ORTALAMA EĞRİLİK TİPİ DENKLEMLERİ SAĞLAYAN ALT MANİFOLDLAR

Ayla ERDUR KARA

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

İkinci Danışman: Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN

2021

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ORTALAMA EĞRİLİK TİPİ DENKLEMLERİ SAĞLAYAN ALT MANİFOLDLAR

Ayla ERDUR KARA

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT
İkinci Danışman: Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN

TEKİRDAĞ-2021

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde eksiksiz biçimde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Ayla ERDUR KARA

ÖZET

Doktora Tezi
ORTALAMA EĞRİLİK TİPİ DENKLEMLERİ SAĞLAYAN
ALT MANİFOLDLAR

Ayla ERDUR KARA
Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Diferensiyel geometride, sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, "aynı hacme sahip tüm kompakt yüzeyler arasında, en küçük alana sahip yüzeylerin bulunması" olarak tanımlı olan izoperimetrik problemin çözümüdür. Minimal yüzeyler için benzer problem "aynı sınıra sahip tüm yüzeyler arasında en küçük alana sahip olanların karakterize edilmesi" şeklindedir. Bu çalışmada ortalama eğrilik tipinde bir denklem olan singüler minimal yüzey denklemini sağlayan yüzeyler ele alındı. Bu tür yüzeyler, bilinen minimal yüzeyleri genelleştirirler ve potansiyel $\alpha-$enerji adı verilen varyasyonel bir integralin kritik noktalarıdırlar. Diğer bir ifadeyle, potansiyel $\alpha-$enerjiyi minimize ederler ve en düşük yerçekim merkezine sahip olan yüzey modellerini oluştururlar. Bu nedenle fizik ve mimaride büyük bir öneme sahiptirler. Ayrıca, yerçekim kuvveti etkisi altında potansiyel enerjiyi minimize eden katenerlerin, 2 ve daha yüksek boyutlardaki benzerlerini karakterize ederler. Buna göre bu çalışmada ele alınan başlıca problemler: $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayında singüler minimal öteleme hiperyüzeylerin sınıflandırılması, belirli yarı–simetrik metrik (sırasıyla, metrik olmayan) konneksiyonlara sahip singüler minimal yüzeylerin sınıflandırılması ve $3-$boyutlu Öklid ve Lorentz–Minkowski uzaylarında belirli yarı–simetrik metrik (sırasıyla, metrik olmayan) konneksiyonlara sahip minimal olan singüler minimal yüzeylerin sınıflandırılması şeklinde ifade edilebilir. Bu problemlerin çözümleriyle, bu yüzeyler sınıfına ait yeni yüzey örneklerini literatüre kazandırmak bu tez çalışmasının temel amacıdır.

Anahtar Kelimeler: Singüler minimal (hiper)yüzey, $\alpha-$katener,
Ortalama eğrilik, Öteleme (hiper)yüzey,
Yarı–simetrik (non-)metrik konneksiyon,
Genelleştirilmiş silindir

2021, 125 Sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis
SUBMANIFOLDS SATISFYING EQUATIONS OF
MEAN CURVATURE TYPE

Ayla ERDUR KARA
Tekirdag Namik Kemal University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Prof. Dr. Mahmut ERGUT

In differential geometry, the surfaces with constant mean curvature are the solutions to the isoperimetric problem defined as “finding those with the smallest area among all compact surfaces with the same volume”. A similar problem for minimal surfaces is “to characterize those with the smallest area of all surfaces with the same boundary”. In this study, we consider the surfaces that satisfy the singular minimal surface equation, which is an equation of mean curvature type. Such surfaces generalize the minimal surfaces and are critical points of a variational integral called potential $\alpha-$energy. In other words, they minimize the potential $\alpha-$energy and create surface models with the lowest center of gravity. For this reason, they have a great importance in physics and architecture. They also characterize two and higher dimensional analogues of catenary that minimize the potential energy under the influence of gravity. Accordingly, the main problems we deal with in this study are: classification of singular minimal translation hypersurfaces in $(n+1)-$dimensional Euclidean space, classification of singular minimal surfaces with certain semi-symmetric metric (respectively, non–metric) connections and classification of singular minimal surfaces that are minimal with symmetric metric (respectively, non–metric) connections in $3-$dimensional Euclidean and Lorentz–Minkowski spaces. The main purpose of our thesis is to bring new surface samples belonging to this class of surfaces to the literature with the solutions of these problems.

Keywords: Singular minimal (hyper)surface, $\alpha-$catenary,
Mean curvature, Translation (hyper)surface,
Semi-symmetric (non-)metric connection, Generalized cylinder

2021, 125 Pages

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	: $3-$boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı
M	: Topolojik manifold
$\tilde{M}$	: Riemann manifoldu
$\mathbb{R}_s^n$	: $n-$boyutlu $s-$indeksli yarı Öklid uzay
$\tilde{\nabla}$	: Afin konneksiyon
∇^L	: Levi$-$Civita konneksiyonu
∇	: Yarı$-$simetrik metrik konneksiyon
D	: Yarı$-$simetrik metrik olmayan konneksiyon
$\Gamma(TM)$	: M manifoldu üzerinde vektör alanları cümlesi
h^∇	: $\nabla-$konneksiyonuna göre ikinci temel form
h^D	: $D-$ konneksiyonuna göre ikinci temel form
H^∇	: $\nabla-$konneksiyonuna göre ortalama eğrilik
H^D	: $\nabla-$konneksiyonuna göre ortalama eğrilik
$[,]$	: Lie (parantez) operatörü
T	: Torsiyon tensörü

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimin her aşamasında ve bu tez çalışmasının tamamlanması sürecinde destek ve ilgilerini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Bilgi ve birikimlerini benimle cömertçe paylaşan, daima pozitif yönde beni motive eden, akademik ve manevi desteği ile her zaman yanımda olan sayın hocam Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN'a (Fırat Üniversitesi) en içten duygularımla teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Öğrencilik hayatım boyunca, maddi ve manevi destekleriyle daima yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi ve minnettarlığımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında şartlar gereği yanımda olamasa da sevgisi ve manevi desteğiyle yanımda olan sevgili eşim Yılmaz KARA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2021

Ayla ERDUR KARA
Araştırma Görevlisi

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride, bir yüzeyin "ortalama eğriliği" kavramı, klasik izoperimetrik problem adı verilen "belirli bir hacmi çevreleyen tüm yüzeyler arasında, alanı en az olan yüzeyin bulunması" problemi göz önünde bulundurulduğunda ortaya çıkan bir kavramdır. İzoperimetrik problemin yalnızca sonsuz küçük çözümlerinin aranması, aşağıdaki sonucu verir:

" Öklid uzayında kompakt bir yüzey alanın hacim koruyan tüm varyasyonlara göre durağan olması için gerek ve yeter şart immersiyonun sabit ortalama eğriliğine sahip olmasıdır."

Diğer bir deyişle, sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, kısıtlanmış hacmi koruyan lokal deformasyonlara göre alan fonksiyonelinin kritik noktalarıdır. Her noktada ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda, yüzeye minimal yüzey adı verilir.

Sabit ortalama eğrilikli yüzeyler, enerjinin yüzey alanıyla orantılı olduğu fiziksel ortamlarda matematiksel modeller olarak kullanılırlar. Örneğin, kılcal hareket ile yükselen veya alçalan yerçekiminin yokluğunda bir sıvı tankına sokulan ince bir tüpteki bir sıvının yükselişinin modelleridirler.

Ortalama eğrilik kavramı; "ortalama eğrilik" adını kullanan S. Germain tarafından 1810 lu yıllarda çalışılmış olan esneklik problemlerinde ortaya çıkmıştır, ancak alanı lokal olarak minimize eden yüzeyleri karakterize etmek için ilk olarak asli eğriliklerin toplamını düşünen J.B. Meusnier olmuştur. Sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin ortaya çıktığı fizikteki diğer örnekler, arayüz adı verilen yüzeylerdir. Bir arayüz, iki karışmayan sıvı veya bir sıvı ile hava arasında oluştuğu gibi iki farklı homojen fazın karşılaştığı bölgedir. Her iki ortamı ayıran bu bölgenin, matematiksel bir yüzeyle modellenmiş arayüz gibi ihmal edilebilir kalınlığa sahip olduğu düşünülebilir. Yerçekim yokluğunda bu arayüzün şekli, arayüz enerjiyi minimize ettiği zaman meydana gelen fiziksel denge durumuna ulaşana kadar değişir. Bu ortamda, arayüzün enerjisi, kendi yüzey alanıyla orantılıdır. O zaman S arayüzü boyunca iç ve dış arasındaki $P_e - P_i$ basınç farkı, S nin γ yüzey gerilimi ile orantılıdır ve arayüzün şekli

$$P_e - P_i = 2H\gamma \tag{1.1}$$

Laplace denklemi ile belirlenir. Burada H, S yüzeyinin ortalama eğriliğini gösterir ve γ sadece materyallere bağlı olan bir sabittir. Basınçların sabit olduğu durumda, S nin ortalama eğriliği sabittir. Sabun köpüğü ve sabun filmleri bu bağlamdaki arayüz örnekleridir. (1.1) Laplace denklemine göre, her iki taraftaki basınçlar eşitse arayüz üzerinde ortalama eğrilik sıfırdır. Matematiksel olarak bu, bir minimal yüzeyin, hacim korunmasına gerek olmaksızın keyfi varyasyonlar için alanın kritik noktası olması anlamına gelir (López, 2013).

H = 0 denklemi minimal yüzeylerin belirlenmesinde en basit ifade olmasına rağmen, bu teori son derece zengindir. $3-$boyutlu Öklid uzayında minimal yüzeyler teorisi, 18. yüzyılda Euler ve Lagrange tarafından geliştirilen varyasyonlar hesabına ve daha sonra 19. yüzyılda Enneper, Scherk, Schwarz, Riemann ve Weierstrass tarafından yapılan araştırmalara dayanmaktadır. Yıllar geçtikçe, birçok ünlü matematikçi bu teoriye katkıda bulunmuştur.

Bu çalışmada ortalama eğrilik tipi bir denklem olan, *singüler minimal yüzey denklemi*ni sağlayan yüzeyler sınıflandırılmıştır. Singüler minimallik kavramını açıklamak için öncelikle 1–boyutlu durumu göz önünde bulunduralım:

2–boyutlu Öklid uzayı $\left(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle\right)$ de, sabit bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ birim vektörü ve herhangi bir α reel sayısı için

$$\kappa(s) = \alpha \frac{\langle n, \mathbf{u}\rangle}{\langle \beta, \mathbf{u}\rangle} \tag{1.2}$$

denklemi sağlayan $\beta = \beta(s)$ eğrisine, $\alpha-$katener adı verilir, burada κ ve n, sırasıyla, β nın eğriliği ve birim normal vektör alanıdır. Bir koordinat değişimi ile $\mathbf{u}$ vektörünü ve β eğrisini $\mathbf{u} = (0,1)$ ve $\beta(s) = (s, \phi(s))$, $\quad \phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ şeklinde alabiliriz. Bu durumda $\alpha = 1$ alındığında, (1.2) denklemi,

$$\frac{\phi''}{1 + (\phi')^2} = \frac{1}{\phi} \tag{1.3}$$

katener denklemine dönüşür (López, 2018a).

Fiziksel açıdan bakıldığında, (1.3) denklemi, iki ucu sabitlenmiş, kendi ağırlığı altında asılı bırakılmış ve yerçekim alanının etkisiyle denge halinde olan tek tip bir zincir konfigürasyonu tanımlar. Böylece bir $\alpha-$katener, aslında yerçekim kuvveti etkisi altında potansiyel enerjiyi minimize eder, yani diğer bir ifadeyle; bir $\alpha-$katener, en düşük yerçekim merkezine sahiptir (Gil, 2005).

Katenerin bu özelliği genelleştirildiğinde,

$$M^n = graph(u) = \{(x,u(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\}$$

grafiği olarak verilen bir M^n hiperyüzeyi için,

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\mid \nabla u \mid^2}}\right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+\mid \nabla u \mid^2}}$$

denklemi ya da bu denkleme denk olan

$$nH = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+\mid \nabla u \mid^2}} \tag{1.4}$$

şeklindeki denklem ifade edilir, burada H, M^n nin ortalama eğriliğidir. Bu denklemi sağlayan bir hiperyüzey, $\alpha = 1$ için literatürde *katenerin* $n-$*boyutlu benzeri* yada *singüler minimal yüzey* olarak bilinir. (1.4) denklemi, yerçekim kuvvetleri altında

$$E(u) = \int_\Omega u^\alpha \sqrt{1+\mid \nabla u \mid^2}$$

şeklinde verilen E potansiyel enerjisinin denge durumunu karakterize eder, yani diğer bir deyişle (1.4) deklemi, E potansiyel enerjisinin Euler denklemidir (Dierkes ve Huisken, 1990).

Tarihsel olarak bu problem, dikey yerçekimi alanına göre ağır bir yüzeyi modelleyen denklem üzerinde Lagrange ve Poisson' un ilk çalışmalarına kadar dayanır. $\alpha = 1$ olduğunda (1.4) singüler minimal yüzey denklemi, en düşük yerçekim merkezli olma özelliğine sahip bir yüzey modelidir. Mimar F. Otto' nun görüşüne göre bu denklem, mükemmel kubbelerin inşaası için aynı zamanda bir asma çatı şekli modelidir (aktaran López (2019)). Bu denklem 1980 li yıllardan itibaren literatürde yoğun olarak çalışılmıştır. (Bemelmans ve Dierkes, 1987; Böhme vd., 1980; Dierkes, 1988, 2003; Dierkes ve Huisken, 1990; Nitsche, 1986).

(1.4) singüler minimal yüzey denklemi, yerçekim doğrultusunda tanımlanmış olan bir denklemdir. Bu denklemin belirli bir doğrultuda tanımlı daha genel bir hali 2018 yılında López tarafından verilmiştir. López (2018a) de $3-$ boyutlu

Öklid uzayı $\left(\mathbb{R}^3, \langle,\rangle\right)$ de, bir α reel sayısı ve $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ birim vektörü için $\mathbb{R}^3_+(\mathbf{u}) = \left\{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \mathbf{u}\rangle > 0\right\}$ yarı uzayında yönlendirilmiş kompakt bir M^2 yüzeyinin diferensiyellenebilir bir $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3_+(\mathbf{u})$ immersiyonun $\mathbf{u}$ doğrultusundaki potansiyel $\alpha-$enerjisini

$$E(\varphi) = \int_{M^2} \langle p, \mathbf{u}\rangle^{\alpha} dM^2 \tag{1.5}$$

olarak tanımlamıştır, burada dM^2 Öklidyen metrikten indirgenmiş metrik tensöre göre M^2 üzerindeki ölçü ve $p = \varphi(q)$, $q \in M^2$ dir. Eğer φ immersiyonu, (1.5) de verilen E enerjisinin bir kritik noktasıysa, o zaman

$$2H = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u}\rangle}{\langle \varphi, \mathbf{u}\rangle} \tag{1.6}$$

denklemini sağlar, burada ξ ile H, sırasıyla, φ nin Gauss dönüşümü ile ortalama eğriliğidir.

Açık bir şekilde görülebilir ki (1.6) denklemi, $\alpha = 0$ durumuna karşılık gelen klasik minimal yüzey denkleminin bir genellemesidir.

Kolayca görülebilir ki eğer M^2 bir grafik yüzeyi ise, $\alpha = 1$ ve $\mathbf{u} = (0,0,1)$ olarak alındığında, (1.6) denklemi (1.4) denklemine dönüşür. Eğer $\alpha = -2$ ise, o zaman M^2, $3-$boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$ de bir minimal yüzeye karşılık gelir (López, 2018a).

Singüler minimal yüzeyler, yoğunluklu manifoldlar ile de yakından ilişkilidir:

Yoğunluklu manifold, hacim ve hiper alanı (ve bazen düşük boyutlu alan ve uzunluk) ağırlıklandırmak için kullanılan pozitif bir e^{ϑ} yoğunluk fonksiyonuna sahip bir M^n Riemann manifoldudur (Belarbi ve Belkhelfa, 2015).

Buna göre e^{ϑ} yoğunluklu bir manifold üzerinde hiperyüzeylerin ortalama eğriliğinin doğal bir genellemesi

$$H_{\vartheta} = H - \frac{1}{n-1}\langle \nabla \vartheta, \xi\rangle \tag{1.7}$$

şeklindedir. H_{ϑ} fonksiyonuna, hiperyüzeyin *yoğunluklu ortalama eğriliği* yada $\vartheta-$*ortalama eğriliği* denir. H_{ϑ} yoğunluklu ortalama eğriliği sıfır olan hiperyüzeye $\vartheta-$*minimal hiperyüzey* denir (Belarbi ve Belkhelfa, 2015; Morgan, 2005) ve bu durumda, (1.7)

$$H = \frac{1}{n-1}\langle \nabla \vartheta, \xi \rangle \tag{1.8}$$

eşitliğine dönüşür. Kolaylıkla görülebilir ki yoğunluk fonksiyonu,

$$\vartheta(q) = \log\left(\langle q, \mathbf{u} \rangle^{\alpha}\right)$$

şeklinde seçildiğinde, (1.8) denklemi, $3-$boyutlu durumda (1.6) $\alpha-$minimal yüzey denklemine karşılık gelir (López, 2018a, 2020a; Martınez ve Martınez-Triviño, 2020).

Şimdi, 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında, bir *genelleştirilmiş silindir* (yada kısaca *silindir*) olan bir M^2 yüzeyini,

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t\mathbf{v}, \quad s \in I \subset \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

şeklinde alalım, burada γ *dayanak eğrisi* olarak adlandırılır ve $\mathbf{v}$ de belirli bir birim vektördür (Gray, 1998).

López (2018a), bir singüler minimal silindirin bir $\alpha-$katener silindir olduğunu, yani dayanak eğrisi bir $\alpha-$katener olan bir silindir olduğunu ispatlamıştır.

Daha sonra bu sonucu genelleştirerek, iki düzlem eğrisinin toplamı olarak yazılabilen ve *öteleme yüzeyleri* olarak adlandırılan yüzeyler üzerinde çalışmıştır. Bir öteleme yüzeyinin lokal parametrizasyonu, $\gamma_1, \gamma_2 : I_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$ fonksiyonları için

$$\varphi(x,y) = \gamma_1(x) + \gamma_2(y)$$

şeklindedir. γ_i eğrilerinin ortogonal düzlemlerde yatması özel durumunda, yüzey lokal olarak, tek değişkenli diferensiyellenebilir f ve g fonksiyonları için

$$z = f(x) + g(y)$$

formunda ifade edilebilir. Eğer böyle bir yüzey minimal ise, yani ortalama eğriliği sıfır ise, o zaman bu yüzey bir düzlemdir ya da *Scherk yüzeyini* tanımlar. Eğer ötelenen eğriler, ortogonal olmayan düzlemlerde yatarsa, öteleme yüzeyi lokal olarak

$$z = f(x) + g(y + \mu x), \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$$

ile verilir ve *afin öteleme yüzeyi* olarak adlandırılır (Liu ve Yu, 2013).

Daha genel olarak, $\mathbb{R}^{n+1}$de, diferensiyellenebilir tek değişkenli $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonları için öteleme hiperyüzeyleri;

$$x_{n+1} = f_1(x_1) + ... + f_n(x_n)$$

formundaki grafiklerdir. Bu tür yüzeyler için 19. yy ın ilk yarısından itibaren klasik anlamda bir çok çalışma yapılmıştır, daha ayrıntılı bilgi için, tam bir liste olmaksızın (Aydin ve Mihai, 2015; Dillen vd., 1991; Dillen vd., 1998; Goemans ve Van de Woestyne, 2011; Lima vd., 2019; Liu, 1999; Liu ve Dal Jung, 2017; Liu ve Yu, 2013; López ve Moruz, 2015; López ve Perdomo, 2017; Munteanu vd., 2016; Seo, 2013; Sun, 2000; Wang, 2020; Yoon, 2002) kaynaklarına bakılabilir.

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında, singüler minimal olan öteleme yüzeyleri ve dönel yüzeyler için aşağıdaki sınıflandırmalar elde edilmiştir (López, 2018a):

- $\mathbb{R}^3$ *de bir yatay ya da dikey doğrultuya göre bir singüler minimal öteleme yüzeyi, bir* $\alpha-$*katener silindirdir yani dayanak eğrisi bir* $\alpha-$*katener olan genelleştirilmiş bir silindirdir.*

- *Singüler minimal dönel yüzeylerin dönme ekseni* $\mathbf{u}$ *vektörüne paraleldir ya da* $\mathbb{R}^3_0(\mathbf{u})$ *düzleminde kapsanır. İlk durumda bu tür yüzeyler, dönme eksenini kesip kesmemesine bağlı olarak ikiye ayrılırlar ve dönme eksenini kesmeyenler kanatsı şekle sahiptirler. Dönme ekseni* $\mathbb{R}^3_0(\mathbf{u})$ *düzleminde kapsandığında, profil eğrisi bir* $(\alpha+1)-$*katenerdir.*

$\rho \subset \mathbb{R}^3$ kapalı bir eğri ve M^2, diferensiyellenebilir bir ∂M^2 sınırına sahip bir yüzey olsun. Genel olarak, φ nin ∂M^2 ile sınırlandırılması ρ üzerine bir diffeomorfizm olacak şekilde bir $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3_+(\mathbf{u})$ immersiyonu var ise, M^2 yüzeyine ρ *sınırına sahip bir yüzey* denir. φ bir imbedding olduğunda, ρ yerine ∂M^2 yazılır.

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında, sınırının geometrisi açısından kompakt bir singüler minimal yüzeyin şekli López tarafından incelenmiştir (López, 2020a).

López, daha sonra López (2020b) de, Öklidyen uzaydaki zincir eğrisinin iki boyutlu benzerini, $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz–Minkowski uzayında genelleştirmiştir. Öncelikle

$\langle .,. \rangle_L = dx^2 - dy^2$ metriği ile donatılmış $\mathbb{R}^2_1$ de Lorentz kateneri

$$\kappa = \alpha \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle}{\langle p, \mathbf{u} \rangle} = -\alpha \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle}{y}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu denklemi 2−boyutlu duruma genelleştirerek, $\mathbb{R}^3_1$ de *singüler maksimal yüzeyi* aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$\mathbb{R}^3_1$, $\langle .,. \rangle_L = dx^2 + dy^2 - dz^2$ kanonik Lorentz metriği ile donatılmış 3−boyutlu Lorentz–Minkowski uzayı olsun. φ, $\mathbb{R}^3_1$ ün $z > 0$ yarı–uzayında spacelike bir M^2 yüzeyinin diferensiyellenebilir immersiyonu ve ξ ile H da sırasıyla, M^2 nin birim normal vektör alanı ile ortalama eğriliği olsun. Eğer M^2 yüzeyi

$$H = -\alpha \frac{\langle \xi, (0,0,1) \rangle_L}{z}, \alpha \neq 0 \tag{1.9}$$

denklemini sağlarsa, M^2 yüzeyine $\alpha-$*singüler maksimal yüzey* adı verilir. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, $z-$koordinatı zaman koordinatını temsil ettiğinden dolayı, $\mathbb{R}^3_1$ de yerçekim kavramının bir anlamı olmamasıdır. Dolayısıyla Riemann durumunun aksine (1.9) denklemi, yalnızca, ξ ve z arasında tanımlı açıya sahip olan spacelike yüzeyleri tanımlar. (1.9) denkleminde $\alpha = -1$ durumu *Lorentz katenerin iki boyutlu benzerinin* karşılığıdır.

Bu tanımlama ile birlikte López, öteleme ve dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan singüler maksimal yüzeyler için aşağıdaki sınıflandırmaları yapmıştır (López, 2020b):

- M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de **u** vektörü ile üretilen bir parametreli ötelemeler grubununa göre invaryant olan bir $\alpha-$singüler maksimal yüzey olsun ve γ da bu yüzeyin üreteç eğrisini göstersin. O zaman **u** bir yatay vektördür ve γ, **u** vektörüne ortogonal bir düzlemde yatan bir Lorentz katenerdir.

- M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de spacelike bir L ekseni etrafındaki dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan $\alpha-$singüler maksimal bir yüzey olsun. O zaman **u** timelike vektörü L eksenine ortogonaldir ya da M^2, keyfi bir **u** timelike vektörüne sahip $\mathbb{H}^2(r)$ hiperbolik düzlemidir.

- M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de lightlike bir L ekseni etrafındaki dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan $\alpha-$singüler maksimal bir yüzey olsun. O zaman

u vektörü L eksenine ortogonaldir ya da M^2, keyfi bir **u** vektörüne sahip $\mathbb{H}^2(r)$ hiperbolik düzlemidir.

- M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de timelike bir L ekseni etrafındaki dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan bir $\alpha-$singüler maksimal yüzey olsun. O zaman **u** timelike vektörü L eksenine paraleldir ya da M^2, $\mathbb{H}^2(m)$ hiperbolik düzlemidir ve **u**, keyfi bir timelike vektördür.

Aydın ve ark., López (2018a) in $\mathbb{R}^3$ de elde ettiği sonuçları $(n+1)$–boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayındaki hiperyüzeylere genelleştirerek;

"$\mathbb{R}^{n+1}$ de singüler minimal bir M^n silindir, bir hiperdüzlem ya da $\alpha-$katener silindirdir ve bu sonuç bir **u** yatay vektörü ve bir öteleme hiperyüzeyi için de doğrudur."

sonucunu elde etmiştir (Aydin vd., 2021).

Diğer taraftan, bir Riemann manifoldu üzerinde bir yarı–simetrik (sırasıyla metrik olmayan) konneksiyon Hayden (1932) (sırasıyla Agashe ve Chafle (1992)) tarafından tanımlanmıştır ve o tarihten itibaren bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Agashe ve Chafle, 1994; Akyol ve Beyendi, 2018; Chaubey ve Yıldız, 2019; De ve Barman, 2015; Imai, 1972; Yano, 1970; Yano ve Kon, 1984).

Yayınlanmış bir çok çalışmadan da görüleceği gibi yarı–simetrik metrik (olmayan) konneksiyon kavramı büyük ilgi görmektedir. Son zamanlarda Wang (2020), iki ayrı araştırma alanı olan öteleme yüzeyler ve yarı–simetrik metrik (olmayan) konneksiyonları, yeni bir bakış açısıyla ortaya çıkan, tek bir araştırma alanında birleştirdi. Bahsedilen bu çalışmada; belirli bir yarı–simetrik metrik (sırasıyla, metrik olmayan) konneksiyona sahip $3-$boyutlu uzay formlarında minimal öteleme yüzeylerine ilişkin karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Wang'ın bakış açısına ek olarak, $\mathbb{R}^3$ de Levi–Civita konneksiyonu yerine belirli bir yarı–simetrik metrik (sırasıyla, metrik olmayan) konneksiyona sahip singüler minimal öteleme yüzeyleri üzerinde karakterizasyonlar Erdur vd. (2020) (incelemede) tarafından elde edilmiştir.

Diğer taraftan, Aydin vd. (2020) (incelemede), minimal olan singüler minimal yüzeyleri incelemiş ve bu yüzeyler sınıfına ait karakterizasyonlar vermişlerdir. Bahsedilen bu çalışmada, öncelikle $\alpha = 0$ durumunda herhangi bir minimal yüzey, (1.6) denklemi için aşikar bir çözüm olacağından, $\alpha \neq 0$ kabulü altında, $\mathbb{R}^3$ de minimal olan singüler minimal yüzeyler incelenmiştir. Bu durum altında (1.6) denklemi $\langle \xi(p), \mathbf{u} \rangle = 0$ olduğunu, yani yüzeyin her p noktasındaki teğet düzleminin **u** vektörüne paralel olduğunu ifade eder. Böyle bir durumda, yüzeyin aslında, **u** vektörüne paralel bir düzlem olduğunu ve *sabit açılı yüzeyler* adı verilen yüzey sınıfına ait olduğu sonucunu elde etmişlerdir. Daha sonra 3–boyutlu Öklid ve Lorentz–Minkowski uzaylarında belirli bir yarı–simetrik metrik (sırasıyla metrik olmayan) konneksiyona göre minimal olan singüler minimal yüzeyler incelenmiş ve aşikar sonuçların yanısıra, aşikar olmayan sonuçlar da açık denklemleri ile ifade edilmiştir.

Bu çalışma ile ilgili elde edilen tüm sonuçlar dördüncü bölümde ifade edildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Manifoldlar Üzerindeki Temel Yapılar

Tanım 2.1.1. *(Chen, 2011) Sonlu boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ şeklinde $\forall u, v \in V$ için $B(u,v) = B(v,u)$ olacak şekilde bir $\mathbb{R}-$bilineer fonksiyonudur.*

Eğer $\forall v \neq 0$ için $B(v,v) < 0$ (sırasıyla $B(v,v) \leq 0$) ise, B simetrik bilineer formuna negatif tanımlı (sırasıyla negatif yarı–tanımlı) denir. $\forall u \in V$ için $B(u,v) = 0$ olması $v = 0$ olmasını gerektiriyorsa, B ye non-dejenere denir.

Benzer şekilde eğer $\forall v \neq 0$ için $B(v,v) > 0$ (sırasıyla $B(v,v) \geq 0$) ise, B simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı (sırasıyla pozitif yarı–tanımlı) denir.

Tanım 2.1.2. *(Chen, 2011) V üzerinde bir B simetrik bilineer formunun indeksi $B\mid_W$ nun negatif tanımlı olduğu en büyük $W \subset V$ altuzayının boyutudur.*

Tanım 2.1.3. *(Chen, 2011; Şahin, 2012) Sonlu boyutlu bir V reel vektör uzayı üzerinde, bir g skaler çarpımı, bir non-dejenere simetrik biliner formdur. İç çarpım, pozitif tanımlı bir skaler çarpımdır.*

Örnek 2.1.1. *(Gray, 1998; Hacısalihoğlu, 1998) $\mathbb{R}^n$ Öklid n–uzayı, reel sayıların tüm sıralı n–lilerinden oluşan*

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (p_1, ..., p_n) \mid p_j, j = 1, ..., n, \textit{bir reel sayıdır} \right\}$$

kümesidir.

$\mathbb{R}^n$ in elemanları hem n–boyutlu uzaydaki noktaları hem de noktaların konum vektörlerini temsil eder. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzaydır, dolayısıyla toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlıdır. Buna göre eğer

$$p = (p_1, ..., p_n) \quad \textit{ve} \quad q = (q_1, ..., q_n)$$

şeklinde alınırsa, $p + q$,

$$p + q = (p_1 + q_1, ..., p_n + q_n)$$

ile verilen $\mathbb{R}^n$ in elemanıdır. Benzer şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ için λp vektörü

$$\lambda p = (\lambda p_1, ..., \lambda p_n)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ in $\langle , \rangle$ skaler çarpımı (nokta çarpımı), her

$$p = (p_1, ..., p_n) \quad ve \quad q = (q_1, ..., q_n)$$

vektör çifti için

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

ile tanımlı bir reel sayıdır. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^n$ de norm ve uzaklık fonksiyonları

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} \quad ve \quad d(p, q) = \|p - q\|$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.4. *(Hacısalihoğlu, 1998) $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$, fonksiyonu, herbir $p = (p_1, ..., p_n)$ noktasını, kendi p_i, i. koordinatına taşıyan bir fonksiyon olarak tanımlansın. Buna göre $x_1, ...x_n$ fonksiyonlarına, $\mathbb{R}^n$ nin doğal koordinat fonksiyonları denir.*

Tanım 2.1.5. *(O'Neill, 1983) $\mathbb{R}^m$ in bir U açık alt kümesinden $\mathbb{R}^n$ e tanımlı bir ϕ fonksiyonu için herbir $x_i \circ \phi, 1 \leq i \leq n$, diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise, ϕ de diferensiyellenebilirdir denir.*

Tanım 2.1.6. *(Şahin, 2012) V bir vektör uzayı ve V^*da V vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda*

$$\phi : \overbrace{V \times V \times \ldots \times V}^{m-tane} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}^{n-tane} \to \mathbb{R}$$

ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, ..., v_m^* \in V^*$ olmak üzere

$$\phi : \left(v_1, ..., \lambda_1 v_k + \lambda_2 v_k', ...\right) = \lambda_1 \phi\left(v_1, ..., v_k, ...\right) + \lambda_2 \phi\left(v_1, ..., v_k', ...\right)$$

şartını sağlayan ϕ dönüşümüne m. mertebeden kovaryant ve n. mertebeden kontravaryant tensör adı verilir.

Örnek 2.1.2. *(Şahin, 2012) Her bilineer form, 2. mertebeden kovaryant tensördür.*

Tanım 2.1.7. *(Şahin, 2012) M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer $\forall p \in M$ için, $\mathbb{R}^m$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir U açık komşuluğu varsa, M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $boy\left(\mathbb{R}^m\right) = m$ olduğundan, manifoldun boyutu m olarak tanımlıdır.*

Genel olarak bir manifold, Öklid uzayına lokal olarak benzeyen bir topolojik uzaydır.

2.1.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Diferensiyellenebilir manifold kavramı, diferensiyel hesabın metotlarını; $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu vektör uzayından daha genel uzaylara genişletmek için önemli bir kavramdır.

Tanım 2.1.8. *(Şahin, 2012) M, $n-$boyutlu manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), ...\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, $\mathbb{A}$ kolleksiyonuna M üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) denir.*

1. $\{U,V,W,...\}$ açık kümelerinin kolleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.

2. $\mathbb{A}$ daki herhangi iki harita r. mertebeden uyumludur.

3. $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $\left(\overline{\varphi},\overline{U}\right)$ haritası $\mathbb{A}$ daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $\left(\overline{\varphi},\overline{U}\right) \in \mathbb{A}$ dır.

Tanım 2.1.9. *(Şahin, 2012) Eğer bir M manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa, M manifolduna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her haritasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir.*

Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa, M manifolduna, $C^\infty-$manifold (veya kısaca diferensiyellenebilir manifold) adı verilir.

Örnek 2.1.3. *(Şahin, 2012) Özdeşlik dönüşümü ile verilen diferensiyellenebilir yapıya sahip $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı, diferensiyellenebilir bir manifoldun aşikar bir örneğidir.*

Örnek 2.1.4. *(Şahin, 2012)* $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^m$ *bir eğri olmak üzere* $M = Im(\gamma)$ $1-$*boyutlu bir manifolddur, burada* $Im(\gamma)$ *ile* γ *dönüşümünün görüntü kümesi gösterilmektedir. Bu manifoldun tek atlası* $(U,\phi) = \left(\gamma(a,b), \gamma^{-1}|_{Im(\gamma)}\right)$ *dır.*

Örnek 2.1.5. *(Şahin, 2012)* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon ve* $M = \{(x_1,...,x_m,x_{m+1}) \mid x_{m+1} = f(x_1,...,x_m)\}$ *olsun. M kümesi f fonksiyonunun grafiği olarak adlandırılır. Bu durumda M, m−boyutlu bir manifolddur. Manifoldun atlası* $U = M$ *dir.* $\phi : U \to V = \mathbb{R}^m$, $\phi(x_1,...,x_m,x_{m+1}) \to (x_1,...,x_m)$ *izdüşümü ile verildiğinden süreklidir. Diğer taraftan*

$$\phi^{-1}(x_1,...,x_m) = (x_1,...,x_m, f(x_1,...,x_m))$$

olduğundan ϕ^{-1} *de sürekli olur. Böylece M bir manifolddur.*

Manifoldların diferensiyel geometrisinde en önemli kavramlardan biri tanjant vektör kavramıdır. Manifold esas olarak bir topolojik uzaydır. Bunun üzerinde diferensiyel yapı tanımlanarak, diferensiyel tekniklerini kullanma olanağı sağlanmıştır. Tanjant vektör kavramı da manifold üzerinde vektör uzay yapısı taşıyarak cebirsel teknikler kullanmayı olanaklı kılmaktadır.

Tanım 2.1.10. *(Do Carmo, 1992) M bir diferensiyellenebilir manifold ve* $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ *diferensiyellenebilir eğri olsun. Kabul edelim ki* $\alpha(0) = p$ *ve* $\mathscr{D}$ *de p noktasında diferensiyellenebilen fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda* $\mathscr{D}$ *üzerinde tanımlanan*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in \mathscr{D}$$

ile tanımlı $\alpha'(0)$ *fonksiyonuna* $t = 0$ *da* α *eğrisine tanjant vektör adı verilir. Manifoldun bir p noktasındaki tanjant vektör,* $\alpha(0) = p$ *olmak üzere* $t = 0$ *da* α *eğrisine teğet olan vektördür.*
M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi T_pM *ile gösterilir. Fonksiyonlardaki toplama işlemi ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte bu küme bir vektör uzay yapısına sahip olur. Bu uzaya manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı denir.*

Tanjant vektörlerinin uzayı bir vektör uzay yapısına sahiptir ve tanjant uzayın boyutu manifoldun boyutuna eşittir. Bunun nedeni esas olarak manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı ile Öklid uzayının izomorfik olmasıdır.

Örnek 2.1.6. *(Şahin, 2012)* $r = r(u,v) = (u(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $\mathbb{R}^3$ *de bir regüler yüzey olsun. Buna göre Örnek 2.1.3 e göre* $r(u,v)$*, boyutu 2 olan bir manifolddur. Yüzey üzerinde bir* $r(t) = r(u(t), v(t))$ *eğrisini göz önüne alalım. Bu durumda eğri üzerindeki* $\dot{r}$ *tanjant vektörü;*

$$\dot{r} = \frac{\partial r(u,v)}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v}\frac{dv}{dt} = r_u\dot{u} + r_v\dot{v}$$

şeklindedir. Yüzey regüler olduğundan $r_u = (x_u, y_u, z_u)$ *ve* $r_v = (x_v, y_v, z_v)$ *vektörleri lineer bağımsızdır. Böylece yüzeye teğet olan her vektör* r_u *ve* r_v *vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Başka bir ifadeyle yüzey üzerindeki bir p noktasında yüzeye teğet bütün vektörlerin kümesi, bazı* r_u *ve* r_v *olan* $2-$*boyutlu bir altuzaydır. Bu uzaya yüzeyin p noktasındaki teğet düzlemi (tanjant uzayı) denir.*

Tanım 2.1.11. *(Hacısalihoğlu, 1998; Şahin, 2012) M bir manifold ve* T_pM *manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda* $\forall p \in M$ *noktasına* T_pM *uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir vektör alanı*

$$X : M \to \bigcup_{p\in M} T_pM$$

diferensiyellenebilir dönüşümüdür. Vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ *ile gösterilir.*

Bir vektör alanı, tanjant vektörlerinin topluluğudur. Başka bir ifadeyle, bir vektör alanı, bir manifoldun bir p noktasına bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.12. *(Şahin, 2012) M ve N iki manifold ve* $F : M \to N$ *bir dönüşüm olsun. Bu durumda* $p \in M$ *noktasının komşuluğundaki harita* (U, ϕ) *ve* $F(p) \in N$ *noktasının komşuluğundaki harita* (V, φ) *olmak üzere,* $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ *den* $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ *kümesine olan* $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ *dönüşümü diferensiyellenebiliyorsa F dönüşümü* $p \in M$ *noktasında diferensiyellenebilirdir denir.*

Tanım 2.1.13. *(Şahin, 2012) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve* $F : M \to N$ *diferensiyellenebilir dönüşüm olsun.* $X \in T_pM$ *için, M de seçilen* $\alpha(t)$ *eğrisine* $\alpha(t_0) = p$ *noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda* $F(p) = F(\alpha(t_0))$ *noktasında* $F(\alpha(t))$ *eğrisine teğet olacak şekilde* $F_*(X)$ *vektörünü karşılık getiren* $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ *dönüşümüne, türev dönüşümü denir. Türev dönüşümü dF ile de gösterilir.*

Tanım 2.1.14. *(Şahin, 2012) M ve N, sırasıyla, m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki rankı, F_* dönüşümünün p noktasındaki rankı olarak tanımlanır.*

Tanım 2.1.15. *(Şahin, 2012) Eğer her p noktasında F dönüşümünün rankı m ise (yani $rank(F_{*p}) = m$), F dönüşümüne dolgulama veya immersiyon (immersion) adı verilir.*

Tanım 2.1.16. *(Şahin, 2012) Eğer F birebir ise, bu durumda F dönüşümü N ile $\bar{N} = F(M)$ arasında birebir eşleme kurar. Bu eşleme ile birlikte $\bar{N}$ üzerinde topoloji ve bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanırsa $\bar{N}$ kümesine N manifoldunun altmanifoldu denir. Bu durumda, eğer F,M manifoldundan $F(M)$ ye bir homeomorfizma ve F,M altuzay topolojisine sahip ise F dönüşümüne yerleştirme(imbedding) denir.*

Dolgulama dönüşümü verilmişse yerleştirme dönüşümü tanımlanabilir. $F : M \to N$ bir dolgulama dönüşümü olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasının bir U komşuluğunda $F\mid_U$ yerleştirme dönüşümü tanımlanabilir. Esas olarak bu sonuç bize her dolgulamanın (immersiyon), yerel çalışıldığında bir yerleştirme (imbedding) olduğunu ifade etmektedir.

Tanım 2.1.17. *(Şahin, 2012) Eğer F, $m-$boyutlu M manifoldundan $n-$boyutlu N manifolduna bir dolgulama ise $m \leq n$ dir. $n-m$ farkına F dolgulama dönüşümünün ekboyutu denir.*

Tanım 2.1.18. *(Şahin, 2012) M bir diferensiyellenebilir manifold ve M manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere, $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ fonksiyonu için*

$$[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie (parantez) operatörü denir, burada $\Gamma(TM)$, M üzerindeki vektör alanları kümesi ve $X(f)$, X vektör alanına göre f fonksiyonunun yöne göre türevidir.

Manifoldlar üzerinde konneksiyon kavramı, "eğer M bir manifold, X, M üzerinde bir vektör alanı ve α, M manifoldunda bir eğri ise, X vektör alanının α

eğrisi boyunca sabit olup olmadığına nasıl karar verilebilir" sorunun karşılığı olarak düşünülebilir:

Tanım 2.1.19. *(Şahin, 2012) M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ve $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için*

$$\tilde{\nabla} : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

ile tanımlı ve

1. $\tilde{\nabla}_{X+Y}Z = \tilde{\nabla}_X Z + \tilde{\nabla}_Y Z$
2. $\tilde{\nabla}_X(Y+Z) = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z$
3. $\tilde{\nabla}_{fX}Y = f\tilde{\nabla}_X Y$
4. $\tilde{\nabla}_X(fY) = X[f]Y + f\tilde{\nabla}_X Y$

şartlarını sağlayan $\tilde{\nabla}$ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. Bu durumda $\tilde{\nabla}_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi adı verilir. Tanımdan görülmektedir ki, bir afin konneksiyon M üzerinde bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür.

Örnek 2.1.7. *(Şahin, 2012) $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında kartezyen koordinat sistemi $(x_1,...,x_n)$ olsun. Bu durumda $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $Y = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\mathbb{R}^n$ de iki vektör alanı olsun, burada f_i ve g_i, verilen kartezyen koordinatlara göre vektör alanlarının bileşenlerini göstermektedir. Bu durumda*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \sum_{i=1}^{n} X[g_i]\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

ile tanımlı dönüşümü göz önüne alalım. Kolayca görülür ki $\tilde{\nabla}$, Tanım 2.1.19 daki şartları sağlar. Böylece $\tilde{\nabla}$, $\mathbb{R}^n$ de bir afin konneksiyondur. Bu konneksiyona Öklid uzayının standart konneksiyonu denir.

Tanım 2.1.20. *(Şahin, 2012) M bir manifold ve $\tilde{\nabla}$, manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda*

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X,Y) \to T(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X,Y]$$

ve

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X,Y,Z) \to R(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlı T ve R tensör alanlarına $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunun, sırasıyla, torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü adı verilir. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonu torsiyonsuzdur denir. Eğer $R = 0$ ise M manifoldu flattır (düzlemseldir) denir .

Örnek 2.1.8. *(Şahin, 2012) $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, U bir açık küme olsun. U üzerinde X ve Y vektör alanları seçilmiş olsun. Bu durumda*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

dir, burada $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ve $\mu_1, ..., \mu_n$ sırasıyla $\mathbb{R}^n$ de $(x_1, ..., x_n)$ kartezyen koordinatlarına göre X ve Y vektör alanlarının bileşenleridir. Y vektör alanının X vektör alanı doğrultusundaki türevi

$$\tilde{\nabla}_X Y = \sum_{j=1}^{n} X[\mu_j] \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\lambda_j \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} - \mu_j \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olur. Bu ifadenin sağ tarafı $[X,Y]$ olduğundan, $\mathbb{R}^n$ deki standart konneksiyonun torsiyonsuz konneksiyon olduğu elde edilir.

Bir M manifoldu üzerindeki diferensiyel yapı, manifold üzerinde tensör, diferensiyel form, Lie türevi, kovaryant türev ve benzeri bir çok kavramı tanımlama olanağı verir. Bununla birlikte, uzunluk, eğrilik, açı ve benzeri kavramları tanımlayabilmek için Riemann manifoldları kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

2.2 Riemann ve Yarı–Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde bir g metrik tensörü, M üzerinde sabit indeksli, simetrik, dejenere olmayan (0,2) tipinde bir tensör alanıdır. Yani g, $\forall p \in M$ noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skaler çarpımını taşır ve g_p nin indeksi $\forall p \in M$ için aynıdır.*

Tanım 2.2.2. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) Bir M yarı–Riemann manifoldu, g metrik tensörü ile donatılmış diferensiyellenebilir bir manifolddur. M üzerinde indeksin s, $\quad 0 \leq s \leq m = dimM$, ortak değerine, M nin indeksi denir. Eğer $s = 0$ ise, M ye Riemann manifoldu denir. Bu durumda her g_p, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpımdır.*

Tanım 2.2.3. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) Eğer $s = 1$ ve $m \geq 2$ ise, M Lorentz manifoldu olarak adlandırılır ve karşılık gelen metriğe ise Lorentz metriği denir.*

Örnek 2.2.1. *(Şahin, 2012) $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayını ve bu uzay üzerinde*

$$\langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iç çarpımını göz önüne alalım. Bu durumda $\langle , \rangle$ bilineer, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $\langle , \rangle$ bir Riemann metriği ve $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ ikilisi bir Riemann manifoldudur.

Tanım 2.2.4. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) Bir yarı–Riemann manifoldunun v tanjant vektörü için, eğer $v = 0$ yada $\langle v,v \rangle > 0$ (sırasıyla $\quad \langle v,v \rangle < 0$) ise, v ye spacelike (sırasıyla timelike) denir. Eğer $\langle v,v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye lightlike yada null vektör adı verilir.*

Eğer $\{x_1,...,x_n\}$, $\mathscr{U} \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi ise, $\mathscr{U}$ üzerinde g metrik tensörünün bileşenleri

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad (1 \leq i,j \leq n)$$

şeklindedir. g simetrik olduğundan, $g_{ij} = g_{ji}$ dir. $\mathscr{U}$ üzerinde g metrik tensörü,

$$g = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.2.5. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) Bir $s \in [0,n]$ tamsayısı için, s indeksli*

$$\langle v_p, w_p \rangle_s = \sum_{j=1}^{s} v_j w_j - \sum_{k=s+1}^{n} v_k w_k$$

metrik tensörüne sahip $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayına, yarı–Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}^n_s$ ile gösterilir.

Eğer $s = 0$ ise $\mathbb{R}^n_s$, $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n$ Öklid n–uzayına indirgenir.

Eğer $s = 1$ ise $\mathbb{R}^n_1$ yarı–Öklid uzayına, n–boyutlu Lorentz–Minkowski uzayı denir.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & 1 \leq i \leq s \quad \text{ise} \\ -1, & s+1 \leq s \leq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

notasyonu kullanılarak, $\mathbb{R}^n_s$ nin metrik tensörü

$$g = \sum \varepsilon_i dx_i \otimes dx_i$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 2.2.2. *(Şahin, 2012) $\mathbb{R}^n$ de tanımlanan metrik, yukarıdaki notasyona göre*

$$g = \sum \varepsilon_i (dx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.6. *(O'Neill, 1983) M ve N, sırasıyla, g_M ve g_N metriklerine sahip yarı–Riemann manifoldları olsunlar. M den N ye bir izometri, metrik tensörü koruyan, yani $\phi^*(g_N) = g_M$ eşitliğini sağlayan bir $\phi : M \to N$ izomorfizmidir.*

Teorem 2.2.1. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) Bir M yarı–Riemann manifoldu üzerinde, $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonu vardır:*

(a) $\tilde{\nabla}$ torsiyonsuzdur, yani $[Y,Z] = \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Z Y$

(b) $X\langle Y,Z\rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z\rangle$ (metrikle bağdaşabilirlik şartı).

Bu tek $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonu, M nin Levi–Civita konneksiyonu, Riemann konneksiyonu veya metrik konneksiyon olarak adlandırılır.

Bir Riemann metriği p noktasında M nin her T_pM tanjant uzayı üzerinde bir iç çarpıma olanak verir. Bir vektör alanının uzunluğunu ve iki vektör alanı arasındaki açıyı tanımlamayı mümkün kılar.

Tanım 2.2.7. *(López, 2014) $\mathbb{R}^3_1$ de keyfi bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin $\alpha'(s)$ vektörlerinin tamamı spacelike, timelike ya da null (lightlike) ise α eğrisine, sırasıyla, spacelike, timelike ya da null (lightlike) eğri denir.*

Lemma 2.2.1. *(López, 2014) Bir $v = (v_1, v_2, v_3)$ timelike vektörüne pozitiftir (sırasıyla negatif) denir gerek ve yeter şart $v_3 > 0$ (sırasıyla $v_3 < 0$) dır.*

Tanım 2.2.8. *(López, 2014) Bir $v \in \mathbb{R}^3_1$ vektörünün normu*

$$\|v\|_1 = \sqrt{|\langle v, v\rangle_1|}$$

ile tanımlıdır, burada $\langle , \rangle_1$, $\mathbb{R}^3_1$ ün metrik tensörünü göstermektedir.

Tanım 2.2.9. *(López, 2014) u ve v, $\mathbb{R}^3_1$ de spacelike bir altvektör uzayını geren spacelike vektörler olsunlar. O zaman $|\langle u, v\rangle_1| \leq \|u\|_1 \|v\|_1$ dir ve dolayıyla*

$$|\langle u, v\rangle_1| = \|u\|_1 \|v\|_1 \cos\theta$$

olacak şekilde bir tek pozitif θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına, u ve v vektörleri arasındaki Lorentz spacelike açı denir.

Tanım 2.2.10. *(López, 2014) u ve v, $\mathbb{R}^3_1$ de timelike bir altvektör uzayını geren spacelike vektörler olsunlar. O zaman $|\langle u, v\rangle_1| > \|u\|_1 \|v\|_1$ dir ve dolayıyla*

$$|\langle u, v\rangle_1| = \|u\|_1 \|v\|_1 \cosh\theta$$

olacak şekilde bir tek pozitif θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına, u ve v vektörleri arasındaki Lorentz timelike açı denir.

Tanım 2.2.11. *(López, 2014) u ve v, $\mathbb{R}^3_1$ de pozitif (sırasıyla negatif) timelike vektörler olsunlar. O zaman*

$$|\langle u, v\rangle_1| = \|u\|_1 \|v\|_1 \cosh\theta$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına, u ve v vektörleri arasındaki Lorentz timelike açısı adı verilir.

Tanım 2.2.12. *(López, 2014)* $\mathbb{R}_1^3$ *de u bir spacelike vektör ve v bir pozitif timelike vektör olsun. O zaman*

$$|\langle u,v\rangle_1| = \|u\|_1 \|v\|_1 \sinh\theta$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek θ *reel sayısı vardır. Bu* θ *reel sayısına, u ve v vektörleri arasındaki Lorentz timelike açısı adı verilir.*

Tanım 2.2.13. *(López, 2014)* $\mathbb{R}_1^3$ *de vektörel çarpım aşağıdaki gibi tanımlıdır:*

$$\times_1 = \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_1^3 \to \mathbb{R}_1^3,$$

$$u \times_1 v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

burada $u = (u_1, u_2, u_3)$ *ve* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *dür.* $\mathbb{R}_1^3$ *de vektörel çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

- $u \times_1 v$*, hem u vektörüne hem de v vektörüne ortogonaldir, yani*

$$\langle u \times_1 v, u\rangle_1 = \langle u \times_1 v, v\rangle_1 = 0$$

dır.

- $u \times_1 v = -v \times_1 u$ *şeklindedir.*
- $\langle u \times_1 v, u \times_1 v\rangle_1 = -\langle u,u\rangle_1 \langle v,v\rangle_1 + \langle u,v\rangle_1^2$ *dir.*

Tanım 2.2.14. *(Yano ve Kon, 1984)* $(\tilde{M}, g)$, $3-$*boyutlu bir yarı–Riemann manifoldu;* $\tilde{\nabla}$, *M üzerinde bir afin konneksiyon ve* T, $\tilde{\nabla}$ *nın torsiyon tensör alanı olsun. O zaman*

(a) Eğer T sıfır (sırasıyla, sıfırdan farklı) ise, $\tilde{\nabla}$ *ya simetrik (sırasıyla, simetrik olmayan) konneksiyon,*

(b) Eğer g paralel (sırasıyla, paralel değil) yani $\tilde{\nabla} g = 0$ *ise,* $\tilde{\nabla}$ *ya metrik (sırasıyla, metrik olmayan) konneksiyon,*

(c) Eğer $\pi(X) = g(X,W)$, $\pi \in \Gamma\left(T\tilde{M}^{(0,1)}\right)$, $W \in \Gamma\left(T\tilde{M}\right)$ *için, T torsiyon tensörü*

$$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$$

eşitliğini sağlarsa, $\tilde{\nabla}$ *ya yarı–simetrik konneksiyon denir.*

(d) $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonun, Levi–Civita konneksiyonu olması için gerek ve yeter şart simetrik ve metrik olmasıdır.

Tanım 2.2.15. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) $(\tilde{M},g)$ bir yarı–Riemann manifoldu ve $X \in \Gamma(TM)$ olsun. $(\tilde{M},g)$ üzerinde X vektör alanının diverjensi*

$$divX = iz\nabla X$$

olarak tanımlanır. Böylece $\{X_1,...,X_n\}$, M üzerinde lokal ortonormal çatı ise

$$divX = \sum_{i=1}^{n} g\left(\tilde{\nabla}_{X_i}X, X_i\right)$$

olur.

Tanım 2.2.16. *(Chen, 2011; O'Neill, 1983) $(\tilde{M},g)$ bir yarı–Riemann manifoldu ve $f : (\tilde{M},g) \to C^{\infty}(\tilde{M},\mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. $(\tilde{M},g)$ üzerinde f fonksiyonunun gradiyenti ∇f, $\tilde{M}$ üzerinde bir vektör alanıdır ve $X \in \Gamma(T\tilde{M})$ için*

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.2.3. *(Şahin, 2012) $\{e_1,...,e_n\}$, $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayın bir bazı olsun. Bu durumda f fonksiyonunun gradiyenti*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i$$

dir.

2.2.1 Riemann ve Yarı–Riemann Altmanifoldları

N, $m,(m = n+k)-$boyutlu M yarı–Riemann manifoldunun, $n-$boyutlu yarı–Riemann altmanifoldu olsun. Her T_pN, $p \in N$, tanjant uzayı, T_pM nin dejenere olmayan bir altuzayıdır. Dolayısıyla

$$T_p(M) = T_p(N) \oplus T_p(N)^{\perp}$$

direkt toplam ayrışımı yazılabilir ve $T_p(M)^{\perp}$ de dejenere değildir. $T_p(N)^{\perp}$ ve $T_p(N)$ in vektörleri, sırasıyla, N nin normali ve teğeti olarak adlandırılır. Dolayısıyla

$boy\left(T_p(N)^{\perp}\right) = k$ $(= T_p(N)$ nin ekboyutu) dır. Buna göre benzer şekilde, vektör alanları uzayı için de

$$\Gamma(TM) = \Gamma(TN) \oplus \Gamma(TN)^{\perp}$$

direkt toplamı yazılabilir (Chen, 1973; O'Neill, 1983).

(M, g) ve N, sırasıyla, $m-$boyutlu ve n boyutlu yarı–Riemann manifoldu olsun. Bu durumda $\phi : N \to M$ immersiyonunu alalım. Buna göre ϕ immersiyonu M üzerinde $\phi^* g$ ile tanımlı simetrik, dejenere olmayan bilineer forma indirger.

Tanım 2.2.17. *(Chen, 1973) Bir $p \in N$ noktasında M nin bir ξ_p vektörü, N nin p noktasındak her X_p vektörü için*

$$g(X_p, \xi_p) = 0$$

eşitliğini sağlarsa, ξ_p ye, p noktasında N nin M deki birim normal vektörü denir.

Önerme 2.2.1. *(Chen, 1973, 2011) M ve N yarı–Riemann manifoldu ve $\phi : N \to M$ bir izometrik immersiyon olsun. X ile Y, N üzerinde iki vektör alanı ve $\tilde{X}$ ile $\tilde{Y}$ da, sırasıyla, X ve Y nin genişlemeleri olsunlar. O zaman $\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)|_M$ genişlemelere bağlı değildir. Eğer bu konneksiyon $\tilde{\nabla}_X Y$ ile gösterilirse,*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

olur. Burada $\nabla_X Y$, N nin bir tanjant vektör alanı ve ∇ ise $\tilde{g}$ ya göre N manifoldu üzerinde tanımlı Riemann konneksiyonu (Levi–Civita konneksiyonu) ve $h(X, Y)$ de N üzerinde simetrik ve bilineer, normal vektör alanıdır.

Tanım 2.2.18. *(Chen, 1973) Önerme 2.2.1 de verilen ∇ Riemann konneksiyonu ve h, sırasıyla, N altmanifoldunun indirgenmiş konneksiyonu ve ikinci temel formu olarak adlandırılır.*

Tanım 2.2.19. *(Chen, 1973, 2011) $\phi : N \to M$ bir izometrik immersiyon olsun. ξ ve X, sırasıyla, N üzerinde bir normal vektör alanı ve bir vektör alanı olsun. O zaman $\tilde{\nabla}_x \xi$*

$$\tilde{\nabla}_x \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^{\perp} \xi$$

olarak ayrıştırılabilir. Bu eşitliğe Weingarten formülü ve A_ξ ye de ξ nin Weingarten dönüşümü ya da şekil operatörü adı verilir. Burada $-A_\xi(X)$ ve $\nabla_X^{\perp} \xi$, sırasıyla, $\tilde{\nabla}_x \xi$ nin tanjant ve normal bileşenleridir.

$A_\xi(X)$ ve $\nabla^{\perp}_X \xi$ vektör alanları N üzerinde diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $\forall p \in N$ noktası için p noktasındaki $h(X,Y)$, yalnızca X_p ve Y_p ye bağlıdır.

Tanım 2.2.20. *(Şahin, 2012) Eğer ekboyut $(m-n)=1$ ise altmanifolda hiperyüzey adı verilir. Bu durumda $\chi(M)$, $1-$boyutludur.*

Tanım 2.2.21. *(Chen, 2011; Şahin, 2012) M bir yarı–Riemann manifoldu; N, M nin altmanifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda*

$$H=\frac{1}{n}izh=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i)$$

ile tanımlı H vektör alanı, normal demetin kesitidir ve ortalama eğrilik vektör alanı olarak tanımlıdır.

Tanım 2.2.22. *(Chen, 1973) Ortalama eğrilik vektör alanı sıfıra eşit olan bir M altmanifolduna, minimal altmanifold denir.*

Önerme 2.2.2. *(Chen, 1973) $\phi : N \to \mathbb{R}^m_s$, N yarı–Riemann $n-$manifoldundan, yarı–Öklidyen uzaya tanımlı bir izometrik immersiyon olsun. O zaman*

$$\triangle\phi=-nH$$

dır. Burada H, immersiyonun ortalama eğrilik vektörüdür.

Önerme 2.2.3. *(Dierkes vd., 2010) $M\subset\mathbb{R}^{n+k}$, $\mathbb{R}^{n+k}$ nın $n-$boyutlu bir C^2 altmanifoldu ve $N_1,...,N_k$, $T_pM^{\perp}$ uzayının bir ortonormal bazı olsun. O zaman p noktasında M nin $\vec{H}=\vec{H}(p)$ ortalama eğrilik vektörü*

$$\vec{H}(p)=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(div_M N_j\right)N_j \tag{2.2.1}$$

ile verilir.

2.3 Öklid ve Lorentz-Minkowski Uzaylarında Yüzeyler

Tanım 2.3.1. *(Kühnel, 2015) $M^2\subset\mathbb{R}^2$ bir açık küme olsun. Parametrize edilmiş bir yüzey elementi, bir*

$$\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$$

immersiyonudur. φ immersiyonu, bir parametrizasyon; M^2 nin elemanları parametreler ve bu parametrelerin φ altındaki görüntüleri noktalar olarak adlandırılırlar.

Eğer φ dönüşümünün rankı maksimalse yani φ bir immersiyon ise, φ dönüşüme regüler yüzey elementi denir.

Açıklamalar:

- Kartezyen koordinatlarda, parametrizasyonun klasik tanımı x, y, z fonksiyon üçlüsüyle

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

şeklinde verilir. Burada (u,v) parametresi, (x,y,z) noktasına eşlenir.

- $\varphi = \varphi(u,v)$ dönüşümünün bir immersiyon olması özelliği, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ vektörlerinin her noktada lineer bağımsız olması özelliğine denktir. Bu vektörler, teğet düzlemi gererler. Bu düzlemin ortogonal tümleyeni, $1-$boyutlu normal uzaydır. Teğet düzlemin elemanları, tanjant vektörler ve normal düzlemin elemanları normal vektörler olarak adlandırılır.

- $\mathbb{R}^3$ ün $2-$boyutlu alt manifoldu lokal olarak bir yüzey elementi olarak tanımlanabilir.

- Reel değerli, diferensiyellenebilir keyfi bir h fonksiyonunun grafiği,

$$\varphi(u,v) = (u, v, h(u,v))$$

immersiyonunun görüntüsü olarak düşünülebilir. Tersine, her iki boyutlu altmanifold (ve ayrıca her yüzey elementi), koordinatlar uygun seçilirse, bir fonksiyonun grafiği ile tanımlanabilir.

Tanım 2.3.2. *(Kühnel, 2015) Bir $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ yüzey elementi için,*

$$\xi : M^2 \to S^2$$

Gauss dönüşümü,

$$\xi(u,v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}\|}$$

formülü ie tanımlıdır.

Tanım 2.3.3. *(Kühnel, 2015)* $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$, *bir yüzey elementi olsun.* ∇^L *ile* $\mathbb{R}^3$ *ün Levi–Civita konneksiyonu gösterilsin. Buna göre birinci ve ikinci temel formun katsayıları, sırasıyla,*

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle$$

ve teğet düzlemin $\{f_1, f_2\}$ *bazı için*

$$h_{ij} = \langle \nabla^L_{f_i} f_j, \xi \rangle$$

şeklindedir, burada $1 \leq i, j \leq 2$ *dir.*

Tanım 2.3.4. *(Kühnel, 2015)* $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ *yüzey elementinin ortalama eğriliği;*

$$H = \frac{g_{22}h_{11} - g_{12}\left(h_{12} + h_{21}\right) + g_{11}h_{22}}{2det g_{ij}}$$

dır.

Tanım 2.3.5. *(Kühnel, 2015)* $M^n \subset \mathbb{R}^n$ *bir açık küme ve* φ *bir* C^2-*immersiyon ise,* $\varphi : M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *dönüşümü, bir regüler hiperyüzey elementi olarak adlandırılır.*

Önerme 2.3.1. *(Chen, 1973)* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de* $x_{n+1} = f\left(x_1, ..., x_n\right)$ *formundaki bir grafik için;*

- *Birim normal vektör alanı,*

$$\xi = -\frac{\left(f_{x_1}, ..., f_{x_n}, -1\right)}{\sqrt{1 + \sum_{i=j}^{n} \left(f_{x_j}\right)^2}}$$

dir, burada $f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ *dir.*

- *İndirgenmiş metrik temsörün (yada birinci temel form) bileşenleri*

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x_i} f_{x_j}$$

dir. Burada δ_{ij} *ile Kronocker delta gösterilmektedir.*

- *İkinci temel formun bileşenleri*

$$h_{ij} = \frac{f_{x_i x_j}}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} \left(f_{x_j}\right)^2}}$$

şeklindedir.

- *H ortalama eğriliği*

$$H=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f_{x_j}}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n}\left(f_{x_j}\right)^2}}\right) \tag{2.3.1}$$

dir.

Tanım 2.3.6. *(López, 2014) M yüzeyi $\varphi : M \to \mathbb{R}_1^3$ immersiyonu ile verilmiş olsun. Eğer φ immersiyonunun tüm teğet düzlemleri spacelike (sırasıyla timelike, ligtlike) ise φ immersiyonuna spacelike (sırasıyla timelike, ligtlike) dır denir.*

$\mathbb{R}_1^3$ uzayına immers edilmiş bir yüzey verildiğinde, causal karakter, yüzeyin farklı noktalarında değişebilir. Bu ise yüzeyin Tanım 2.3.6 da bahsedilen türlerden birisi olarak sınıflandırılmasının gerekmediği sonucunu verir.

Spacelike (sırasıyla timelike) bir M yüzeyi ve $p \in M$ için

$$\mathbb{R}_1^3 = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$$

ayrışımı elde edilir, burada $(T_pM)^{\perp}$, $1-$boyutlu timelike (sırasıyla spacelike) bir altuzaydır. Gauss dönüşümü $\|\xi(p)\|_1 = 1$ ve $\forall p \in M$ için $xi(p) \in (T_pM)^{\perp}$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir dönüşümüdür.

Örnek 2.3.1. *(López, 2014) $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, bir $U \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun grafiği*

$$S = graph(f) = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in U\}$$

ile tanımlıdır. M^2 yüzeyi

$$\varphi : U \to \mathbb{R}_1^3,$$
$$\varphi(x,y) = (x,y,f(x,y))$$

immersiyonunun görüntüsü olarak göz önüne alınırsa, $\varphi_x = (1,0,f_x)$ ve $\varphi_y = (0,1,f_y)$ olduğundan, $\{\varphi_x, \varphi_y\}$ ye göre indirgenmiş metriğin matrisi

$$\begin{pmatrix} 1-(f_x)^2 & -f_xf_y \\ -f_xf_y & 1-(f_y)^2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve bu matrisin determinantı

$$1-(f_x)^2-(f_y)^2 = 1-\|\nabla f\|^2$$

dir. Böylece φ immersiyonuna

- $\|\nabla f\|^2 < 1$ *ise spacelike,*
- $\|\nabla f\|^2 > 1$ *ise timelike,*
- $\|\nabla f\|^2 = 1$ *ise lightlike*

denir.

Bir f fonksiyonu verildiğinde, f fonksiyonunun grafiği $xy-$düzlemi (Örnek 2.3.1 deki gibi) $yz-$düzlemi ve $xz-$düzlemi üzerinde göz önüne alınabilir. Her durumda, causal karakter aynı f fonksiyonu için değişir. Örneğin, yüzey $P = \{(f(y,z), y, z) : (y,z) \in U\}$ ile verilen $x = 0$ denklemine sahip timelike düzlem üzerinde bir grafik ise, indirgenmiş metriğin matrisi

$$\begin{pmatrix} 1+(f_y)^2 & f_y f_z \\ f_y f_z & (f_z)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

dir. Bu matrisin determinantı olan $-(f_y)^2 + (f_z)^2 - 1$, Örnek 2.3.1 de verilen $1 - \|\nabla f\|^2$ den farklıdır ve bu determinantın işareti yüzeyin causal karakterini belirler. Böylece aynı f fonksiyonu, farklı causal karakterlere sahip yüzeyler verebilir.

Önerme 2.3.2. *(López, 2014) Bir spacelike (sırasıyla timelike) yüzey, lokal olarak $z = 0$ (sırasıyla $x = 0$ yada $y = 0$) denklemli düzlemde tanımlı bir fonksiyonun grafiğidir.*

Tanım 2.3.7. *(López, 2014) $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3_1$, bir M^2 yüzeyinin spacelike ya da timelike immersiyonu ve ξ de M^2 üzerinde bir birim normal vektör alanı olsun. Buna göre*

$$\langle \xi, \xi \rangle_L = \varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{eğer } M^2 \text{ spacelike ise,} \\ 1, & \text{eğer } M^2 \text{ timelike ise} \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.3.8. *(López, 2014) Spacelike ya da timelike olan bir immersiyon;*

$$\varphi : M^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3_1, \varphi = \varphi(u,v)$$

şeklinde verilsin. $\varphi(M^2)$ nin her noktasında teğet düzleminin lokal bazı $B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ olsun. Birinci temel formun katsayıları

$$g_{11} = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_L, \quad g_{12} = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_L, \quad g_{22} = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L$$

şeklinde olmak üzere $W = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$ olsun. Eğer $W > 0$ ise, yüzey spacelike; $W < 0$ ise yüzey timelikedır.

Birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{\varphi_u \times_L \varphi_v}{\|\varphi_u \times_L \varphi_v\|}$$

şeklindedir. Burada

$$\|\varphi_u \times_L \varphi_v\| = \sqrt{-\varepsilon\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} = \sqrt{-\varepsilon W}$$

dır. Ayrıca ikinci temel formun katsayıları,

$$h_{11} = \langle \xi, \varphi_{uu} \rangle_L, \quad h_{12} = \langle \xi, \varphi_{uv} \rangle_L, \quad \langle \xi, \varphi_{vv} \rangle_L$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla ortalama ve Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$H = \varepsilon \frac{1}{2} \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

ve

$$K = \varepsilon \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

eşitlikleri ile verilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışma; temel olarak, diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan yüzeyler teorisinin literatürde *singüler minimal yüzeyler* veya $\alpha-$*minimal yüzeyler* olarak bilinen bir alt sınıfını kapsamaktadır. Bu nedenle bu çalışmada temel materyalimiz olan bu yüzeyler için temel bir altyapı bilgisi oluşturmak amacıyla, bu yüzeylere dair literatürde var olan temel kavram ve sonuçlardan bu bölümde kısaca bahsedilip, özel şartlar altında bu yüzeyler sınıfına ait elde edilen yeni sonuçlar bir sonraki bölümde detaylı olarak verilecektir.

3.1 $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Singüler Minimal Yüzeyler

Singüler minimal yüzey kavramı aşağıda ifade edilen varyasyonel problemin karşılığıdır:

$\left(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\right)$ Öklidyen $3-$uzayı ve $\mathbf{u}$, $\mathbb{R}^3$ de belirli bir birim vektör olsun.

$$\mathbb{R}^3_+ = \{q \in \mathbb{R}^3 : \langle q, \mathbf{u} \rangle > 0\}$$

yarı uzayında yönlendirilmiş bir M^2 yüzeyinin diferensiyellenebilir bir φ immersiyonu verilsin. ξ ve H, sırasıyla, φ nin Gauss dönüşümünü ve ortalama eğriliğini göstersin. O zaman, bir α reel sabiti için $\mathbf{u}$ doğrultusunda φ nin α potansiyel enerjisi

$$E(\varphi) = \int_{M^2} \langle q, \mathbf{u} \rangle^{\alpha} dM^2$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $q = \varphi(p)$, $p \in M^2$ dir ve dM^2, $\mathbb{R}^3$ de $\langle , \rangle$ Öklidyen metrikten indirgenmiş metrik tensöre göre M^2 üzerindeki ölçüyü göstermektedir.

$\Sigma : M^2 \times (\theta, -\theta) \to \mathbb{R}^3_+(\mathbf{u})$ ile ζ varyasyon vektör alanına sahip φ nin kompakt destekli varyasyonu gösterildiğinde, E nin birinci varyasyonu;

$$E'(0) = -\int_{M^2} \left(2H\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle - \alpha \langle \xi, \mathbf{u} \rangle\right) \langle \xi, \zeta \rangle^{\alpha - 1} dM^2$$

dir. Burada φ, E nin bir kritik noktası olarak alınırsa

$$2H = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u} \rangle}{\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle} \tag{3.1.1}$$

elde edilir. (3.1.1) denklemi, **u** *vektörüne göre singüler minimal yüzey denklemi* veya $\alpha-$*minimal yüzey* olarak adlandırılır. (3.1.1) denklemi bir ortalama eğrilik tipi denklemdir ve $\alpha = 0$ durumu bilinen minimal yüzey denklemine karşılık gelir (López, 2018a).

Bu bölümde; bir parametreli öteleme ve dönme gruplarına göre invaryant olan singüler minimal yüzeyler sınıflandırıldı.

Bir parametreli ötelemeler grubuna göre invaryant olan yüzeyler, (3.1.1) denkleminin bir boyutlu durumu ile ilişkilidir. Bir boyutlu durum,

$$\kappa(s) = \alpha \frac{\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{u} \rangle}{\langle \gamma(s), \mathbf{u} \rangle} \tag{3.1.2}$$

denklemini sağlayan $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma = \gamma(s)$ düzlemsel eğrisine ve belirli bir $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ birim vektörüne atfetmektedir, burada $\mathbf{n}(s)$ ve κ, sırasıyla, γ nın asli birim normal vektörü ve eğriliğidir.

Tanım 3.1.1. *(López, 2018a) (3.1.2) denklemini sağlayan bir $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ eğrisine, $\alpha-$katener denir.*

(3.1.2) denkleminin aşikar bir çözümü **u** ya paralel bir doğrudur. Bir koordinat değişiminden sonra $\mathbf{u} = (0,1)$ olarak alalım ve γ eğrisi, herhangi pozitif bir $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu için lokal olarak $\gamma(s) = (s, f(s))$ olarak verilsin. O zaman (3.1.2) denklemi

$$\frac{f''(s)}{1 + [f'(s)]^2} = \frac{\alpha}{f(s)} \tag{3.1.3}$$

olarak yeniden yazılabilir. Eğer $\alpha = 0$ ise (3.1.3) denkleminin çözümü bir lineer fonksiyondur.

$\alpha-$katenerler, bir $\alpha-$katener dayanağına sahip genelleştirilmiş silindirleri göz önünde bulundurarak $\alpha-$minimal yüzey örneklerini verirler. Daha açık bir ifadeyle, eğer (x,y,z), $\mathbb{R}^3$ ün genel koordinatları ve $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^3$ ün kanonik bir bazı ise, γ eğrisi $xz-$düzleminde $\gamma(s) = (s, 0, f(s))$ olarak alınabilir ve

$$M^2 = \gamma(I) \times \mathbb{R}_{e_2} = \{(s,t,f(s)) : s \in I, t \in \mathbb{R}\}$$

genelleştirilmiş silindirini göz önünde bulundurulabilir. O zaman açık bir şekilde görülebilir ki, M^2, $\mathbf{u} = e_3$ vektörüne göre bir $\alpha-$minimal yüzeydir. M^2 yüzeyi,

$\alpha-$katener silindir olarak adlandırılır. M^2 yüzeyi

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + te_2$$

ile parametrize edilebilir ve böylece M^2, $\mathbf{u}$ vektörüne ortogonal olan e_2 doğrultusuna sahip ötelemeler grubuna göre invaryanttır.

Daha genel olarak aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 3.1.2. *(López, 2018a) Bir $M^2 \subset \mathbb{R}^2$ yüzeyi eğer ötelemelerin bir parametreli grubuna göre invaryant ise, M^2 ye bir silindiriksel yüzey ya da bir genelleştirilmiş silindir denir.*

O zaman M^2 yüzeyi $\mathbf{v}$ doğrultusundaki ötelemeler ve $\mathbf{v}$ doğrultusuna ortogonal bir düzlemde yatan bir γ eğrisi ile karakterize edilebilir. Burada γ eğrisine *dayanak eğrisi* adı verilir. Bu durumda M^2 nin global bir parametrizasyonu;

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t\mathbf{v}, s \in I, t \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

Buna göre keyfi $\mathbf{u}$ doğrultuları için singüler minimal olan genelleştirilmiş silindirler için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.1. *(López, 2018a) Silindiriksel singüler minimal yüzeyler, yalnızca* $\mathbf{u}$ *vektörüne paralel düzlemler ya da doğrultmanları* $\mathbf{u}$ *vektörüne ortogonal olan $\alpha-$katener silindirlerdir.*

$\alpha-$katenerlerin bir grafik olduklarını ifade eden aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.1.1. *(López, 2018a)* $\mathbf{u} = (0,1)$ *vektörünü göz önüne alalım.* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *eğrisi*

$$\kappa(s) = \alpha \frac{\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{u} \rangle}{\langle \gamma(s), \mathbf{u} \rangle} \tag{3.1.4}$$

denkleminin bir çözümü olsun. O zaman γ eğrisi dikey bir düz doğrudur ya da $x-$ekseni üzerinde bir grafiktir.

Kabul edelim ki γ bir $\alpha-$katener olsun. O zaman Önerme 3.1.1, pozitif bir $f = f(s)$, $s \in I$ fonksiyonu için $\gamma(s) = (s, f(s))$ olarak yazılabileceğini ve (3.1.4) denklemine göre, f fonsiyonun

$$\frac{f''(s)}{1+[f'(s)]^2} = \frac{\alpha}{f(s)} \tag{3.1.5}$$

denklemini sağladığını iddia eder. Özel olarak, eğer $\alpha > 0$ ise f konveks; $\alpha < 0$ ise, f konkavdır. Açık bir şekilde görülebilir ki f fonksiyonunun sabit olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$ olmasıdır. $\alpha \neq 0$ ise (3.1.5) denklemi f' ile çarpılıp ardından integrali alındığında

$$f' = \pm\sqrt{c^2 f^{2\alpha} - 1}, c \neq 0 \tag{3.1.6}$$

elde edilir. (3.1.6) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$f'' = \alpha c^2 f^{2\alpha - 1} \tag{3.1.7}$$

olur.

(3.1.7) denklemi literatürde, bir *Emden-Fowler tipi denklem* olarak bilinir (Zaitsev ve Polyanin, 2002).

$x-$ekseni üzerinde yatay bir ötelemeden sonra, kritik nokta $x = 0$ olarak kabul edilip, başlangıç şartları

$$f(0) = y_0 > 0, f'(0) = 0 \tag{3.1.8}$$

şeklinde göz önünde bulundurulabilir. α nın işaretine bağlı olarak (3.1.5)–(3.1.7) denklemlerinin çözümlerinin özellikleri aşağıdaki teoremler ile ifade edilebilir.

Teorem 3.1.2. *(López, 2018a) $\alpha > 0$ olsun. (3.1.5)–(3.1.7) denklemlerinin f çözümü $(-R, R)$ aralığında tanımlıdır ve f aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. *f fonksiyonu, $y-$eksenine göre simetriktir ve $s = 0$ da bir minimuma sahip konveks bir fonksiyondur.*

2. *Eğer $\alpha > 1$ ise $R < \infty$ dir. Eğer $\alpha \in (0, 1]$ ise, o zaman $R = \infty$ dir. Her iki durumda da $\lim_{s \to \pm R} f(s) = \infty$ olur. Özel olarak eğer $\alpha > 0$ ise, f nin grafiği, iki dikey doğruya asimptotiktir.*

Teorem 3.1.3. *(López, 2018a) $\alpha < 0$ olsun. (3.1.5)–(3.1.7) denklemlerinin f çözümü $(-R, R)$ aralığında tanımlıdır ve f aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. f fonksiyonu, $y-$eksenine göre simetriktir ve $s=0$ da bir maksimuma sahip konkav bir fonksiyondur.

2. $\lim_{s\to\pm R} f(s)=0$ ve $\lim_{s\to\pm R} f'(s)=\mp\infty$ dir.

Bir M^2 silindiriksel yüzeyinin $\varphi(s,t)=\gamma(s)+t\mathbf{v}, s\in I, t\in\mathbb{R}$ parametrizasyonu, M^2 yüzeyinin iki düzlemsel eğrinin toplamı olarak oluşturulmuş bir yüzey olarak göz önünde bulundurulmasına olanak tanır, yani M^2 yüzeyi

$$\varphi(s,t)=\gamma(s)+\beta(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada β, $\beta(t)=t\mathbf{v}$ şeklinde bir düz doğrudur. Daha da genelleştirilecek olursa, (3.1.1) denkleminin $\gamma(x)=(x,0,f(x))$ ve $\beta(y)=(0,y,g(y))$ düzlem eğrilerinin toplamı olan çözümleri göz önünde bulundurulabilir. O zaman yüzey $z=f(x)+g(y)$ fonksiyonunun grafiğidir. Diğer bir ifadeyle M^2 yüzeyi öteleme yüzeyi olarak alınabilir. Özel olarak $\alpha=1$ olması durumunda, bu problem López (2016) da yalnızca *öteleme $1-$minimal yüzeyleri* elde etmek için çalışılmıştır. Buna göre $\alpha-$minimal öteleme yüzeyler için aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.1.4. *(López, 2018a) $\mathbf{u}=(0,0,1)$ vektörüne göre $z=f(x)+g(y)$ tipindeki $\alpha-$minimal yüzeyler yalnızca $\alpha-$katener silindirlerdir.*

Dikkat edilirse Teorem 3.1.4 de $\mathbf{u}$ vektörü ve yüzeyin öteleme özelliği arasında bir ilişki vardır, yani $\mathbf{u}$ vektörü, $xy-$düzlemine ortogonaldir. Aşağıdaki teoremde ise $\mathbf{u}$ vektörünün $xy-$düzlemine paralel olması durumu göz önünde bulundurulmuştur:

Teorem 3.1.5. *(López, 2018a) M^2 yüzeyi $z=f(x)+g(y)$ tipinde bir öteleme yüzey olsun. Eğer M^2, $\mathbf{u}$ yatay vektörüne göre bir singüler minimal yüzey ise, o zaman M^2, $\mathbf{u}$ vektörüne paralel bir düzlemdir ya da doğrultmanları $\mathbf{u}$ vektörüne ortogonal yatay düz doğrular olan bir $\alpha-$katener silindirdir.*

Şimdi bir parametreli dönmeler grubuna göre invaryant olan yüzeyleri göz önüne alalım. Bu tür yüzeylerin sınıflandırılmasına ilişkin aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 3.1.6. *(López, 2018a) M^2, $\mathbf{u}$ doğrultusuna göre bir $\alpha-$minimal yüzey olsun. Eğer M^2, L ekseni etrafinda bir dönel yüzey ise o zaman iki durum vardır: L ekseni $\mathbf{u}$ vektörüne paraleldir ya da L ekseni, $\mathbb{R}^3_0(\mathbf{u})$ düzleminde yatar.*

Genelliği bozmaksızın, $\mathbf{u} = (0,0,1)$ *olarak alınsın.* $z-$*ekseni etrafında bir dönme ve yatay bir ötelemeden sonra, dönel singüler minimal yüzeylerin tanımı aşağıdaki gibidir:*

1. *L,* $z-$*ekseni olsun. O zaman* M^2*, lokal olarak*

$$\varphi(s,t) = (s\cos t, s\sin t, f(s))$$

şeklinde parametrize edilir, burada $f > 0$ *fonksiyonu*

$$\frac{f''(s)}{1+[f'(s)]^2} + \frac{f'(s)}{s} = \frac{\alpha}{f(s)}$$

eşitliğini sağlar.

2. *L,* $x-$*ekseni olsun. O zaman* M^2*, L ye ortogonal bir düzlemdir ve* M^2*, lokal olarak*

$$\varphi(s,t) = (s, -\sin t f(s), \cos t f(s))$$

parametrizasyonuna sahiptir, burada $f > 0$ *fonksiyonu*

$$\frac{f''(s)}{1+[f'(s)]^2} = \frac{1+\alpha}{f(s)}$$

eşitliğini sağlar, yani f fonksiyonu bir $(\alpha+1)-$*katener tanımlar.*

Teoremin ikinci şıkkının bir sonucu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Sonuç 3.1.1. *(López, 2018a)* M^2 *yüzeyi,* $\mathbb{R}^3_0(\mathbf{u})$ *düzleminde yatan bir eksen etrafında bir dönel yüzey olsun. O zaman* M^2 *nin bir* $\alpha-$*minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin üreteç eğrisinin bir* $(\alpha+1)-$*katener olmasıdır.*

Dönme ekseni, $\mathbf{u}$ vektörüne paralel olan dönel singüler minimal yüzeyler için $\alpha > 0$ ve $\alpha < 0$ olması durumlarına göre aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Teorem 3.1.7 ($\alpha > 0$ durumu)**.** *(López, 2018a)* $z-$*ekseni etrafında dönel bir* M^2 *yüzeyinin üreteç eğrisi olan* $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *eğrisi xz,* $z > 0$*, düzleminde yatan bir düzlemsel eğri ve* $\alpha > 0$ *olsun. Eğer* M^2 *bir* $\alpha-$*minimal yüzey ise, o zaman üç durum vardır.*

1. γ *eğrisi* $z-$*eksenini ortogonal olarak keser ve* γ *eğrisi* $z-$*eksenli kesişim noktasında yanlızca bir minimuma sahip olan* $x-$*ekseni üzerinde tanımlı konveks simetrik bir f fonksiyonunun grafiğidir. f fonksiyonu yanlızca bir dönüm noktasına sahiptir.*

2. γ eğrisi $x-$eksenini kesmez, γ kanatsı bir şekle sahiptir ve γ nın kendini kesen yalnızca bir noktası vardır.

3. γ, $z = \sqrt{\alpha}x$ denklemine sahip düz doğrudur ve M^2 yüzeyi, $\alpha^2\left(x^2+y^2\right) = z^2$ denklemli üst yarı–konidir.

İlk iki durumda, γ eğrisi, $z = \sqrt{\alpha}x$ düz doğrusuna asimptotiktir.

Teorem 3.1.8 ($\alpha < 0$ durumu)**.** *(López, 2018a) $z-$ekseni etrafında dönel bir M^2 yüzeyinin üreteç eğrisi olan $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi xz, $z > 0$, düzleminde yatan bir düzlemsel eğri olsun. Eğer $\alpha < 0$ ise, aşağıdaki durumlar vardır:*

1. γ eğrisi, $z-$ eksenini ortogonal olarak keser ve γ eğrisi $z-$eksenli kesişme noktasında yalnızca bir maksimuma sahip olan $x-$ekseninin sınırlı bir aralığı üzerinde tanımlı konkav simetrik bir f fonksiyonunun grafiğidir. Ayrıca γ eğrisi $x-$eksenini iki noktada ortogonal olarak keser.

2. γ eğrisi $z-$eksenini kesmez; γ eğrisi kanatsı bir şekle sahiptir ve γ gömülmüş bir eğridir. γ eğrisi, $x-$eksenini iki noktada ortogonal olarak keser.

Dönme ekseni $\mathbb{R}^3_0(\mathbf{u})$ düzleminde yatan bir dönel $\alpha-$minimal yüzey, bir $(\alpha+1)-$katener tarafından üretilir. α nın $\alpha = 0, -1$ özel değerleri için bazı özel durumlar vardır.

$\alpha = 0$ durumu minimal yüzeylere karşılık gelir. O zaman üreteç eğrisi bir katenerdir ve yüzey bir katenoiddir. Aslında $\mathbb{R}^3_+(\mathbf{u})$ yarı uzayında kapsanan yüzey göz önünde bulundurulduğu için bu yüzey katenoidin yalnızca bir yarısıdır.

Eğer $\alpha = -1$ ise, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.1.2. *(López, 2018a) M^2, $\mathbb{R}^3_0(\mathbf{u})$ uzayında bulunan bir eksene göre bir dönel yüzey olsun. O zaman M^2 nin bir $(-1)-$minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart M^2 nin bir çeyrek koni yada bir yarı–silindir olmasıdır.*

Helikoidal yüzeyler, dönel yüzeylerin bir genelleştirmesidir. Öklid uzayında bir helikoidal yüzey, bir parametreli vida hareketleri grubu altında invaryant olan bir yüzeydir. Bir koordinat değişiminden sonra, $z-$ekseni etrafında λ adımlı bir bir helikodal yüzey, belirli reel bir f fonksiyonu için lokal olarak

$$\varphi(s,t) = (s\cos t, s\sin t, f(s) + \lambda t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in I$$

şeklinde parametrize edilebilir. Eğer $\lambda = 0$ ise, bir helikodal yüzey, dönel bir yüzeye karşılık gelir. Aşağıdaki sonuç ile tüm helikoidal singüler minmal yüzeylerin sınıflandırması elde edilmiştir:

Önerme 3.1.2. *(López, 2018a) Eğer $\alpha \neq 0$ ise, herhangi bir helikoidal $\alpha-$minimal yüzey, bir dönel yüzeydir.*

3.2 $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz–Minkowski Uzayında Singüler Maksimal Yüzeyler

$\mathbb{R}^2_1$, $ds^2 = dx^2 - dy^2$ metriğine sahip Lorentz–Minkowski düzlemi olsun. Bu düzlemde çalışırken, verilen bir nokta kümesi için, bu kümenin her noktasında causal karakterin aynı olduğu kabul edilecektir. $y-$koordinatı Lorentz uzayında zamanı temsil ettiğinden dolayı, $\mathbb{R}^2_1$ de yerçekim kavramı anlamlı değildir. Böylece $\mathbb{R}^2_1$ de bir *katenerin Lorentz benzerini* tanımlamak için normal vektör alanı ve belirli bir doğrultu arasında tanımlı bir açıya sahip eğrilerin bulunması problemi göz önüne alınmalıdır. Bu problemi tanımlamak için iki önemli durum vardır:

Birinci durum, $\mathbb{R}^2_1$ de spacelike, timelike ve lightlike olmak üzere üç farklı eğri tipi vardır ve bu eğrilerin herbirinin davranışı tamamen farklıdır. Yalnızca Riemann anlamda çalışmak amacıyla spacelike eğriler göz önüne alınmıştır.

İkinci durum, n normal vektörü ile yaptığı açıyı ölçtüğümüz eksenin seçimidir. Öklid düzleminde her iki eksenin de farksız olduğuna, ancak $\mathbb{R}^2_1$ de $y-$ekseni ve $x-$ekseninin katı bir hareketle birbirinin yerine kullanılamayacağına dikkat edilmelidir. Böylece hangi eksenin belirleneceği problemi ortaya çıkar.

Spacelike bir eğri için n birim normal vektör alanı ve $y-$ekseni timelike olduğundan, problem n vektörü ve $y-$ekseni arasındaki açının ölçümüne dönüşmüş olur. Bu aynı zamanda, iki spacelike vektör arasındaki açının tanımlı olması ile de gerekçelendirilir. Böylece aşağıdaki tamımlamalar yapılabilir.

$\gamma = \gamma(s)$, s yay uzunluğuyla parametrize edilmiş ve $\mathbb{R}^2_1$ nin $y > 0$ yarı düzleminde kapsanan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin κ eğriliği

$$\gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

ile tanımlıdır. Burada $\mathbf{n}$, γ nın birim normal vektör alanı olup $\kappa \neq 0$ olduğunu kabul edilmektedir. Buna göre (3.1.2) denklemini sağlayan $\mathbb{R}^2_1$ nin spacelike eğrileri aranmaktadır, burada $\mathbf{u} = (0,1)$ dir. Eğer γ eğrisi bir $y = f(x)$ grafiği ise, o zaman $\gamma(x) = (x, f(x))$ yay uzunluğu ile parametrize edilemez. O zaman

$$\mathbf{n} = \frac{(f',1)}{\sqrt{1-(f')^2}},$$

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-(f')^2}}$$

ve

$$\kappa(x) = -\frac{1}{1-(f')^2}\langle \gamma'', \mathbf{n}(x) \rangle = \frac{f''(x)}{\left[1-(f')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

şeklindedir. γ eğrisi spacelike olduğundan, $(f')^2 < 1$ olduğu açıktır. Böylece (3.1.2) denklemi

$$\frac{f''}{1-(f')^2} = -\frac{1}{f} \tag{3.2.1}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu denklem katenerin aranan Lorentz modelidir. Eğri spacelike alındığı için (3.2.1) denkleminin çözümü

$$f(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b), x \in \left(-\frac{b}{a}, \pi - \frac{b}{a}\right) \tag{3.2.2}$$

şeklindedir, burada $a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ dir. Bu eğri $\mathbb{R}^2_1$ de *katenerin benzeri*dir. Buna göre Öklidyen durumdaki gibi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sabiti için (3.1.2) denkleminin Lorentz benzeri

$$\kappa = \alpha\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle}{\langle p, \mathbf{u} \rangle} = -\alpha\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle}{y} \tag{3.2.3}$$

şeklinde yazılır. Burada $p = (x, y)$ dir. Örneğin (3.2.2) deki eğri $\alpha = -1$ için çözümdür.

Öklidyen durumdaki gibi $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz–Minkowski $3-$uzayına gömülsün. Burada $\mathbb{R}^3_1$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$ metriği ile tanımlanan afin 3–uzaydır. O zaman $\mathbb{R}^2_1$, $xz-$düzlemiyle; $\mathbb{R}^2_1$ nin $y-$ekseni $\mathbb{R}^3_1$ ün $z-$ekseniyle; $(0,1) \in \mathbb{R}^2_1$ vektörü $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3_1$ vektörüyle özdeşleştirilir. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 3.2.1. *(López, 2020b) α sıfırdan farklı reel bir sayı olsun. $\mathbb{R}^3_1$ ün $z > 0$ yarı–uzayında spacelike bir M^2 yüzeyi,*

$$2H(p) = \alpha \frac{\langle N(p), \mathbf{u} \rangle_L}{\langle p, \mathbf{u} \rangle_L} = -\alpha \frac{\langle N(p), \mathbf{u} \rangle_L}{z}, p \in M^2 \tag{3.2.4}$$

denklemini sağlarsa, bu yüzeye $\alpha-$singüler maksimal yüzey adı verilir, burada N ve H, sırasıyla, M^2 nin birim normal vektör alanı ve ortalama eğriliğidir.

(3.2.4) denkleminde $\alpha = -1$ durumu, *Lorentzian katenerin 2–boyutlu benzer*inin karşılığıdır (López, 2020b).

Öklidyen durumdakine benzer olarak $\mathbb{R}^3_1$ uzayında bir parametreli ötelemeler ve dönmeler grubuna göre invaryant yüzeyler López tarafından sınıflandırılmıştır.

İlk olarak ötelemeler grubuna göre invaryant yüzeyleri göz önünde bulunduralım. Bu grup ile üretilmiş olan doğrultmanlar, yüzeyde bulunan düz doğrular olduğundan ve yüzey de spacelike olduğundan, yüzeyin herhangi bir doğrultmanı da spacelike bir doğrudur. Dolayısıyla ötelemeler grubunu üreten vektör de spacelike olmalıdır.

v spacelike bir birim vektör olsun ve v ile üretilmiş ötelemeler grubuna göre invaryant olan bir M^2 yüzeyi göz önüne alınsın. O zaman M^2 yüzeyi

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + tv$$

şeklinde parametrize edilir, burada γ, v ye ortogonal timelike bir düzlemde yatan $\mathbb{R}^3_1$ ün düzlemsel spacelike bir eğrisidir. Böylece (3.2.4) denklemi

$$\kappa det\left(\gamma', v, \mathbf{n}\right) = \alpha \frac{det\left(\gamma', v, \mathbf{u}\right)}{\gamma_3 + tv_3} \tag{3.2.5}$$

şeklinde yeniden yazılabilir, burada $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ dir. Böylece γ nın yönlendirmesi $\gamma' \times v = \mathbf{n}$ olarak göz önünde bulundurulabilir. Buna göre aşağdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.2.1. *(López, 2020b) M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de v ile üretilmiş bir parametreli ötelemeler grubuna göre invaryant olan bir $\alpha-$singüler maksimal yüzey olsun ve M^2 nin üreteci γ ile gösterilsin. O zaman v bir yatay vektördür; γ, v ye ortogonal düzlemde yatar* *ve düzlemsel bir eğri olarak (3.2.3) deklemini sağlar. Tersine eğer γ, $\mathbb{R}_1^2$ de (3.2.3) deklemini sağlayan bir eğri ise ve genel olarak $xz-$düzlemine gömülmüşse, o zaman*

$$\varphi(s,t) = \gamma(s) + t(0,1,0)$$

yüzeyi, bir $\alpha-$singüler maksimal yüzeydir.

Bu önermeye göre (3.2.4) denkleminin bir boyutlu durumu göz önüne alınsın. $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, (3.2.3) denklemini sağlayan spacelike bir eğri olsun. γ spacelike olduğundan, $(x')^2 - (y')^2 > 0$ dır. Özel olarak her s için $x'(s) \neq 0$ ve böylece γ, global olarak $f = f(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, fonksiyonunun grafiğidir. Böylece (3.2.3) eşitliği

$$\frac{f''}{1-(f')^2} = \alpha \frac{1}{f}, \quad f > 0, \quad \left(f'\right)^2 < 1 \tag{3.2.6}$$

denklemine dönüşür.

Eğer (3.2.6) denkleminde $\alpha = -1$ ise çözüm

$$f(x) = \frac{1}{a} \sin(ax+b), \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

şeklindedir, burada x, $f > 0$ olmasını garantileyen bir aralıkta tanımlıdır.

Eğer $\alpha = 1$ ise (3.2.6) denkleminin çözümü

$$f(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1+b^2+2abx+a^2x^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

dir. Bir değişken değişiminden sonra, f fonksiyonu $f(x) = \sqrt{1+a^2x^2}/a, \quad a > 0$ olarak yazılabilir. Buna göre f fonksiyonu $a^2\left(x^2 - y^2\right) = -1$ hiperbolünün üst koludur. $\mathbb{R}_1^2$ de düzlemsel bir eğri olarak görülen bu eğri, sıfırdan farklı $\kappa = a$ eğriliğine sahiptir. Önerme 3.2.1 e göre üretilen yüzey $a^2\left(x^2 - z^2\right) = -1$ sağ silindiridir.

Yorum 3.2.1. *(López, 2020b) $\alpha = -1$ durumuna benzer olarak, $(f' < 1)$ spacelike olma şartı, $(f' > 1)$ şartı ile değiştirildiğinde (3.2.6) denkleminin timelike bir çözümü vardır. Bu çözüm*

$$f(x) = \sqrt{a^2x^2 - 1}, \quad a > 0, \quad x > \frac{1}{a}$$

şeklindedir. f fonksiyonu, $x^2 - y^2 = \frac{1}{a^2}$ hiperbolünün pozitif kısmıdır ve timelike bir eğridir. Eğer bu eğri $x-$ekseni etrafında döndürülürse, üretilen yüzey

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1/a^2$$

dir. Bu yüzey,

$$\mathbb{S}_1^2\left(\frac{1}{a}\right) = \{p \in \mathbb{R}_1^3 : \langle p, p\rangle = \frac{1}{a^2}\}$$

de Sitter uzayınını üst kısmıdır. Bu yüzey $\alpha = 2$ olduğunda (3.2.4) denklemini sağlar ve $\mathbb{R}_1^3$ ün timelike yüzeyleri ailesinde hiperbolik düzlem ile aynı rolü oynar.

Şimdi (3.2.6) denkleminin geometrik özellikleri aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir:

Teorem 3.2.1. *(López, 2020b) $I \subset \mathbb{R}$, f nin maksimal bölgesi olmak üzere $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (3.2.6) denkleminin çözümü olsun. Eğer $\alpha > 0$ ise, o zaman f, dikey bir doğru etrafinda simetriktir ve $I = \mathbb{R}$ dir ya da $\alpha < 0$ ise I sınırlı bir aralıktır. Ayrıca*

1. *$\alpha > 0$ durumunda f fonksiyonu için*

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = \infty \quad ve \quad \lim_{r\to\infty} u'(r) = 1$$

olup, f bir tek global minimuma sahip konveks bir fonksiyondur.

2. *$\alpha < 0$ durumunda f fonksiyonu, bir tek global maksimuma sahip konkav bir fonksiyondur. Eğer $I = (-b, b)$ ise, o zaman*

$$\lim_{r\to b} f(r) = 0 \quad ve \quad \lim_{r\to b} u'(r) = -1$$

dir.

Şimdi bir parametreli dönmeler grubuna göre invaryant yüzeyleri ele alalım.

Öklid ve Lorentz uzaylarındaki durumlar arasındaki fark, $\mathbb{R}_1^3$ de dönme ekseninin spacelike, timelike ve lightlike olmasına bağlı olarak üç tür dönel yüzeyin var olmasından kaynaklanmaktadır. Dönme ekseni ve $\mathbf{u} = (0,0,1)$ vektörü arasında öncü bir ilişki bulunmamaktadır. Bu ise, eğer dönme eksenini belirlemek için katı bir hareket uygulanırsa, **u** vektörünün değişmeyeceği anlamına gelir.

Dönme ekseni spacelike ise aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.2.2. *(López, 2020b) M^2, $\mathbb{R}_1^3$ de spacelike bir L ekseni etrafindaki dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan spacelike bir yüzey olsun.*

Kabul edelim ki M^2 yüzeyi (3.2.4) denklemini sağlasın, burada **u** *bir timelike vektördür. O zaman* **u** *vektörü L eksenine ortogonaldir ya da M^2, keyfi bir* **u** *timelike vektörüne sahip $\mathbb{H}^2(r)$ hiperbolik düzlemidir.*

Dönme ekseni lightlike ise aşağıdaki önerme ifade edilebilir:

Önerme 3.2.3. *(López, 2020b) M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de lightlike bir L ekseni etrafindaki dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan spacelike bir yüzey olsun. Kabul edelim ki M^2 yüzeyi (3.2.4) denklemini sağlasın, burada* **u** *bir timelike vektördür. O zaman* **u** *vektörü L eksenine ortogonaldir ya da M^2, keyfi bir* **u** *vektörüne sahip $\mathbb{H}^2(r)$ hiperbolik düzlemidir.*

Son olarak, dönme ekseni eğer timelike ise aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.2.4. *(López, 2020b) M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de timelike bir L ekseni etrafindaki dönmelerin bir parametreli grubuna göre invaryant olan bir $\alpha-$singüler maksimal yüzey olsun. Kabul edelim ki M^2 yüzeyi (3.2.4) denklemini sağlasın, burada* **u***, keyfi bir timelike vektördür. O zaman* **u** *vektörü L eksenine paraleldir ya da M^2, $\mathbb{H}^2(m)$ hiperbolik düzlemidir ve* **u***, keyfi bir timelike vektördür.*

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid Uzayında Singüler Minimal Öteleme Hiperyüzeyler

Bu bölümde; $(n+1)-$boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında, singüler minimal yüzey denkleminin yüksek boyutlara genelleştirilmiş hali olan

$$nH = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u} \rangle}{\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle}, \quad n \geq 2 \tag{4.1.1}$$

denklemini sağlayan M^n hiperyüzeyinin bulunması problemi ele alınacaktır. Burada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ belirli bir birim vektör, ξ ve H da sırasıyla,

$$\mathbb{R}^{n+1}_{\mathbf{u}} = \{ \, p \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle p, \mathbf{u} \rangle > 0 \}$$

yarı uzayında yönlendirilmiş bir M^n hiperyüzeyinin diferensiyellenebilir φ immersiyonunun Gauss dönüşümü ve ortalama eğriliğidir.

(4.1.1) denklemi, $\mathbf{u}$ *vektörüne göre singüler minimal hiperyüzey denklemi* olarak adlandırılır.

İlk olarak $\mathbb{R}^{n+1}$ de, bir M^n singüler minimal silindirin, bir hiperdüzlem ya da bir $\alpha-$katener silindir olduğu elde edildi. İkinci olarak, bu sonucun bir M^n öteleme hiperyüzey ve belirli bir $\mathbf{u}$ yatay vektörü için de geçerli olduğu ifade edildi. Son olarak, bu sonuçlar için bir uygulama olarak $\mathbb{R}^3$ de belirli bir $\mathbf{u}$ yatay vektörüne göre $z(x,y) = f(x) + g(y+cx), c \neq 0$ tipinde, singüler minimal yüzey denklemini sağlayan yüzeyler sınıflandırıldı.

4.1.1 Genelleştirilmiş Silindirler

$\mathbb{R}^{n+1}$ de $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-1}$ ortonormal vektörler ve γ da $\Gamma = span\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-1}\}^{\perp}$ düzleminde yatan birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

$$M^n = \{x_1 \mathbf{w}_1 + ... + \mathbf{x}_{n-1} w_{n-1} + \gamma(x_n) : x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbb{R}, x_n \in I \subseteq \mathbb{R}\} \tag{4.1.2}$$

parametrizasyonuna sahip silindiriksel hiperyüzeyi göz önüne alalım. Burada γ, M^n nin dayanak eğrisidir. Buna göre M^n hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\xi = \mathbf{w}_1 \times ... \times \mathbf{w}_{n-1} \times \gamma'(x_n) = \sum_{i=1}^{n+1} det\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{n-1}, \gamma'\right)\mathbf{e}_i \tag{4.1.3}$$

olarak hesaplanır. Burada $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{n+1}\}$, $\mathbb{R}^{n+1}$ in standart ortonormal bazı, $\gamma' = \frac{d\gamma}{dx_n}$ ve $\times$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de vektörel çarpımdır. κ ile γ nın eğriliği gösterilmek üzere; M^n nin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ve

$$h_{ij} = \begin{cases} \kappa(x_n), & i = j = n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla M^n nin ortalama eğriliği,

$$H(x_1, ..., x_n) = \frac{\kappa(x_n)}{n} \tag{4.1.4}$$

şeklinde bulunur. O zaman aşağıdaki teoremi ifade edilebilir:

Teorem 4.1.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ *de, sabit bir* $\mathbf{u}$ *vektörüne göre singüler minimal silindirler, yalnızca* $\mathbf{u}$ *vektörüne paralel hiperdüzlemler ya da doğrultmanları* $\mathbf{u}$ *vektörüne ortogonal olan* $\alpha-$*katener silindirlerdir.*

İspat: (4.1.2), (4.1.3) ve (4.1.4) eşitlikleri, (4.1.1) singüler minimal hiperyüzey denkleminde yazıldığında, (4.1.1) eşitliği

$$\kappa(x_n) = \alpha \frac{\langle w_1 \times ... \times w_{n-1} \times \gamma'(x_n), \mathbf{u}\rangle}{\sum_{i=1}^{n-1} \langle w_i, \mathbf{u}\rangle x_i + \langle \gamma(x_n), \mathbf{u}\rangle}$$

denklemine veya buna denk olan

$$\kappa(x_n) \sum_{i=1}^{n-1} \langle w_i, \mathbf{u}\rangle x_i + \kappa(x_n)\langle \gamma(x_n), \mathbf{u}\rangle - \alpha\langle w_1 \times ... \times w_{n-1} \times \gamma'(x_n), \mathbf{u}\rangle = 0 \tag{4.1.5}$$

denklemine dönüşür. (4.1.5) denkleminin x_i, $i = 1, ..., n-1$, ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\kappa(x_n)\langle w_i, \mathbf{u}\rangle = 0 \tag{4.1.6}$$

bulunur. (4.1.6) eşitliği (4.1.5) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$\kappa(x_n)\langle\gamma(x_n),\mathbf{u}\rangle-\alpha\langle w_1\times...\times w_{n-1}\times\gamma'(x_n),\mathbf{u}\rangle=0 \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.7) denkleminin çözümü için iki durum mevcuttur:

Durum 1. Kabul edelim ki (4.1.6) denkleminde $\kappa(x_n)=0$ olsun. Bu durumda γ bir düz doğrudur. $\{w_1,...,w_{n-1},\gamma',\mathbf{u}\}$ lineer bağımsız olduğundan, (4.1.7) denklemi M^n hiperyüzeyinin $\mathbf{u}$ vektörüne paralel bir hiperdüzlem olduğunu gösterir.

Durum 2. Kabul edelim ki (4.1.6) denkleminde $\forall x_n\in I$ için $\kappa(x_n)\neq 0$ olsun. Bu durumda $\langle w_i,\mathbf{u}\rangle=0$ olup $\mathbf{u}$ vektörünün, Γ 2- düzlemine paralel olduğu elde edilir. Dolayısıyla (4.1.7) denklemi

$$\kappa(x_n)=\alpha\frac{\langle w_1\times...\times w_{n-1}\times\gamma'(x_n),\mathbf{u}\rangle}{\langle\gamma(x_n),\mathbf{u}\rangle}=\alpha\frac{\langle\mathbf{n}(x_n),\mathbf{u}\rangle}{\langle\gamma(x_n),\mathbf{u}\rangle} \tag{4.1.8}$$

şeklinde yeniden yazılabilir, burada $\mathbf{n},\gamma$ eğrisinin asli birim normal vektör alanını göstermektedir. Buna göre (4.1.8) denklemi, γ eğrisinin Γ düzleminde yatan bir $\alpha-$katener olduğunu ve dolayısıyla da M^n nin bir $\alpha-$katener silindiriksel hiperyüzey olduğunu ifade eder.

4.1.2 Öteleme Hiperyüzeyler

$\mathbb{R}^{n+1}$ de bir M^n *öteleme hiperyüzeyi*, $\gamma_1,...,\gamma_n$ eğrilerinin toplamı olarak tanımlanabilir. Buna göre M^n lokal olarak

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\gamma_1(x_1)+...+\gamma_n(x_n)$$

şeklinde parametrize edilir. Eğer $\gamma_1,...,\gamma_n$ ötelenen eğrileri, karşılıklı olarak ortogonal 2- düzlemlerde yatarsa, bir koordinat değişimi ile M^n hiperyüzeyi

$$x_{n+1}=f_1(x_1)+...+f_n(x_n)$$

şeklinde bir grafik haline gelir. Burada $f_1,...,f_n$ tek değişkenli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$\mathbb{R}^{n+1}$ de $\{x_1,...,x_{n+1}\}$ ortogonal koordinat sistemi olsun. M^n nin ξ Gauss dönüşümü ve H ortalama eğriliği, sırasıyla, Önerme 2.3.1 e göre

$$\xi=\frac{(-f_1',...,-f_n',1)}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^n\left(f_i'\right)^2}} \tag{4.1.9}$$

ve

$$nH = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[1+\sum\limits_{i\neq j=1}^{n}\left(f_i'\right)^2\right]f_i''}{\left[1+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f_i'\right)^2\right]^{3/2}} \tag{4.1.10}$$

şeklindedir. Burada $f_i' = \frac{df}{dx_i}$ ve $f_i'' = \frac{d^2f}{dx_i^2}, i = 1,...,n$ dir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1.2. *$\mathbb{R}^{n+1}$ de M^n, $\mathbf{u} = (1,0,...,0)$ vektörüne göre bir singüler minimal öteleme hiperyüzey olsun. O zaman bu hiperyüzey,* **u** *vektörüne paralel bir hiperdüzlem ya da üreteçleri* **u** *vektörüne ortogonal yatay düz doğrular olan bir $\alpha-$katener silindiriksel hiperyüzeydir.*

İspat: (4.1.9) ve (4.1.10) eşitlikleri (4.1.1) singüler minimal hiperyüzey denkleminde yerine yazılırsa, (4.1.1) denklemi

$$\sum_{i=1}^{n}\left[1+\sum_{i\neq j=1}^{n}(f_j')^2\right]f_i'' = -\alpha\frac{f_1'}{x_1}\left[1+\sum_{i=1}^{n}(f_i')^2\right] \tag{4.1.11}$$

denklemine dönüşür. (4.1.11) denkleminde $\alpha f_1' \neq 0$ olmalıdır. Aksi taktirde M^n hiperyüzeyi minimal olur ki, ilgilendiğimiz bir durum değildir. Eğer $f_1'' = 0$ olursa, (4.1.11) denkleminin x_1 e göre kısmi türevi alındığında,

$$f_1'\left[1+\sum_{i=1}^{n}(f_i')^2\right] \neq 0$$

olduğundan $\alpha = 0$ elde edilir ki bu da M^n hiperyüzeyinin minimal olması demektir. Dolayısıyla $f_1'' \neq 0$ olmalıdır.

Şimdi (4.1.11) denkleminin $x_k, k \neq 1$, ya göre kısmi türevi alınırsa,

$$2f_k'f_k''\sum_{k\neq i=1}^{n}f_i'' + \left[1+\sum_{k\neq i=1}^{n}\left(f_i'\right)^2\right]f_k''' = -2\alpha\frac{f_1'}{x_1}f_k'f_k'' \tag{4.1.12}$$

elde edilir. (4.1.12) denkleminin çözümü için iki durum mevcuttur.

Durum 1. $f_k'' = 0$, $k = 2,3,...,n$, yani

$$f_k(x_k) = \mu_k + \lambda_k x_k, \quad \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$$

olsun. Açık bir şekilde görülebileceği gibi, $f_k'' = 0$, (4.1.12) denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla M^n hiperyüzeyi

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \left(x_1, 0, ..., f_1(x_1) + \sum_{i=2}^{n} \mu_k\right) + \\ + x_2(0,1,...,0,\lambda_2) + ... + x_n(0,0,...,1,\lambda_n)$$

şeklinde bir silindirdir. Bu ise Teorem 4.1.1 e göre, M^n hiperyüzeyinin **u** vektörüne paralel bir hiperdüzlem ya da **u** vektörüne ortogonal olan $\alpha-$katener silindir olması anlamına gelir. Teoremin ispatını tamamlamak için (4.1.12) denkleminin $f_k'' = 0$ dan başka hiçbir çözümünün olmadığını göstermemiz yeterli olacaktır.

Durum 2. $f_k'' \neq 0$, $k = 2,3,...,n$ olsun. (4.1.12) denklemi $2f_k'f_k''$ ile bölündüğünde

$$\sum_{k\neq i=1}^{n} f_i'' + \left[1 + \sum_{k\neq i=1}^{n} \left(f_i'\right)^2\right] \frac{f_k'''}{2f_k'f_k''} = -\alpha \frac{f_1'}{x_1} \tag{4.1.13}$$

elde edilir. (4.1.13) denkleminin x_k, $k \neq 1$ ya göre türevi alınırsa,

$$\left[1 + \sum_{k\neq i=1}^{n} \left(f_i'\right)^2\right] \left(\frac{f_k'''}{2f_k'f_k''}\right)' = 0 \tag{4.1.14}$$

bulunur. Bu ise $\nu_k \in \mathbb{R}$ için

$$f_k''' = 2\nu_k f_k' f_k'' \tag{4.1.15}$$

eşitliğini verir. Buna göre (4.1.15) denklemi için iki durum söz konusudur:

Durum 2.1. $\nu_k = 0$ olsun. Bu durumda

$$f_k'' = \lambda_k, \quad k = 2,...,n, \lambda_k \neq 0$$

şeklindedir. O zaman (4.1.11) denklemi

$$G_1(x_1) + G_2(x_1)\left(f_2'\right)^2 + G_3(x_1)\left(f_3'\right)^2 + ... + G_n(x_1)\left(f_n'\right)^2 = 0 \tag{4.1.16}$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &= f_1'' + \alpha\tfrac{f_1'}{x_1} + \alpha\tfrac{(f_1')^3}{x_1} + (f_1')^2 \sum_{i=2}^{n} \lambda_i, \\ G_2(x_1) &= f_1'' + \alpha\tfrac{f_1'}{x_1} + \sum_{i=3}^{n} \lambda_i, \\ G_3(x_1) &= f_1'' + \alpha\tfrac{f_1'}{x_1} + \sum_{3\neq i=2}^{n} \lambda_i, \\ &\vdots \\ G_n(x_1) &= f_1'' + \alpha\tfrac{f_1'}{x_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

şeklindedir. (4.1.16) denkleminin x_k, $k \neq 1$ ya göre kısmi türevi alınırsa,

$$G_i = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

bulunur. Eğer (4.1.17) denklem sisteminde, ikinci eşitlik, üçüncü eşitlikten çıkarılırsa, $\lambda_2 = \lambda_3$ elde edilir. Benzer şekilde eğer üçüncü eşitlik, dördüncü eşitlikten çıkarılırsa, $\lambda_3 = \lambda_4$ bulunur. İşlemler bu şekilde devam ettirilerek, $\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n$ elde edilir. Buna göre $\tilde{\lambda} = \lambda_k$, $k = 2, 3, ..., n$, olarak alabiliriz. (4.1.17) denkleminde ilk eşitlik dışında herhangi bir eşitlikten

$$f_1'' + \frac{\alpha f_1'}{x_1} = \tilde{\lambda}(2-n) \tag{4.1.18}$$

bulunur. Böylece (4.1.18) eşitliği, (4.1.17) denklemindeki ilk eşitlikte yerine yazılırsa

$$\tilde{\lambda}(n-1)\left(f_1'\right)^2 + \frac{\alpha\left(f_1'\right)^3}{x_1} + \tilde{\lambda} = 0 \tag{4.1.19}$$

elde edilir. (4.1.19) eşitliğinin x_1 e göre türevi alınıp x_1 e bölünürse,

$$f_1''\left[2\tilde{\lambda}(n-1)\frac{f_1'}{x_1} + 3\alpha\left(\frac{f_1'}{x_1}\right)^2\right] - \left(\frac{f_1'}{x_1}\right)^3 = 0 \tag{4.1.20}$$

olur. $f_1'' = \tilde{\lambda}(2-n) - \frac{\alpha f_1'}{x_1}$ olduğundan, (4.1.20) eşitliği,

$$-\left(3\alpha^2+1\right)\left(\frac{f_1'}{x_1}\right)^3 + \alpha\tilde{\lambda}(8-5n)\left(\frac{f_1'}{x_1}\right)^2 - 2\tilde{\lambda}^2(n-1)(n-2)\left(\frac{f_1'}{x_1}\right) = 0$$

şeklinde $\left(\frac{f_1'}{x_1}\right)$ in polinomuna dönüşür. Bu polinomun başkatsayısı sıfır olamayacağından dolayı bir çelişkidir.

Durum 2.2. $\nu_k \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.1.13) denklemi

$$\sum_{k\neq i=1}^{n} f_i'' + \nu_k\left[1 + \sum_{k\neq i=1}^{n}\left(f_i'\right)^2\right] = \frac{-\alpha f_1'}{x_1} \tag{4.1.21}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.1.21) denkleminin $x_l, 1 \neq l \neq k$, ye göre kısmi türevi alındığında

$$f_l''' + 2\nu_k f_l' f_l'' = 0 \tag{4.1.22}$$

elde edilir. (4.1.15) denklemi $k = 2, ..., n$ için sağlandığından,

$$f_l''' = 2\nu_l f_l' f_l''$$

bulunur. Bu eşitlik (4.1.22) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\nu_k + \nu_l = 0 \tag{4.1.23}$$

olur. Diğer taraftan (4.1.15) denkleminin integrali

$$f_k'' = \nu_k \left(f_k'\right)^2 + \mu_k \tag{4.1.24}$$

denklemini verir. (4.1.23) ve (4.1.24) denklemleri, (4.1.21) denkleminde yerine yazıldığında, (4.1.21) denklemi

$$f_1'' = -\left[\nu_k \left(f_1'\right)^2 + \frac{\alpha f_1'}{x_1} + \nu_k + \sum_{k\neq i=2}^{n} \mu_i\right] \tag{4.1.25}$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.1.24) ve (4.1.25) denklemleri (4.1.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{i=2}^{n}\left[\left(\nu_i-\nu_k\right)\left(f_i'\right)^2+\mu_i\right]-\nu_k\right\}\left(f_1'\right)^2+\sum_{i=2}^{n}\left[1+\sum_{j\neq i=2}^{n}\left(f_j'\right)^2\right]\left[\nu_i\left(f_i'\right)^2+\mu_i\right]\\ -\varepsilon\left[1+\sum_{i=2}^{n}\left(f_i'\right)^2\right]=\frac{-\alpha\left(f_1'\right)^3}{x_1}\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

bulunur. (4.1.26) denkleminin x_1 e göre türevi

$$2\left\{\sum_{i=2}^{n}\left[\left(\nu_i-\nu_k\right)\left(f_i'\right)^2+\mu_i\right]-\nu_k\right\}f_1''=-3\frac{f_1 f_1''}{x_1}+\alpha\left(\frac{f_1'}{x_1}\right)^2$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklemin $x_l, 1\neq l\neq k$, ye göre kısmi türevi

$$4\left(\nu_k-\nu_l\right)f_l' f_l'' f_1''=0$$

olup, buradan

$$\nu_k - \nu_l = 0 \tag{4.1.27}$$

olduğu sonucu elde edilir. (4.1.23) ve (4.1.27) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde, $\nu_k = 0$ çelişkisi elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.1.3 Afin Öteleme Yüzeyler

$\mathbb{R}^3$ de, diferensiyellenebilir f ve g fonksiyonları için

$$\varphi(x,y) = (x, y, f(x) + g(y+cx)), \quad c \in \mathbb{R} - 0 \tag{4.1.28}$$

formunda grafiğe sahip bir M^2 yüzeyini alalım. $\tilde{x} = x, \tilde{y} = y + cx$ şeklinde bir parametre değişimi ile M^2 yüzeyi üzerindeki bir lokal parametrizasyon

$$r : I \times J \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

$$r(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \tilde{y} - c\tilde{x}, f(\tilde{x}) + g(\tilde{y})) \tag{4.1.29}$$

olarak seçilebilir. (4.1.29) denklemi, düzlemsel iki eğrinin toplamı olarak yazılabilir, yani $r(\tilde{x}, \tilde{y}) = \gamma(\tilde{x}) + \mu(\tilde{y})$ şeklindedir. Burada

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \gamma(\tilde{x}) = (\tilde{x}, -c\tilde{x}, f(\tilde{x}))$$

ve

$$\mu : J \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3, \mu(\tilde{y}) = (0, \tilde{y}, g(\tilde{y}))$$

dır. γ ve μ eğrilerinin birbirlerine ortogonal olmayan düzlemlerde yattıkları açık bir şekilde görülebilir. Dolayısıyla M^2 yüzeyi klasik öteleme yüzeylerin bir genellemesine dönüşmüş olur. M^2 yüzeyinin teğet düzlemi

$$r_{\tilde{x}} = \mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_2 + f'\mathbf{e}_3$$

ve

$$r_{\tilde{y}} = \mathbf{e}_2 + g'\mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir, burada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbb{R}^3$ ün standart bazıdır. Buna göre M^2 yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = -\frac{(f' + cg')\,\mathbf{e}_1 + g'\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + (f' + cg')^2 + (g')^2}} \tag{4.1.30}$$

şeklindedir. M^2 nin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1 + c^2 + (f')^2, \quad g_{12} = -c + f'g', \quad g_{22} = 1 + (g')^2$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan M^2 nin ikinci temel formunun katsayıları

$$h_{11} = \frac{f''}{\sqrt{1+(f'+cg')^2+(g')^2}},$$

$$h_{12} = h_{21} = 0,$$

$$h_{22} = \frac{g''}{\sqrt{1+(f'+cg')^2+(g')^2}}$$

olur. Böylece M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+c^2+(f')^2\right]g''}{2\left[1+(f'+cg')^2+(g')^2\right]^{3/2}} \tag{4.1.31}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.1.3. $\mathbb{R}^3$ *de (4.1.28) formundaki grafiğe sahip bir* M^2 *yüzeyi,* $\mathbf{u} = (1,0,0)$ *yatay vektörüne göre singüler minimal ise, o zaman* M^2 *yüzeyi,* $\mathbf{u}$ *vektörüne paralel bir düzlemdir ya da üreteçleri* $\mathbf{u}$ *vektörüne göre ortogonal yatay düz doğrular olan bir* $\alpha-$*katener silindirdir.*

İspat: (4.1.30) ve (4.1.31) eşitlikleri, (3.1.1) singüler minimal yüzey denkleminde yerine yazılırsa, (3.1.1) denklemi

$$\frac{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+c^2+(f')^2\right]g''}{1+(f'+cg')^2+(g')^2} = -\alpha\frac{f'+cg'}{\tilde{x}} \tag{4.1.32}$$

denklemine dönüşür. (4.1.32) denkleminin çözümü için üç durum mevcuttur:

Durum 1. $f'' = 0$, yani $f' = f_0 = sbt$. olsun. Buna göre (4.1.32) ifadesi

$$\frac{\left[1+c^2+(f_0)^2\right]g''}{1+(f_0+cg')^2+(g')^2} = -\alpha\frac{f_0+cg'}{\tilde{x}} \tag{4.1.33}$$

denklemine indirgenir. (4.1.33) denkleminin $\tilde{x}$ ya göre türevi alınırsa, $\alpha \neq 0$ olduğundan dolayı

$$f_0 + cg' = 0 \tag{4.1.34}$$

bulunur. (4.1.34) eşitliği, (4.1.33) denkleminde yerine yazılırsa, $g'' = 0$ olduğu elde edilir. Sıfırdan farklı herhangi bir g_0 sabiti için $g' = g_0$ olarak alındığında, (4.1.34) denkleminden

$$f_0 + cg_0 = 0$$

sonucu elde edilir. Buna göre herhangi bir ν sabiti için

$$z(x,y) = f_0 x + g_0 (y+cx) + \nu = g_0 y + \nu$$

olur ve dolayısıyla yüzey

$$\varphi(x,y) = x(1,0,0) + (0,y,g_0 y + \nu)$$

şeklinde parametrize edilir. Bu ise M^2 yüzeyinin **u** vektörüne paralel bir düzlem olduğu sonucunu verir.

Durum 2. $f'' \neq 0$ ve $g'' = 0$ olsun. Bu durumda herhangi λ ve ν sabitleri için, g fonksiyonu

$$g(y+cx) = \lambda(cx+y) + \nu$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla M^2 yüzeyi

$$\varphi(x,y) = (x,y,f(x) + \lambda(cx+y) + \nu) = (x,0,f(x) + \lambda cx + \nu) + y(1,1,\lambda)$$

formunda bir silindirdir. Böylece Teorem 4.1.1 e göre M^2 yüzeyinin, üreteçleri $(0,1,\lambda)$ vektörüne paralel olan bir α–katener silindir olduğu sonucu elde edilir.

Durum 3. $f''g'' \neq 0$ olsun. (4.1.32) denkleminin $\tilde{y}$ ya göre kısmi türevi alındığında,

$$\begin{aligned} 2g'g''f'' + \left[1 + c^2 + (f')^2\right] g''' &= -\alpha \frac{c}{\tilde{x}} \left[1 + (f' + cg')^2 + (g')^2\right] g'' \\ &\quad -2\alpha \frac{f' + cg'}{\tilde{x}} \left[cf' + (c^2+1) g'\right] g'' \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

elde edilir. (4.1.35) denklemi g'' ile bölündüğünde

$$\begin{aligned} 2g'f'' + \left(1 + c^2 + (f')^2\right) \frac{g'''}{g''} &= -\alpha \frac{c}{\tilde{x}} \left(1 + (f' + cg')^2 + (g')^2\right) \\ &\quad -2\alpha \frac{(f' + cg')}{\tilde{x}} \left(cf' + (c^2+1) g'\right) \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

olur.

Şimdi $\frac{g'''}{g''} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.1.36) denklemi

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}g'f'' + \left[1 + c^2 + (f')^2\right] \lambda \tilde{x} &= -\alpha c \left[1 + (f' + cg')^2 + (g')^2\right] \\ &\quad -2\alpha (f' + cg') \left[cf' + (c^2+1) g'\right] \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

olur. (4.1.37) denkleminin $\tilde{y}$ ya göre kısmi türevi alınıp, ardından g'' ile bölünürse,

$$\tilde{x}f'' + \alpha 3c^{2}\tilde{}+1 = -3\alpha c\left(c^2+1\right)g' \tag{4.1.38}$$

bulunur. (4.1.38) denkleminin $\tilde{y}$ ya göre kısmi türevi, $g''=0$ çelişkisini verir. Dolayısıyla $\left(\frac{g'''}{g''}\right)' \neq 0$ olduğu elde edilir. (4.1.36) denkleminin $\tilde{y}$ ya göre kısmi türevi alınıp, ardından g'' ile bölündüğünde,

$$f'' + \left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right]\left[\frac{\left(\frac{g'''}{g''}\right)'}{g''}\right] = -\frac{2\alpha c}{\tilde{x}}\left[cf'+\left(c^2+1\right)g'\right] - \frac{\alpha\left(c^2+1\right)}{\tilde{x}}\left(f'+cg'\right) \tag{4.1.39}$$

elde edilir. (4.1.39) denkleminin $\tilde{y}$ ya göre türevi

$$\left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right]\left[\frac{\left(\frac{g'''}{g''}\right)'}{g''}\right]' = -\frac{3\alpha c\left(c^2+1\right)}{\tilde{x}}g'' \tag{4.1.40}$$

eşitliğini verir. (4.1.40) ün her iki tarafı sıfırdan farklı olduğundan, bir $\lambda_1 \in \mathbb{R}-\{0\}$ için

$$1+c^2+\left(f'\right)^2 = -\frac{3\alpha c\left(c^2+1\right)}{\lambda_1\tilde{x}} \tag{4.1.41}$$

ve

$$\left[\frac{\left(\frac{g'''}{g''}\right)'}{g''}\right]' = \lambda_1 g'' \tag{4.1.42}$$

yazılabilir. (4.1.42) denkleminin integrali alındığında

$$g'' = \frac{\lambda_1}{6}\left(g'\right)^3 + \frac{\lambda_2}{2}\left(g'\right)^2 + \lambda_3 g' + \lambda_4, \quad \lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R} \tag{4.1.43}$$

elde edilir. (4.1.43) denklemi (4.1.33) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left[1+\left(g'\right)^2\right]f'' + \left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right]\left[\frac{\lambda_1}{6}\left(g'\right)^3 + \frac{\lambda_2}{2}\left(g'\right)^2 + \lambda_3 g' + \lambda_4\right] \\ = -\alpha\frac{f'+cg'}{\tilde{x}}\left[1+\left(f'+cg'\right)^2+\left(g'\right)^2\right]\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

olup (4.1.44) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\lambda_1}{6}\left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right] + \frac{\alpha c\left(1+c^2\right)}{\tilde{x}}\right\}\left(g'\right)^3 \\ &+\left\{f'' + \frac{\lambda_2}{2}\left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right] + \frac{\alpha\left(3c^2+1\right)}{\tilde{x}}f'\right\}\left(g'\right)^2 \\ &+\left\{\lambda_3\left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right] + \frac{\alpha c}{\tilde{x}} + \frac{2\alpha c}{\tilde{x}}\left(f'\right)^2\right\}g' \\ &+\left\{f'' + \lambda_4\left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right] + \frac{\alpha}{\tilde{x}}f' + \frac{\alpha}{\tilde{x}}\left(f'\right)^3\right\} = 0\end{aligned}$$

şeklinde g' nün polinomu elde edilir. Bu denklemin sağlanması için katsayıların sıfır olması gerektiğinden dolayı, polinomun birinci dereceden teriminin katsayısı

$$\lambda_3\left[1+c^2+\left(f'\right)^2\right]+\frac{\alpha c}{\tilde{x}}+\frac{2\alpha c}{\tilde{x}}\left(f'\right)^2=0 \tag{4.1.45}$$

denklemini verir. (4.1.41) denklemi, (4.1.45) de yerine yazıldığında,

$$\frac{-3\alpha\lambda_3 c\left(1+c^2\right)}{\lambda_1}+\alpha c+2\alpha c\left(f'\right)^2=0$$

olur ve bu denkleminin türevi alındığında, $f''=0$ çelişkisi elde edilir.

4.2 $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Yarı–Simetrik Konneksiyonlara Sahip Olan Singüler Minimal Öteleme Yüzeyler

$\left(\mathbb{R}^3,\langle,\rangle\right)$, 3-boyutlu Öklid uzayı ve $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ ün standart bazı olsun. Buna göre, sırasıyla,

$$\nabla_X Y=\nabla_X^L Y+\langle Y,\mathbf{e}_3\rangle X-\langle X,Y\rangle\mathbf{e}_3 \tag{4.2.1}$$

ve

$$D_X Y=\nabla_X^L Y+\langle Y,\mathbf{e}_3\rangle X \tag{4.2.2}$$

şeklinde tanımlı olan belirli yarı–simetrik metrik konneksiyon ve yarı–simetrik non–metrik konneksiyonları göz önüne alalım. Burada ∇^L, $\mathbb{R}^3$ ün Levi–Civita konneksiyonu ve $X,Y\in\Gamma\left(T\mathbb{R}^3\right)$ dir. Buna göre (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri için, sırasıyla,

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1=-\mathbf{e}_3, & \nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2=0, & \nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1,\\
\nabla_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1=0, & \nabla_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_3, & \nabla_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2,\\
\nabla_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_1=0, & \nabla_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_2=0, & \nabla_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_3=0
\end{array}$$

ve

$$\begin{array}{lll}
D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1=0, & D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2=0, & D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1,\\
D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1=0, & D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2=0, & D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_2,\\
D_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_1=0, & D_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_2=0, & D_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_3,
\end{array}$$

şeklinde yazılır.

M^2, $\mathbb{R}^3$ uzayına daldırılmış, yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\forall\, X,Y \in \Gamma\left(TM^2\right)$ ve $\xi \in \Gamma\left(TM^2\right)^{\perp}$ için ∇ ve D konneksiyonlarına göre Gauss formülleri, sırasıyla,

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^{\mathsf{T}} + h^{\nabla}(X,Y)\,\xi,$$

ve

$$D_X Y = (D_X Y)^{\mathsf{T}} + h^{D}(X,Y)\,\xi$$

şeklindedir. Burada T, M^2 yüzeyinin tanjant demeti üzerindeki izdüşümü gösterir. Ayrıca h^{∇} ve h^{D}, sırasıyla, ∇ ve D konneksiyonlarına göre *(0,2)–tensör alanı* olarak adlandırılır (Nakao, 1976). $\{e_1,e_2\}$, M^2 yüzeyi üzerinde ortonormal tanjant çatısı olsun. Buna göre M^2 yüzeyinin ∇ ve D konneksiyonlarına göre ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$H^{\nabla} = \frac{1}{2}\left[h^{\nabla}(e_1,e_1) + h^{\nabla}(e_2,e_2)\right]$$

ve

$$H^{D} = \frac{1}{2}\left[h^{D}(e_1,e_1) + h^{D}(e_2,e_2)\right]$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer H^{∇} ve H^{D} ortalama eğrilikleri sıfır ise, M^2 yüzeyine, sırasıyla, $\nabla-$minimal ve $D-$minimaldir denir.

g_{ij}, $1 \leq i,j \leq 2$, kanonik metrikten M^2 üzerine indirgenmiş metrik tensörün bileşenlerini göstersin. Buna göre yukarıda ifade edilen H^{∇} ve H^{D} ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$H^{\nabla} = \frac{g_{22}h_{11}^{\nabla} - g_{12}\left(h_{12}^{\nabla} + h_{21}^{\nabla}\right) + g_{11}h_{22}^{\nabla}}{2\det g_{ij}} \tag{4.2.3}$$

ve

$$H^{D} = \frac{g_{22}h_{11}^{D} - g_{12}\left(h_{12}^{D} + h_{21}^{D}\right) + g_{11}h_{22}^{D}}{2\det g_{ij}} \tag{4.2.4}$$

olarak düzenlenir. Burada $\Gamma(TM^2)$ nin $\{f_1,f_2\}$ bazı için

$$h_{ij}^{\nabla} = \langle \nabla_{f_i} f_j, \xi \rangle \quad \text{ve} \quad h_{ij}^{D} = \langle D_{f_i} f_j, \xi \rangle$$

olarak tanımlıdır.

Böylece ∇ ve D konneksiyonlarına göre singüler minimallik kavramı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Tanım 4.2.1. *$\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3$ yönlendirilmiş bir M^2 yüzeyinin diferensiyellenebilir bir immersiyonu ve $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \neq 0$, ξ vektörüne paralel olmayan belirli bir birim vektör olsun. H^∇ ve H^D ile sırasıyla, ∇ ve D konneksiyonlarına göre M^2 nin ortalama eğrilikleri gösterilsin. Herhangi bir α reel sabiti için, eğer M^2 yüzeyi,*

$$2H^\nabla = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u} \rangle}{\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle} \tag{4.2.5}$$

eşitliğini sağlarsa, M^2 ye $\mathbf{u}$ vektörüne göre $\nabla-$singüler minimal yüzey denir. Ayrıca, eğer M^2 yüzeyi,

$$2H^D = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u} \rangle}{\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle} \tag{4.2.6}$$

eşitliğini sağlarsa, M^2 ye $\mathbf{u}$ vektörüne göre $D-$singüler minimal yüzey denir. Burada ξ, M^2 yüzeyinin birim normal vektör alanıdır.

4.2.1 $\nabla-$Singüler Minimal Öteleme Yüzeyler

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ de $\nabla-$singüler minimal öteleme yüzeyleri sınıflandıracağız. Yüzeyin öteleme özelliği değiştikçe, (4.2.5) denklemi farklı denklemler üretir.

$$z = f(x) + g(y), \quad y = f(x) + g(z), \quad x = f(y) + g(z)$$

şeklinde üç tip öteleme yüzeyi var olduğundan, her yüzey türü için farklı sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.1. *$\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{u}$ yatay vektörüne göre $z = f(x) + g(y)$ tipinde bir $\nabla-$singüler minimal öteleme yüzey, aşağıdakilerden birini sağlayan genelleştirilmiş bir silindirdir:*

1. *$f(x) = c_1$ ve $g(y) = -\frac{1}{2} \ln |\cos(2y + c)| + c_3$,*

2. *$g(y) = c_5 + c_4 y$ ve f fonksiyonu*

$$f'' = \frac{-\alpha}{\left(1 + c_4^2\right) x} \left(f'\right)^3 + \frac{2}{1 + c_4^2} \left(f'\right)^2 - \frac{\alpha}{u} f' + 2$$

adi diferensiyel denkleminin bir çözümüdür, burada $c_1, ..., c_7 \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: Yüzey, tek değişkenli f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$$

şeklinde parametrize edilsin. Yüzeyin teğet düzlemi,

$$\varphi_x = \mathbf{e}_1 + f'\mathbf{e}_3$$

ve

$$\varphi_y = \mathbf{e}_2 + g'\mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. O zaman yüzeyin ξ birim normal vektör alanı ve birinci temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$\xi = \frac{(-f'\mathbf{e}_1 - g'\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}}$$

ve

$$g_{11} = 1 + \left(f'\right)^2, \quad g_{12} = f'g', \quad g_{22} = 1 + \left(g'\right)^2$$

ile verilir. Böylece, yüzey üzerinde ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonu

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_x}\varphi_x &= f'\mathbf{e}_1 + \left(-1+f''\right)\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_x}\varphi_y &= g'\mathbf{e}_1, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_x &= f'\mathbf{e}_2, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_y &= g'\mathbf{e}_2 + \left(-1+g''\right)\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

olup, ikinci temel formun katsayıları

$$h^{\nabla}_{11} = -\frac{(f')^2}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}},$$

$$h^{\nabla}_{12} = h^{\nabla}_{21} = -\frac{f'g'}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}},$$

$$h^{\nabla}_{22} = \frac{-1-(g')^2+g''}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}}$$

şeklindedir, burada $f' = \frac{df}{dx}$, $g' = \frac{dg}{dy}$ dir. Dolayısyla (4.2.3) formülünden yüzeyin H^{∇} ortalama eğriliği, aşağıdaki gibi elde edilir:

$$2H^{\nabla} = \frac{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+(f')^2\right]g'' - 2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]}{\left[1+(f')^2+(g')^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Genelliği bozmaksızın $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ alınabilir. Böylece, (4.2.5) $\nabla-$singüler minimal yüzey denklemi,

$$\frac{\left[1+(g')^2\right]f''+\left[1+(f')^2\right]g''-2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]}{1+(f')^2+(g')^2}=-\alpha\frac{f'}{x} \tag{4.2.7}$$

şekline dönüşür. Buna göre (4.2.7) denkleminin çözümü için, aşağıdaki durumlar vardır:

Durum 1. $f = c_1 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda (4.2.7) denklemi

$$g'' - 2g'^2 = 2$$

şeklinde olur ya da buna denk olarak

$$\frac{dg'}{1+(g')^2} = 2dy \tag{4.2.8}$$

denklemine indirgenir. (4.2.8) den integral alınırsa

$$\arctan g' = 2y + c_2$$

veya

$$g' = \tan(2y + c_2)$$

elde edilir, burada $c_2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ifadenin integrali alınırsa,

$$g = c_3 - \frac{1}{2} ln \mid \cos(2y + c_2) \mid$$

olur, burada $c_3 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ise teoremin birinci ifadesini verir.

Durum 2. $f' = f_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.2.7) denklemi,

$$\left\{\left(1+f_0^2\right)g''-2\left[1+f_0^2+\left(g'\right)^2\right]\right\}x+\alpha f_0\left[1+f_0^2+\left(g'\right)^2\right]=0$$

şeklinde x in polinomuna indirgenir. $\alpha f_0 \neq 0$ olduğundan dolayı polinomun sabit teriminden

$$1 + f_0^2 + \left(g'\right)^2 = 0$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $f'' = 0$ olamaz.

Durum 3. $f'' \neq 0$ olsun. (4.2.7) denkleminin y ye göre kısmi türevi alındığında,

$$2\left(-2+f''\right)g'g''+\left[1+\left(f'\right)^2\right]g'''=-2\alpha g'g''\frac{f'}{x} \tag{4.2.9}$$

bulunur. Böylece (4.2.9) denkleminin çözümü için iki durum söz konusudur:

Durum 3.1. $g' = g_0 \neq 0$, $g_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Açık bir şekilde görülebilir ki $g' = g_0$, (4.2.9) denklemi için bir çözümdür. Böylece (4.2.7) denklemi

$$x\left\{\left(1+g_0^2\right)f'' - 2\left[1+g_0^2+\left(f'\right)^2\right]\right\} + \alpha f'\left[1+g_0^2+\left(f'\right)^2\right] = 0$$

denklemine ya da bu denklemin $x\left(1+g_0^2\right)$ ile bölünmesiyle

$$f'' + \frac{\alpha}{\left(1+g_0^2\right)x}\left(f'\right)^3 - \frac{2}{1+g_0^2}\left(f'\right)^2 + \frac{\alpha}{x}f' - 2 = 0$$

eşitliğine indirgenir.

Durum 3.2. $g'' \neq 0$ olsun. (4.2.9) denklemi $2g'g''$ ile bölündüğünde

$$\left[1+\left(f'\right)^2\right]\frac{g'''}{2g'g''} + f'' + \alpha\frac{f'}{x} - 2 = 0 \tag{4.2.10}$$

denklemi elde edilir. (4.2.10) denkleminin y ye göre kısmi türevi,

$$\left[1+\left(f'\right)^2\right]\left[\frac{g'''}{2g'g''}\right]' = 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu denklemden

$$g''' = 2\lambda_1 g'g'', \quad \lambda_1 \in \mathbb{R} \tag{4.2.11}$$

olduğu elde edilir. (4.2.11) denkleminin integrali

$$g'' = \lambda_2 + \lambda_1\left(g'\right)^2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \tag{4.2.12}$$

eşitliğini verir. (4.2.12) denklemi, (4.2.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f'' + \left[1+\left(f'\right)^2\right]\left(\alpha\frac{f'}{x} - 2 - \lambda_2\right) = 0 \tag{4.2.13}$$

bulunur. (4.2.10) ve (4.2.13) denklemlerinden, aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$f'' = \frac{\left(\alpha\frac{f'}{x} - 2\right)\left(\alpha\frac{f'}{x} - 2 + \lambda_2\right)}{\left(-\alpha\frac{f'}{x} + 2 + \lambda_1 - \lambda_2\right)} \tag{4.2.14}$$

ve

$$\left(\lambda_2 - \lambda_1 - 2\right)\left(f'\right)^2 + \alpha\frac{\left(f'\right)^3}{x} + \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \tag{4.2.15}$$

(4.2.15) denkleminin türevi,

$$\left[2\left(\lambda_2 - \lambda_1 - 2\right) + \frac{3\alpha f'}{x}\right]f'' = \alpha\left(\frac{f'}{x}\right)^2 \tag{4.2.16}$$

denklemini verir. (4.2.14) denklemi, (4.2.16) denkleminde göz önünde bulundurulduğunda

$$\alpha^2(1+3\alpha)\left(\frac{f'}{x}\right)^3+\alpha\left[\alpha(-16-2c+5d)+2+c-d\right]\left(\frac{f'}{x}\right)^2$$
$$2\alpha\left[(-4+d)(-2-c+d-3(-2+d))\right]\frac{f'}{x}-4(-2-c+d)(-2+d)=0 \quad (4.2.17)$$

şeklinde $\frac{f'}{x}$ in polinomu elde edilir. Bu polinomun başkatsayısının sıfır olması $\alpha=\frac{-1}{3}$ olduğunu verir ve dolayısıyla (4.2.17) denklemi

$$\begin{array}{c}\frac{-22-5c+8d}{9}\left(\frac{f'}{x}\right)^2-\frac{2}{3}\left[(-4+d)(-2-c+d)-3(-2+d)\right]\frac{f'}{x}\\ -4(-2-c+d)(-2+d)=0.\end{array} \quad (4.2.18)$$

denklemine dönüşür. (4.2.18) denklemin sağlanması için sabit terim sıfır olmalıdır. Bunun için kabul edelim ki $d=2$ olsun. Bu durumda (4.2.18) denklemi aynı anda $c=\frac{-6}{5}$ ve $c=0$ çelişkisini verir. O halde bu $d\neq 2$ ve $-2-c+d=0$ olması demektir ve dolayısıyla birinci dereceden terimin katsayısı sıfır olamaz ki bu da $g''\neq 0$ kabulümüzün bir çelişki olduğunu verir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.2.2. *$\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{u}$ yatay vektörüne göre $y=f(x)+g(z)$ tipinde $\nabla-$singüler minimal öteleme yüzey aşağıdakilerden birini sağlayan bir genelleştirilmiş silindirdir:*

1. *$f(x)=c_1$ ve*

$$g(y)=\pm\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{c_2}\sqrt{e^{4z}-c_2^2}\right)+c_3,$$

2. *$g(z)=c_4v+c_5$ ve f,*

$$f''=\frac{-\alpha}{\left(1+c_4^2\right)x}\left(f'\right)^3-\frac{2c_4}{1+c_4^2}\left(f'\right)^2-\frac{\alpha}{x}f'-2c_4$$

adi diferensiyel denkleminin çözümüdür, burada $c_1,\ldots,c_5\in\mathbb{R}$, $c_2\neq 0$ dir.

İspat: Yüzey, tek değişkenli f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\varphi(x,z)=(x,f(x)+g(z),z)$$

olarak parametrize edilsin. Buna göre yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x=\mathbf{e}_1+f'\mathbf{e}_2$$

ve

$$\varphi_z = g'\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir, burada $f' = \frac{df}{dx}, \quad g' = \frac{dg}{dz}$ dir. Dolayısıyla yüzeyin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{f'\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + g'\mathbf{e}_3}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1 + \left(f'\right)^2, \quad g_{12} = f'g', \quad g_{22} = 1 + \left(g'\right)^2$$

dir. O halde, yüzey üzerinde ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_x}\varphi_x &= f''\mathbf{e}_2 - \left[1+\left(f'\right)^2\right]\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_x}\varphi_z &= \mathbf{e}_1 + f'\mathbf{e}_2 - f'g'\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_x &= -f'g'\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_z &= \left(g'+g''\right)\mathbf{e}_2 - \left(g'\right)^2\mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Buna göre ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla} = -\frac{f'' + \left[1+(f')^2\right]g'}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = -\frac{f'(g')^2}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla} = -\frac{g'' - (g')^3 + g'}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}}$$

şeklindedir. Dolayısyla, (4.2.3) formülünden yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = -\frac{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+(f')^2\right]g'' + 2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]g'}{\left[1+(f')^2+(g')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde bulunur. Buna göre (4.2.5) $\nabla-$singüler minimal yüzey denklemi

$$\frac{f''\left[1+(g')^2\right] + g''\left[1+(f')^2\right] + 2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]g'}{1+(f')^2+(g')^2} = -\alpha\frac{f'}{x} \tag{4.2.19}$$

denklemine dönüşür. (4.2.19) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1. $f = f_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda (4.2.19) denklemi

$$g'' = -2\left[1+\left(g'\right)^2\right]g'$$

denklemine indirgenir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldğında

$$-\frac{g''g'}{1+\left(g'\right)^2}+\frac{g''}{g'}=-2$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu denklemin integrali alındığında

$$\frac{g'}{\sqrt{1+\left(g'\right)^2}}=c_1e^{-2z},\quad c_1\in\mathbb{R}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g' = \pm c_1^2\left(e^{4z}-c_1^2\right)^{-1/2} \tag{4.2.20}$$

olur. Böylece (4.2.20) denklemi

$$e^{4z}-c_1^2=t^2, dz=\frac{t}{2\left(c_1^2+t^2\right)}dt$$

değişken değiştirmesi yardımıyla,

$$dg=\pm\frac{dt}{2\left(c_1^2+t^2\right)}$$

şeklinde yazılıp, integrali alındığında

$$g=\pm\frac{1}{2c_1}\arctan\left(\frac{t}{c_1}\right)+c_2$$

denklemi elde edilir ve dolayısıyla da g fonksiyonu

$$g=\pm\frac{1}{2c_1}\arctan\left(\frac{1}{c_1}\sqrt{e^{4z}-c_1^2}\right)+c_2$$

şeklinde bulunur, burada $c_2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ise teoremin birinci ifadesini verir.

Durum 2. $f' = f_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.2.19) denklemi

$$\left\{\left[1+f_0^2\right]g''+2\left[1+f_0^2+\left(g'\right)^2\right]g'\right\}x+\alpha f_0\left[1+f_0^2+\left(g'\right)^2\right]=0$$

şeklinde x in polinomuna indirgenir. $\alpha f_0 \neq 0$ olduğundan, bu deklemin sabit terimi,

$$1+f_0^2+\left(g'\right)^2=0$$

çelişkisini verir.

Durum 3. $f'' \neq 0$ olsun. (4.2.19) denkleminin z ye göre türevi alındığında,

$$6\left(g'\right)^2 g'' + 2\left(f'' + \alpha\frac{f'}{x}\right) g'g'' + \left[1+\left(f'\right)^2\right]\left(2g''+g'''\right) = 0 \tag{4.2.21}$$

elde edilir. (4.2.21) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 3.1. $g' = g_0 \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun (4.2.21) denklemi için bir çözüm olduğu açıktır. Böylece (4.2.19) denklemi,

$$f'' + \frac{\alpha}{\left(1+g_0^2\right)x}\left(f'\right)^3 + \frac{2g_0}{1+g_0^2}\left(f'\right)^2 + \frac{\alpha}{x}f' + 2g_0 = 0$$

denklemine indirgenir. Bu ise teoremin ikinci şıkkını verir.

Durum 3.2. $g'' \neq 0$ olsun. (4.2.21) denkleminin $2g'g''$ ile bölünmesi,

$$\left(\frac{g'''}{2g'g''} + \frac{1}{g'}\right)\left[1+\left(f'\right)^2\right] + \left(f'' + \alpha\frac{f'}{x}\right) + 3g' = 0 \tag{4.2.22}$$

denklemini verir. (4.2.22) denkleminin x e göre kısmi türevi,

$$\left(\frac{g'''}{2g'g''} + \frac{1}{g'}\right)\left[1+\left(f'\right)^2\right]' + \left(f'' + \alpha\frac{f'}{x}\right)' = 0$$

şeklinde olup, elde edilen bu denklemin z ye göre kısmi türevi alınırsa

$$f'f''\left(\frac{g'''}{2g'g''} + \frac{1}{g'}\right)' = 0$$

bulunur. Son denklemde $f'f'' \neq 0$ olduğundan $\left[g'''/\left(2g'g''\right) + 1/g'\right]$ teriminin sabit olduğu elde edilir. Böylece (4.2.22) denkleminin z ye göre türevi $g'' = 0$ çelişkisini verir.

Teorem 4.2.3. *$\mathbb{R}^3$ de **u** yatay vektörüne göre $x = f(y) + g(z)$ tipinde $\nabla-$singüler minimal yüzey aşağıdakilerden birini sağlayan bir genelleştirilmiş silindirdir:*

1. *$f(y) = c_1$ ve g,*

$$g'' = \left(\frac{\alpha}{c_1+g} - 2g'\right)\left[1+\left(g'\right)^2\right],\ g'' \neq 0$$

adi diferensiyel denkleminin çözümüdür;

2. *$g(z) = c_2$ ve*

$$y = \pm\int\left[c_3\left(f+c_2\right)^{2\alpha} + c_4\right]^{-1/2} df,$$

burada $c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}$, $c_3 \neq 0$ dir.

İspat: Yüzey, tek değişkenli f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\varphi(y,z) = (f(y)+g(z), y, z)$$

şeklinde parametrize edilmiş olsun. Buna göre yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_y = f'\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

ve

$$\varphi_z = g'\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Dolayısıyla yüzeyin birim normal vektör alanı ve birinci temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$$\xi = \frac{(\mathbf{e}_1 - f'\mathbf{e}_2 - g'\mathbf{e}_3)}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}}$$

ve

$$g_{11} = 1+\left(f'\right)^2, \qquad g_{12} = f'g', \qquad g_{22} = 1+\left(g'\right)^2$$

şeklindedir. O halde yüzey üzerinde ∇ yarı– simetrik metrik konneksiyonu,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_y}\varphi_y &= f''\mathbf{e}_1 - \left[1+\left(f'\right)^2\right]\mathbf{e}_2, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_z &= f'\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - f'g'\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_y &= -f'g'\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_z &= \left(g''+g'\right)\mathbf{e}_1 + \left(g'\right)^2\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

şeklinde olup ikinci temel formun katsayıları

$$h^{\nabla}_{11} = \frac{f'' + g'\left[1+(f')^2\right]}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}},$$

$$h^{\nabla}_{12} = h^{\nabla}_{21} = \frac{f'(g')^2}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}},$$

$$h^{\nabla}_{22} = \frac{g'' - (g')^3 + g'}{\sqrt{1+(f')^2+(g')^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla (4.2.3) formülünden, yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = \frac{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+(f')^2\right]g'' + 2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]g'}{\left[1+(f')^2+(g')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

bulunur. Genelliği bozmaksızın $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ olarak kabul edelim. Dolayısıyla, (4.2.5) $\nabla-$singüler minimal yüzey denklemi

$$\frac{\left[1+(g')^2\right]f''+\left[1+(f')^2\right]g''+2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]g'}{1+(f')^2+(g')^2}=\alpha\frac{1}{f+g} \tag{4.2.23}$$

denklemine dönüşür. (4.2.23) denkleminde f ve g aynı anda sabit olamaz, aksi halde $\alpha = 0$ olur ki bu incelediğimiz bir durum değildir. (4.2.23) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1. $f = f_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre (4.2.23) denklemi

$$g''+2\left[1+\left(g'\right)^2\right]g'=\alpha\frac{1+(g')^2}{f_0+g} \tag{4.2.24}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.2.24) denkleminde, g sabit olmayan bir fonksiyon olmalıdır, aksi taktirde $\alpha = 0$ elde edilir. Bu ise teoremin birinci maddesindeki ifadeyi verir.

Durum 2. $f(y) = d + cy$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ olsun. O zaman (4.2.23) denklemi

$$\frac{\left(1+c^2\right)g''}{1+c^2+(g')^2}+2g'=\alpha\frac{1}{d+cy+g} \tag{4.2.25}$$

denklemine dönüşür. (4.2.25) denkleminin y ye göre kısmi türevi alındığında, $\alpha c = 0$ çelişkisi bulunur.

Durum 3. $f'' \neq 0$ ve $g = g_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre (4.2.23) denklemi

$$\frac{f''}{1+(f')^2}=\alpha\frac{1}{f+g_0} \tag{4.2.26}$$

denklemine indirgenir. (4.2.26) denklemi $2f'$ ile çarpılır ve integrali alınırsa,

$$\ln\left|1+\left(f'\right)^2\right| = 2\alpha\ln|f+g_0|+\ln c$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$f' = \pm\sqrt{c\,(f+g_0)^{2\alpha}-1},\ c\in\mathbb{R},\ c\neq 0 \tag{4.2.27}$$

bulunur. (4.2.27) denkleminin türevi, *Emden-Fowler* denklemi (Zaitsev ve Polyanin, 2002) olarak bilinen

$$f'' = \alpha c\,(f+g_0)^{2\alpha-1},$$

şeklindeki denklemi verir ve bu denklemin çözümü

$$y = \pm \int \left[c\,(f+g_0)^{2\alpha} + d \right]^{-1/2} df + e,\ d,e \in \mathbb{R}$$

olarak elde edilir. Bu ise teoremin ikinci şıkkındaki ifadenin ispatını verir.

Durum 4. $f'' \neq 0$ and $g = d + cz$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ olsun. Buna göre (4.2.23),

$$\frac{\left[1+c^2\right] f''}{1+c^2+(f')^2} + 2c = \alpha \frac{1}{d+cz+f} \tag{4.2.28}$$

denklemine indirgenir. (4.2.28) denkleminin z ye göre kısmi türevi, $\alpha c = 0$ çelişkisini verir.

Durum 5. $f''g'' \neq 0$ olsun. O zaman (4.2.23) denklemi

$$\begin{aligned}(f+g)\left\{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+(f')^2\right]g'' + 2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]g'\right\}\\ = \alpha\left[1+(f')^2+(g')^2\right]\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.2.29) denkleminin, y ye göre kısmı türevi

$$\begin{aligned}f'\left\{\left[1+(g')^2\right]f'' + \left[1+(f')^2\right]g'' + 2\left[1+(f')^2+(g')^2\right]g'\right\}\\ +(f+g)\left\{\left[1+(g')^2\right]f''' + 2g'f'f'' + 4g'f'f''\right\} = 2\alpha f'f''\end{aligned}$$

şeklinde olup, elde edilen bu denklemin z ye göre kısmi türevi

$$\begin{aligned}4f'f''g'g'' + f'''\left\{g'\left[1+(g')^2\right] + 2gg'g''\right\} + \left(g'''+2g''\right)\left[f' + (f')^3 + 2ff'f''\right]\\ +2ff'''g'g'' + 2gg'''f'f'' + 4gg''f'f'' + 4f'f''(g')^2 + 6f'g''(g')^2 = 0\end{aligned}$$

şeklindedir. Son denklem $f'f''g'g''$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned}4 + \frac{f'''}{f'f''}\left[\frac{1+(g')^2}{g''} + 2g\right] + \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{2}{g'}\right)\left[\frac{1+(f')^2}{f''} + 2f\right]\\ + \frac{2ff'''}{f'f''} + \frac{2gg'''}{g'g''} + \frac{4g}{g'} + \frac{4g'}{g''} + \frac{6g'}{f''} = 0\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

bulunur. (4.2.30) denkleminin y ye göre türevi

$$\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'\left[\frac{1+(g')^2}{g''} + 2g\right] + \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{2}{g'}\right)\left[\frac{1+(f')^2}{f''} + 2f\right]' + \left(\frac{2ff'''}{f'f''}\right)' + \frac{6g'f'''}{(f'')^2} = 0$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklemin z ye göre kısmi türevi

$$\left(\frac{f'''}{f'f''}\right)'\left[\frac{1+(g')^2}{g''} + 2g\right]' + \left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{2}{g'}\right)'\left[\frac{1+(f')^2}{f''} + 2f\right]' - \frac{6g''f'''}{(f'')^2} = 0 \tag{4.2.31}$$

olarak hesaplanır. (4.2.31) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

Durum 5.1. $f'' = f_0 \in \mathbb{R}$, $f_0 \neq 0$ olsun. (4.2.30) denkleminin y ye göre kısmi türevi,

$$\frac{g'''}{g'g''} + \frac{2}{g'} = 0 \tag{4.2.32}$$

eşitliğini verir. Dolayısıyla (4.2.30) denklemi,

$$2 + \frac{gg'''}{g'g''} + \frac{2g}{g'} + \frac{2g'}{g''} + \frac{3g'}{f_0} = 0 \tag{4.2.33}$$

denklemine indirgenir. Diğer taraftan, (4.2.32) denkleminin integrali alındığında

$$g'' = -2g' + c,\ c \in \mathbb{R}. \tag{4.2.34}$$

elde edilir. (4.2.34) denklemi, (4.2.33) denkleminde yerine yazıldığında

$$-6\left(g'\right)^2 + (3c - 2f_0)\, g' + 2cf_0 = 0$$

şeklinde g' nin ikinci dereceden polinomu elde edilir. Bu polinomun başkatsayısı sıfır olamayacağından, kabulümüz doğru değildir.

Durum 5.2. $f''' = 2cf'f''$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ olsun. Bu eşitliğin integrali

$$f'' = c\left(f'\right)^2 + d, d \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. Buna göre (4.2.31) denklemi

$$\left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{2}{g'}\right)' \left[\frac{2d}{c} - 1 + \left(f'\right)^2\right] - 6g'' = 0$$

eşitliğine indirgenir. Bu denklemin y ye göre türevi alındığında,

$$\left(\frac{g'''}{g'g''} + \frac{2}{g'}\right)' = 0$$

bulunur. Bu ise (4.2.31) denkleminde yerine yazıldığında $g''f''' = 0$ çelişkisini doğurur.

Durum 5.3. $(f'''/f'f'')' \neq 0$ olsun. Bu durumda, (4.2.31) denklemi $(f'''/f'f'')'$ ile bölünerek

$$A(y)\,B(z) = C(y) + D(z) \tag{4.2.35}$$

formunda yeniden yazılabilir, burada

$$A(y)=\frac{\left[\left\{1+(f')^2\right\}/f''+2f\right]'}{(f'''/f'f'')'},\ B(z)=\left(g'''/g'g''+2/g'\right)'/g''$$

ve

$$C(y)=6\frac{f'''/(f'')^2}{(f'''/f'f'')'},\ D(z)=-\left[\left\{1+\left(g'\right)^2\right\}/g''+2g\right]'/g''$$

şeklindedir. (4.2.35) denkleminde A,B,C,D fonksiyonları sabit olmalıdır. Buna göre $B(y)=B_0$ ve $D(z)=-D_0$, $B_0,D_0\in\mathbb{R}$ alalım. Dolayısıyla

$$\left[\frac{g'''}{g'g''}+\frac{2}{g'}\right]'=B_0g'' \tag{4.2.36}$$

ve

$$4g'-\left[1+\left(g'\right)^2\right]\frac{g'''}{(g'')^2}=D_0g'' \tag{4.2.37}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.2.36) denkleminin integrali

$$\frac{g'''}{g'g''}+\frac{2}{g'}=B_0g'+d_1,d_1\in\mathbb{R} \tag{4.2.38}$$

eşitliğini verir. (4.2.38) denklemi $g'g''$ ile çarpılıp, integrali alındığında

$$g''=\frac{B_0}{3}\left(g'\right)^3+\frac{d_1}{2}\left(g'\right)^2-2g'+d_2,d_2\in\mathbb{R} \tag{4.2.39}$$

bulunur. (4.2.39) denklemi, (4.2.38) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} g'''=&\frac{B_0^2}{3}\left(g'\right)^5+\frac{5}{6}B_0d_1\left(g'\right)^4+\left(\frac{d_1^2}{2}-\frac{8}{3}B_0\right)\left(g'\right)^3\\ &+(B_0d_2-3d_1)\left(g'\right)^2+(d_1d_2+4)g'-2d_2 \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

bulunur. (4.2.39) ve (4.2.40) denklemleri, (4.2.37) denkleminde yerine yazılırsa, 7. dereceden teriminin katsayısı $\frac{B_0^2}{9}$ olan g' nün polinomu elde edilir. Bu ise $B_0=0$ olduğunu verir. Dolayısıyla (4.2.38) denklemi

$$g'''=\left(-2+d_1g'\right)g''$$

denklemine dönüşür. Bu eşitlik (4.2.37) denkleminde yerine yazıldığında,

$$4g'g''-\left[1+\left(g'\right)^2\right]\left(-2+d_1g'\right)=D_0\left(g''\right)^2 \tag{4.2.41}$$

elde edilir. (4.2.39) denklemi, (4.2.41) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$\frac{d_1^2}{4}\left(g'\right)^4-2d_1\left(g'\right)^3+(d_1d_2-4)\left(g'\right)^2-4d_2g'+d_2^2=0$$

şeklinde g' nün polinomu bulunur. Denklemin sağlanması için terimlerin katsayılarının sıfır olması gerektiğinden, üçüncü dereceden terimin katsayısı olan $d_1 = 0$ olmalıdır. O zaman (4.2.39) ve (4.2.41) denklemleri, sırasıyla,

$$g'' = -2g' + d_2$$

ve

$$4g'g'' + 2\left(g'\right)^2 + 2 = D_0\left(g''\right)^2$$

denklemlerine indirgenirler. Birinci denklem, ikinci denklemde göz önüne alınırsa,

$$(4D_0 + 6)\left(g'\right)^2 - 4\left(D_0 + d_2\right)g' + D_0 d_2^2 - 2 = 0$$

şeklinde g' nün polinomu elde edilir. Denklemin sabit terimi sıfır olamayacağından, kabulümüz doğru değildir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

4.2.2 D$-$Singüler Minimal Öteleme Yüzeyler

Teorem 4.2.4. $\mathbb{R}^3$ *de bir* $\mathbf{u}$ *yatay vektörüne göre* $z = f(x) + g(y)$ *tipinde bir* $D-$*singüler minimal öteleme yüzey,* $\mathbf{u}$ *vektörüne paralel bir düzlemdir ya da* $g(y) = c_1 y + c_2$ *ve*

$$f(x) = \pm |c_3| \sqrt{1 + c_1^2} \int \left(x^{2\alpha} - c_3^2\right)^{-1/2} dx,$$

olan bir genelleştirilmiş silindirdir, burada $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$*,* $c_3 \neq 0$ *dir.*

İspat: Yüzey, tek değişkenli f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\varphi(x,y) = (x, y, f(x) + g(y))$$

olarak parametrize edilmiş olsun. Buna göre yüzeyin birim normal vektör alanı ve yüzey üzerindeki $D-$yarı simetrik non–metrik konneksiyonu, sırasıyla

$$\xi = \frac{-f'\mathbf{e}_1 - g'\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}$$

ve

$$\begin{aligned} D_{\varphi_x}\varphi_x &= f'\mathbf{e}_1 + \left[f'' + \left(f'\right)^2\right]\mathbf{e}_3, \\ D_{\varphi_x}\varphi_y &= g'\mathbf{e}_1 + f'g'\mathbf{e}_3, \\ D_{\varphi_y}\varphi_x &= f'\mathbf{e}_2 + f'g'\mathbf{e}_3, \\ D_{\varphi_y}\varphi_y &= g'\mathbf{e}_2 + \left[g'' + \left(g'\right)^2\right]\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{D}=\frac{f''}{\sqrt{1+(f')^{2}+(g')^{2}}},$$

$$h_{12}^{D}=h_{21}^{D}=0,$$

$$h_{22}^{D}=\frac{g''}{\sqrt{1+(f')^{2}+(g')^{2}}}$$

dir. Böylece (4.2.4) formülünden, M^2 nin ortalama eğriliği

$$2H^{D}=\frac{\left[1+(g')^{2}\right]f''+\left[1+(f')^{2}\right]g''}{\left[1+(f')^{2}+(g')^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Genellliği bozmaksızın $\mathbf{u}=\mathbf{e}_1$ olarak kabul edelim. Böylece (4.2.6) $D-$singüler minimal yüzey denklemi

$$\frac{\left[1+(g')^{2}\right]f''+\left[1+(f')^{2}\right]g''}{1+(f')^{2}+(g')^{2}}=-\alpha\frac{f'}{x} \tag{4.2.42}$$

eşitliğine dönüşür. (4.2.42) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

Durum 1. $f=f_0$, $f_0\in\mathbb{R}$ olsun. O zaman (4.2.42) denklemi,

$$g''=0$$

denklemine indirgenir. Buna göre

$$g(y)=c_1+c_2y,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

olup, yüzey parametrizasyonu

$$\varphi(x,y)=x(1,0,0)+(0,y,c_1+f_0+c_2y) \tag{4.2.43}$$

şeklindedir. Bu ise yüzeyin **u** vektörüne paralel bir düzlem olması demektir.

Durum 2. $f'\neq 0$ olsun. (4.2.42) denkleminin y ye göre türevi

$$2g'g''f''+\left[1+\left(f'\right)^{2}\right]g'''=-2\alpha\frac{f'}{x}g'g'' \tag{4.2.44}$$

şeklindedir. (4.2.44) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 2.1. $g' = g_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Dolayısıyla (4.2.42) denklemi

$$\frac{\left(1+g_0^2\right) f''}{f'\left[1+g_0^2+(f')^2\right]} = -\frac{\alpha}{x}$$

eşitliğine ya da denk olarak

$$\frac{f''}{f'} - \frac{f'f''}{1+g_0^2+(f')^2} = -\frac{\alpha}{x} \tag{4.2.45}$$

denklemine indirgenir. Dolayısıyla (4.2.45) denkleminin integrali alındığında

$$\frac{f'}{\sqrt{1+g_0^2+(f')^2}} = cx^{-\alpha},\ c \in \mathbb{R},\ c \neq 0,$$

veya

$$f' = \pm |c| \frac{\sqrt{1+g_0^2}}{\sqrt{x^{2\alpha}-c^2}} \tag{4.2.46}$$

eşitliği bulunur. Buna göre (4.2.46) denkleminin integrali, teoremin ifadesini verir.

Durum 2.2. $g'' \neq 0$ olsun. (4.2.44) denklemi $2g'g''$ ile bölündüğünde,

$$f'' + \left[1+(f')^2\right] \frac{g'''}{2g'g''} = -\alpha \frac{f'}{x}$$

olur. Son denklemin y ye göre türevi

$$\left[1+(f')^2\right] \left(\frac{g'''}{2g'g''}\right)' = 0$$

şeklindedir. Elde edilen bu denklem ise

$$g''' = 2\lambda g'g'', \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.2.47}$$

olduğunu verir.

(4.2.47) denkleminde $\lambda = 0$ olursa,

$$g(y) = c_3 + c_2 y + c_1 y^2, \quad c_1 \neq 0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

olur. Dolayısıyla (4.2.42) denklemi,

$$4c_1^2\left(\alpha\frac{f'}{x}+f''\right)y^2 + 4c_1c_2\left(\alpha\frac{f'}{x}+f''\right)y$$
$$+\left[\left(\alpha\frac{f'}{x}+f''\right)\left(1+c_2^2\right)+\alpha\frac{(f')^3}{x}+2c_1\left(f'\right)^2+2c_1\right]=0$$

şeklinde y nin polinomuna dönüşür. $c_1 \neq 0$ olduğundan, polinomun başkatsayısı

$$\alpha\frac{f'}{x}+f''=0 \tag{4.2.48}$$

eşitliğini verir. (4.2.48) denkleminin integrali alınırsa,

$$f'=c_2x^{-\alpha}, c_2\in\mathbb{R} \tag{4.2.49}$$

elde edilir. (4.2.49) eşitliği polinomun sabit teriminde göz önüne alınırsa,

$$2c_1x^{3\alpha+1}+2c_1c_2^2x^{\alpha+1}+\alpha c_2^3=0$$

olur ki bu da $c_1=0$ çelişkisini verir.

(4.2.47) denkleminde $\lambda\neq 0$ olursa, (4.2.47) denkleminin integrali

$$g''=\lambda\left(g'\right)^2+c_3$$

şeklindedir, burada $c_3\in\mathbb{R}$ dir. Böylece (4.2.44) denklemi

$$\left\{f''+\frac{\lambda}{2}\left[1+\left(f'\right)^2\right]+\alpha\frac{f'}{x}\right\}\left(g'\right)^2+f''+c_3\left[1+\left(f'\right)^2\right]+\alpha\frac{f'}{x}\left[1+\left(f'\right)^2\right]=0$$

şeklinde (g') nün polinomuna dönüşür. Buna göre denklemin sağlanması için

$$f''+\frac{\lambda}{2}\left[1+\left(f'\right)^2\right]+\alpha\frac{f'}{x}=0 \tag{4.2.50}$$

ve

$$f''+c_3\left[1+\left(f'\right)^2\right]+\alpha\frac{f'}{x}\left[1+\left(f'\right)^2\right]=0 \tag{4.2.51}$$

olmalıdır. (4.2.50) denkleminden f'' değeri çekilip (4.2.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$c_3-\frac{\lambda}{2}+\alpha\frac{f'(x)}{x}=0$$

bulunur. Bu denklemin çözümü

$$f(x)=\frac{\lambda-2c_3}{4\alpha}x^2+c_4$$

şeklindedir, burada $c_4\in\mathbb{R}$ dir ve f sabit bir fonksiyon olmadığı için $\lambda-2c_3\neq 0$ dır. f fonksiyonu (4.2.50) denkleminde göz önünde bulundurulduğunda,

$$\lambda-c_3+\frac{\lambda-2c_3}{2\alpha}+\frac{\lambda\left(\lambda-2c_3\right)^2}{8\alpha^2}x^2=0$$

şeklinde x in polinomu elde edilir. Bu ise $\lambda=0$ çelişkisini verir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.2.5. *$\mathbb{R}^3$ de bir* **u** *yatay vektörüne göre $y = f(x) + g(z)$ tipinde bir $D-$singüler minimal öteleme yüzey, ya bir düzlemdir ya da $g(z) = c_2 + c_1 z$ ve*

$$f(x) = \pm |c_3| \sqrt{1 + c_1^2} \int x^{\alpha} \left(1 - c_3^2 x^{2\alpha}\right)^{-1/2} dx$$

olan bir genelleştirilmiş silindirdir, burada $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $c_3 \neq 0$ dir.

İspat: Yüzey, tek değişkenli f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\varphi(x,z) = (x, f(x) + g(z), z)$$

olarak parametrize edilmiş olsun. Buna göre birim normal vektör alanı ve yüzey üzerindeki $D-$yarı simetrik non-metrik konneksiyonu, sırasıyla,

$$\xi = \frac{f'\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + g'\mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}$$

ve

$$\begin{aligned} D_{\varphi_x}\varphi_x &= f''\mathbf{e}_2, \\ D_{\varphi_x}\varphi_z &= \mathbf{e}_1 + f'\mathbf{e}_2, \\ D_{\varphi_z}\varphi_x &= 0, \\ D_{\varphi_z}\varphi_z &= \left(g'' + g'\right)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, ikinci temel formun katsayıları,

$$\begin{gathered} h_{11}^D = -\frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}, \\ h_{12}^D = h_{21}^D = 0, \\ h_{22}^D = -\frac{g''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}} \end{gathered}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.2.4) formülünden, M^2 nin ortalama eğriliği

$$H^D = \frac{\left[1 + (g')^2\right] f'' + \left[1 + (f')^2\right] g''}{2\left[1 + (f')^2 + (g')^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Genelliği bozmaksızın $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ olarak kabul edelim. Dolayısıyla, (4.2.6) $D-$singüler minimal yüzey denklemi, (4.2.42) denklemine benzer olarak

$$\frac{\left[1 + (g')^2\right] f'' + \left[1 + (f')^2\right] g''}{1 + (f')^2 + (g')^2} = \alpha \frac{f'}{x}$$

denklemine dönüşür. Dolayısıyla Teorem 4.2.4 e benzer bir sonuç elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.6. $\mathbb{R}^3$ *de* **u** *yatay vektörüne göre* $x = f(y) + g(z)$ *tipinde* $D-$*singüler minimal öteleme yüzey* $f(y) = c_1$ *ve*

$$z = \pm \int \left[c_2^2 (c_1 + g)^{2\alpha} - 1 \right]^{-1/2} dg, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0 \tag{4.2.52}$$

olan bir genelleştirilmiş silindirdir.

İspat: Tek değişkenli f ve g diferensiyellenebilir fonksiyonları için

$$\varphi(y,z) = (f(y) + g(z), y, z)$$

olarak parametrize edilmiş olan bir M^2 yüzeyini alalım. Buna göre M^2 üzerindeki yarı–simetrik metrik olmayan D konneksiyonu

$$\begin{aligned} D_{\varphi_y}\varphi_y &= f''\mathbf{e}_1, \\ D_{\varphi_y}\varphi_z &= f'\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ D_{\varphi_z}\varphi_y &= 0, \\ D_{\varphi_z}\varphi_z &= \left(g'' + g'\right)\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

şeklindedir, burada $f' = \frac{df}{dy}$, $f'' = \frac{d^2 f}{dy^2}$, vb. dir. Dolayısıyla ikinci temel formun katsayıları,

$$h_{11}^D = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}},$$

$$h_{12}^D = h_{21}^D = 0,$$

$$h_{22}^D = \frac{g''}{\sqrt{1 + (f')^2 + (g')^2}}$$

olup, (4.2.4) formülünden, M^2 nin ortalama eğriliği

$$H^D = \frac{\left[1 + (g')^2\right] f'' + \left[1 + (f')^2\right] g''}{2\left(1 + (f')^2 + (g')^2\right)^{3/2}}$$

dir. O halde (4.2.6) $D-$ singüler minimal yüzey denklemi

$$\frac{\left[1 + (g')^2\right] f'' + \left[1 + (f')^2\right] g''}{1 + (f')^2 + (g')^2} = \frac{\alpha}{f + g} \tag{4.2.53}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.2.53) denkleminde f ve g fonksiyonları, simetrik roldedirler ve (4.2.53) denkleminin yalnızca f ya da g sabit iken çözümü vardır. Aksi durumda, yani $f'g' \neq 0$ olması halinde, (4.2.53) denkleminin çözümü yoktur, (López, 2016, Teorem 4.1). Simetriden dolayı $f = f_0 \in \mathbb{R}$ olarak kabul edebiliriz. Buna göre (4.2.53) denklemi,

$$\frac{g''}{1+(g')^2} = \frac{\alpha}{f_0+g} \tag{4.2.54}$$

eşitliğine indirgenir. (4.2.54) denkleminde

$$g' = q,\ q' = \frac{dq}{dg}\frac{dg}{dv} = \frac{g''}{g'},\ q = q(g) \tag{4.2.55}$$

olarak alalım. (4.2.55) eşitlikleri, (4.2.54) denkleminde gözönünde bulundurulduğunda,

$$\frac{qq'}{1+q^2} = \frac{\alpha}{f_0+g}. \tag{4.2.56}$$

bulunur. (4.2.56) denkleminin g ye göre integrali

$$1+q^2 = c^2(f_0+g)^{2\alpha}$$

denklemini yani

$$dz = \pm\frac{dg}{\sqrt{c^2(f_0+g)^{2\alpha}-1}}$$

eşitliğini verir ve bu eşitliğin integrali teoremin ispatını tamamlar.

4.3 $\mathbb{R}^3$ Öklid ve $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz–Minkowski Uzayında Yarı–Simetrik Konneksiyonlara Sahip Minimal Olan Singüler Minimal Yüzeyler

Bu bölümde; 3–boyutlu Öklid ve Lorentz–Minkowski uzaylarında minimal olan singüler minimal yüzeylere ait karakterizasyonlar elde edildi. Bu nedenle (3.1.1) denkleminde $\alpha \neq 0$ olduğu kabul edildi. Aksi taktirde, yani $\alpha = 0$ durumunda, her minimal yüzey aşikar olarak bizim yaklaşımımızı sağlamaktadır. Buna göre $\alpha \neq 0$ şartı altında (3.1.1) denklemi,

$$\langle \xi(p), \mathbf{u} \rangle = 0$$

olduğunu verir. Yani yüzeyin her p noktasındaki teğet düzlemi $\mathbf{u}$ vektörüne paraleldir. Böyle bir durumda $\langle \xi(p), \mathbf{u} \rangle = 0$ olduğundan dolayı minimal bir yüzey, $\mathbf{u}$ vektörüne paralel bir düzlemdir ve *sabit açılı yüzeyler* adı verilen yüzeyler sınıfına aittir

(Munteanu ve Nistor, 2009, Proposition 9). Buna göre aşağıdaki önerme ifade edilebilir:

Önerme 4.3.1. $\mathbb{R}^3$ *de M yüzeyi, keyfi bir* **u** *vektörüne göre singüler minimal bir yüzey olsun. Eğer* M^2*, minimal bir yüzey ise; o zaman* M^2*,* **u** *vektörüne paralel bir düzlemdir.*

$\mathbb{R}^3$ üzerinde, özel bir yarı–simetrik metrik konneksiyon kullanılarak (3.1.1) denklemi yeniden uyarlandığında bu sonuç değişir. Şimdi elde edilen yeni sonuçları açık bir şekilde inceleyelim.

4.3.1 $\mathbb{R}^3$ Öklid Uzayında Singüler Minimal Yüzeyler

Bu bölümde; $\mathbb{R}^3$ de düzlemlerin yanısıra, (4.2.1) denklemine sahip özel bir yarı–simetrik metrik ∇ konneksiyonuna göre minimal olan singüler minimal yüzeylerin, genelleştirilmiş silindirler oldukları gösterildi. Ayrıca (4.2.2) denklemi ile verilen özel bir yarı–simetrik metrik olmayan $D-$konneksiyonu kullanıldığında bu yaklaşımın yalnızca aşikar olmayan sonuçlar ürettiği elde edildi.

4.3.1.1 $\nabla-$Singüler minimal yüzeyler

Teorem 4.3.1. M^2*,* $\mathbb{R}^3$ *de* $\mathbf{u}=(a,b,c), a^2+b^2\neq 0$ *birim vektörüne göre* $z=u(x,y)$ *tipinde* $\nabla-$*singüler minimal yüzey olsun. Eğer* M^2*,* $\nabla-$*minimal ise, o zaman aşağıdakilerden biridir:*

1. $\mathbf{u}=(0,b\neq 0,c)$ *ve*

$$u(x,y)=\frac{c}{b}y+\frac{1}{2b^2}\ln\left[\cos\left(2bx+\lambda_1\right)\right]+\lambda_2;$$

2. $\mathbf{u}=(a\neq 0,0,c)$ *ve*

$$u(x,y)=\frac{c}{a}x+\frac{1}{2a^2}\ln\left[\cos\left(2ay+\lambda_3\right)\right]+\lambda_4;$$

3. $\mathbf{u}=(a,b,c)\,,\, ab\neq 0$ *ve*

$$u(x,y)=\frac{c}{a}x-\frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}\ln\left[\cos\left(-2\left|a\right|\left(y-\frac{b}{a}x\right)+\lambda_5\right)\right]+\frac{bc}{a^2+b^2}\left(y-\frac{b}{a}x\right)+\lambda_6,$$

burada $\lambda_1,\ldots,\lambda_6\in\mathbb{R}$ *dir.*

İspat: M^2 yüzeyi

$$\varphi(x,y) = (x,y,u(x,y))$$

olarak parametrize edilsin. Buna göre yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x = \mathbf{e}_1 + u_x \mathbf{e}_3$$

ve

$$\varphi_y = \mathbf{e}_2 + u_y \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{-u_x \mathbf{e}_1 - u_y \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_y)^2}}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1+(u_x)^2, \quad g_{12} = u_x u_y, \quad g_{22} = 1+(u_y)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerinde ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_x}\varphi_x &= u_x \mathbf{e}_1 + (-1+u_{xx})\,\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_x}\varphi_y &= u_y \mathbf{e}_1 + u_{xy} \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_x &= u_x \mathbf{e}_2 + u_{xy} \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_y &= u_y \mathbf{e}_2 + (-1+u_{yy})\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

burada $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dir. O zaman ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla} = \frac{-1-(u_x)^2+u_{xx}}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_y)^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = \frac{u_{xy}-u_x u_y}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_y)^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla} = \frac{-1-(u_y)^2+u_{yy}}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_y)^2}}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (4.2.3) formülüne göre, yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = \frac{\left[1+(u_y)^2\right]u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left[1+(u_x)^2\right]u_{yy} - 2\left[1+(u_x)^2+(u_y)^2\right]}{\left[1+(u_x)^2+(u_y)^2\right]^{1/2}}$$

olarak bulunur. Kabul edelim ki M^2, $\nabla-$minimal olsun. $\alpha \neq 0$ olduğundan (4.2.5) formülü

$$\langle \xi, \mathbf{u} \rangle = 0$$

eşitliğini ve dolayısıyla

$$au_x + bu_y = c \tag{4.3.1}$$

eşitliğini verir. Diğer taraftan yüzeyin $\nabla-$minimallik şartı

$$\left[1+(u_y)^2\right]u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + \left[1+(u_x)^2\right]u_{yy} - 2\left[1+(u_x)^2+(u_y)^2\right] = 0 \tag{4.3.2}$$

denklemini verir. (4.3.2) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1. $a = 0$ olsun. Bu durumda, diferensiyellenebilir keyfi bir f fonksiyonu için (4.3.1) denkleminin çözüm fonksiyonu,

$$u(x,y) = f(x) + \frac{c}{b}y$$

şeklindedir. O zaman (4.3.2) denklemi

$$\frac{bf''}{1+(bf')^2} = 2b \tag{4.3.3}$$

olarak yeniden yazılabilir, burada $f' = \frac{df}{dx}$ ve $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$ dir. (4.3.3) denklemi

$$\frac{bdf'}{1+(bf')^2} = 2bdx$$

şeklinde ya da $bf' = t$, $bdf' = dt$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\frac{dt}{1+t^2} = 2bdx \tag{4.3.4}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.3.4) denkleminin integrali

$$\arctan t = 2bx + \lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

olup, buradan

$$t = \tan(2bx + \lambda_1)$$

veya

$$f' = \frac{1}{b}\tan(2bx + \lambda_1) \tag{4.3.5}$$

elde edilir. (4.3.5) denkleminin integrali

$$f = \frac{1}{b^2}\ln[\cos(2bx + \lambda_1)] + \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

fonksiyonunu verir ve bu da teoremin birinci ifadesini ispatlar. (4.3.2) denkleminde x ve y simetrik rolde olduklarından $b=0$ için de benzer adımlarla teoremin ikinci ifadesi elde edilir.

Durum 2. $ab \neq 0$ olsun. Buna göre (4.3.1) denklemi için çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir g fonksiyonu için

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + g\left(y - \frac{b}{a}x\right) \tag{4.3.6}$$

şeklindedir. (4.3.6) denklemi, (4.3.2) de göz önüne alınırsa,

$$g'' - 2\left[a^2 + \left(c - bg'\right)^2 + \left(ag'\right)^2\right] = 0, \tag{4.3.7}$$

elde edilir, burada $g' = \frac{dg}{d\tilde{y}}$, $g'' = \frac{d^2g}{d\tilde{y}^2}$, $\tilde{y} = y - \frac{b}{a}x$ dir. (4.3.7) denklemi düzenlendiğinde

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)g''}{a^2 + \left(bc - \left(a^2+b^2\right)g'\right)^2} = 2$$

şeklinde, yani

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)dg'}{a^2 + \left[bc - \left(a^2+b^2\right)g'\right]^2} = 2d\tilde{y} \tag{4.3.8}$$

olarak yeniden yazılabilir.

$$bc - \left(a^2+b^2\right)g' = t, \quad -\left(a^2+b^2\right)dg' = dt$$

değişken değiştirmesi ile (4.3.8) denklemi

$$\frac{dt}{a^2+t^2} = -2d\tilde{y} \tag{4.3.9}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.9) denkleminin integrali alındığında

$$\frac{1}{|a|}\arctan\frac{t}{|a|} = -2\tilde{y} + \lambda_3$$

yani

$$t = |a|\tan\left(-2|a|\tilde{y} + \lambda_4\right) \tag{4.3.10}$$

bulunur. (4.3.10) denkleminde t değeri yerine yazılırsa,

$$\left(a^2+b^2\right)g' = -|a|\tan\left(-2|a|\tilde{y} + \lambda_4\right) + bc \tag{4.3.11}$$

elde edilir. (4.3.11) denkleminin integrali

$$g = -\frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}\ln\left|\cos\left(-2|a|\tilde{y} + \lambda_4\right)\right| + bc\tilde{y} + \lambda_5$$

olur. Dolayısıyla

$$u(x,y)=\frac{c}{a}x-\frac{1}{2(a^2+b^2)}\ln\left[\cos\left(-2|a|\left(y-\frac{b}{a}x\right)+\lambda_4\right)\right]+\frac{bc}{a^2+b^2}\left(y-\frac{b}{a}x\right)+\lambda_5$$

olur ve bu da teoremin üçüncü ifadesini verir.

Yorum 4.3.1. *Teorem 4.3.1 in birinci ifadesinde verilen yüzey, genelleştirilmiş bir silindirdir (Gray, 1998, s. 439) ve*

$$\varphi(x,y)=\left(x,0,\frac{1}{2b^2}\ln[\cos(2bx+\lambda_1)]+\lambda_2\right)+y\left(0,1,\frac{c}{b}\right)$$

şeklinde parametrik olarak ifade edilebilir. Bu yüzey, daha önceden Wang (2020) tarafından elde edilmiş olan $z=f(x)+g(y)$ tipinde ∇–minimal bir öteleme yüzeyidir. Teoremin ikinci ifadesi için de aynı sonuç ifade edilebilir. Ancak Teorem 4.3.1 in üçüncü ifadesinde tanımlı olan yüzey,

$$\varphi(x,\tilde{y})=x\left(1,\frac{b}{a},\frac{c}{a}\right)+(0,\tilde{y},g(\tilde{y})),$$

$\tilde{y}=y-\frac{b}{a}x$ dir. $b\neq 0$ olduğundan dolayı, bu yüzey afin öteleme yüzeyler sınıfına aittir ve $\nabla-$minimal yüzeyler için yeni bir örnektir.

Teorem 4.3.2. *M^2, $\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{u}=(a,b,c)$, $a^2+c^2\neq 0$ vektörüne göre $y=u(x,z)$ tipinde $\nabla-$singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2, $\nabla-$minimal ise, o zaman aşağıdakilerden biridir:*

1. *M^2, $(0,0,1)$ vektörüne paralel bir düzlemdir;*
2. *$\mathbf{u}=(0,b,c)$, $bc\neq 0$ ve*
$$u(x,z)=\frac{b}{c}z+\frac{1}{2bc}\ln[\cos(2bx+\lambda_1)]+\lambda_2;$$
3. *$\mathbf{u}=(a,b,0)$, $a\neq 0$ ve*
$$u(x,z)=\frac{b}{a}x\pm\frac{1}{2|a|}\arctan\left(\frac{1}{|a\lambda_2|}\sqrt{e^{4z}-a^2}\right)+\lambda_3;$$
4. *$\mathbf{u}=(a,0,c)$, $ac\neq 0$ ve*
$$u(x,z)=\pm\frac{1}{2|a|}\arctan\left(\frac{1}{|\lambda_4|}\sqrt{e^{4a^2\left(z-\frac{c}{a}x\right)}-\lambda_4^2}\right)+\lambda_5,\ \lambda_4\neq 0;$$

5. $\mathbf{u}=(a,b,c)$, $ac\neq 0$ *ve*

$$u(x,z)=\frac{b}{a}x+v\left(z-\frac{c}{a}x\right),$$

burada v,

$$z-\frac{c}{a}x=\frac{1}{2|a|(a^2+c^2)(a^2+b^2c^2)}\{bc(2|a|v+\lambda_6)-$$
$$-|a|\ln[bc\cos(2|a|v+\lambda_6)-|a|\sin(2|a|v+\lambda_6)]\}+\lambda_7,$$

şeklinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\lambda_1,...,\lambda_7\in\mathbb{R}$ *dir.*

İspat: M^2 lokal olarak, $u(x,z)$ fonksiyonu için

$$\varphi(x,z)=(x,u(x,z),z)$$

olarak parametrize edilsin. Buna göre yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x=\mathbf{e}_1+u_x\mathbf{e}_2$$

ve

$$\varphi_z=u_z\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi=\frac{u_x\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+u_z\mathbf{e}_3}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_z)^2}} \tag{4.3.12}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11}=1+(u_x)^2,\quad g_{12}=u_xu_z,\quad g_{22}=1+(u_z)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerinde ∇ yarı–simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_x}\varphi_x &= u_{xx}\mathbf{e}_2-\left[1+(u_x)^2\right]\mathbf{e}_3,\\
\nabla_{\varphi_x}\varphi_z &= \mathbf{e}_1+(u_x+u_{xz})e_2-u_xu_z\mathbf{e}_3,\\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_x &= u_{xz}\mathbf{e}_2-u_xu_z\mathbf{e}_3,\\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_z &= (u_z+u_{zz})\mathbf{e}_2-(u_z)^2\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

burada $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vb. dir. Buradan ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla}=-\frac{u_z+u_z(u_x)^2+u_{xx}}{\sqrt{1+(u_x)^2+(u_z)^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = -\frac{u_{xz} + u_x (u_z)^2}{\sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_z)^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla} = -\frac{u_z + (u_z)^3 + u_{zz}}{\sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_z)^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla (4.2.3) formülüne göre yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = -\frac{\left[1 + (u_z)^2\right] u_{xx} - 2u_x u_z u_{xz} + \left[1 + (u_x)^2\right] u_{zz} + 2\left[1 + (u_x)^2 + (u_z)^2\right] u_z}{\left[1 + (u_x)^2 + (u_z)^2\right]^{3/2}} \tag{4.3.13}$$

şeklinde elde edilir. M^2 yüzeyinin $\nabla-$minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha \neq 0$ olduğundan (4.2.5) formülünden

$$\langle \xi, \mathbf{u} \rangle = 0$$

eşitliğini ve dolayısıyla

$$au_x + cu_z = b \tag{4.3.14}$$

olur. Diğer taraftan

$$\mathbf{u} = a\varphi_x + c\varphi_y$$

olarak yazılabileceğinden, M^2 nin her noktasında teğet düzleminin $\mathbf{u}$ vektörüne paralel olduğu elde edilir. $\nabla-$minimallik şartından dolayı (4.3.13) den

$$\left[1 + (u_z)^2\right] u_{xx} - 2u_x u_z u_{xz} + \left[1 + (u_x)^2\right] u_{zz} + 2\left[1 + (u_x)^2 + (u_z)^2\right] u_z = 0 \tag{4.3.15}$$

denklemi bulunur. (4.3.15) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 1. $a = 0$, $c \neq 0$ olsun. Buna göre (4.3.14) denklemi

$$u_z = \frac{b}{c}$$

eşitliğini verir. $b = 0$ olduğunda, $u_z = 0$ olup, (4.3.15) den

$$u_{xx} = 0$$

denklemi bulunur. Bu ise M^2 nin $\mathbf{u}$ vektörüne paralel bir düzlem olduğunu ifade eder. $b \neq 0$ iken (4.3.15) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için

$$u(x,z) = \frac{b}{c} z + f(x)$$

şeklindedir. O zaman (4.3.15) denklemi,

$$\frac{cf''}{1+(cf')^2} = -2b$$

yani

$$\frac{cdf'}{1+(cf')^2} = -2bdx \tag{4.3.16}$$

eşitliğine dönüşür, burada $f' = \frac{df}{dx}$ ve $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$ dir. (4.3.16) denkleminde $cf' = t$, $cdf' = dt$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$$\frac{dt}{1+t^2} = -2bdx$$

olup, bu denklemin integrali alındığında

$$\arctan t = -2bx + \lambda_1$$

bulunur, burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ dir. Buna göre

$$t = \tan(-2bx + \lambda_1)$$

yazılır. Burada $t = cf'$ değeri yerine yazılırsa

$$f' = \frac{1}{c}\tan(-2bx + \lambda_1)$$

olur. Bu ifadenin integrali alınırsa

$$f(x) = \frac{1}{2bc}\ln[\cos(2bx + \lambda_1)] + \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

elde edilir ve bu da teoremin ikinci ifadesinin ispatını tamamlar.

Durum 2. $a \neq 0$, $c = 0$ olsun. Buna göre (4.3.14) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir g fonksiyonu için

$$u(x,z) = \frac{b}{a}x + g(z)$$

şeklinde yazılır. Böylece (4.3.15) den

$$\frac{g''}{\left[1+(ag')^2\right]g'} = -2$$

denklemi bulunur veya buna denk olarak

$$\frac{g''}{g'} - \frac{a^2g'g''}{1+(ag')^2} = -2, \tag{4.3.17}$$

denklemi elde edilir, burada $g' = \frac{dg}{dz}$, $g'' = \frac{d^2g}{dz^2}$ dir. (4.3.17) denkleminin integrali alındığında

$$\ln|g'| - \frac{1}{2}\ln|1 + (ag')^2| = -2z + \lambda_3,$$

ya da denk olarak

$$\frac{g'}{\sqrt{1+(ag')^2}} = \lambda_4 e^{-2z} \tag{4.3.18}$$

bulunur, burada $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ dir. (4.3.18) denkleminin karesi alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$g' = \pm\frac{|\lambda_4|e^{-2z}}{\sqrt{1-a^2\lambda_4^2 e^{-4z}}}$$

ya da buna denk olarak

$$g' = \pm\frac{|\lambda_4|}{\sqrt{e^{4z}-a^2\lambda_4^2}} \tag{4.3.19}$$

elde edilir. (4.3.19) denkleminin integrali alınırsa

$$g(z) = \pm\frac{1}{2|a|}\arctan\left(\frac{1}{|a\lambda_4|}\sqrt{e^{4z}-a^2\lambda_4^2}\right) + \lambda_5$$

olur, bu da teoremin üçüncü ifadesinin ispatını tamamlar.

Durum 3. $ac \neq 0$ olsun. Buna göre (4.3.15) denkleminin çözümü, v diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x,z) = \frac{b}{a}x + v\left(z - \frac{c}{a}x\right) \tag{4.3.20}$$

şeklindedir. (4.3.20) deki u fonksiyonu, (4.3.15) denkleminde göz önüne alındığında,

$$v'' + 2\left[a^2 + (b-cv')^2 + (av')^2\right]v' = 0 \tag{4.3.21}$$

elde edilir, burada $v' = \frac{dv}{d\tilde{z}}$, $v'' = \frac{d^2v}{d\tilde{z}^2}$, $\tilde{z} = z - \frac{c}{a}x$ dir.

Eğer $b = 0$ olursa, (4.3.21) denklemi

$$v'' + 2\left[a^2 + (v')^2\right]v' = 0$$

ya da buna denk olan

$$\frac{v''}{v'} - \frac{v'v''}{a^2+(v')^2} = -2a^2. \tag{4.3.22}$$

denklemine dönüşür. (4.3.22) den integral alındığında

$$\ln|v'| - \frac{1}{2}\ln|a^2 + (v')^2| = -2a^2\tilde{z} + \lambda_6$$

denklemi ya da bu denkleme denk olan

$$\frac{v'}{\sqrt{a^2+(v')^2}}=\lambda_7 e^{-2a^2\tilde{z}} \tag{4.3.23}$$

bulunur. Buna göre (4.3.23) denkleminden

$$v'=\pm\frac{|a\lambda_7|}{\sqrt{e^{4a^2\tilde{z}}-\lambda_7^2}}$$

şeklinde olup, bu denklemin integrali

$$v(\tilde{z})=\pm\frac{1}{2|a|}\arctan\left[\frac{1}{|\lambda_7|}\sqrt{e^{4a^2\tilde{z}}-\lambda_7^2}\right]+\lambda_8$$

elde edilir, burada $\lambda_7,\lambda_8\in\mathbb{R}$ dir. Bu ise teoremin üçüncü ifadesinin ispatını tamamlar.

Eğer $b\neq 0$ olursa, (4.3.21) denklemi

$$\frac{-\left(a^2+c^2\right)v''}{a^2+\left(bc-\left(a^2+c^2\right)v'\right)^2}=2v' \tag{4.3.24}$$

olarak yazılabilir. (4.3.24) denkleminde

$$bc-\left(a^2+c^2\right)v'=t,\quad -\left(a^2+c^2\right)dv'=dt$$

değişken değiştirmesi yapıldığında,

$$\frac{dt}{a^2+t^2}=2v'd\tilde{z} \tag{4.3.25}$$

elde edilir. (4.3.25) denkleminin integrali alındığında,

$$t=|a|\tan\left(2|a|v+|a|\lambda_9\right)$$

olur ve bu eşitlikte t ifadesi, yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$v'=\frac{bc}{a^2+c^2}-\frac{a}{a^2+c^2}\tan\left(2av+a\lambda_9\right)$$

denklemi ya da bu denkleme denk olan

$$\frac{\left(a^2+c^2\right)dv}{bc-|a|\tan\left(2av+a\lambda_9\right)}=d\tilde{z} \tag{4.3.26}$$

bulunur. (4.3.26) denkleminin integrali teoremin son ifadesini verir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Yorum 4.3.2. *Teorem 4.3.2 nin ikinci ve üçüncü ifadelerinde verilen yüzeyler* $\nabla-$*minimal genelleştirilmiş silindirledir ve Wang (2020) tarafindan elde edilmiş olan* $y = f(x) + g(z)$ *tipinde* $\nabla-$*minimal öteleme yüzeylerinin örnekleridir. Ayrıca Teorem 4.3.2 nin son iki ifadesinde verilen yüzeyler* $\nabla-$*minimal afin öteleme yüzeyleridir.*

Son olarak, $x = u(y,z)$ tipindeki yüzeyleri ele alalım.

Teorem 4.3.3. *M^2, $\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $b^2+c^2 \neq 0$ vektörüne göre $x = u(y,z)$ tipinde $\nabla-$ singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2, $\nabla-$minimal ise, o zaman aşağıdakilerden biridir:*

1. *M^2, $(0,0,1)$ vektörüne paralel bir düzlemdir;*
2. $\mathbf{u} = (a,0,c)$, $ac \neq 0$, *ve*
$$u(y,z) = \frac{a}{c}z + \frac{1}{2ac}\ln\left[\cos\left(2by+\lambda_1\right)\right] + \lambda_2;$$
3. $\mathbf{u} = (a,b,0)$, $b \neq 0$, *ve*
$$u(y,z) = \frac{a}{b}y \pm \frac{1}{2|b|}\arctan\left(\frac{1}{|b\lambda_2|}\sqrt{e^{4z}-b^2}\right) + \lambda_3;$$
4. $\mathbf{u} = (0,b,c)$, $bc \neq 0$, *ve*
$$u(y,z) = \pm\frac{1}{2|b|}\arctan\left(\frac{1}{|\lambda_4|}\sqrt{e^{4b^2\left(z-\frac{c}{b}x\right)}-\lambda_4^2}\right) + \lambda_5,\ \lambda_4 \neq 0;$$
5. $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $bc \neq 0$, *ve*
$$u(y,z) = \frac{a}{b}x + v\left(z - \frac{c}{b}x\right),$$

burada v,

$$z - \frac{c}{b}x = \frac{1}{2|a|\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+a^2c^2\right)}\left\{ac\left(2|b|v+\lambda_6\right) - \right.$$
$$\left. -|b|\ln\left[ac\cos\left(2|b|v+\lambda_6\right) - |b|\sin\left(2|b|v+\lambda_6\right)\right]\right\} + \lambda_7,$$

şeklinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\lambda_1, ..., \lambda_7 \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: M^2 lokal olarak, $u(y,z)$ fonksiyonu için

$$\varphi(y,z) = (u(y,z), y, z)$$

olarak parametrize edilsin. Böylece yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_y = u_y \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

ve

$$\varphi_z = u_z \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{\mathbf{e}_1 - u_y \mathbf{e}_2 - u_z \mathbf{e}_3}{\sqrt{1+(u_y)^2+(u_z)^2}} \tag{4.3.27}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1+(u_y)^2, \quad g_{12} = u_y u_z, \quad g_{22} = 1+(u_z)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerinde ∇ yarı–simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_y}\varphi_y &= u_{yy}\mathbf{e}_1 - \left[1+(u_y)^2\right]\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_z &= (u_y + u_{yz})\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - u_y u_z \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_y &= u_{yz}\mathbf{e}_1 - u_y u_z \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_z &= (u_z + u_{zz})\,\mathbf{e}_1 - (u_z)^2\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

burada $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, vb. dir. Buradan ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla} = \frac{u_z + u_z (u_y)^2 + u_{yy}}{\sqrt{1+(u_y)^2+(u_z)^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = \frac{u_{yz} + u_y (u_z)^2}{\sqrt{1+(u_y)^2+(u_z)^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla} = \frac{u_z + (u_z)^3 + u_{zz}}{\sqrt{1+(u_y)^2+(u_z)^2}}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla (4.2.3) formülünden yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = \frac{\left[1+(u_z)^2\right]u_{yy} - 2u_y u_z u_{yz} + \left[1+(u_y)^2\right]u_{zz} + 2\left[1+(u_y)^2+(u_z)^2\right]u_z}{\left[1+(u_y)^2+(u_z)^2\right]^{3/2}} \tag{4.3.28}$$

şeklinde elde edilir. M^2 yüzeyinin $\nabla-$minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha \neq 0$ olduğundan (4.2.5) formülünden

$$\langle \xi, \mathbf{u} \rangle = 0$$

eşitliğini ve dolayısıyla

$$bu_y + cu_z = a \tag{4.3.29}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathbf{u} = b\varphi_y + c\varphi_z$$

olarak yazılabileceğinden, M^2 nin her noktasında teğet düzleminin $\mathbf{u}$ ya paralel olduğu elde edilir. $\nabla-$minimallik şartından dolayı (4.3.28) denkleminden

$$\left[1 + (u_z)^2\right] u_{yy} - 2u_y u_z u_{yz} + \left[1 + (u_y)^2\right] u_{zz} + 2\left[1 + (u_y)^2 + (u_z)^2\right] u_z = 0 \tag{4.3.30}$$

olur. (4.3.29) ve (4.3.30) denklemleri, sırasıyla, (4.3.14) ve (4.3.15) denklemleri ile benzer olduğundan x, y ile a da b ile yer değiştirildiğinde bu tür yüzeyler için Teorem 4.3.2 nin ispatındaki adımlar takip edilerek Teorem 4.3.2 ile benzer sonuçlar elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.3.1.2 D$-$Singüler minimal yüzeyler

Teorem 4.3.4. *M^2, $\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $a^2 + b^2 \neq 0$ birim vektörüne göre $z = u(x,y)$ tipinde bir D$-$singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2, D$-$ minimal ise, o zaman $\mathbf{u}$ vektörüne paralel bir düzlemdir.*

İspat: M^2 lokal olarak,

$$\varphi(x,y) = (x, y, u(x,y))$$

şeklinde parametrize edilsin. Buna göre yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x = \mathbf{e}_1 + u_x \mathbf{e}_3$$

ve

$$\varphi_y = \mathbf{e}_2 + u_y \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. O zaman M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{-u_x \mathbf{e}_1 - u_y \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1 + (u_x)^2, \quad g_{12} = u_x u_y, \quad g_{22} = 1 + (u_y)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerindeki D yarı–simetrik metrik olmayan konneksiyon aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
D_{\varphi_x}\varphi_x &= u_x \mathbf{e}_1 + \left[(u_x)^2 + u_{xx}\right]\mathbf{e}_3, \\
D_{\varphi_x}\varphi_y &= u_y \mathbf{e}_1 + (u_x u_y + u_{xy})\,\mathbf{e}_3, \\
D_{\varphi_y}\varphi_x &= u_x \mathbf{e}_2 + (u_x u_y + u_{xy})\,\mathbf{e}_3, \\
D_{\varphi_y}\varphi_y &= u_y \mathbf{e}_2 + \left((u_y)^2 + u_{yy}\right)\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

burada $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vb. dir. Buna göre ikinci temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
h_{11}^D &= \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}}, \\
h_{12}^D = h_{21}^D &= \frac{u_{xy}}{\sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}}, \\
h_{22}^D &= \frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre (4.2.4) formülünden

$$2H^D = \frac{\left[1 + (u_y)^2\right] u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left[1 + (u_x)^2\right] u_{yy}}{\left[1 + (u_x)^2 + (u_y)^2\right]^{3/2}}$$

elde edilir. M^2 yüzeyinin D–minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha \neq 0$ olduğundan (4.2.6) formülünden

$$\langle \xi, \mathbf{u} \rangle = 0$$

eşitliği ve dolayısıyla

$$au_x + bu_y = c \tag{4.3.31}$$

bulunur, burada $a^2 + b^2 \neq 0$ dır. Diğer taraftan $D-$minimallik şartı

$$\left[1 + (u_y)^2\right] u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left[1 + (u_x)^2\right] u_{yy} = 0 \tag{4.3.32}$$

denklemini verir. (4.3.32) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1. $a = 0$ olsun. (4.3.31) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için

$$u(x,y) = f(x) + \frac{c}{b}y$$

şeklindedir. $u(x,y)$ fonksiyonu (4.3.32) denkleminde göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{b^2}f'' = 0$$

elde edilir, burada $f'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$ dir. Bu eşitliğin integrali alınırsa

$$f(x) = \lambda_1 x + \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\varphi(x,y) = (x, 0, \lambda_1 x + \lambda_2) + \frac{1}{b}y(0,b,c)$$

olur. Bu ise M^2 nin **u** vektörüne paralel bir düzlem olması demektir.

(4.3.32) denkleminde x ve y simetrik rolde olduğundan $a \neq 0$ ve $b = 0$ için aynı sonuç elde edilir.

Durum 2. $ab \neq 0$ olsun. Buna göre, diferensiyellenebilir bir g fonksiyonu için, (4.3.32) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + g\left(y - \frac{b}{a}x\right)$$

şeklindedir. $u(x,y)$ fonksiyonu (4.3.32) denkleminde yazıldığında

$$\frac{1}{a^2}g'' = 0$$

elde edilir, burada $g'' = \frac{d^2 g}{d\tilde{y}^2}, \tilde{y} = y - \frac{b}{a}x$ dir. Bu eşitliğin integrali alınırsa,

$$g\left(y - \frac{b}{a}x\right) = \lambda_4 + \lambda_3\left(y - \frac{b}{a}x\right)$$

fonksiyonu bulunur, burada $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla M^2 yüzeyi

$$\varphi(x,\tilde{y}) = \frac{x}{a}(a,b,c) + (0, \tilde{y}, \lambda_3\tilde{y} + \lambda_4)$$

şeklinde parametrize edilir. Bu ise yüzeyin **u** vektörüne paralel bir düzlem olduğunu gösterir.

$y = u(x,z)$ ve $x = u(y,z)$ tipindeki yüzeyler verildiğinde, (4.3.31) ve (4.3.32) denklemlerine benzer denklemler elde edilir ve dolayısıyla yukarıda elde edilen sonuçlar bu yüzeyler için de geçerlidir.

4.3.2 $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz–Minkowski Uzayında Singüler Minimal Yüzeyler

$\left(\mathbb{R}^3_1, \langle,\rangle_L\right)$, 3–boyutlu Lorentz–Minkowski uzayı ve $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3_1$ üzerinde ortonormal bir çatı olsun, burada $\langle,\rangle_L = dx^2 + dy^2 - dz^2$ şeklindedir. Buna göre, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlı olan belirli yarı–simetrik metrik konneksiyon ve yarı–simetrik metrik olmayan konneksiyonu göz önüne alalım:

$$\nabla_X Y = \nabla^L_X Y + \langle Y,\mathbf{e}_3\rangle_L X - \langle X,Y\rangle_L \mathbf{e}_3 \tag{4.3.33}$$

ve

$$D_X Y = \nabla^L_X Y + \langle Y,\mathbf{e}_3\rangle_L X, \tag{4.3.34}$$

burada ∇^L, $\mathbb{R}^3_1$ uzayının Levi–Civita konneksiyonu ve $X,Y \in \Gamma\left(T\mathbb{R}^3_1\right)$ dir. Buna göre (4.3.33) ve (4.3.34) denklemleri için, sırasıyla,

$$\begin{array}{lll} \nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, & \nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2 = 0, & \nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1, \\ \nabla_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1 = 0, & \nabla_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3, & \nabla_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2, \\ \nabla_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_1 = 0, & \nabla_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_2 = 0, & \nabla_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_3 = 0 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{lll} D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 = 0, & D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2 = 0, & D_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \\ D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1 = 0, & D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2 = 0, & D_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2, \\ D_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_1 = 0, & D_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_2 = 0, & D_{\mathbf{e}_3}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3, \end{array}$$

şeklindedir. M^2, $\mathbb{R}^3_1$ uzayına immmers edilmiş, yönlendirilmiş bir yüzey olsun. $\forall$ $X,Y \in \Gamma\left(T\mathbb{R}^3_1\right)$ ve $\xi \in \Gamma\left(T\mathbb{R}^3_1\right)^{\perp}$ için ∇ ve D konneksiyonlarına göre Gauss formülü,

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^{\mathsf{T}} + h^{\nabla}(X,Y)\,\xi$$

ve

$$D_X Y = (\nabla_X Y)^{\mathsf{T}} + h^{D}(X,Y)\,\xi$$

şeklindedir, burada T, M^2 nin teğet demeti üzerine izdüşümü gösterir. h^{∇} ve h^D, sırasıyla, ∇ ve D konneksiyonlarına göre *(0,2) tensör alanları* olarak adlandırılır. $\{e_1,e_2\}$, M^2 yüzeyi üzerinde ortonormal tanjant çatısı olsun. Buna göre M^2 yüzeyinin ∇ ve D konneksiyonlarına göre ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$H^{\nabla} = \frac{1}{2}\left[h^{\nabla}(e_1,e_1) + h^{\nabla}(e_2,e_2)\right]$$

ve

$$H^D = \frac{1}{2}\left[h^D(e_1,e_1)+h^D(e_2,e_2)\right]$$

şeklinde tanımlıdır. g_{ij}, $1 \leq i,j \leq 2$, indirgenmiş metrik tensörün bileşenlerini göstersin. Buna göre H^{∇} ve H^D ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$H^{\nabla} = \frac{g_{22}h_{11}^{\nabla} - g_{12}\left(h_{12}^{\nabla}+h_{21}^{\nabla}\right)+g_{11}h_{22}^{\nabla}}{2\det g_{ij}} \tag{4.3.35}$$

ve

$$H^{D} = \frac{g_{22}h_{11}^{D} - g_{12}\left(h_{12}^{D}+h_{21}^{D}\right)+g_{11}h_{22}^{D}}{2\det g_{ij}} \tag{4.3.36}$$

şeklinde verilir. Burada $\Gamma(TM^2)$ nın $\{f_1,f_2\}$ bazı için $h_{ij}^{\nabla} = g\left(\nabla_{f_i}f_j,\xi\right)$ ve $h_{ij}^{D} = g\left(D_{f_i}f_j,\xi\right)$ dir.

$\mathbb{R}_1^3$ de López tarafından tanımlanan singüler maksimal yüzey tanımı, üçüncü bölümde Tanım 3.2.1 ile verilmişti. $z-$koordinatı, zaman koordinatını temsil ettiğinden dolayı, yerçekim kavramının bir anlamı yoktur. Bu nedenle Riemann durumunun aksine, (3.2.4) denklemi yalnızca ξ vektörü ve $z-$ekseni arasında tanımlı açıya sahip olan spacelike yüzeyleri tanımlar. Burada dikkat edilmesi gereken bir husus, $\alpha \neq 0$ ise, ξ ve $(0,0,1)$ timelike vektörleri için $\langle \xi,(0,0,1)\rangle \neq 0$ olduğundan, (3.2.4) denkleminde H ortalama eğriliği sıfıra eşit olmaz ve böylece (3.2.4) denklemini doğrudan bu kısımda yapılacak çalışmalara uygulayamayız. Bu nedenle bu kavramı aşağıdaki gibi değiştirip, ∇ ve D konneksiyonlarına göre singüler minimallik kavramını tanımlayabiliriz:

Tanım 4.3.1. *φ, $\mathbb{R}_1^3$ de yönlendirilmiş timelike bir M^2 yüzeyinin diferensiyellenebilir bir immersiyonu olsun ve ξ ile H, sırasıyla, M yüzeyinin birim normal vektör alanı ve ortalama eğriliği olsun. $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_1^3$, $\mathbf{u} \neq 0$, ξ vektörüne paralel olmayan spacelike bir vektör olsun, öyle ki ξ ve $\mathbf{u}$ vektörleri, spacelike bir $2-$uzayını gersin. Eğer M^2 yüzeyi,*

$$2H = \alpha\frac{\langle \xi,\mathbf{u}\rangle_L}{\langle \varphi,\mathbf{u}\rangle_L}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$$

denklemini sağlarsa, M^2 yüzeyine, $\mathbf{u}$ vektörüne göre singüler minimal yüzey denir.

Bu tanım ile $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir M^2 singüler minimal yüzeyi, ξ ve $\mathbf{u}$ vektörleri arasında tanımlı Lorentz spacelike açısına sahip timelike bir yüzey olarak düşünebiliriz. Bu denklem, M^2 yüzeyinin minimal olması durumunda $\langle \xi,\mathbf{u}\rangle_L = 0$

olduğu sonucunu verir, yani tanımlı olan açı $\frac{\pi}{2}$ dir ve Riemann durumunda olduğu gibi, M^2 yüzeyi düzlem olmak zorunda olan bir *timelike sabit açılı yüzey* olur (Güler vd., 2011, Teorem 3.1). Böylece aşağıdaki önermeyi ifade edebiliriz:

Önerme 4.3.2. *$\mathbb{R}_1^3$ uzayında M^2, spacelike bir $\mathbf{u}$ vektörüne göre singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2 minimal bir yüzey ise, o zaman $\mathbf{u}$ vektörüne paralel bir düzlemdir.*

Bu bölümde (4.3.33) ve (4.3.34) eşitlikleriyle verilen ∇ ve D konneksiyonlarına göre minimal olan singüler minimal yüzeyler için elde edilen karakterizasyonlar ifade edildi.

4.3.2.1 $\nabla-$Singüler minimal yüzeyler

Tanım 4.3.2. *$\varphi : M^2 \to \mathbb{R}_1^3$, yönlendirilmiş bir M^2 timelike yüzeyinin diferensiyellenebilir bir immersiyonu; ξ, M^2 yüzeyinin birim normal vektör alanı ve H^{∇}, ∇ ya göre M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği olsun. $\mathbf{u} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, ξ ye paralel olmayan belirli bir birim spacelike vektör olsun, öyle ki ξ ve $\mathbf{u}$ bir spacelike 2–uzayını gersin. Eğer M^2 yüzeyi,*

$$2H^{\nabla} = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u} \rangle_L}{\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle_L}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \qquad (4.3.37)$$

eşitliğini sağlarsa, o zaman M^2 yüzeyine $\mathbf{u}$ vektörüne göre $\nabla-$singüler minimal yüzey denir.

Teorem 4.3.5. *M^2, $\mathbb{R}_1^3$ de $\mathbf{u} = (a,b,c)$ birim spacelike vektörüne göre $z = u(x,y)$ tipinde bir $\nabla-$singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2 yüzeyi $\nabla-$minimal ise, o zaman aşağıdaki parametrizasyonlardan birine sahiptir:*

1. $\mathbf{u} = (0, b \neq 0, c)$ *ve*

$$u(x,y) = \frac{c}{b}y + \frac{1}{2b^2} \ln[\cosh(2bx + \lambda_1)] + \lambda_2,$$

2. $\mathbf{u} = (a \neq 0, 0, c)$ *ve*

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + \frac{1}{2a^2} \ln[\cosh(2ay + \lambda_3)] + \lambda_4,$$

3. $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $ab \neq 0$ *ve*

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + \frac{bc}{a^2+b^2}\left(y - \frac{b}{a}x\right) + \frac{1}{2(a^2+b^2)}\ln\left[\cosh\left(-2|a|\left\{y - \frac{b}{a}x\right\} + \lambda_5\right)\right] + \lambda_6,$$

burada $\lambda_1, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$, $\lambda_5 \neq 0$ *dır.*

İspat: M^2 yüzeyi lokal olarak

$$\varphi(x,y) = (x, y, u(x,y))$$

olarak parametrize edilsin. Böylece yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x = \mathbf{e}_1 + u_x \mathbf{e}_3$$

ve

$$\varphi_y = \mathbf{e}_2 + u_y \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{-u_x \mathbf{e}_1 - u_y \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\sqrt{-1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1 - (u_x)^2, \quad g_{12} = -u_x u_y, \quad g_{22} = 1 - (u_y)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerinde ∇ yarı–simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_x}\varphi_x &= -u_x \mathbf{e}_1 + (-1 + u_{xx})\,\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_x}\varphi_y &= -u_y \mathbf{e}_1 + u_{xy} \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_x &= -u_x \mathbf{e}_2 + u_{xy} \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_y &= -u_y \mathbf{e}_2 + (-1 + u_{yy})\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

burada $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dir. Buradan ikinci temel formmun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla} = \frac{-1 + (u_x)^2 + u_{xx}}{\sqrt{-1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = \frac{u_{xy} + u_x u_y}{\sqrt{-1 + (u_x)^2 + (u_y)^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla}=\frac{-1+(u_y)^2+u_{yy}}{\sqrt{-1+(u_x)^2+(u_y)^2}}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (4.2.3) formülünden, yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla}=\frac{\left[1-(u_y)^2\right]u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+\left[1-(u_x)^2\right]u_{yy}+2\left[-1+(u_x)^2+(u_y)^2\right]}{\left[-1+(u_x)^2+(u_y)^2\right]^{3/2}}$$

şeklinde bulunur. M^2 nin $\nabla-$ minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha\neq 0$ olduğundan (4.2.5) formülünden

$$\langle\xi,\mathbf{u}\rangle=0$$

olur. Buradan da

$$au_x+bu_y=c \tag{4.3.38}$$

elde edilir. Yüzeyin $\nabla-$minimallik şartı

$$\left[1-(u_y)^2\right]u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+\left[1-(u_x)^2\right]u_{yy}+2\left[-1+(u_x)^2+(u_y)^2\right]=0 \tag{4.3.39}$$

denklemini verir. (4.3.39) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

Durum 1. $a=0$ olsun. Bu durumda diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için (4.3.38) denkleminin çözümü

$$u(x,y)=f(x)+\frac{c}{b}y$$

şeklindedir. Buna göre (4.3.39) denklemi,

$$\frac{bf''}{1-(bf')^2}=2b$$

veya

$$\frac{bdf'}{1-(bf')^2}=2bdx \tag{4.3.40}$$

olarak yeniden yazılabilir. $bf'=t$, $bdf'=dt$ değişken değiştirmesi yapılarak, (4.3.40) denkleminin integrali alındığında,

$$\tanh^{-1}(t)=2bx+\lambda_1,$$

eşitliği bulunur ve dolayısıyla

$$t=\tanh(2bx+\lambda_1)$$

olduğu elde edilir. Burada $t = bf'$ değeri yerine yazılırsa,

$$f' = \frac{1}{b}\tanh(2bx+\lambda_1)$$

olup bu eşitliğin integrali,

$$f = \frac{1}{2b^2}\ln|cosh(2bx+\lambda_1)|+\lambda_2$$

fonksiyonunu verir, burada $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ise teoremin birinci ifadesinin ispatını tamamlar.

Durum 2. $b = 0$ olsun. Buna göre diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için (4.3.38) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + g(y)$$

şeklindedir. O zaman (4.3.39) denklemi,

$$\frac{ag''}{1-(ag')^2} = 2a$$

veya buna denk olarak

$$\frac{adg'}{1-(ag')^2} = 2ady \tag{4.3.41}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $ag' = \mu$, $adg' = d\mu$ değişken değiştirmesi yapılarak, (4.3.41) denkleminin integrali alındığında,

$$\tanh^{-1}(\mu) = 2ay+\lambda_3,$$

veya

$$\mu = \tanh(2ay+\lambda_3)$$

bulunur. Burada $\mu = ag'$ yerine yazılırsa

$$g' = \frac{1}{a}\tanh(2ay+\lambda_3)$$

olur. Bu eşitliğin integrali alınırsa

$$g = \frac{1}{2a^2}\ln|cosh(2ay+\lambda_3)|+\lambda_4$$

elde edilir, burada $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ise teoremin ikinci ifadesinin ispatını tamamlar.

Durum 3. $ab \neq 0$. Bu durumda (4.3.38) denkleminin çözümü, diferensiyellenebilir bir g fonksiyonu için

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + g\left(y - \frac{b}{a}x\right)$$

şeklindedir. u fonksiyonu (4.3.39) denkleminde yerine yazıldığında,

$$g'' + 2\left[-a^2 + \left(c - bg'\right)^2 + \left(ag'\right)^2\right] = 0$$

veya buna denk olarak

$$\frac{-\left(a^2+b^2\right)dg'}{a^2 - \left[bc - \left(a^2+b^2\right)g'\right]^2} = -2d\tilde{y} \tag{4.3.42}$$

elde edilir, burada $g' = \frac{dg}{d\tilde{y}}$, $g'' = \frac{d^2g}{d\tilde{y}^2}$, $\tilde{y} = y - \frac{b}{a}x$ dir. (4.3.42) denkleminde

$$bc - \left(a^2+b^2\right)g' = \mu, \quad -\left(a^2+b^2\right)dg' = d\mu$$

değişken değiştirmesi yapılıp integral alınırsa

$$\frac{1}{|a|}\tanh^{-1}\left(\frac{\mu}{|a|}\right) = -2\tilde{y} + \lambda_5$$

ya da

$$\mu = |a|\tanh\left(-2|a|\tilde{y} + \lambda_6\right) \tag{4.3.43}$$

bulunur. μ değeri (4.3.43) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\left(a^2+b^2\right)g' = -|a|\tanh\left(-2|a|\tilde{y} + \lambda_6\right) - bc$$

olur ve bu denklemin integrali alındığnda

$$g = \frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}\ln\left|cosh\left(-2|a|\tilde{y} + \lambda_6\right)\right| - \frac{bc}{\left(a^2+b^2\right)}\tilde{y} + \lambda_7$$

fonksiyonu elde edilir. Bu ise teoremin üçüncü ifadesinin ispatını tamamlar.

Yorum 4.3.3. *Teorem 4.3.5 nin son ifadesi, $\mathbb{R}^3_1$ de $\nabla-$minimal yüzeyler için yeni bir örnektir. Ayrıca Teorem 4.3.5 nin ilk iki ifadesi, Wang (2020) tarafından elde edilmiş olan $\nabla-$minimal öteleme yüzeylerdir.*

Teorem 4.3.6. *M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de spacelike birim $\mathbf{u} = (a,b,c)$, $a^2+b^2 \neq 0$, vektörüne göre $y = u(x,z)$ tipinde bir $\nabla-$singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2 yüzeyi, $\nabla-$minimal ise, o zaman aşağıdaki yüzeylerden biridir:*

1. M^2, $\mathbf{u}=(a,b,0)$, $a\neq 0$, vektörüne paralel bir düzlemdir,

2. $\mathbf{u}=(0,b,c)$, $bc\neq 0$ ve

$$u(x,y)=\frac{b}{c}z+\frac{1}{2bc}\ln\left[\cosh\left(2bx+\lambda_1\right)\right]+\lambda_2,$$

3. $\mathbf{u}=(a,b,0)$, $a\neq 0$ ve

$$u(x,z)=\frac{b}{a}x\pm\frac{1}{2\left|a\right|}\sinh^{-1}\left(\lambda_3 e^{2z}\right)+\lambda_4,\ \lambda_3\neq 0,$$

4. $\mathbf{u}=(a,0,c)$, $ac\neq 0$ ve

$$u(x,z)=\pm\frac{1}{2\left|a\right|}\sinh^{-1}\left[\left|\lambda_5\right|e^{2a^2\left(z-\frac{c}{a}x\right)}\right]+\lambda_6,\ \lambda_5\neq 0,$$

5. $\mathbf{u}=(a,\pm 1,c)$, $a=\pm c$, $c\neq 0$ ve

$$u(x,z)=\frac{\pm 1}{c}x\pm\frac{1}{4c}\ln\left[1\pm 2\lambda_7 e^{2\left(1+c^2\right)(z\pm x)}\right]+\lambda_8,\ \lambda_7\neq 0,$$

6. $\mathbf{u}=(a,b,c)$, $abc\neq 0$ ve

$$u(x,z)=\frac{b}{a}x+v\left(z-\frac{c}{a}x\right),$$

burada v,

$$z-\frac{c}{a}x=\frac{-bc\left(c^2-a^2\right)}{2\left|a\right|\left(a^2-b^2c^2\right)}\left(2\left|a\right|v+\lambda_9\right)-$$

$$-\frac{c^2-a^2}{2\left(a^2-b^2c^2\right)}\ln\left[bc\cosh\left(2\left|a\right|v+\lambda_9\right)-\left|a\right|\sinh\left(2\left|a\right|v+\lambda_9\right)\right]+\lambda_{10},$$

eşitliğini sağlayan diferensiyellenebilir bir fonksiyondur ve $\lambda_1,\ldots,\lambda_{10}\in\mathbb{R}$ dir.

İspat: M^2 yüzeyi, lokal olarak, $u(x,z)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$\varphi(x,z)=(x,u(x,z),z)$$

olarak parametrize edilmiş olsun. Böylece yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x=\mathbf{e}_1+u_x\mathbf{e}_2$$

ve

$$\varphi_z=u_z\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{u_x\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - u_z\mathbf{e}_3}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_z)^2}} \tag{4.3.44}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1+(u_x)^2, \quad g_{12} = u_x u_z, \quad g_{22} = -1+(u_z)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerinde ∇ yarı–simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_x}\varphi_x &= u_{xx}\mathbf{e}_2 - \left[1+(u_x)^2\right]\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_x}\varphi_z &= -\mathbf{e}_1 + (-u_x + u_{xz})\, e_2 - u_x u_z \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_x &= u_{xz}\mathbf{e}_2 - u_x u_z \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_z &= (-u_z + u_{zz})\,\mathbf{e}_2 - (u_z)^2\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

burada $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vb. dir. Buradan ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla} = -\frac{u_z + u_z\,(u_x)^2 + u_{xx}}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_z)^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = -\frac{u_{xz} + u_x\,(u_z)^2}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_z)^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla} = -\frac{u_z + (u_z)^3 + u_{zz}}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_z)^2}}$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla (4.3.35) formülüne göre yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = -\frac{\left[-1+(u_z)^2\right]u_{xx} - 2u_x u_z u_{xz} + \left[1+(u_x)^2\right]u_{zz} - 2\left[1+(u_x)^2-(u_z)^2\right]u_z}{\left[1+(u_x)^2-(u_z)^2\right]^{3/2}} \tag{4.3.45}$$

olur. M^2 yüzeyinin $\nabla-$minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha \neq 0$ olduğundan (4.3.37) formülünden

$$\langle \xi, \mathbf{u} \rangle = 0$$

bulunur ve dolayısıyla

$$a u_x + c u_z = b \tag{4.3.46}$$

olur. Diğer taraftan

$$\mathbf{u} = a\varphi_x + c\varphi_y$$

olarak yazılabilmesi, M^2 yüzeyinin her noktasında teğet düzleminin $\mathbf{u}$ vektörüne paralel olduğunu ifade eder. $\nabla-$minimallik şartından dolayı (4.3.45) denklemi

$$\left[-1+(u_z)^2\right]u_{xx}-2u_xu_zu_{xz}+\left[1+(u_x)^2\right]u_{zz}-2\left[1+(u_x)^2-(u_z)^2\right]u_z=0 \quad (4.3.47)$$

denklemini verir. (4.3.47) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar mevcuttur:

Durum 1. $a=0$, $c\neq 0$ olsun. $\mathbf{u}$ vektörü spacelike olduğundan, $b\neq 0$ dır. Dolayısıyla (4.3.46) denkleminin çözümü, diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için

$$u(x,z)=\frac{b}{c}z+f(x)$$

şeklindedir. Buna göre (4.3.47) denklemi

$$\frac{cf''}{1-(cf')^2}=-2b$$

ya da buna denk olan

$$\frac{cdf'}{1-(cf')^2}=-2bdx \quad (4.3.48)$$

denklemine dönüşür, burada $f''=\frac{d^2f}{dx^2}$ dir. M^2 yüzeyi dejenere olmadığından $1-(cf')^2\neq 0$ dır. $cf'=\mu$, $cdf'=d\mu$ değişken değiştirmesi yapılıp (4.3.48) denkleminin integrali alındığında,

$$\tanh^{-1}(\mu)=-2bx+\lambda_1$$

olur. Bu denklemde gerekli düzenlenlemeler yapılırsa,

$$\mu=\tanh(-2bx+\lambda_1) \quad (4.3.49)$$

elde edilir. μ değeri, (4.3.49) denkleminde yerine yazıldığında,

$$f'=\frac{1}{c}\tanh(-2bx+\lambda_1)$$

bulunur. Bu denklemin integrali alınırsa

$$f=-\frac{1}{2bc}\ln|\cosh(-2bx+\lambda_1)|+\lambda_2$$

elde edilir. Bu ise teoremin ikinci ifadesinin ispatını tamamlar.

Durum 2. $a\neq 0$, $c=0$ olsun. Buna göre (4.3.46) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir g fonksiyonu için

$$u(x,z)=\frac{b}{a}x+g(z)$$

şeklindedir. $u(x,z)$ fonksiyonu, (4.3.47) de göz önüne alınırsa, bu denklem

$$g'' - 2\left[1 - \left(ag'\right)^2\right] g' = 0 \tag{4.3.50}$$

denklemine indirgenir, burada $g' = \frac{dg}{dz}$, vb. dir. Açık bir şekilde görülebilir ki $g' = 0$, (4.3.50) denklemi için bir çözümdür. Bu ise teoremin birinci kısmının ispatını verir.

Diğer taraftan $g' \neq 0$ iken (4.3.50) denklemi

$$\frac{g''}{g'} + \frac{a}{2}\left(\frac{g''}{1-ag'} - \frac{g''}{1+ag'}\right) = 2 \tag{4.3.51}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.3.51) denkleminin integrali alınırsa,

$$\ln|g'| - \frac{1}{2}\left(\ln|1-ag'| + \ln|1+ag'|\right) = 2z + \lambda_3$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\frac{g'}{\sqrt{1-(ag')^2}} = \lambda_4 e^{2z} \tag{4.3.52}$$

elde edilir. (4.3.52) denkleminden

$$g' = \pm \frac{|\lambda_4| e^{2z}}{\sqrt{1 + a^2\left(\lambda_4 e^{2z}\right)^2}}$$

olur. Bu denklemin integrali alınırsa,

$$g = \pm \frac{1}{|2a|} \sinh^{-1}\left(|a\lambda_4| e^{2z}\right) + \lambda_5$$

elde edilir. Bu ise teoremin üçüncü ifadesinin ispatını tamamlar.

Durum 3. $ac \neq 0$ olsun. (4.3.46) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir v fonksiyonu için

$$u(x,z) = \frac{b}{a}x + v\left(z - \frac{c}{a}x\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla (4.3.47) denklemi

$$v'' - 2\left[a^2 + \left(b - cv'\right)^2 - \left(av'\right)^2\right] v' = 0 \tag{4.3.53}$$

denklemine indirgenir, burada $v' = \frac{dv}{d\tilde{z}}$, $v' = \frac{d^2v}{d\tilde{z}^2}$, $\tilde{z} = z - \frac{c}{a}x$ dir.

Eğer $b = 0$ olursa, (4.3.53) denklemi

$$\frac{v''}{v'} + \frac{v''}{2(a-v')} - \frac{v''}{2(a+v')} = 2a^2 \tag{4.3.54}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.3.54) denkleminin integrali alınırsa,

$$\ln|v'| - \frac{1}{2}\ln|a^2 - \left(v'\right)^2| = 2a^2\tilde{z} + \lambda_6$$

olur. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{v'}{\sqrt{a^2 - (v')^2}} = \lambda_7 e^{2a^2\tilde{z}} \tag{4.3.55}$$

elde edilir. Buna göre (4.3.55) denkleminden

$$v' = \pm\frac{|a\lambda_7|e^{2a^2\tilde{z}}}{\sqrt{1 + \left(\lambda_7 e^{2a^2\tilde{z}}\right)^2}}$$

olup bu eşitliğin integrali alınırsa

$$v = \pm\frac{1}{2|a|}\sinh^{-1}\left(|\lambda_7|e^{2a^2\tilde{z}}\right) + \lambda_8$$

elde edilir, burada $\lambda_8 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ise teoremin dördüncü ifadesinin ispatını tamamlar.

Eğer $a^2 = c^2$ ve $b = \pm 1$ olursa, (4.3.53),

$$v'' - 2\left[c^2 + 1 \pm 2cv'\right]v' = 0$$

denklemine indirgenir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\frac{v''}{v'} - \frac{\pm 2cv''}{1 + c^2 \pm 2cv'} = 2\left(1 + c^2\right) \tag{4.3.56}$$

elde edilir. (4.3.56) denkleminin integrali alnırsa,

$$\ln|v'| - \ln|1 + c^2 \pm 2cv'| = 2\left(1 + c^2\right)\tilde{z} + \lambda_9$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında, bu eşitliğe denk olan

$$\frac{v'}{1 + c^2 \pm 2cv'} = \lambda_{10} e^{2\left(1+c^2\right)\tilde{z}}$$

denklemi bulunur, burada $\lambda_{10} \neq 0 \in \mathbb{R}$ dir. Buna göre son eşitlikten

$$v' = \frac{\left(1 + c^2\right)\lambda_{10} e^{2\left(1+c^2\right)\tilde{z}}}{1 \pm 2c\lambda_{10} e^{2\left(1+c^2\right)\tilde{z}}}$$

yazılır ve bu eşitliğin integrali

$$v = \frac{1}{\pm 2c}\ln|1 \pm 2c\lambda_{10} e^{2\left(1+c^2\right)\tilde{z}}|$$

dir. Bu ise teoremin beşinci ifadesini verir.

Eğer $a^2 \neq c^2$ olursa, o zaman (4.3.53)

$$\frac{-\left(c^2-a^2\right)v''}{a^2-\left[bc-\left(c^2-a^2\right)v'\right]^2}=2v' \tag{4.3.57}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.3.57) denkleminin integrali alınırsa

$$\frac{1}{|a|}\tanh^{-1}\left[\frac{bc-\left(c^2-a^2\right)v'}{|a|}\right]=2v+\lambda_{11}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$v'=-\frac{|a|}{c^2-a^2}\tanh\left(2|a|v+\lambda_{11}\right)+\frac{bc}{c^2-a^2}$$

denklemi veya buna denk olan

$$\frac{\left(c^2-a^2\right)dv}{-|a|\tanh\left(2|a|v+\lambda_{11}\right)+bc}=d\tilde{z}$$

elde edilir. Bu eşitliğin integrali ise teoremin son ifadesini verir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Yorum 4.3.4. *Teorem 4.3.6 in son üç ifadesi $\mathbb{R}^3_1$ de $\nabla-$minimal yüzeylerin yeni örnekleridir. Ayrıca ikinci ve üçüncü ifadesi, Wang (2020) tarafından elde edilmiş olan $\nabla-$minimal öteleme yüzeylerdir.*

M^2 yüzeyi lokal olarak, $u(y,z)$ fonksiyonu için

$$\varphi(y,z)=\left(u(y,z),y,z\right)$$

olarak parametrize edilsin. Böylece yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_y=u_y\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$$

ve

$$\varphi_z=u_z\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ spacelike birim normal vektör alanı

$$\xi=\frac{\mathbf{e}_1-u_y\mathbf{e}_2+u_z\mathbf{e}_3}{\sqrt{1+(u_y)^2-(u_z)^2}} \tag{4.3.58}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1 + (u_y)^2, \quad g_{12} = u_y u_z, \quad g_{22} = -1 + (u_z)^2$$

şeklindedir. Ayrıca yüzey üzerinde ∇ yarı–simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\varphi_y}\varphi_y &= u_{yy}\mathbf{e}_1 - \left[1 + (u_y)^2\right]\mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_y}\varphi_z &= (-u_y + u_{yz})\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - u_y u_z \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_y &= u_{yz}\mathbf{e}_1 - u_y u_z \mathbf{e}_3, \\
\nabla_{\varphi_z}\varphi_z &= (-u_z + u_{zz})\,\mathbf{e}_1 - (u_z)^2\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

burada $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ vb. dir. Dolayısıyla ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^{\nabla} = \frac{u_z + u_z\,(u_y)^2 + u_{yy}}{\sqrt{1 + (u_y)^2 - (u_z)^2}},$$

$$h_{12}^{\nabla} = h_{21}^{\nabla} = \frac{u_{yz} + u_y\,(u_z)^2}{\sqrt{1 + (u_y)^2 - (u_z)^2}},$$

$$h_{22}^{\nabla} = \frac{-u_z + (u_z)^3 + u_{zz}}{\sqrt{1 + (u_y)^2 - (u_z)^2}}$$

olarak hesaplanır. O halde (4.3.35) formülünden yüzeyin ortalama eğriliği

$$2H^{\nabla} = -\frac{\left[-1 + (u_z)^2\right]u_{yy} - 2u_y u_z u_{yz} + \left[1 + (u_y)^2\right]u_{zz} - 2\left[1 + (u_y)^2 - (u_z)^2\right]u_z}{\left[1 + (u_y)^2 - (u_z)^2\right]^{3/2}} \tag{4.3.59}$$

şeklinde elde edilir. M^2 yüzeyinin $\nabla-$minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha \neq 0$ olduğundan (4.2.5) formülünden

$$\langle \xi, \mathbf{u} \rangle = 0$$

olur ve dolayısıyla

$$bu_y + cu_z = a \tag{4.3.60}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\mathbf{u} = b\varphi_y + c\varphi_z$$

olarak yazılabileceğinden, M^2 yüzeyinin her noktasında teğet düzleminin $\mathbf{u}$ vektörüne paralel olduğu elde edilir. $\nabla-$minimallik şartından dolayı (4.3.59) denkleminden

$$\left[-1 + (u_z)^2\right]u_{yy} - 2u_y u_z u_{yz} + \left[1 + (u_y)^2\right]u_{zz} - 2\left[1 + (u_y)^2 - (u_z)^2\right]u_z = 0 \tag{4.3.61}$$

denklemi elde edilir. Dikkat edilecek olursa, (4.3.61) denklemi, (4.3.47) denklemi ile aynıdır. Dolayısyla bir önceki teoremin ispatında x ile y ve a ile b nin rolleri değiştirilecek olursa, ispata gerek duyulmaksızın benzer sonuçlar ifade edilir.

4.3.2.2 D$-$Singüler minimal yüzeyler

Tanım 4.3.3. $\varphi : M^2 \to \mathbb{R}^3_1$, *yönlendirilmiş bir M^2 timelike yüzeyinin diferensiyellenebilir bir immersiyonu; ξ, M^2 yüzeyinin birim normal vektör alanı ve H^D, D konneksiyonuna göre M^2 yüzeyinin ortalama eğriliği olsun.* $\mathbf{u} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$, *$\xi$ ye paralel olmayan belirli bir birim spacelike vektör olsun, öyle ki ξ ve* $\mathbf{u}$ *bir spacelike* 2*–uzayını gersin. Eğer M^2 yüzeyi,*

$$2H^D = \alpha \frac{\langle \xi, \mathbf{u} \rangle}{\langle \varphi, \mathbf{u} \rangle}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \tag{4.3.62}$$

eşitliğini sağlarsa, M^2 yüzeyine $\mathbf{u}$ *vektörüne göre D–singüler minimal yüzey denir.*

Teorem 4.3.7. *M^2, $\mathbb{R}^3_1$ de spacelike* $\mathbf{u}$ *birim vektörüne göre $z = u(x,y)$ tipinde bir D–singüler minimal yüzey olsun. Eğer M^2 yüzeyi, D–minimal ise, o zaman* $\mathbf{u}$ *vektörüne paralel bir düzlemdir.*

İspat: M^2 timelike yüzeyi,

$$\varphi(x,y) = (x, y, u(x,y))$$

olarak parametrize edilsin. Böylece yüzeyin teğet düzlemi

$$\varphi_x = \mathbf{e}_1 + u_x \mathbf{e}_3$$

ve

$$\varphi_y = \mathbf{e}_2 + u_y \mathbf{e}_3$$

vektörleri ile gerilir. Buna göre M^2 yüzeyinin ξ birim normal vektör alanı

$$\xi = \frac{-u_x e_1 - u_y e_2 - e_3}{\sqrt{1 + (u_x)^2 - (u_y)^2}}$$

dir. Yüzeyin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = 1 - (u_x)^2, \quad g_{12} = -u_x u_y, \quad g_{22} = 1 - (u_y)^2$$

şeklindedir. Yüzey üzerindeki D yarı–simetrik metrik olmayan konneksiyon aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} D_{\varphi_x}\varphi_x &= u_x\mathbf{e}_1+\left[(u_x)^2+u_{xx}\right]\mathbf{e}_3, \\ D_{\varphi_x}\varphi_y &= u_y\mathbf{e}_1+(u_xu_y+u_{xy})\,\mathbf{e}_3, \\ D_{\varphi_y}\varphi_x &= u_x\mathbf{e}_2+(u_xu_y+u_{xy})\,\mathbf{e}_3, \\ D_{\varphi_y}\varphi_y &= u_y\mathbf{e}_2+\left[(u_y)^2+u_{yy}\right]\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

burada $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vb. dir. Buradan ikinci temel formun katsayıları

$$h_{11}^D=\frac{u_{xx}}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_y)^2}},$$

$$h_{12}^D=h_{21}^D=\frac{u_{xy}}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_y)^2}},$$

$$h_{22}^D=\frac{u_{yy}}{\sqrt{1+(u_x)^2-(u_y)^2}}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre (4.2.4) formülünden

$$2H^D=\frac{\left[1-(u_y)^2\right]u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+\left[1-(u_x)^2\right]u_{yy}}{\left[1+(u_x)^2-(u_y)^2\right]^{3/2}}$$

elde edilir. M^2 yüzeyinin $D-$minimal olduğunu kabul edelim. $\alpha\neq 0$ olduğundan (4.3.62) formülünden

$$\langle\xi,\mathbf{u}\rangle=0$$

eşitliği ve dolayısıyla

$$au_x+bu_y=c \tag{4.3.63}$$

denklemi bulunur, burada $a^2+b^2\neq 0$ dır. Diğer taraftan $D-$minimallik şartı

$$\left[1-(u_y)^2\right]u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+\left[1-(u_x)^2\right]u_{yy}=0 \tag{4.3.64}$$

denklemini verir. (4.3.64) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 1. $a=0$ olsun. Buna göre (4.3.63) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için

$$u(x,y)=f(x)+\frac{c}{b}y$$

şeklindedir. O zaman (4.3.64) denklemi,

$$\frac{1}{b^2}\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin çözümü

$$f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$$

dir ve dolayısıyla yüzey

$$\varphi(x,y) = (x, 0, \lambda_1 + \lambda_2 x) + \frac{1}{b} y\,(0, b, c)$$

şeklinde parametrize edilir, burada $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dir. Bu ise yüzeyin **u** vektörüne paralel bir düzlem olması anlamına gelir. (4.3.32) denkleminde x ve y simetrik rolde olduklarından, $a \neq 0$ ve $b = 0$ için de aynı sonuç elde edilir.

Durum 2. $ab \neq 0$ olsun. O zaman (4.3.63) denkleminin çözüm fonksiyonu, diferensiyellenebilir bir g fonksiyonu için

$$u\,(x,y) = \frac{c}{a} x + g\left(y - \frac{b}{a} x\right)$$

şeklindedir. Bu durumda (4.3.64) denklemi

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2 g}{d\tilde{y}^2} = 0$$

şeklinde yeniden yazılabilir, burada $\tilde{y} = y - \frac{c}{a} x$ dir. Bu denklemin integrali alındığında

$$g(\tilde{y}) = \lambda_3 + \lambda_4 \tilde{y}$$

olur ve dolayısıyla yüzey

$$\varphi\,(x,\tilde{y}) = \frac{1}{a}\,(a,b,c) + (0, \tilde{y}, \lambda_3 + \lambda_4 \tilde{y})$$

şeklinde parametrize edilir. Bu ise yüzeyin **u** vektörüne paralel bir düzlem olması demektir.

$y = u(x,z)$ ya da $x = u(y,z)$ tipindeki yüzeyler alındığında, Teorem 4.3.7 ye benzer sonuçlar ifade edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bölüm 4.1 de, yatay bir **u** vektörü alınarak; singüler minimal öteleme (hiper)yüzeyler üzerine sonuçlar elde edilmiştir. Dikkat edilmelidir ki, **u** vektörü, $x_{n+1} = 0$ hiperdüzlemine paraleldir; burada hiperyüzey, bir grafiktir. **u** dikey bir vektör olduğunda yani **u**, $x_{n+1} = 0$ hiperdüzlemine dik bir vektör olduğunda, bu grafikler üzerine inceleme hala açık bir problemdir.

Ayrıca bölüm 4.1.3 de çalışılan öteleme grafiği, diferensiyellenebilir $f_1, f_2, ..., g$ fonksiyonları için

$$z(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1) + ... + f_{n-1}(x_{n-1}) + g\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i\right), \quad n \leq 2 \tag{5.1}$$

şeklinde doğrudan yüksek boyutlara genelleştirilebilir. Bu açık bir şekilde, klasik bir öteleme hiperyüzeyinin keyfi boyutlara bir genelleştirilmesidir. **u** vektörünün yatay ya da dikey bir vektör olarak alınması, $\mathbb{R}^{n+1}$ de (5.1) formundaki bir singüler minimal öteleme grafiğinin bulunması için önemli bir problem verir.

Ayrıca bu problemler, keyfi bir **u** vektörü alınarak da göz önünde bulundurulabilir.

Bölüm 4.2 de $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında daldırılmış yüzeylerin singüler minimalliği üzerinde yeni perspektifler ortaya konulmuştur. Bu perspektiflikler, bize $\mathbb{R}^3$ üzerindeki Levi–Civita konneksiyonuna göre elde edilmiş olanlardan farklı ve aşikar olmayan sonuçlar verir. Elde ettiğimiz sonuçlar, yatay bir vektöre göre çıkarılmıştır ve vektör, dikey bir vektör olarak kabul edildiğinde, sonuçlarda büyük bir farklılık oluşmayacaktır.

$\mathbb{R}^3$ de keyfi bir vektöre göre $\nabla-$singüler ve $D-$singüler minimal öteleme yüzeylerinin bulunması problemi hala açıktır.

Bölüm 4.3 de ise, $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^3_1$ de minimal olan singüler minimal yüzeyler incelenmiştir. Genelleştirilmiş silindirler, öteleme yüzeylerin bir alt sınıfına ait olduklarından, Wang (2020) tarafından elde edilmiş olan ∇–minimal öteleme yüzeyler, bazı sonuçlarımızda gösterilmiştir. Ayrıca, ∇–minimal yüzeylerin yeni örnekleri de sunulmuştur ve yarı–simetrik metrik olmayan D konneksiyonu kullanılarak aşikar çözümler elde edilmiştir.

Diğer taraftan $\mathbb{R}^3$ de diferensiyellenebilir bir $u(x,y)$ fonksiyonunun lokal olarak bir M^2 grafik yüzeyi verilmiş olsun ve H ile H^{∇}, sırasıyla, Levi Civita konneksiyonu ile (4.2.1) de verilen ∇ yarı–simetrik metrik konneksiyonuna göre ortalama eğrilikleri göstersin. O zaman aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$H^{\nabla} = H - \langle \xi, (0,0,1) \rangle, \tag{5.2}$$

burada ξ, M^2 üzerinde birim normal vektör alanıdır. Ayrıca, (5.2) denklemi, $u(x,z)$ ve $u(y,z)$ formlarındaki grafikler için de doğrudur. Böylece $\nabla-$minimal grafik yüzeyler, ortalama eğriliği,

$$H = \langle \xi, (0,0,1) \rangle \tag{5.3}$$

şeklindeki denklemi sağlayan *ötelenen solitonlara* dönüşmüş olur. (5.3) denklemi, *ortalama eğrilik akış teorisinde* ve *yoğunluklu manifoldlarda* görülür. Ayrıntılı bilgi için (Hieu ve Hoang, 2009; Huisken ve Sinestrari, 1999; López, 2016, 2018b,c) referanslar listesine bakılabilir. Sonuç olarak, yukarıdaki irdeleme $\nabla-$minimal olan $\nabla-$singüler minimal yüzeylerin, bir silindiriksel ötelenen soliton olduğu anlamına gelir. Bu tür yüzeyler, (Hieu ve Hoang, 2009), (López, 2018b) çalışmalarında göz önünde bulundurulmuştur. Bununla beraber Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2 deki sonuçlarımız, silindiriksel ötelenen solitonlar için yeni örnekler teşkil eder.

KAYNAKLAR

Agashe, N. S., & Chafle, M. R. (1992). A semi–symmetric non metric connection on a Riemannian manifold. *Indian J. Pure Appl. Math.*, *23*, 399–409.

Agashe, N. S., & Chafle, M. R. (1994). On submanifolds of a Riemannian manifold with a semi–symmetric non–metric connection. *Tensor*, *55*(2), 120–130.

Akyol, M. A., & Beyendi, S. (2018). Riemannian submersions endowed with a semi–symmetric non–metric connection. *Konuralp J. Math.*, *6*(1), 188–193.

Aydin, M. E., Erdur, A., & Ergut, M. (2020). Singular minimal surfaces which are minimal. *arXiv preprint arXiv:2011.10110*.

Aydin, M. E., Erdur, A., & Ergüt, M. (2021). Singular minimal translation graphs in Euclidean spaces. *J. Korean Math. Soc.*, *58*(1), 109–122.

Aydin, M. E., & Mihai, A. (2015). Translation hypersurfaces and Tzitzeica translation hypersurfaces of the Euclidean space. *Proc. Rom. Acad. Ser. A*, *16*(4), 477–483.

Belarbi, L., & Belkhelfa, M. (2015). On the minimal surfaces in Euclidean space with density. *Nonlinear Stud.*, *22*(4), 739–749.

Bemelmans, J., & Dierkes, U. (1987). On a singular variational integral with linear growth, i: Existence and regularity of minimizers. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, *100*, 83–103.

Böhme, R., Hildebrandt, S., & Tausch, E. (1980). The two–dimensional analogue of the catenary. *Pacific J. Math.*, *88*(2), 247–278.

Chaubey, S. K., & Yıldız, A. (2019). Riemannian manifolds admitting a new type of semi symmetric nonmetric connection. *Turkish J. Math.*, *43*(4), 1887–1904.

Chen, B.-Y. (1973). *Geometry of submanifolds*. M. Dekker, New York.

Chen, B.-Y. (2011). *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*. World Scientific.

De, U. C., & Barman, A. (2015). On a type of semi–symmetric metric connection on a Riemannian manifold. *Publ. Inst. Math.(Beograd) (N.S)*, *98*, 211–218.

Dierkes, U. (1988). A geometric maximum principle, Plateau's problem for surfaces of prescribed mean curvature, and the two dimensional analogue of the catenary. *Part. Diff. Eq. and Calc. Var.*, *1357*, 116–141.

Dierkes, U. (2003). Singular minimal surfaces. *Geometric analysis and nonlinear partial differential equations*, 177–193.

Dierkes, U., Hildebrandt, S., & Anthony J., T. (2010). *Regularity of minimal surfaces*. Grundlehren Math. Wiss.

Dierkes, U., & Huisken, G. (1990). The $n-$dimensional analogue of the catenary: Existence and nonexistence. *Pacific J. Math.*, *141*(1), 47–54.

Dillen, F., Verstraelen, L., & Zafindratafa, G. (1991). A generalization of the translation surfaces of Scherk. *Diff. Geom. in honor of Radu Rosca (KUL)*, 107–109.

Dillen, F., Van de Woestyne, I., Verstraelen, L., & Walrave, J. T. (1998). The surface of scherk in $\mathbb{E}^3$: A special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N. S.)*, *26*(4), 257–267.

Do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian geometry*. Birkhäuser.

Erdur, A., Evren Aydin, M., & Ergut, M. (2020). Singular minimal translation surfaces in Euclidean spaces endowed with semi–symmetric connections. *arXiv:2010.16139v1*.

Gil, J. B. (2005). The catenary (almost) everywhere. *Boletın de la AMV*, *12*(2), 251–258.

Goemans, W., & Van de Woestyne, I. (2011). Translation and homothetical lightlike hypersurfaces of semi–Euclidean space. *Kuwait J. Sci. Eng.*, *38*(2A), 35–42.

Gray, A. (1998). *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Second Ed. CRC Press.

Güler, F., Saffak, G., & Kasap, E. (2011). Timelike constant angle surfaces in Minkowski space $\mathbb{R}^3_1$. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, *6*(44), 2189–2200.

Hacısalihoğlu, H. H. (1998). *Diferensiyel geometri*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hayden, H. A. (1932). Subspaces of a space with torsion. *Proc. London Math. Soc.*, *2*(1), 27–50.

Hieu, D. T., & Hoang, N. M. (2009). Ruled minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ with density e^z. *Pacific J. Math.*, *243*(2), 277–285.

Huisken, G., & Sinestrari, C. (1999). Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, *8*(1), 1–14.

Imai, T. (1972). Notes on semi–symmetric metric connections. *Tensor*, *24*, 293–296.

Kühnel, W. (2015). *Differential geometry: Curves–surfaces–manifolds*. American Math. Soc.

Lima, B. P., Santos, N. L., & Sousa, P. A. (2019). Generalized translation hypersurfaces in Euclidean space. *J. Math. Anal. Appl.*, *470*(2), 1129–1135.

Liu, H. (1999). Translation surfaces with constant mean curvature in $3-$dimensional spaces. *J. Geom.*, *64*(1-2), 141–149.

Liu, H., & Dal Jung, S. (2017). Affine translation surfaces with constant mean curvature in Euclidean $3-$space. *J. Geom.*, *108*(2), 423–428.

Liu, H., & Yu, Y. (2013). Affine translation surfaces in Euclidean $3-$space. *Proc. Japan Acad.*, *89(A)*, 111–113.

López, R. (2013). *Constant mean curvature surfaces with boundary*. Springer-Verlag, Berlin.

López, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space. *Int. Electron. J. Geom.*, *7*(1), 44–107.

López, R. (2016). Separation of variables in equation of mean curvature type. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, *146*(A), 1017–1035.

López, R. (2018a). Invariant singular minimal surfaces. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, *53*(4), 521–541.

López, R. (2018b). Invariant surfaces in Euclidean space with a log–linear density. *Adv. Math.*, *339*, 285–309.

López, R. (2018c). Some geometric properties of translating solitons in Euclidean space. *J. Geom.*, *109*(40), 1–15.

López, R. (2019). Uniqueness of critical points and maximum principles of the singular minimal surface equation. *J. Differential Equations*, *266*(7), 3927–3941.

López, R. (2020a). Compact singular minimal surfaces with boundary. *Amer. J. Math.*, *142*(6), 1771–1795.

López, R. (2020b). The two–dimensional analogue of the Lorentzian catenary and the Dirichlet problem. *Pacific J. Math.*, *305*(2), 693–719.

López, R., & Moruz, M. (2015). Translation and homothetical surfaces in Euclidean space with constant curvature. *Korean Math. Soc.*, *52*(3), 523–535.

López, R., & Perdomo, Ó. (2017). Minimal translation surfaces in Euclidean space. *J. Geom. Anal.*, *27*(4), 2926–2937.

Martınez, A., & Martınez-Triviño, A. (2020). A Calabi's type correspondence. *Nonlinear Anal.*, *191*, 111637.

Morgan, F. (2005). Manifolds with density. *Notices Amer. Math. Soc.*, *52*(8), 853–858.

Munteanu, M. I., & Nistor, A. I. (2009). A new approach on constant angle surfaces in $\mathbb{E}^3$. *Turkish J. Math.*, *33*(2), 169–178.

Munteanu, M. I., Palmas, O., & Ruiz-Hernández, G. (2016). Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space. *Mediterranean J. Math.*, *13*(5), 2659–2676.

Nakao, Z. (1976). Submanifolds of a Riemannian manifold with semisymmetric metric connections. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *54*(1), 261–266.

Nitsche, J. C. C. (1986). A non–existence theorem for the two–dimensional analogue of the catenary. *Analysis*, *6*, 143–156.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların diferensiyel geometrisi*. Nobel Yayın.

Seo, K. (2013). Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms. *Osaka J. Math.*, *50*(3), 631–641.

Sun, H. (2000). On affine translation surfaces of constant mean curvature. *Kumamoto J. Math.*, *13*, 49–57.

Wang, Y. (2020). Minimal translation surfaces with respect to semi–symmetric connections in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^3_1$. *arXiv preprint arXiv:2003.12682*.

Yano, K. (1970). On semi-symmetric connection. *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.*, *15*, 1579–1586.

Yano, K., & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Series in Pure Math., World Scientific.

Yoon, D. W. (2002). On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski $3-$space. *Taiwanese J. Math.*, *6*, 389–398.

Zaitsev, V. F., & Polyanin, A. D. (2002). *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*. CRC press.