilde{d}, E)$ tamlamalarının izometrik denk tamlamalar olduğunu görelim. $\forall x \in X$ için $h_0 : i(X) \to J(X)$, $h_0(i(x)) = j(x)$ dönüşümünü tanımlayalım. Açıktır ki $i(X)$ ve $J(X)$ *E*-izometriktir. $\forall x, y \in X$ için *J*, *E*-izometri olduğundan $\tilde{d}(h_0(i(x)), h_0(i(y))) = \tilde{d}(j(x), j(y)) = \hat{d}(i(x), i(y))$ olur. Buradan $i(X)$ ve $j(X)$ *E*-izometriktir. $z \in j(X)$ için $\exists x \in X$ vardır öyle ki $z \in j(x) = h_0(i(x))$ ve $i(x) \in \hat{X}$ yani $\forall z \in j(X)$ için $\exists i(x) \in i(X)$ vardır ve $h_0(i(x)) = z$ dir. Buradan h_0 örtendir. $\forall y \in i(X)$ için $\exists x \in X$ vardır öyle ki $y = i(x)$ *J* iyi tanımlı olduğundan $\forall x \in X$ için $j(x) \in \tilde{X}$ ve $\forall y \in i(x)$ için $h_0(y) \in \tilde{X}$. Buradan h_0 anlamlıdır. $y_1, y_2 \in i(X)$ ve $y_1 = y_2$ olsun. $y_1 = i(x_1), y_2 = i(x_2)$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in X$ vardır. i birebir olduğundan $i(x_1) = i(x_2)$ ise $x_1 = x_2 j$ iyi tanımlı olduğundan $j(x_1) = j(x_2) \Rightarrow h_0(i(x_1)) = h_0(i(x_2)) \Rightarrow h_0(y_1) = h_0(y_2)$ Bu da h_0 fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu verir. $\hat{x} \in \hat{X}$ olsun $i(X)$, $\hat{X}$’da E-yoğun olduğundan $i(x_n) \xrightarrow{\hat{d},E} \hat{x}$ olacak biçimde $i(x_n) \subset i(X)$ E-Cauchy dizisi vardır. h_0 *E*-izometri olduğundan $h_0(i(x_n)) = j(x_n)$ $\tilde{X}$ da E-Cauchy dizisi vardır. ve $\tilde{X}$ *E*-tam olduğundan $j(x_n) \xrightarrow{\tilde{d},E} \tilde{x}$ olacak biçimde $\tilde{x} \in \tilde{X}$ vardır. $h : \hat{X} \to \tilde{X}$, $h(\hat{x}) = \tilde{x}$ olarak tanımlayalım. $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$

olsun $i(X)$, $\hat{X}$'da E-yoğun olduğundan $i(x_n)\xrightarrow{\hat{d},E}\hat{x}$ ve $i(y_n)\xrightarrow{\hat{d},E}\hat{y}$ olacak biçimde $i(x_n), i(y_n)\subset i(X)$ E-Cauchy dizileri vardır. $(x_n),(y_n)$ X de E-Cauchy dizileri dolayısıyla $j(x_n), j(y_n)$ $j(X)$ de E-Cauchy dizileridir. $\tilde{X}$ E-tam olduğundan $\exists \tilde{x},\tilde{y}\in\tilde{X}$ vardır öyle ki $j(x_n)\xrightarrow{\tilde{d},E}\tilde{x}, j(y_n)\xrightarrow{\tilde{d},E}\tilde{y}$ sağlanır. O halde $j(x_n)\xrightarrow{\tilde{d},E}h(\hat{x}), j(y_n)\xrightarrow{\tilde{d},E}h(\hat{y})$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\tilde{d}\left(h(\hat{x}),h(\hat{y})\right)=o-\lim\tilde{d}\left(j(x_n), j(y_n)\right)=o-\lim\tilde{d}\left(h_0\left(i(x_n)\right),h_0\left(i(y_n)\right)\right)$$

$$=o-\lim\hat{d}\left(\left(i(x_n)\right),\left(i(y_n)\right)\right)=\hat{d}\left(\hat{x},\hat{y}\right)$$

olur. Yani h metrik koruyandır. $\tilde{x}\in\tilde{X}$ seçelim $j(X)$, $\tilde{X}$'da E-yoğun olduğundan $j(x_n)\xrightarrow{\tilde{d},E}\tilde{x}$ olacak biçimde $j(x_n)\subset j(X)$ E-Cauchy dizisi vardır. $i(X), j(X)$ E-izometrik olduğundan $i(x_n)$ $\hat{X}$ da E-Cauchy dizisidir.O halde $\hat{X}$ tam olduğu için $i(x_n)\xrightarrow{\hat{d},E}\hat{x}$ olacak biçimde $\hat{x}\in\hat{X}$ elemanı vardır. h E-izometrik olduğundan $h\left(i(x_n)\right)\xrightarrow{\tilde{d},E}h(\hat{x})$ olur. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\tilde{d}\left(\tilde{x},h(\hat{x})\right)\leq\tilde{d}\left(\tilde{x}, j(x_n)\right)+\tilde{d}\left(j(x_n),h(\hat{x})\right)\leq a_n+b_n$ olacak biçimde E 'de $(a_n)\downarrow 0,(b_n)\downarrow 0$ dizileri vardır. Dolayısıyla, $\tilde{x}=h(\hat{x})$ olur. $\square$

4. VEKTÖR METRİK UZAYLARDA SÜREKLİLİK

Bu bölümde vektör metrik uzayları üzerinde tanımlı fonksiyonların sürekliliği incelenecektir. Metrik uzaylardaki süreklilik kavramından daha genel olan süreklilik çeşitleri ile vektör metrik uzaylarda karşılaşmamız doğal olacaktır. Çünkü vektör metrik uzaylarda tanımlanan sürelilik bir topolojik özelliğinden ziyade Riesz uzayının sıra yapısı ile ilgilidir. Aşağıda verilen tanımlar metrik uzaylardaki sırasıyla süreklilik ve dizisel süreklilik tanımlarına benzerdir. Ayrıca sürekli fonksiyonların genişlemeleri, sürekli fonksiyonlar uzayları ve vektör metriklerde kompaktlık bu bölümde yer almıştır. Bu bölüm Çevik (2014) ve Petre (2012) çalışmaları esas alınmıştır.

4.1. Vektörel Süreklilik ve Topolojik Süreklilik

4.1.1 Tanım

- (X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. $\forall b>0$, $b\in F$ için $d(x,y)<a$ olduğunda $\rho\big(f(x),f(y)\big)<b$ olacak şekilde $\exists a>0$, $a\in E$ varsa, f fonksiyonu, $x\in X$ noktasında *topolojik süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında topolojik sürekli ise f fonksiyonu X uzayında topolojik süreklidir denir.

- $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ olacak biçimdeki $\forall(x_n)\subset X$ dizisi için $f(x_n)\xrightarrow{\rho,F}f(x)$ sağlanıyorsa f fonksiyonu $x\in X$ noktasında *vektörel süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında vektörel sürekli ise f fonksiyonu X uzayında vektörel süreklidir denir.

Aşağıdaki teorem vektörel süreklilik ile topolojik süreklilik arasındaki ilişkiyi verir.

4.1.2 Teorem

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar ve F Arşimedyan olsun. $f:X\to Y$ topolojik sürekli ise vektörel süreklidir.

Kanıt:

f, *X* üzerinde topolojik sürekli olduğundan, $\forall b>0$, $b\in F$ için $d(x,y)<a$ olduğunda $\rho\big(f(x),f(y)\big)<b$ olacak şekilde $\exists a=a(b,y)\in E$ vardır. Yani *f* topolojik sürekli olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\frac{1}{n}b\in F^{+}$ için $b_n=b_n\left(\frac{1}{n}b,x_n\right)\in E^{+}$ vardır ve $d(x_n,x)<b_n\in E^{+}$ iken $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\le\frac{1}{n}b\downarrow 0$ sağlanır. O halde $d(x_n,x)\le a_n\wedge b_n\le a_n\downarrow 0$ iken $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\le\frac{1}{n}b$ sağlanır. *F* Arşimedyan olduğundan $\frac{1}{n}b\downarrow 0$ olur. Buradan da $(x_n)\xrightarrow{d,E}x\in X$ iken $f(x_n)\xrightarrow{\rho,F}f(x)\in Y$ sağlandığından *f* vektörel süreklidir. □

4.1.3 Teorem

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar ve $f:X\to Y$ fonksiyon olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

a. F Riesz uzayı $\sigma-$Dedekind tam ve *f* vektörel sürekli ise $d(x_n,x)\downarrow 0$ iken $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\downarrow 0$ olur.

b. E Riesz uzayı $\sigma-$Dedekind tam ve $d(x_n,x)\downarrow 0$ iken $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\downarrow 0$ ise *f* vektörel süreklidir.

c. E ve F Riesz uzayları $\sigma-$Dedekind tam olsun. *f* 'in vektörel sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $d(x_n,x)\downarrow 0$ iken $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\downarrow 0$ olmasıdır

Kanıt:

a. $d(x_n,x)\downarrow 0$ olduğundan $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ sağlanır. Dolayısıyla, *f* vektörel sürekli olduğundan $(x_n)\xrightarrow{d,E}x$ iken $f(x_n)\xrightarrow{\rho,F}f(x)$ olur. Yani, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\le b_n\downarrow 0$ olacak biçimde $(b_n)\subset F$ dizisi vardır. F $\sigma-$Dedekind tam olduğundan, alttan sınırlı her alt kümesi *F* içinde bir infumuma sahiptir. Yani $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\downarrow 0$ sağlanır. □

b. E $\sigma-$Dedekind tam ve $d(x_n,x)\downarrow 0$ iken $\rho\big(f(x_n),f(x)\big)\downarrow 0$ olsun.

Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} f(x)$ yazılabilir. Bu da bize f 'in vektörel sürekli olduğunu gösterir. $\square$

c. E ve F $\sigma-$Dedekind tam olsun. $f: X \to Y$ vektörel sürekli ise $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} f(x)$ olur. Yani $d(x_n, x) \le a_n$ olacak biçimde $(a_n) \downarrow 0 \subset E$ dizisi var iken $\rho(f(x_n), f(x)) \le b_n$ olacak biçimde $(b_n) \downarrow 0 \subset F$ dizisi vardır. E ve F $\sigma-$Dedekind tam olduğundan alttan sınırlı her alt kümenin bir infumumu vardır. Dolayısıyla $d(x_n, x) \downarrow 0$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \downarrow 0$ sağlanır. $\square$

Şimdi aşağıdaki vektör metrikler ile tanımladığımız metrik fonksiyonunun vektörel sürekli olduklarını gösterelim.

4.1.4 Örnek

(X, d, E) vektör metrik uzay olsun. $z = (x_1, y_1),\ w = (x_2, y_2) \in X \times X$ olmak üzere $\tilde{d}: (X \times X) \times (X \times X) \to E$, $\tilde{d}(z, w) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$ fonksiyonu ile $(X \times X, \tilde{d}, E)$ ve, $x, y \in E$ olmak üzere $d_E: E \times E \to E$, $d_E(x, y) = |x - y|$ (E, d_E, E) vektör metrik uzaydır. Buna göre $d: (X \times X, \tilde{d}, E) \to (E, d_E, E)$ fonksiyonu vektörel sürekli olduğunu gösterelim. $(z_n) = (x_n, y_n) \subset X \times X$ dizisi ve $z = (x, y) \in X \times X$ elemanı için $z_n \xrightarrow{\tilde{d},E} z$ olsun. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\tilde{d}(z_n, z) \le a_n \downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n) \subset E$ dizisi vardır. $\tilde{d}(z_n, z) = d(x_n, x) + d(y_n, y) \le a_n \downarrow 0$ olduğundan $d(x_n, x) \le a_n \downarrow 0$ ve $d(y_n, y) \le a_n \downarrow 0$ sağlanır. Ayrıca $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y_n, y) \le 2a_n \downarrow 0$ olduğundan benzer olarak $|d(z_n) - d(z)| \le 2a_n \downarrow 0$ yazılabilir. Bu ise bize $d(z_n) \xrightarrow{d_E,E} d(z)$ olduğunu verir.

4.1.5 Tanım

(X, d, E) vektör metrik uzay ve X in boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. $\forall (x_n) \subset Y$ ve $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ iken $x \in Y$ ise Y kümesine *E-kapalı küme* denir.

4.1.6 Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f: X \to Y$ vektörel sürekli fonksiyon olsun.

Bu durumda, $B \subset Y$ F-kapalı alt küme ise $f^{-1}(B) \subset X$, $E-$kapalıdır.

Kanıt:

$(x_n) \subset f^{-1}(B)$ ve $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ olsun. f vektörel sürekli olduğundan $(x_n) \xrightarrow{d,E} x$ ise $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} f(x)$ sağlanır. $B \subset Y$, $F-kapalı$ ve $f(x_n) \subset B$ olduğundan $f(x) \in B$, dolayısıyla $x \in f^{-1}(B)$ elde edilir. Yani $f^{-1}(B) \subset X$ $E-$kapalıdır. □

E bir Riesz uzay, k sonlu bir sayı ve i=1,2,...,k olmak üzere (X_i, d_i, E) vektör metrik uzaylar olsun. $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde farklı vektör metrikler tanımlanabilir. $x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in X$ için,

$$d_1 : X \times X \to E, \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x_i, y_i)$$

$$d_\infty : X \times X \to E, \quad d_\infty(x, y) = \sup\{d_\infty(x_i, y_i) | i = 1, 2, ..., k\}$$

şeklinde tanımlanan d_1 ve d_∞ fonksiyonları X kartezyen çarpım üzerinde vektör metriktir. Eğer E bir Banach örgüsü ve $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere Krivine fonksiyonel hesabı ile

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} (d_i(x_i, y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{k} |a_i| d_i(x_i, y_i) : (a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k, \sum_{i=1}^{k} |a_i|^q \leq 1 \right\} \text{ ise}$$

$\left(\sum_{i=1}^{k} (d_i(x_i, y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}} \in E$ olur ve $d_p : X \times X \to E$, $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} (d_i(x_i, y_i))^p \right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu X üzerinde vektör metrik tanımlar.

E ve F iki Riesz uzay ise $(e_1, f_1), (e_2, f_2) \in E \times F$ olmak üzere $(e_1, f_1) \leq (e_2, f_2) \Leftrightarrow e_1 \leq e_2,\ f_1 \leq f_2$ sıralaması ile $E \times F$ 'de bir Riesz uzaydır. Diğer taraftan, $d_{E \times F} : (E \times F) \times (E \times F) \to (E \times F)$, $d_{E \times F}((e_1, f_1), (e_2, f_2)) = (|e_1 - e_2|, |f_1 - f_2|)$ fonksiyonu $E \times F$ üzerinde bir vektör metrik tanımlar. Bu metrik çift mutlak değer vektör metriği olarak adlandırılır. Bu metriğin biraz daha genel halini şu şekilde tanımlayabiliriz.

Kabul edelim ki (X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör metrik uzaylar olsun. Bu durumda $\delta : X\times X \to E\times F,\ \ \delta(x,y)=(d(x,y),\rho(x,y))$ bir vektör metriktir.

Bölüm 3.1 de verilen vektör metrik örneklerini kullanarak bazı vektörel süreklilik örnekleri verelim.

4.1.7 Örnek

(X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $f:(X,d,E)\to(E,d_E,E)$ ve $g:(X,\rho,F)\to(F,d_F,F)$ vektörel sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $\forall x\in X$ için $h:(X,\delta,E\times F)\to(E\times F,d_{E\times F},E\times F),\ h(x)=(f(x),g(x))$ fonksiyonunun vektörel sürekli olduğunu gösterelim. kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{\delta,E\times F} x$ olsun Buradan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\delta(x_n,x)=(d(x_n,x),\rho(x_n,x))\le(a_n,b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n,b_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. Bu ise bize $d(x_n,x)\le a_n\downarrow 0$ ve $\rho(x_n,x)\le b_n\downarrow 0$ olduğunu verir. O halde $x_n \xrightarrow{d,E}$ x ve $x_n \xrightarrow{\rho,F} x$ sağlanır. f ve g vektörel sürekli olduğundan $f(x_n)\xrightarrow{d_E,E} f(x)$ ve $g(x_n)\xrightarrow{d_F,F} g(x)$'dir. Buradan $d_E(f(x_n),f(x))=|f(x_n)-f(x)|\le c_n\downarrow 0$ ve $d_F(g(x_n),g(x))=|g(x_n)-g(x)|\le d_n\downarrow 0$ olacak biçimde $(c_n),(d_n)\subset E$ dizileri vardır. Dolayısıyla,

$$d_{E\times F}(h(x_n),h(x))=d_{E\times F}((f(x_n),g(x_n)),(f(x),g(x)))=(|f(x_n)-f(x)|,|g(x_n)-g(x)|)\le(c_n,d_n)\downarrow 0$$

sağlanır. $(c_n,d_n)\subset E\times F$ .olduğundan $h(x_n)\xrightarrow{d_{E\times F},E\times F} h(x)$ elde edilir.

4.1.8 Örnek

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar olsun. $z=(x_1,y_1),w=(x_2,y_2)\in X\times Y$ olmak üzere $\pi:(X\times Y)\times(X\times Y)\to E\times F,\ \ \pi(z,w)=(d(x_1,x_2),\rho(y_1,y_2))$ bir vektör metriktir. Dolayısıyla, $(X\times Y,\pi,E\times F)$ vektör metrik uzaydır (Çarpım vektör metrik). $(X\times Y,\pi,E\times F)$ vektör metrik uzayı göz önüne alalım. $X\times Y$ üzerinde tanımlı, sırasıyla X ve Y değerli, projeksiyon operatörler olmak üzere $P_x : X\times Y\to X$, $P_x(x,y)=x$ ve $P_y : X\times Y\to Y$, $P_y(x,y)=y$ ile tanımlı projeksiyon dönüşümleri vektörel süreklidir.

4.1.9 Teorem

Herhangi bir vektör metrik uzay (Z,δ,G) olmak üzere, $f:(Z,\delta,G)\to(X\times Y,\pi,E\times F)$ fonksiyonunun vektörel sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, $P_x : X\times Y\to X$, $P_x(x,y)=x$ ve $P_y : X\times Y\to Y$, $P_y(x,y)=y$ ile tanımlı projeksiyon dönüşümleri olmak üzere $P_x\circ f$ ve $P_y\circ f$ fonksiyonlarının vektörel sürekli olmasıdır.

Kanıt:

$(\Rightarrow)$ f vektörel sürekli olsun. $(z_n)\subset Z$ dizisi ve $z\in Z$ elemanı için $z_n\xrightarrow{\delta,G}z$ ise $f(z_n)=(x_n,y_n)\xrightarrow{\pi,E\times F}f(z)=(x,y)$ sağlanır. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\delta(z_n,z)\le a_n\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n)\subset G$ dizisi var iken. $\pi\big(f(z_n),f(z)\big)=\pi\big((x_n,y_n),(x,y)\big)\le(b_n,c_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(b_n,c_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. Böylece $z_n\xrightarrow{\delta,G}z$ iken $(P_x\circ f)(z_n)=x_n\xrightarrow{d_E,E}x$ ve $(P_y\circ f)(z_n)=y_n\xrightarrow{d_F,F}y$ sağlanır.

$(\Leftarrow)$ $P_x\circ f$ ve $P_y\circ f$ fonksiyonları vektörel sürekli olsun. $(z_n)\subset Z$ dizisi ve $z\in Z$ elemanı için $z_n\xrightarrow{\delta,G}z$ ise $(P_x\circ f)(z_n)=x_n\xrightarrow{d_E,E}x$ ve $(P_y\circ f)(z_n)=y_n\xrightarrow{d_F,F}y$ sağlanır. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\delta(z_n,z)\le a_n\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n)\subset G$ dizisi var iken. $\pi\big(f(z_n),f(z)\big)=\pi\big((x_n,y_n),(x,y)\big)\le(b_n,c_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(b_n,c_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. Böylece $z_n\xrightarrow{\delta,G}z$ iken $(P_x\circ f)(z_n)=x_n\xrightarrow{d_E,E}x$ ve $(P_y\circ f)(z_n)=y_n\xrightarrow{d_F,F}y$ sağlanır. $\square$

4.1.10 Örnek

(X,d,E) ve (Y,ρ,E) vektör metrik uzaylar, $f:(X,d,E)\to(E,d_E,E)$ ve $g:(Y,\rho,E)\to(E,d_E,E)$ vektörel sürekli fonksiyonlar olsun. $h:(X\times Y,\pi,E\times E)\to(E,d_E,E)$, $h(x,y)=\left|f(x)-g(y)\right|$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu vektörel sürekli olduğunu gösterelim. $(x_n,y_n)\subset X\times Y\xrightarrow{\pi,E\times E}(x,y)\in X\times Y$ sağlansın. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\pi\big((x_n,y_n),(x,y)\big)=\big(d(x_n,x),\rho(y_n,y)\big)\le(a_n,b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n,b_n)\subset E\times E$ dizisi vardır. Dolayısıyla, $x_n\xrightarrow{d,E}x$ ve $y_n\xrightarrow{\rho,E}$y sağlanır. f ve g

vektörel sürekli olduğundan $f(x_n) \xrightarrow{d_E, E} f(x)$ ve $g(y_n) \xrightarrow{d_E, E} g(y)$ sağlanır. O halde, $|f(x_n) - f(x)| \leq c_n \downarrow 0$ ve $|g(y_n) - g(y)| \leq d_n \downarrow 0$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$$d_E\left(h(x_n, y_n), h(x, y)\right) = d_E\left(|f(x_n) - g(y_n)|, |f(x) - g(y)|\right)$$

$$= \left\| f(x_n) - g(y_n) \right| - \left| f(x) - g(y) \right\| = \left\| f(x_n) - g(y_n) \right| - \left| g(y) - f(x) \right\|$$

$$\leq \left| f(x_n) - g(y_n) + g(y) - f(x) \right| \leq \left| f(x_n) - f(x) \right| + \left| g(y_n) - g(y) \right| \leq (c_n, d_n) \downarrow 0$$

elde edilir. Buradan da, $h(x_n, y_n) \xrightarrow{d_E, E} h(x, y)$ yazılabileceğinden h fonksiyonu vektörel süreklidir.

4.1.11.Örnek

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar, $f : (X, d, E) \to (E, d_E, E)$.ve $g : (Y, \rho, F) \to (F, d_F, F)$ vektörel sürekli fonksiyonlar olsun. $\forall (x, y) \in X \times Y$ için $h : (X \times Y, \pi, E \times F) \to (E \times F, d_{E\times F}, E \times F)$ $(x, y) \to h(x, y) = (f(x), g(y))$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu vektörel süreklidir. $(x_n, y_n) \subset X \times Y \xrightarrow{\pi, E\times F} (x, y) \in X \times Y$ sağlansın. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\pi((x_n, y_n), (x, y)) = (d(x_n, x), \rho(y_n, y)) \leq (a_n, b_n) \downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n, b_n) \subset E \times F$ dizisi vardır. Dolayısıyla, $x_n \xrightarrow{d, E} x$ ve $y_n \xrightarrow{\rho, F}$ y sağlanır. f ve g vektörel sürekli olduğundan $f(x_n) \xrightarrow{d_E, E} f(x)$ ve $g(y_n) \xrightarrow{d_F, F} g(y)$ sağlanır. Buradan $|f(x_n) - f(x)| \leq c_n \downarrow 0$ ve $|g(y_n) - g(y)| \leq d_n \downarrow 0$ olacak şekilde $(c_n, d_n) \subset E \times F$ dizisi vardır. Dolayısıyla,

$$d_{E\times F}\left(h(x_n, y_n), h(x, y)\right) = d_{E\times F}\left(\left(f(x_n), g(y_n)\right), \left(f(x), g(y)\right)\right)$$

$$= \left(|f(x_n) - f(x)|, |g(y_n) - g(y)|\right) \leq (c_n, d_n) \downarrow 0$$

elde edilir.

Yukarıda verilen örnekler göz önüne alındığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

4.1.12 Sonuç

a. $f:(X,d,E)\to(Y,\eta,G)$ ve $g:(X,\rho,F)\to(Z,\xi,H)$ vektörel sürekli fonksiyonlar olmak üzere $h:(X,\delta,E\times F)\to(Y\times Z,\pi,G\times H)$, $h(x)=(f(x),g(x))$ fonksiyonu vektörel süreklidir.

b. G bir Riesz uzay ve $f:(X,d,E)\to(G,d_G,G)$ ve $g:(Y,\rho,F)\to(G,d_G,G)$ vektörel sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $h:(X\times Y,\pi,E\times F)\to(G,d_G,G)$ $(x,y)\to h(x,y)=|f(x)-g(y)|$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu vektörel süreklidir.

c. G ile H birer Riesz uzayları ve $f:(X,d,E)\to(Z,\eta,G)$ ile $g:(Y,\rho,F)\to(W,\xi,H)$ vektörel sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $h:(X\times Y,\pi,E\times F)\to(Z\times W,\pi,G\times H)$, $h(x,y)=(f(x),g(y))$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu vektörel süreklidir.

Kanıt:

a. Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{\delta,E\times F} x$ olsun Buradan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\delta(x_n,x)=(d(x_n,x),\rho(x_n,x))\le(a_n,b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n,b_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. Bu ise bize $d(x_n,x)\le a_n\downarrow 0$ ve $\rho(x_n,x)\le b_n\downarrow 0$ olduğunu verir. O halde $x_n \xrightarrow{d,E}$ x ve $x_n \xrightarrow{\rho,F} x$ sağlanır. f ve g vektörel sürekli olduğundan $f(x_n)\xrightarrow{\eta,Y} f(x)$ ve $g(x_n)\xrightarrow{\varepsilon,Z} g(x)$'dir. Buradan $\eta(f(x_n),f(x))\le c_n\downarrow 0$ ve $\varepsilon(g(x_n),g(x))\le d_n\downarrow 0$ olacak biçimde $(c_n)\subset G,(d_n)\subset H$ dizileri vardır. Dolayısıyla, $\pi(h(x_n),h(x))=\pi((f(x_n),g(x_n)),(f(x),g(x)))\le(c_n,d_n)\downarrow 0$ sağlanır. $(c_n,d_n)\subset G\times H$ .olduğundan $h(x_n)\xrightarrow{\pi,G\times H} h(x)$ elde edilir.

b. $(x_n,y_n)\subset X\times Y \xrightarrow{\pi,E\times F} (x,y)\in X\times Y$ sağlansın. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\pi((x_n,y_n),(x,y))=(d(x_n,x),\rho(y_n,y))\le(a_n,b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n,b_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. Dolayısıyla, $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ve $y_n \xrightarrow{\rho,F}$ y sağlanır. *f* ve *g* vektörel sürekli olduğundan

$f(x_n)\xrightarrow{d_G,G} f(x)$ ve $g(y_n)\xrightarrow{d_G,G} g(y)$ sağlanır. O halde, $|f(x_n)-f(x)|\le c_n\downarrow 0$ ve $|g(y_n)-g(y)|\le d_n\downarrow 0$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$$d_G\left(h(x_n,y_n),h(x,y)\right)=d_G\left(\left|f(x_n)-g(y_n)\right|,\left|f(x)-g(y)\right|\right)$$

$$=\Big|\,\left|f(x_n)-g(y_n)\right|-\left|f(x)-g(y)\right|\,\Big|=\Big|\,\left|f(x_n)-g(y_n)\right|-\left|g(y)-f(x)\right|\,\Big|$$

$$\le\left|f(x_n)-g(y_n)+g(y)-f(x)\right|\le\left|f(x_n)-f(x)\right|+\left|g(y_n)-g(y)\right|\le(c_n,d_n)\downarrow 0$$

elde edilir. Buradan da, $h(x_n,y_n)\xrightarrow{d_G,G} h(x,y)$ yazılabileceğinden h fonksiyonu vektörel süreklidir.

c. $(x_n,y_n)\subset X\times Y\xrightarrow{\pi,E\times F}(x,y)\in X\times Y$ sağlansın. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $\pi\left((x_n,y_n),(x,y)\right)=\left(d(x_n,x),\rho(y_n,y)\right)\le(a_n,b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n,b_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. Dolayısıyla, $x_n\xrightarrow{d,E}x$ ve $y_n\xrightarrow{\rho,F}y$ sağlanır. *f* ve *g* vektörel sürekli olduğundan $f(x_n)\xrightarrow{\eta,G} f(x)$ ve $g(y_n)\xrightarrow{\xi,H} g(y)$ sağlanır. Buradan $\eta\left(f(x_n),f(x)\right)\le c_n\downarrow 0$ ve $\xi\left(g(y_n),g(y)\right)\le d_n\downarrow 0$ olacak şekilde $(c_n,d_n)\subset G\times H$ dizisi vardır. Dolayısıyla, $\pi\left(h(x_n,y_n),h(x,y)\right)=\pi\left(\left(f(x_n),g(y_n)\right),\left(f(x),g(y)\right)\right)\le(c_n,d_n)\downarrow 0$ elde edilir.

4.1.13 Teorem

$(X\times Y,\pi,E\times F)$ çarpım vektör metrik uzayı olmak üzere, $(z_n)=(x_n,y_n)\subset X\times Y$ dizisi ve $z=(x,y)\in X\times Y$ elemanı için $z_n\xrightarrow{\pi,E\times F}z$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x_n\xrightarrow{d,E}x$ ve $y_n\xrightarrow{\rho,F}y$ olmasıdır.

Kanıt:

Kabul edelim ki $z_n\xrightarrow{\pi,E\times F}z$ olsun. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\pi(z_n,z)=\pi\left((x_n,y_n),(x,y)\right)=\left(d(x_n,x),\rho(y_n,y)\right)\le(a_n,b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n,b_n)\subset E\times F$ dizisi vardır. O halde çarpım uzayı üzerindeki sıralama gereği,

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x)\le a_n\downarrow 0$ ve $\rho(y_n,y)\le b_n\downarrow 0\;\Leftrightarrow\; x_n\xrightarrow{d,E}x$ ve $y_n\xrightarrow{\rho,F}y$

sağlanacağından istenilen görülür. $\square$

Aşağıdaki teorem bir fonksiyonun vektörel sürekliliği ile grafiğinin kapalılığı arasındaki ilişkiyi verir.

4.1.14 Teorem

(X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $f: X \to Y$ fonksiyon olsun. f 'in grafiği $G_f = \{(x, f(x) | x \in X)\}$ için aşağıdakiler sağlanır.

a. $(X \times Y, \pi, E \times F)$ vektör metrik uzayında G_f 'in $E \times F-$kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ve $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} y$ olacak biçimdeki her bir $(x_n) \subset X$ dizisi için $y = f(x)$ olmasıdır.

b. f vektörel sürekli ise G_f, $E \times F-$kapalıdır.

c. f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında vektörel sürekli ise $h: X \to G_f$, $h(x) = (x, f(x))$ fonksiyonu da $x_0 \in X$ noktasında vektörel süreklidir.

Kanıt:

a. Kabul edelim ki G_f, $E \times F-$kapalı, $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ve $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} y$ olsun. 4.1.13 Teorem ile $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{\pi,E\times F} (x,y)$ olur. $G_f, E \times F-$kapalı ve $(x,y) \in G_f$ olduğundan $y = f(x)$ elde edilir. Tersine, $z_n = (x_n, f(x_n)) \subset G_f$ dizisi için $z_n \xrightarrow{\pi,E\times F} z = (x,y) \in X \times Y$ sağlansın. Yine 4.1.13 Teorem ile $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ve $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} y$ olur. Hipotez gereği $y = f(x)$ olacağından $z \in G_f$ elde edilir. Yani G_f kapalıdır. $\square$

Metrik uzaylarda denk metrikler aynı topolojiyi üretirler. Dolayısıyla yakınsaklık özdeştir. Vektör metrik uzaylarda ise durum biraz farklıdır.

4.1.15 Tanım

X üzerinde tanımlı E-değerli vektör metrik d ve F-değerli vektör metrik ρ olsun. Her bir $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x \in X$ elemanı için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ gerek ve yeterli şart $x_n \xrightarrow{\rho,F} x$ ise d ve

ρ metriklerine (E,F)-denk vektör metrikler denir.

4.1.16 Önerme

X üzerinde tanımlı E-değerli iki vektör metrik d ve ρ için aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\forall x,y\in X$ için $\alpha d(x,y)\le \rho(x,y)\le \beta d(x,y)$ olacak biçimde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ pozitif sayıları vardır.

2. $\forall x,y\in X$ için $\rho(x,y)\le T(d(x,y))$ ve $d(x,y)\le S(\rho(x,y))$ olacak biçimde pozitif ve $\sigma-$sıra sürekli $S,T:E\to E$ operatörleri vardır.

Kanıt.

$1\Rightarrow 2$ kabul edelim ki 1 sağlansın. $\forall a\in E$ için $T(a)=\beta a$ ve $S(a)=\alpha^{-1}a$ Şeklinde tanımlı T ve S operatörler pozitif $\sigma-$sıra süreklidirler. Dolayısıyla kabulümüzden $\forall x,y\in X$ için $\rho(x,y)\le \beta.d(x,y)$ yazılabilir. Yani, $\rho(x,y)\le T(d(x,y))$ sağlanır. Benzer şekilde $\forall x,y\in X$ için $\alpha d(x,y)\le \rho(x,y)$ olduğundan $d(x,y)\le \alpha^{-1}\rho(x,y)$ sağlanır, dolayısıyla $d(x,y)\le S(\rho(x,y))$ elde edilir.

$2\Rightarrow 1$ Kabul edelim ki 2 sağlansın. $\forall x,y\in X$ için $\rho(x,y)\le T(d(x,y))$ ve $d(x,y)\le S(\rho(x,y))$ olacak biçimde pozitif ve $\sigma-$sıra sürekli $S,T:E\to E$ operatörleri olsun. T operatörü $\sigma-$sıra sürekli olduğundan sıra sınırlıdır ve $T(d(x,y))\le \beta d(x,y)$ olacak biçimde bir $\beta\in\mathbb{R}$ pozitif sayısı vardır. Dolayısıyla $\rho(x,y)\le T(d(x,y))\le \beta d(x,y)$ olduğu görülür. S operatörü $\sigma-$sıra sürekli olduğundan sıra sınırlıdır. $S(\rho(x,y))\le \alpha^{-1}\rho(x,y)$ olacak biçimde bir $\alpha\in\mathbb{R}$ pozitif sayısı vardır. Dolayısıyla $d(x,y)\le S(\rho(x,y))\le \alpha^{-1}\rho(x,y)$ sağlanacağından $\alpha d(x,y)\le \rho(x,y)$ olduğu görülür. $\square$

4.1.17 Sonuç

(X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör metrik uzaylar olsun. Eğer $\forall x,y\in X$ için $\rho(x,y)\le T(d(x,y))$ ve $d(x,y)\le S(\rho(x,y))$ olacak biçimde pozitif ve $\sigma-$ sıra sürekli $T:E\to F, S:F\to E$ operatörleri varsa d ile ρ (E,F) denk vektör metriklerdir.

4.1.18 Örnek

$\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı alışılmış sıralamayı düşünürsek aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

1. $b,c \geq 0$ ve $a,b+c>0$ olacak biçimde $a,b,c \in \mathbb{R}$ sayıları için $d(x,y)=a|x-y|$ ve $\rho(x,y)=(b|x-y|,c|x-y|)$ şeklinde tanımlı d ve ρ ile $(\mathbb{R},d,\mathbb{R})$ ve $(\mathbb{R},\rho,\mathbb{R}^2)$ vektör metrik uzaylar olur. $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2; T(x)=a^{-1}(bx,cx)$ ve $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}; S(x,y)=ab^{-1}x$ şeklinde tanımlı T ve S operatörleri pozitif ve $\sigma-$sıra süreklidir. $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için,

$$\rho(x,y)=(b|x-y|,c|x-y|)=a^{-1}(ba|x-y|,ca|x-y|)=a^{-1}(bd(x,y),cd(x,y))=T(d(x,y))$$

ve $d(x,y)=a|x-y|=ab^{-1}b|x-y|=S(b|x-y|,c|x-y|)=S(\rho(x,y))$ sağlanacağından bir önceki sonuç gereği d ile ρ vektör metrikleri $\mathbb{R}$ üzerinde $(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ denktir.

2. $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ ve $a,b,c,e>0$ reel sayıları için tanımlı $d(x,y)=a|x_1-y_1|+b|x_2-y_2|$ ve $\rho(x,y)=(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)$ fonksiyonları ile $(\mathbb{R}^2,d,\mathbb{R})$ ve $(\mathbb{R}^2,\rho,\mathbb{R}^2)$ vektör metrik uzaylardır. $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2; T(x)=(ca^{-1}x,eb^{-1}x)$ ve $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}; S(x,y)=ac^{-1}x+be^{-1}y$ şeklinde tanımlı operatörler pozitif ve $\sigma-$sıra süreklidirler.

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)\leq\left(ca^{-1}(a|x_1-y_1|+b|x_2-y_2|),eb^{-1}(a|x_1-y_1|+b|x_2-y_2|)\right)\\&=T(a|x_1-y_1|+b|x_2-y_2|)=T(d(x,y))\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$d(x,y)=a|x_1-y_1|+b|x_2-y_2|=(ac^{-1}c|x_1-y_1|+be^{-1}e|x_2-y_2|)=S(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)$$

ise $d(x,y)\leq S(\rho(x,y))$ sağlanır. Bu ise bize $(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ değerli d,ρ vektör metriklerinin $\mathbb{R}^2$ üzerinde denk olduğunu verir.

Benzer şekilde, $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ ve $a,b>0$ reel sayıları için $\eta:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\eta(x,y)=\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\}$ fonksiyonu ile $(\mathbb{R}^2,\eta,\mathbb{R})$ vektör metrik uzaydır. Eğer $\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\}=a|x_1-y_1|$ ise,

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)\le(ca^{-1}a|x_1-y_1|,eb^{-1}a|x_1-y_1|)=T(a|x_1-y_1|)\\&=T(\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\})=T(\eta(x,y))\end{aligned}$$

olur. Eğer $\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\}=b|x_2-y_2|$ ise,

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)\le(ca^{-1}b|x_2-y_2|,eb^{-1}b|x_2-y_2|)=T(b|x_2-y_2|)\\&=T(\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\})=T(\eta(x,y))\end{aligned}$$

olur. Yani, $\rho(x,y)\le T(\eta(x,y))$ sağlanır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\eta(x,y)&=\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\}\le a|x_1-y_1|+b|x_2-y_2|=(ac^{-1}c|x_1-y_1|+be^{-1}e|x_2-y_2|)\\&=S(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)=S(\rho(x,y))\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla, d,η vektör metrikleri $\mathbb{R}^2$ üzerinde $(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ denktir.

Diğer taraftan; S operatörünü farklı olarak $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};S(x,y)=\max\{ac^{-1}x,be^{-1}y\}$ şeklinde tanımlarsak η,ρ vektör metriklerinin de $\mathbb{R}^2$ üzerinde denk $(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ olduğunu görebiliriz. Açıktır ki S pozitif ve $\sigma-$ sıra sürekli operatördür. $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ ve $\forall a,b,c,e\in\mathbb{R}^+$ için. $\rho(x,y)\le T(\eta(x,y))$ olduğu gösterildi.

$$\begin{aligned}\eta(x,y)&=\max\{a|x_1-y_1|,b|x_2-y_2|\}=\max\{ac^{-1}c|x_1-y_1|,be^{-1}e|x_2-y_2|\}\\&=S(c|x_1-y_1|,e|x_2-y_2|)=S(\rho(x,y))\end{aligned}$$

sağlanır. $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ ve $\forall a,b,c,e\in\mathbb{R}^+$ için. $\rho(x,y)\le T(\eta(x,y))$ olduğu önceden gösterildiğinden istenen elde edilmiş olur.

Şimdi de iki vektör metrik uzay arasında tanımlı izometri kavramını verelim.

4.1.19 Tanım

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $f:X\to Y$ fonksiyon olmak üzere,

i. $\forall x,y\in X$ için $T_f\left(d(x,y)\right)=\rho\left(f(x),f(y)\right)$

ii. $\forall a\in E$ için $T_f(a)=0$ iken $a=0$

şartlarını sağlayan $T_f:E\to F$ lineer operatörü varsa f fonksiyonuna *vektör izometri* denir.

Eğer f örten ve T_f operatörü örgü homomorfizmi ise, (X,d,E) ve $\left(Y,\rho,T_f(E)\right)$ vektör metrik uzaylarına vektör izometriktir denir. Tanımdan kolayca görülebileceği gibi, vektör izometri birebir fonksiyonlar için vektörel uzaklığı koruyan birebir fonksiyondur.

4.1.20 Örnek

$\forall x,y\in\mathbb{R}$ ve $b,c\geq 0$ ve $a,b+c>0$ olacak biçimdeki $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ için $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},d(x,y)=a|x-y|$ ve $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\rho(x,y)=\left(b|x-y|,c|x-y|\right)$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar vektör metrik tanımlar. $T_I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;T_I(x)=a^{-1}(bx,cx)$ lineer dönüşümü için,

i. $T_I\left(d(x,y)\right)=T_I\left(a|x-y|\right)=a^{-1}\left(ba|x-y|,ca|x-y|\right)=\left(b|x-y|,c|x-y|\right)=\rho\left(I(x),I(y)\right)$

ii. $T_I(x)=0\Leftrightarrow a^{-1}(bx,cx)=0\Leftrightarrow x=0$

sağlandığından $I:(\mathbb{R},d,\mathbb{R})\to\left(\mathbb{R},\rho,\mathbb{R}^2\right)$ özdeşlik fonksiyonu bir vektör izometridir. Bundan dolayı $(\mathbb{R},d,\mathbb{R})$ ile $\left(\mathbb{R},\rho,T_I(\mathbb{R})=\{(x,y):cx=by;x,y\in\mathbb{R}\}\right)$ vektör metrik uzayları vektör izometriktir.

4.1.21 Tanım

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar olmak üzere $f:X\to Y$ fonksiyonu birebir, vektörel sürekli ve $f(X)$ üzerinde vektörel sürekli bir terse sahipse, f fonksiyonuna vektör homeomorfizm denir. Ek olarak f örten ise (X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzayları *vektör homeomorfiktir* denir.

Açıktır ki vektör homeomorfizmler dizilerin vektörel yakınsaklığını koruduğu için vektör homeomorfizmler ile kapalı kümelerin ilişkisi aşağıdaki gibi verilebilir.

4.1.22 Teorem

Örten vektör homeomorfizmler vektörel kapalı kümeleri korur.

Kanıt:

(X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $f:X\to Y$ vektör homeomorfizm ve $A\subset X$, $\mathrm{E}-$kapalı alt küme olsun. f^{-1} vektörel sürekli olduğundan Teorem 4.1.6 gereği $\forall A\subset X$, $\mathrm{E}-$kapalı alt kümesi için $f(A)=\left(f^{-1}\right)^{-1}(A)\subset \mathrm{Y}$, $\mathrm{E}-$kapalıdır.

Aşağıdaki örnek vektör homeomorfizm ile vektörel denklik arasındaki ilişkiyi örneklendirir.

4.1.23 Örnek :

(X,d,E) ve (X,ρ,F)X vektör metrik uzaylar olmak üzere d ile ρ, (E,F)-denk olsun. $I:X\to X$ birim fonksiyonu ile (X,d,E) ve (X,ρ,F) vektör homeomorftur. Diğer taraftan, $f:X\to Y$ fonksiyonu ile (X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör homeomorf ise $\forall x,y\in X$ için $\delta:X\times X\to F$, $\delta(x,y)=\rho\left(f(x),f(y)\right)$ şeklinde tanımlı vektör metrik ile d, (E,F)-denk vektör metriklerdir.

4.2. Sürekli Fonksiyonların Genişlemeleri

(X,d,E) ve (Y,ρ,F)vektör metrik uzaylar $A\subset X$ ve $f:A\to Y$ vektörel sürekli fonksiyon olsun. $\forall x\in A$ için $f(x)=g(x)$ eşitliğini sağlayan $g:X\to Y$ fonksiyonuna f ‘in X üzerine bir genişlemesi denir. Böyle bir genişleme her zaman bulunabilir. Önemli olan f fonksiyonunun aynı özelliklere sahip bir genişlemesinin bulunup bulunmamasıdır.

4.2.1 Teorem

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar ve $f,g:X\to Y$ vektörel sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $\{x\in X : f(x)=g(x)\}\subset X$ kümesi E-kapalıdır.

Kanıt: Kabul edelim ki $B=\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ ve seçilen bir $(x_n)\subset B$ dizisi için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ sağlansın. f ve g vektörel sürekli olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\rho(f(x),g(x))\le\rho(f(x),f(x_n))+\rho(f(x_n),g(x_n))+\rho(g(x_n),g(x))\le(a_n+b_n)\downarrow 0$ olacak biçimde $(a_n)\subset E$ ve $(b_n)\subset F$ dizileri vardır. Buradan her bir $n\in\mathbb{N}$ için $f(x_n)=g(x_n)$ olduğundan $f(x)=g(x)$ sağlanır. Dolayısıyla $x\in B$, yani $B\subset X$ E-kapalıdır. $\square$

4.2.2 Sonuç

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $f,g:X\to Y$ vektörel sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\{x\in X : f(x)=g(x)\}\subset X$ kümesi X ‘de E-yoğun ise $f=g$ dir.

Kanıt:

$\{x\in X : f(x)=g(x)\}\subset X$ kümesi X ‘de E-yoğun olduğundan $\forall x\in\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ elemanı için $\exists(x_n)\subset\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ dizisi vardır öyle ki $x_n \xrightarrow{d,E} x$ sağlanır. f ve g fonksiyonları vektörel sürekli olduğundan $f(x_n)\xrightarrow{\rho,\mathrm{F}} f(x)$ ve $g(x_n)\xrightarrow{\rho,\mathrm{F}} g(x)$ yazılabilir. $\forall x\in\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ elemanı için $f(x_n)=g(x_n)\xrightarrow{\rho,\mathrm{F}} f(x)=g(x)$ olduğundan $f=g$. $\square$

4.2.3. Tanım

(X,d,E) ile (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar ve $f:X\to Y$ fonksiyon olsun.

a. $\forall x,y\in X$ ve $b>0$ olacak biçimdeki $\forall b\in F$ için $d(x,y)<a$ iken $\rho(f(x),f(y))<b$ olacak şekilde $\exists a\in E, a>0$ varsa f fonksiyonuna topolojik düzgün süreklidir denir. Burada $a\in E$ yalnızca $b\in F$ elemanına bağlı olarak bulunur.

b. Her bir $(x_n) \subset X$, *E*-Cauchy dizisi için $f(x_n) \subset Y$, *F*-Cauchy dizisi ise f fonksiyonuna vektörel düzgün süreklidir denir.

4.2.4. Teorem

(X,d,E) ile (Y,ρ,F) vektör metrik uzayları ve F Arşimedyan Riesz uzayı olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu topolojik düzgün sürekli ise vektörel düzgün süreklidir.

Kanıt:

Kabul edelim ki $(x_n) \subset X$ dizisi *E*-Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $\exists b_n = b_n\left(\frac{1}{n}b\right) \in E$ vardır öyle ki $d\left(x_n, x_{n+p}\right) < b_n$ iken $\rho\left(f(x_n), f\left(x_{n+p}\right)\right) < \frac{1}{n}b$ sağlanır. $c_n = a_n \vee b_n \in E$ olmak üzere $\forall n, p \in \mathbb{N}$ için $d\left(x_n, x_{n+p}\right) < a_n < c_n$ sağlandığında $\rho\left(f(x_n), f\left(x_{n+p}\right)\right) < \frac{1}{n}b$ sağlanır. Diğer taraftan, F Arşimedyan olduğundan $\frac{1}{n}b \downarrow 0$ 'dır. Buradan $f(x_n) \subset Y$ dizisinin *F*-Cauchy dizisi olduğu görülür. Bu ise f fonksiyonunun vektörel düzgün sürekli olduğunu gösterir. □

4.2.5. Örnek

a. (X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar, $T_f : E \to F$ pozitif ve $\sigma-$sıra sürekli operatör ise $f : X \to Y$ vektör izometri fonksiyonu vektörel düzgün süreklidir.

b. (X,d,E) vektör metrik uzayında bir $y \in X$ elemanı için $f_y : X \to E,\ f_y(x) = d(x,y)$ şeklinde tanımlı f_y fonksiyonu vektörel düzgün süreklidir.

c. E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere (X,d,E) vektör metrik uzayının bir alt kümesi $A \subset X$ olsun. $\forall x \in X$ için $f_A : X \to E,\ f_A(x) = d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$ şeklinde tanımlı f_A fonksiyonu vektörel düzgün süreklidir.

Aşağıdaki teorem vektör metrik uzaylar arasında tanımlı fonksiyonların genişlemeleri ile ilgili bazı özellikleri kanıtlar.

4.2.6. Teorem

(X, d, E) vektör metrik uzay, $A \subset X$ E-yoğun alt küme, (Y, ρ, F) F-tam vektör metrik uzay ve F Arşimedyan olsun. Bu durumda, $f : A \to Y$ topolojik düzgün sürekli fonksiyonunun X 'in tamamına bir tek vektörel sürekli genişlemesi $\tilde{f} : X \to Y$ vardır.

Kanıt:

$x \in X$ olsun. $A \subset X$ E-yoğun alt küme olduğundan $\exists (x_n) \subset A$ dizisi vardır ve $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olur. f topolojik düzgün sürekli ise vektörel düzgün sürekli olacağından $f(x_n)$ F 'de Cauchy dizisidir. F tam olduğundan $f(x_n) \xrightarrow{\rho,\mathrm{F}} y$ olacak biçimde bir $y \in Y$ vardır. $g : X \to Y, g(x) = y$ şeklinde tanımlı fonksiyon f 'in X üzerine genişlemesi olsun. g 'nin seçimi (x_n) dizisinin seçiminden bağımsız olduğundan g iyi tanımlıdır. Şimdi g 'nin X üzerinde topolojik düzgün sürekli olduğunu gösterelim. f topolojik düzgün sürekli olduğundan $\forall x, y \in A$ ve $a > 0$ olacak biçimdeki $\forall a \in F$ için $d(x, y) < b$ olduğunda $\rho(f(x), f(y)) < a$ olacak şekilde $\exists b \in E, b > 0$ vardır. $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ve $y_n \xrightarrow{d,E} y$ olacak biçimde $(x_n), (y_n) \subset A$ dizilerini seçelim. O halde $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$ sağlanır. Diğer taraftan $\forall n > n_0$ için $d(x_n, y_n) < b$ olduğunda $\rho(f(x), f(y)) < a$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. f vektörel düzgün sürekli olduğundan $f(x_n), f(y_n) \subset Y$ F- Cauchy dizileridir. Y,F-tam olduğundan $f(x_n) \xrightarrow{\rho,\mathrm{F}} u, f(y_n) \xrightarrow{\rho,\mathrm{F}} v$ olacak biçimde $u, y \in Y$ vardır.g fonksiyonunun tanımından $g(x) = u$ ve $g(y) = v$ dir. O halde $\rho(g(x_n), g(y_n)) \xrightarrow{o} \rho(g(x), g(y))$ Bundan dolayı $\rho(g(x), g(y)) \leq b$ elde edilir. g fonksiyonu X üzerinde topolojik düzgün süreklidir. $\square$

4.3. Vektörel Sürekli Fonksiyon Uzayları

Bu bölüm şimdiye kadar özelliklerini gördüğümüz vektör metrikleri arasında tanımlı vektörel sürekli ve topolojik sürekli tüm fonksiyonların oluşturduğu sınıfın Riesz uzay olduğunu göstermeyi amaçlamaktadır.

4.3.1. Tanım

(Y,ρ,F) vektör metrik uzay X boştan farklı bir küme olsun. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $f_n : X\to Y$ şeklinde tanımlı fonksiyonların oluşturduğu (f_n) fonksiyon dizisini düşünelim. $f : X\to Y$ bir fonksiyon olmak üzere, her bir $x\in X$ için $\rho\left(f_n(x), f(x)\right)\le a_n$ olacak biçimde bir $a_n\downarrow 0\subset F$ dizisi varsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna *düzgün F-yakınsaktır* denir.

4.3.2. Teorem

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar, vektörel sürekli fonksiyonların oluşturduğu $(f_n)\subset Y^X$ fonksiyon dizisi bir $f\in Y^X$ fonksiyonuna düzgün F-yakınsak ise f vektörel sürekli fonksiyondur.

Kanıt: Kabul edelim ki $(x_n)\subset X$ ve $x_n\xrightarrow{d,E} x$ olsun. $(f_n)\xrightarrow{d,F} f$ yakınsaması düzgün F-yakınsak olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\rho\left(f_n(x), f(x)\right)\le a_n$ olacak biçimde $(a_n)\downarrow 0\subset F$ dizisi vardır. Diğer taraftan $\forall k\in\mathbb{N}$ için f_k fonksiyonları vektörel sürekli olduğundan için $\rho\left(f_k(x_n), f_k(x)\right)\le b_n$ olacak biçimde $(b_n)\downarrow 0\subset F$ dizisi vardır. Burada $k=n$ alınırsa

$\rho\left(f(x_n), f(x)\right)\le\rho\left(f(x_n), f_n(x_n)\right)+\rho\left(f(x), f_n(x)\right)+\rho\left(f_n(x_n), f_n(x)\right)\le(2a_n+b_n)\downarrow 0$ olduğundan $f(x_n)\xrightarrow{\rho,F} f(x)$ elde edilir. □

(X,d,E) vektör metrik uzay $A\subset X$ ve $A\neq\varnothing$ olsun. $\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in A\}$ değeri varsa bu supremum değerine A kümesinin E- *çapı* denir. $\forall x,y\in A$ için $d(x,y)\le a$ olacak şekilde E Riesz uzayında $\exists a>0$ sayısı varsa A kümesine *E-sınırlı küme* denir. Diğer bir deyişle A kümesinin çapı sonlu ise A kümesi E-sınırlıdır. Kolayca görüleceği üzere E Dedekind tam ise E'nin her E-sınırlı alt kümesi bir E-çapa sahiptir.

4.3.3. Tanım

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar olmak üzere, $f : X\to Y$ fonksiyonu X 'in E-sınırlı alt kümelerini Y 'nin F-sınırlı alt kümelerine götürüyorsa f fonksiyonuna *vektörel sınırlıdır* denir.

4.3.4. Teorem

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar olmak üzere $\forall x,y\in X$ için $\rho\big(f(x),f(y)\big)\leq T\big(d(x,y)\big)$ olacak biçimde bir $T:E\rightarrow F$ pozitif operatörü var ise $f:X\rightarrow Y$ fonksiyonu vektörel sınırlıdır.

Kanıt:

$\forall x,y\in X$ için $T:E\rightarrow F$ pozitif operatör olduğundan $\rho\big(f(x),f(y)\big)\leq T\big(d(x,y)\big)<T(a)=b$ sağlanır. Yani $\forall x,y\in A$ için $\rho\big(f(x),f(y)\big)<b$ olacak biçimde $b\in F^{+}$ elemanı vardır. Her bir $A\subset X$ *E*-sınırlı kümesi için $f(A)$ *F*-sınırlı olduğundan f vektörel sınırlıdır. □

(X,d,E) vektör metrik uzay ve F bir Riesz uzay olmak üzere

$$C_v(X,F)=\{f:(X,d,E)\rightarrow F \mid f \textit{ vektörel sürekli}\}$$

$$C_t(X,F)=\{f:(X,d,E)\rightarrow F \mid f \textit{ topolojik sürekli}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada sözü edilen vektörel ve topolojik süreklilik kavramlarında, *F* üzerinde tanımlı $\rho:F\times F\rightarrow F$, $\rho(x,y)=|x-y|$ vektör metrik düşünülecektir. Önceden gösterildiği üzere $C_t(X,F)\subseteq C_v(X,F)$ sağlanır.

4.3.5. Teorem

Fonksiyonlar arasında tanımlı alışıldık sıralamaya göre $C_v(X,F)$ ve $C_t(X,F)$ Riesz uzaylarıdır.

Kanıt:

$f,g\in C_v(X,F)$ seçelim. $x_n\xrightarrow{d,E}x$ ise $f(x_n)\xrightarrow{F}f(x)$ ve $g(x_n)\xrightarrow{F}g(x)$ olur. Dolayısıyla, için α skaları için $(f+\alpha g)(x_n)\rightarrow(f+\alpha g)(x)$ olur. Yani, $C_v(X,F)$ vektör uzayıdır. Diğer taraftan, $\forall f,g\in C_v(X,F)$ ve $(x_n)\xrightarrow{d,E}x\in X$ olacak biçimdeki $\forall(x_n)\subset X$ dizisi için F üzerinde alınan vektör metrik yüzünden $f(x_n)\xrightarrow{o}f(x)$ ve $g(x_n)\xrightarrow{o}g(x)$ sağlanır. Dolayısıyla, $f_n\vee g_n\xrightarrow{o}f\vee g$,olduğundan

$(f \vee g)(x_n) \xrightarrow{o} (f \vee g)(x)$ sağlanır. Benzer olarak $(f \wedge g)(x_n) \xrightarrow{o} (f \wedge g)(x)$ sağlanır. Bu ise $C_v(X,F)=\{f:(X,d,E)\to F \mid f \text{ vektörel sürekli}\}$ 'nın bir Riesz uzayı olduğunu gösterir.

Şimdi de $C_t(X,F)=\{f:(X,d,E)\to F \mid f \text{ topolojik sürekli}\}$ uzayının Riesz uzayı olduğunu gösterelim. $f,g\in C_t(X,F)$ seçelim. $\forall b>0$, $b\in F$ için $d(x,y)<a_1$ olduğunda $|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}b$ olacak şekilde $\exists a_1>0$, $a_1\in E$, ve benzer şekilde $d(x,y)<a_2$ olduğunda $|g(x)-g(y)|<\frac{1}{2}b$ olacak şekilde $\exists a_2>0$, $a_2\in E$ vardır. $a_1\wedge a_2=a$ olmak üzere $d(x,y)<a$ olduğunda

$$\begin{aligned}0 &\le |(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \\ &\le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \le b\end{aligned}$$

olacak biçimde $\exists a>0$, $a\in E$ elemanı vardır. Bu ise $f+g\in C_t(X,F)$olduğunu gösterir. $f\in C_t(X,F)$ ise $\forall b>0$, $b\in F$ ve her bir $\alpha\neq 0$ skaları için $d(x,y)<a_1$ olduğunda $|f(x)-f(y)|<|\alpha|b$ olacak şekilde $\exists a_1>0$, $a_1\in E$ vardır. Dolayısıyla, $|(\alpha f)(x)-(\alpha f)(y)|=|\alpha||f(x)-f(y)|<b$ sağlanacak biçimde $\exists a>0$, $a\in E$ vardır. Bu ise, $\alpha f\in C_t(X,F)$olduğunu gösterir. $C_v(X,F)=\{f:(X,d,E)\to F \mid f \text{ vektörel sürekli}\}$ bir vektör uzayıdır. Şimdi de $C_t(X,F)=\{f:(X,d,E)\to F \mid f \text{ topolojik sürekli}\}$ uzayının Riesz uzayı olduğunu görelim.

$a_1\wedge a_2=a$ olmak üzere $d(x,y)<a$ olduğunda Birkhoff eşitsizliğinden $0\le|(f\vee g)(x)-(f\vee g)(y)|\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|<b$ olacak biçimde $\exists a>0$, $a\in E$ elemanı var olduğundan $f\vee g\in C_t(X,F)$ elde edilir. Benzer olarak $f\wedge g\in C_t(X,F)$ olduğu kolayca görülür. $\square$

$\forall x,y\in X$ için $|f(x)-f(y)|\le T(d(x,y))$ olacak biçimde bir $T:E\to F$ pozitif operatörünün var olduğu f fonksiyonlarının kümesini $C_v^0(X,F)$ şeklinde gösterelim.

Birkhoff eşitsizliğinden açıktır ki $C_v^0(X,F)$, $C_v(X,F)$ 'nin Riesz alt uzayıdır. Üstelik, gösterildiği üzere her bir $f \in C_v^0(X,F)$ fonksiyonu vektörel sınırlıdır.

4.3.6. Sonuç

(X,d,E) vektör metrik uzay ve F bir Riesz uzay olmak üzere, $C_v^0(X,F)$ $d_\infty : C_v^0(X,F)\times C_v^0(X,F)\to F,\ d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X}\left|f(x)-g(x)\right|$ F-değerli düzgün metrik ile bir vektör metrik uzaydır.

Kanıt:

Vm1. $\forall x\in X, \forall f,g\in C_v^0(X,F)$ için $d_\infty(f,g)=0 \Leftrightarrow \sup_{x\in X}\left|f(x)-g(x)\right|=0 \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $\left|f(x)-g(x)\right|=0 \Leftrightarrow \forall x\in X$ için $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f=g$.

Vm2. $\forall x\in X$ ve $\forall f,g,h\in C_v^0(X,F)$ için

$$\left|f(x)-g(x)\right|\le\left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right|\le\sup\left|f(x)-h(x)\right|+\left|h(x)-g(x)\right|$$

$$\le\sup\left|f(x)-h(x)\right|+\sup\left|h(x)-g(x)\right|$$

sağlanır. Dolayısıyla, $\sup_{x\in X}\left|f(x)-g(x)\right|\le\sup_{x\in X}\left|f(x)-h(x)\right|+\sup_{x\in X}\left|g(x)-h(x)\right|$ olması için gerekli ve yeterli şart $d_\infty(f,g)\le d_\infty(f,h)+d_\infty(g,h)$ sağlanmasıdır. □

Kompakt kümeler sonlu kümeler gibi davrandığından önemli avantajlar sağlar. Vektör metrik uzaylarda metrik uzaylarda olduğu gibi paralel sonuçlar elde edilebilir. Fakat bu bölümü ilgilendiren vektörel süreklilikle ilişkisini veren bir sonucu vermekle yetineceğiz.

Tanım:

(X,d,E) vektör metrik uzay $A\subset X$ olsun. A alt kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine *kompakt küme* denir. Özel olarak X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X,d,E) vektör metrik uzayına *kompakt uzay* denir.

Teorem:

(X,d,E) ve (Y,ρ,F) vektör metrik uzaylar ve $f:X\to Y$ vektörel sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $K\subset X$ kompakt bir alt küme ise $f(K)\subset Y$ alt kümesi de kompakttır.

Kanıt:

$(V_i)_{i\in I}$, $f(K)$'nın açık bir örtüsü olsun. Yani $f(K)\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$ sağlanır. $K\subseteq f^{-1}(f(K))\subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}V_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(V_i)$ sağlanacağından $\left(f^{-1}(V_i)\right)$ ailesi *K'* nın bir örtüsü olduğu elde edilir. f vektörel sürekli olduğundan, her i için $f^{-1}(V_i)$ açık bir kümedir ve bu aile K'nın açık bir örtüsü olur. Dolayısıyla, K kompakt olduğundan $K\subseteq f^{-1}(V_{i_1})\cup\ldots\cup f^{-1}(V_{i_n})$ içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1,\ldots,i_n\in I$ vardır. O halde,

$$f(K)\subseteq f\left(f^{-1}(V_{i_1})\cup\ldots\cup f^{-1}(V_{i_n})\right)$$

$$=f\left(f^{-1}(V_{i_1})\right)\cup\ldots\cup f\left(f^{-1}(V_{i_n})\right)$$

$$=V_{i_1}\cup\ldots\cup V_{i_n}$$

olur. Bu ise $f(K)$ kümesinin kompakt olduğunu gösterir.

5. KAYNAKLAR

Aliprantis C D, Border K C (1999). Infinite Dimensional Analysis. Springer-Verlag, 703s, Berlin.

Aliprantis C D, Burkinshaw O (2006). Positive Operators. Springer, 367s, Dordrecht.

Aliprantis C D, Tourky R (2007), Cones and Duality. AMS, 574s, Providence.

Çağlar M, Ercan Z (2014). Order-Unit-Metric Spaces. Positivity. 18: 557-565.

Çevik C, Altun I (2009). Vector Metric Spaces and Some Properties. Topol. Methods Nonlinear Anal., 34(2): 375-382.

Çevik C (2014). On Continuity Functions Between Vector Metric Spaces. J. Funct. Spaces. Art.ID 753969: 6pp.

Çevik C (2015). Completion of Vector Metric Spaces. G.U. Journal of Science. 28(1): 69-73.

Ercan Z. (2014). On the End of the Cone Metric Spaces. Topology and its Applications. 166: 10-14.

Huang L G, Zhang X (2007). Cone Metric Spaces and Fixed Poind Theorems of Contractive Mappings. J.Math.Anal.Appl. 332: 1468-1476.

Jankovic S, Kadelburg Z, Radenovic S (2011). On Cone Metric Spaces: A survey. Nonlinear Analysis. 74:2591-2601.

Khani M, Pourmahdian M (2011). On the Metrizability of Cone Metric Spaces. Topology and its Applications. 158: 190-193.

Petre I R (2012). Operatorial Inclusion by Fixed Point Technique in Vector Metric Spaces. PhD. Thesis. University of Babeş-Bolyai, Faculty of Mathematics and Computer Science. Cluj-Napoca.

Nesin A. (2012). Analiz IV. Nesin Yayıncılık A.Ş., 215p, İstanbul.

Zaanen A C (1983). Riesz Space II. North-Holland, 720s, Amsterdam.

Zabreiko P P (1997). K-metric and K-normed Linear Spaces. Collect. Math. 48: 825-859.

ÖZGEÇMİŞ

İlker Peksöz 27/01/1975 Tekirdağ doğumlu olup, 1992 yılında Kepirtepe Anadolu Öğretmen lisesinden ve 1998 yılında da Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi matematik öğretmenliği bölümünden mezun olmuştur. Mezuniyetinden sonra çeşitli eğitim kurumlarında eğiticilik hayatına devam etmiş ve 2008 yılında ise Milli Eğitim Bakanlığı ‘nda öğretmen olarak göreve atanmıştır. Halen Çorlu ilçesi Şahinler Orta Okulunda matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.