KESİRLİ MERTEBEDEN ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARININ İNCELENMESİ

Gözde ARSLANTAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Gülizar ALİSOY

2021

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARININ İNCELENMESİ

Gözde ARSLANTAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Prof. Dr. Gülizar ALİSOY

TEKİRDAĞ-2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARININ İNCELENMESİ

Gözde ARSLANTAŞ

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gülizar ALİSOY

Yüksek Lisans tez çalışması giriş, klasik ve kesirli matematiksel analizlerin karşılaştırılması, reel eksenin sonlu aralığında kesirli mertebe türev ve integralin özellikleri, Grünwald-Letnikov ve Riemann- Liouville yaklaşımlarının eşdeğerliği, kesirli mertebe ikinci çeşit Volterra denklemi için correct Cauchy probleminin çözümüne ilişkin araştırma bulguları, tartışma ve sonuç ve kaynaklar olmak üzere toplam altı bölümden oluşmaktadır. Tezin giriş kısmında konuya ilişkin literatür özetleri, çalışmanın güncelliği, tez çalışmasının amacı, bu amaca varmak için çözülmesi gereken problemler verilmiştir. İkinci bölümde, kesirli mertebe türevleri ve integralleri tanımlamak ve özelliklerini incelemek ve ayrıca kesirli mertebe türevleri ihtiva eden diferansiyel denklemleri incelemek için kuramsal temeller verilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli mertebe türev ve integral hesabında yaygın olarak kullanılan ve Euler fonksiyonları olarak bilinen Gamma ve Beta fonksiyonları tanımlanmış ve onlar arasındaki ilişki özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde, kesirli mertebe matematikte kullanılan Riemann-Liouville, Grünvald-Letnikov, Caputo yaklaşımları verilmiş ve bu yaklaşımlar yardımıyla kesirli mertebe türev ve integralin hesaplanmasına ilişkin bazı örnekler verilmiştir. Beşinci bölümde öncelikli olarak, kesirli mertebe diferansiyel denklemlerle ikinci çeşit Volterra integral denklemi arasındaki ilişki belirlenmiş ve daha sonra ise sürekli ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayında gerçel eksenin sonlu aralığında kesirli mertebe bayağı diferansiyel denklemler için Cauchy tipi problemin çözümünün varlığı ve tekliği verilmiştir. Tezin altıncı bölümde ise tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Gamma ve Beta fonksiyonları, Riemann-Liouville kesirli türevi, Grünvald-Letnikov kesirli türevi, Caputo kesirli türevi, Cauchy problemi

2021, 68 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

INVESTIGATION Of SOME BASİC CONCEPTS Of FRACTIONAL ORDER ANALYSIS

Gözde ARSLANTAŞ

Tekirdağ Namık Kemal University

Science Institute

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gülizar ALISOY

This master's thesis includes the main material, consisting of an introduction and four chapters, conclusions and a list of used literature sources. The introductory part of the work provides information from the literature related to the subject of the study, the relevance of the study, the purpose of the study and the tasks that need to be solved to achieve this goal. The second chapter provides a theoretical basis for the definition of derivatives and integrals of fractional order and for the study of their properties, as well as for the study of differential equations containing derivatives of fractional order. The third chapter defines the gamma and beta functions, which are commonly used in the calculus of fractional derivatives and integral calculus, and are known as the Euler functions, and presents their relationship properties. In the fourth chapter, the Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo approximations used in fractional-order mathematics are given, and some examples of calculating the derivatives and the fractional-order integral using these approaches are given. In the fifth chapter, firstly, the connection between differential equations of fractional order and the Volterra integral equation of the second kind is determined, and then the existence and uniqueness of the solution of the Cauchy-type problem for ordinary differential equations of fractional order in a finite range of the real axis. The sixth chapter of the thesis provides a discussion and results.

Keywords: Gamma and Beta functions, Riemann-Liouville fractional derivative, Grünvald-Letnikov fractional derivative, Caputo fractional derivative, Cauchy problem

2021, 68 pages

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

L_p	: p dereceden integrallenebilir fonksiyon sınıfı
$L_p(\Omega)$	: Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesi
$AC(\Omega)$	: Mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$C_\gamma[a,b]$	: Sürekli fonksiyonların ağırlık uzayı
(U,d)	: Boş olmayan tam metrik uzay
$\Gamma(z)$	: Gamma fonksiyonu
$B(m,n)$	: Beta fonksiyonu
$\frac{d}{dt}=D$	: Tam sayı mertebe türev operatörü
${}_aD_t^\alpha$	: Kesirli mertebe integro- diferansiyel operatörü
$I_{a^+}^\alpha f(x)$	: α. Mertebeden sol Riemann- Liouville kesirli integrali
$I_{a^-}^\alpha f(x)$	: α. Mertebeden sağ Riemann- Liouville kesirli integrali
$[\alpha]$	: α sayısının tam kısmı
$\{\alpha\}$	: α sayısının kesir kısmı
$L\{f(t)\}=F(s)$	: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace integral dönüşümü
γ	: Euler- Mascheroni sabiti

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden fazlasıyla yararlandığım, yüksek lisans konusunda beni yetiştiren ve bu tezin oluşturulmasında bana en önemli desteği veren sayın hocam Prof. Dr. Gülizar ALİSOY' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde değerli görüşlerini esirgemeyen Namık Kemal Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ve öğrenimim süresince hep yanımda olan, sabırla sıkıntılarımı çeken ve benden hiçbir yardımını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Haziran, 2021 Gözde ARSLANTAŞ

1. GİRİŞ

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli türev ve integral, teknolojinin hızlı gelişimine bağlı olarak geniş kullanım spektrumuna sahiptir. Adından da anlaşılacağı üzere kesirli diferansiyel hesap, türev ve integralin tam sayı olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş şeklidir [1-15].

Kesirli mertebe analizin klasik analizden en önemli farkı, klasik analizde olduğu gibi tek bir türev tanımının olmayışıdır. Dolayısıyla, kesirli mertebe analizdeki farklı türev tanımlarının varlığı ve problemin tanımlanma biçimine en uygun olanının kullanılması, problemin en iyi çözümünün elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Kesirli mertebe analizde ağırlıklı olarak kullanılan türev tanımları, Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türev tanımlarıdır. Hatırlayalım ki, periyodik süreçlerin incelenmesinde Fourier kesirli türev tanımı daha iyi sonuçlar verir [3]. Bu tanımlar arasında belirli koşullarda geçişler olmasına rağmen tanımlar ve tanımların fiziksel yorumları açısından belirli farklılığa sahiptirler.

Sonuç olarak matematiksel analizin bu bölümünün, sıradan ve fraktal ortamlardaki en karmaşık dinamik süreçlerin matematiksel modellemesi için bir araç haline geldiğini söyleyebiliriz. Dolayısıyla, matematiksel analizin bu bölümü, yeni bir temelde analiz, sentez, tanımlama, teşhis ve yeni kontrol sistemlerinin yaratılmasında en çeşitli sorunları çözmemize olanak tanımaktadır. Bu durum ise incelenen tez konusunun güncel bir konu olduğunu göstermektedir.

Tezin temel amacı, kesirli mertebe analizin temel kavramlarından hareketle Grünwald-Letnikov ve Riemann- Liouville yaklaşımlarının eşdeğerliğinin incelenmesi ve kesirli mertebe ikinci çeşit Volterra denklemi için Cauchy probleminin çözümünü göstermektir.

Tezde belirlenen amaca varmak için aşağıdaki problemler ele alınmıştır;

- ✓ Fonksiyonel analizin bazı temel kavramları
- ✓ Klasik ve kesirli matematiksel analizlerin karşılaştırılması ve $[a, b] \in \mathbb{R}$ aralığında kesirli mertebe türev ve integralin özellikleri
- ✓ Grünwald-Letnikov ve Riemann- Liouville yaklaşımlarının eşdeğerliği
- ✓ Kesirli mertebe ikinci çeşit Volterra denklemi için correct Cauchy problemi

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Kesirli-mertebe türevlere ilişkin ilk yaklaşım J.Bernoulli ve G.Leibniz'in çalışmalarında bulunur [2-9].

G.Leibniz 1695 yılında G.Lopital'e yazdığı bir mektuba göre, ½ mertebe türev işlemlerinde farklılıklar olasılığını tartışmıştır ve bunun bir gün faydalı sonuçları ortaya çıkaracağının açıkça görülen bir paradoks olduğunu belirtmiştir.

Leibniz'in kesirli mertebe türevler üzerine ortaya attığı bu soru, günümüze kadar olan süreçlerde üzerinde çalışılan ve ortaya konulan tanımlarla geliştirilen önemli bir konu olmuştur. Leibniz'in yanı sıra Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Heaviside, Laplace, Lagrange, Euler, Grünwald, Hardy, Sigmund, Courant ve Leitnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çok önemli çalışmalar yapmıştır [8-15].

18.yüzyılda, kesirli mertebeli matematiğe olan ilgi yok sayılacak kadar olup, konuya ilişkin Euler ve Lagrange isimleriyle ilgili sadece birkaç yayın bilinmektedir. Tüm XIX yüzyılı ve XX in ilk yarısı, sonuçların biriktirildiği ve matematiksel analizin bağımsız bir bölümü olarak kesirli-mertebe hesabın oluşum dönemiydi. Laplace, Foruier, Abel, Liouville, Riemann, Heaviside, Grünwald, Hardy, Sigmund, Courant, Leitnikov vb. ünlü matematikçilerin, mekanik ve fizikçilerin kesirli- mertebeli integral-diferansiyel konularında bilinen yayınları vardır.

Ünlü Rus matematikçi Moskova Matematik Derneği Başkanı A.V. Leitnikov, kesirli-mertebe matematiksel analizinin geliştirilmesine büyük katkı sağlamıştır. Onun doktora tezi ve çalışmaları [2-6], kesirli-mertebe türev teorisine, kesirli-mertebe matematiğin tarihsel gelişimine, kesirli hesap teorisinin integral hesabına uygulanması ve diferansiyel denklemlerin çözümüne ayrılmıştır.

A.V. Leitnikov' un kesirli analizde ilk yayınları 1868' den 1872' ye uzanmaktadır. Bilimsel topluluğun kesirli-mertebe hesaplara ilgisinde yeni bir yükseliş 1974 yılında "The Fractional Calculus" kitabının yayınlanmasından sonra ortaya çıkmıştır. Bu kitapta, kesirli analiz teorisi sistematik olarak incelenmiş ve bu teorinin farklı uygulama alanları ortaya konulmuştur [2].

Günümüzde, kesirli-mertebe matematik ve onun farklı alanlara uygulanmasına ilişkin çok sayıda bilimsel, teknik konferans ve seminerler [1-5] yapılmakta olup, çeşitli özel dergiler düzenlenmektedir [2-5]. Kesirli-mertebe analizin, çeşitli bilim, teknoloji ve doğa bilimleri alanlarındaki uygulamalarına adanmış birbirinden farklı dergilerin tematik konuları ortaya çıkmaktadır [9].

Kesirli-mertebe matematiksel analize ilişkin Ref. [2,6,9]' da ki çok sayıda mükemmel değerlendirme çalışmaları yer almaktadır. Özellikle, Ref. [4]' te B. Ross tarafından derlenen açıklamalı kronolojik bibliyografya ve ayrıca kesirli-mertebe matematiksel analize ilişkin son derece önemli bilgilerin yer aldığı [2-11] kaynak bilgilerinin çok faydalı olacağı düşünülmektedir.

Günümüz koşullarında S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, M. Al-Bassam, R. Bagley, Y.A. Brychkov, L.M.B.C. Campos, R. Gorenflo, J.M.C. Joshi, S. Kalla, E.R. Love, M. Mikolas, K. Nishimoto, S. Owa, A.P. Prudnikov, B. Ross, S. Samko ve H.M. Srivastava, A.M. Nahushev, R. Nigmatulin, Uchaykin, Chen ünlü bilim insanları tarafından kesirli hesap ve uygulamaları konusunda teferruatlı bilgiler içeren çok sayıda yayınlar yapmış ve dinamik bir biçimde yeni uygulamalar içeren değişik yayınlar yapılmaktadır [1-7].

Başka bir değişle şu anda, kesirli matematik hem teorik hem de pratik uygulanma açısından hızlı gelişme sürecindedir [15-18].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Temel Kavramları

Burada öncelikle, kesirli mertebe türevleri ve integralleri tanımlamak ve özelliklerini incelemek ve ayrıca kesirli mertebe türevleri ihtiva eden diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili problemi incelemek için ihtiyaç duyacağımız bazı kavram ve tanımlamaları vereceğiz. Hatırlayalım ki bu tanım ve kavramlar ayrıntılı bir biçimde [19,20]' de verilmiştir.

Bu tez çalışmasında genel olarak $\mathbb{R}$- ile gerçek sayılar kümesini ve $\mathbb{C}$- ile karmaşık sayılar kümesini göstereceğiz. Diğer bir husus ise, tez çalışmasında ele alınan kümelerin ve fonksiyonların, ayrıca olarak belirtilmeden ölçülebilir olduğu ve fonksiyonların hemen her yerde sonlu olduğu kabul edilmiştir.

3.1.1. Metrik Uzaylar Banach Teoremi

Matematiksel analizin en önemli işlemlerinden biri de limite geçiş işlemidir. Bu limit işlemin temeli, bir sayı ekseni üzerinde bir noktadan diğerine olan uzaklığın tanımlanmış olmasına dayanır. Birçok temel analiz olgusu, gerçek sayıların cebirsel doğasıyla (bir alan oluşturma gerçeği) ilgili değildir, ancak yalnızca "uzaklık" kavramına dayanır. Gerçek sayılar kavramını, öğeler arasındaki uzaklığın tanımlandığı bir küme olarak özetleyerek, modern matematiğin en önemli kavramlarından birine "metrik uzay" kavramına geçmiş oluruz.

Tanım 3.1.1.1. [20] Boş olmayan bir X kümesi ve

$$\mathrm{d} : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}_{+}, (\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \tag{3.1}$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ dönüşümü $\forall\, \mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in \mathrm{X}$ için aşağıda tanımlanan üç aksiyomu sağlıyorsa

- $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$
- $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{d}(\mathrm{y},\mathrm{x})$
- $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{z}) + \mathrm{d}(\mathrm{z},\mathrm{y})$

$d(x, y)$ fonksiyonuna X üzerinde uzaklık fonksiyonu veya metrik denir. (X, d)- ikilisine bir metrik uzay denir. Metrik uzayı $R = (X, d)$ biçiminde işaretleyeceğiz.

Matematiksel analizin incelenmesinin ilk aşamalarından itibaren, reel sayılar kümesinin tamlığının analizde ne kadar önemli bir role sahip olduğunu görüyoruz. Bir başka değişle, reel sayıların her temel dizisi belirli bir limite yakınsamaktadır. Dolayısıyla reel sayılar kümesi, en basit bir tam metrik uzaydır.

Hatırlayalım ki bir R- metrik uzayının noktalarından oluşan $\{x_n\}$ dizisinin bir temel dizi olması için onun Cauchy ölçütünü (kriterini) karşılaması gerekir. Yani; herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir N_ε sayısı vardır ki keyfi $x_{n'} > N_\varepsilon$ ve $x_{n''} > N_\varepsilon$ için $d(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ doğrudur.

Tanım 3.1.1.2. [20] Bir (X, d) metrik uzaydaki her Cauchy dizisi X- içinde bir limite sahipse, bu (X, d)- metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Önce "sabit nokta" tanımını hatırlayarak, tam metrik uzay için ispatsız olarak klasik Banach sabit nokta teoremini verelim.

Tanım 3.1.1.3. Eğer $Ax = x$ ise x noktasına A dönüşümünün sabit noktası denir. Başka bir deyişle, sabit noktalar $Ax = x$ denkleminin çözümleridir.

Şimdi ise ispatsız olarak Banach sabit nokta teoremini verelim. Hatırlayalım ki bu teoremin ispatı Ref. [20]' da verilmiştir.

Teorem 3.1.1.4. [20] Varsayalım ki (U, d) boş olmayan tam metrik bir uzay olsun. Ayrıca, $T : U \to U$ öyle bir dönüşümdür ki keyfi $u, v \in U$ için

$$d(Tu, Tv) \leq \omega d(u, v), \quad 0 \leq \omega < 1 \tag{3.2}$$

T operatörünün tek bir sabit $u^* \in U$ noktası vardır. Ayrıca eğer $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere T^k aşağıdaki biçimde belirlenmiş bir operatör ise;

$T^1 = T$, $T^k = T \cdot T^{k-1}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

keyfi $u_0 \in U$ için $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi sabit noktaya yakınsar.

(3.2) ifadesi ile tanımlanan teorem kasılma veya büzülme (contraction mapping) dönüşümü olarakta bilinir.

Banach sabit nokta teoremi genelde, değişik tip denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliğinin ispatı için kullanılır. Bunun yanı sıra, sabit nokta teoremi değişik tip denklemlerin çözümlerinin yaklaşık belirlenme yöntemlerine olanak sağlamaktadır. Bu tez çalışmasının beşinci bölümünde kesirli mertebe ikinci çeşit Volterra denklemi için tanımlanan correct problemin çözümünde Banach sabit nokta teoreminden yararlanacağız.

3.1.2. Hölder Fonksiyonu ve Mutlak Sürekli Fonksiyonlar Sınıfı

Bu paragrafta öncelikli olarak Hölder'in yerel ve global koşulları ve daha sonra ise mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfına ilişkin bazı tanımlar verilecektir. $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $\Omega = [a, b]$ reel eksen üzerinde kapalı bir aralık olsun.

Tanım 3.1.2.1. A bir sabit ve η bir gösterge (Hölder göstergesi) olmak üzere tüm $x_1, x_2 \in \Omega$ için $f(x)$ fonksiyonu Ω üzerinde

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq A|x_2 - x_1|^{\eta} \tag{3.3}$$

Hölder koşulunu sağlar.

Tanım 3.1.2.2. Ω üzerinde η - sabit göstergeli Hölder koşulunu sağlayan tüm fonksiyonlar sınıfı $H^{\eta} = H^{\eta}(\Omega)$ biçiminde gösterilir.

$\eta > 1$ olması durumunda $H^{\eta}(\Omega)$ sınıfı sadece $f(x) = \text{sabit}$ kapsar.

$$|f'(x)| = \left|\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leq A \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_2 - x_1|^{\eta}}{|x_2 - x_1|} \leq A|x_2 - x_1|^{\eta - 1} = 0 \tag{3.4}$$

Elde edilen bu sonuçtan hareketle $H^{\eta}(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfının $0 < \eta < 1$ için daha anlamlı olduğunu görmekteyiz. $\eta = 1$ için $H^{\eta}(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfı Lipschitz fonksiyonlar sınıfıdır.

Şimdi ise $H^1(\Omega)$ Lipschitz fonksiyonlar sınıfından daha geniş olan $AC(\Omega)$ mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfını tanımlayalım.

Tanım 3.1.2.3. Eğer keyfi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $k = 1,2, \dots, n$ ve $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ olmak üzere keyfi sonlu çift çift ayrık $[a_k, b_k] \subset \Omega$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{3.5}$$

eşitsizliği doğrudur. O halde $f(x)$ fonksiyonuna Ω aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı $AC(\Omega)$ biçiminde gösterilir. Hatırlayalım ki $AC(\Omega)$ mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfının, Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlarının antiderivatif sınıfına denk geldiği bilinmektedir. Yani;

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \tag{3.6}$$

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \qquad \varphi(t) = f'(t)$$

Tanım 3.1.2.4. $n = 1,2, \dots,$ olmak üzere, $AC^n(\Omega)$ $f(x)$ fonksiyonunun Ω üzerinde $n - 1$ mertebe diferansiyele sahip sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun.

$$f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$$

$$AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$$

olacağı açıktır ve $AC^n(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfının kapsadığı fonksiyonlar aşağıdaki gibi belirlenecektir.

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=o}^{n-1} C_k(x-a)^k + \int_a^x dt \dots \int_a^x dt \int_a^x \varphi(t)dt \tag{3.7}$$

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \qquad \varphi(t) = f^{(n)}(t), \qquad C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Eğer Ω bir eksen veya yarım ekseni temsil ederse bu durumda $H^{\eta}(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfının belirlenmesinde f(x) fonksiyonunun sonsuz uzaklıkta alınan noktanın yakın civarındaki davranışı da dikkate alınmalıdır. Bir başka deyişle, mutlak değerce yeterince büyük değerlere sahip tüm x_1 , x_2 için f(x) fonksiyonu Hölder koşulunu sağlamalıdır;

$$\left|f\left(\frac{1}{x_1}\right) - f\left(\frac{1}{x_2}\right)\right| \leq A\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|^{\eta} \tag{3.8}$$

Tanım 3.1.2.5. Varsayalım ki Ω- bir eksen veya yarım ekseni temsil etmektedir. Bu taktirde $H^{\eta} = H^{\eta}(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfı Ω üzerindeki keyfi sonlu aralıkta (3.3) ifadesi ile tanımlanan Hölder koşulunu ve (3.8) ifadesi ile tanımlanan sonsuz uzaklıkta alınan noktanın yakın civarındaki Hölder koşulunu sağlar. Eğer $H^{\eta}(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfı için (3.3) ve (3.8) ifadeleri ile tanımlanan Hölder koşulları tek bir koşul biçiminde ifade edilirse aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq A\frac{|x_2 - x_1|^{\eta}}{(1 + |x_1|)^{\eta}(1 + |x_2|)^{\eta}} \tag{3.9}$$

Bu ifade "global Hölder koşulu" olarak bilinir.

3.1.3. Lp - Sınıfı ve Onun Bazı Özellikleri

Burada öncelikli olarak p dereceden integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı ve bu fonksiyonlar sınıfından olan fonksiyonlar için bazı teorem ve eşitsizlikler verilecektir [19]. $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere $\Omega \in [a, b]$ olsun.

Tanım 3.1.3.1. [20] Ω üzerinde ölçülebilir f(x) fonksiyonlar kümesi $L_p = L_p(\Omega)$ biçiminde işaretlenir ve bu durumda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{3.10}$$

Ayrıca $f(x)$ fonksiyonunun $L_p(\Omega)$ üzerindeki normu;

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.11}$$

Sıfır ölçüme sahip kümede farklılık gösteren iki fonksiyon $L_p(\Omega)$ uzayının elemanları gibi farklılık göstermezler.

$f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_p(\Omega)$ fonksiyonları için;

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \tag{3.12}$$

Minkowski eşitsizliği doğrudur. Burada $L_p(\Omega)$ uzayı normlu uzaydır.

Eğer $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_{p'}(\Omega)$ ise;

$p' = \frac{p}{p-1}$

olmak üzere Hölder eşitsizliği doğrudur. Yani;

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L'_p(\Omega)} \tag{3.13}$$

Burada $L_p(\Omega)$ uzayı tam uzaydır.

Tez çalışmasının ileriki aşamalarında ihtiyaç duyacağımız bir diğer teorem de katlı integrallerde integralleme sırasını değiştirmeye olanak sağlayan Fubini teoremidir.

Teorem 3.1.3.2. [19] $\Omega_1 = [a,b], \Omega_2 = [c,d], -\infty \leq a < b \leq \infty, -\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x,y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzerinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)dy$, $\int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)dx$, $\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)dxdy$ integrallerinden en az biri (mutlak) yakınsarsa, bu üç integral aynıdır.

$$\int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx \tag{3.14}$$

formülüne Fubini teoreminin özel durumu veya Dirichlet formülü denir [7]. Ayrıca bu durumda genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği doğrudur.

$$\left(\int\limits_{\Omega_1} dx \left|\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.15}$$

3.2. Özel Foksiyonlar ve Euler İntegralleri

Burada öncelikli olarak elementer ve özel fonksiyon kavramlarını hatırlayalım. Bilindiği üzere; c- bir sabit olmak üzere $f(x) = c$ sabit fonksiyonu, x^n- kuvvet fonksiyonu, $0 < a,\ a \neq 1$ olmak üzere a^x- üstel fonksiyonu, $\log_a x$ - logaritma fonksiyonu, trigonometrik fonksiyonlar $(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)$, ve ters trigonometrik fonksiyonlar $(\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x)$ basit elementer fonksiyonlar olarak adlandırılır. Basit elementer fonksiyonlar üzerinde yapılan sonlu sayıda aritmetik işlemler ve süperpozisyonlar sonucu elde edilen fonksiyonlar elementer fonksiyonlar olarak tanımlanır. Elementer fonksiyonlar cinsinden ifade olunamayan fonksiyonlara ise özel fonksiyonlar denir. Özel fonksiyonlar seri ve integral biçiminde temsil edilir. Özel fonksiyonlara örnek olarak, hipergeometrik, küresel, silindirik, fonksiyonlar, Airy fonksiyonu, beta ve gamma fonksiyonları, integral sinüs, integral kosinüs ve eliptik fonksiyonlar vb. gösterilebilir

Kesirli matematiksel analizde, iyi bilinen ve genel olarak klasik matematiksel analizde kullanılan üstel (exponential) fonksiyonlar ve faktöriyeller için kullanılan bir genelleme olan fonksiyonlar bulunur. Bu fonksiyonları göz önünde bulundurarak, klasik ve kesirli matematiksel analizleri karşılaştıralım.

Özel bir fonksiyon sınıfı, sadece biçimsel bir değişkene değil, aynı zamanda parametreye de bağlı olan öz veya genelleştirilmiş integral biçiminde gösterilebilir. Bu tür fonksiyonlara parametreye bağlı integraller denir. Euler fonksiyonları olarak bilinen gamma ve beta fonksiyonları bu tür fonksiyonlardır [9-12].

Beta fonksiyonları, birinci çeşit Euler integraliyle temsil edilir;

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \qquad (\mathrm{Re}(a) > 0, \mathrm{Re}(b) > 0)$$

Gamma fonksiyonu ise ikinci çeşit Euler integrali ile temsil edilir;

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx, \qquad (\mathrm{Re}(x) > 0, x - \text{ keyfi kompleks sayı})$$

Gamma fonksiyonu, birçok başka özel fonksiyonların (örneğin; silindirik, hipergeometrik) incelenmesi için gerekli olan, basit ve en önemli özel fonksiyonlardan biridir.

Gamma fonksiyonunun dikkate alınması ile, bazı integralleri hesaplamadaki olanaklarımız büyük ölçüde genişletilmiştir.

Euler integralleri iyi çalışılmış temel olmayan (non-elementary) fonksiyonlardır. Eğer bir problem Euler integrallerinin hesaplanmasına indirgenirse, bu takdirde problem çözülmüş sayılır.

3.2.1. Gamma Fonksiyonu

$x \in \mathbb{C}$ ve $x > 0$ olmak üzere;

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \qquad (3.16)$$

Euler integraliyle ile tanımlanmış fonksiyona Gamma fonksiyonu denir [13,19,25].

Gamma fonksiyonunun tanım kümesi sıfır dahil olmamak üzere sıfırdan büyük bütün gerçel sayılardır.

Gamma fonksiyonu özel bir fonksiyon olup kesirli mertebeden türev ve integralin oluşturulmasında ciddi rol oynamıştır. Basitçe ifade edilir ise, faktöriyelin tüm reel sayıya genişletilmesidir.

$x = 1$ için;

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{3.17}$$

Eğer (3.16) ifadesinin kısmi integrasyonu yapılırsa;

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t} t^{x} dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \text{veya} \qquad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \tag{3.18}$$

elde ederiz. Bu eşitlik Gamma fonksiyonunun temel özelliklerini ifade etmektedir.

(3.17) ve (3.18) ifadelerinden hareketle;

$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!$

$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!$

yazabiliriz. Genel olarak $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğu bilinmektedir.

Eğer;

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

eşitliğinde $x = t^{1/2}$ değişken değiştirmesi yaparsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \sqrt{\pi}$$

Bu eşitlik (3.16) ifadesi ile tanımlanan Gamma fonksiyonu dikkate alınarak şöyle yazılabilir;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Bu sonucun ve Gamma fonksiyonunun temel özelliklerini ifade eden (3.18) eşitliğinin dikkate alınmasıyla;

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad (3.19)$$

biçiminde yazabiliriz.

Gamma fonksiyonu için aşağıdaki özellikler de geçerlidir:

- $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$
- $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\pi^{1/2}\Gamma(2x)$
- $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx)$

Gamma fonksiyonu için Weierstrass tanımlama formülü şöyledir;

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\} \qquad (3.20)$$

Burada γ – Euler sabiti olup aşağıdaki gibi belirlenir;

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0{,}57721\cdots$$

(3.20) ifadesinden de görüldüğü üzere $\Gamma(x)$ fonksiyonu $z=0,\ z=-1,\ z=-2,\cdots$, basit kutup noktalarının dışındaki tüm noktalarda analitiktir.

Gamma fonksiyonu için (3.20) ifadesinden hareketle türetilen Euler formülü ise şöyledir;

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\} \qquad (3.21)$$

3.2.2. Beta Fonksiyonu

$\mathrm{m, n} \in \mathbb{C}, \mathrm{Re(m)} > 0, \mathrm{Re(n)} > 0$ olmak üzere;

$$\mathrm{B(m, n)} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad (3.22)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir ve gamma fonksiyonu gibi bir Euler integralidir [13,19,25].

3.2.3. Gamma ve Beta Fonksiyonları Arasındaki İlişki

Eğer (3.22) ifadesi ile tanımlanan Beta fonksiyonu için $\mathrm{Re(m)} \leq 0, \mathrm{Re(n)} \leq 0$ ise Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki bağıntı aşağıdaki biçimde belirlenir;

$$\mathrm{B(m, n)} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \mathrm{B(n, m)} \qquad (3.23)$$

(3.23) bağıntısından Gamma fonksiyonunun üç değerini bulup hesaplamak yerine Beta fonksiyonunun tek bir değerini bulup hesaplamak daha kolaylık sağlar. Bu yüzden Beta fonksiyonunu kullanmayı tercih ederiz. Ayrıca (3.23) bağıntısı ile Beta fonksiyonunun simetri özelliği olduğu açıktır [19].

3.3. Kesirli Mertebe Türev ve İntegrale İlişkin Bazı Tanımlar ve Özellikler

Kesirli mertebeli matematik, temel tam sayı mertebeli türev operatörü $\frac{d}{dt} = \mathrm{D}$'nin genelleştirilmiş halidir [4-6].

Kesirli mertebeli integro-diferansiyel operatörün genel hali;

$${}_a\mathrm{D}_t^{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}}{d^{\alpha}t}, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \displaystyle\int_a^t (dt)^{\alpha}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Burada sistemin türev veya integral operatörü olarak kullanılması α'nın alacağı değere bağlıdır. $\alpha < 0$ için sistemin integrali , $\alpha > 0$ için ise sistemin türevi alınmaktadır.

Kesirli mertebeli sistemin matematiksel olarak çözümünde genel olarak üç yaklaşım yöntemi kullanılmaktadır [3-8];

1. Riemann-Liouville Yaklaşımı
2. Grünwald-Leitnikov Yaklaşımı
3. Caputo Yaklaşımı

3.3.1. Riemann - Liouville Yaklaşımı

Burada öncelikli olarak katlı integral gösteriminden hareketle Riemann-Liouville kesirli integralini ve daha sonra ise bu işlemin tersi olan Riemann-Liouville kesirli türevini tanımlayacağız.

Bilindiği üzere [19-25] n- katlı integral için aşağıdaki formül geçerlidir;

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx \cdots}_{n} \int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt \tag{3.24}$$

Bu eşitlik dikkate alınarak (3.7) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=o}^{n-1} C_k (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt \tag{3.25}$$

$$\int_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \qquad \varphi(t) = f^{(n)}(t), \qquad C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Eğer $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğu dikkate alınırsa (3.24) ifadesinin sağ tarafının n'nin tam olmayan sayılar için de bir anlama sahip olacağı açıktır. Bu husus dikkate alınarak kesirli mertebe integral aşağıdaki biçimde belirlenecektir.

Tanım 3.3.1.1. $\alpha > 0$ ve $f(x) \in L_1(a,b)$ olmak üzere α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibidir [3-8];

$$I_{a^+}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad (x > a) \tag{3.26}$$

$$I_{b^-}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad (x < b) \tag{3.27}$$

$\alpha = 0$ olması durumunda ise $I_{a^+}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x)$ olacaktır.

Özellik 3.3.1.2. $\varphi \in C_\gamma, \alpha > 0, \beta > 0, a \geq 0, \gamma > -1$ olmak üzere;

- $\left(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta}\varphi\right)(x) = \left(I_{a^+}^{\alpha+\beta}\varphi\right)(x)$
- $\left(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta}\varphi\right)(x) = \left(I_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha}\varphi\right)(x)$
- $I_{a^+}^{\alpha}x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}x^{\alpha+\gamma}$

bağıntıları Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleridir [9,11].

Özellik 3.3.1.3. $f, t > 0$ reel değişkenli ve kompleks değerli bir fonksiyon olsun. L ile gösterilen ve

$$L\{f(t)\} = F(s) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varepsilon}^{T} f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\,, 0 < \varepsilon < T$$

şeklindeki dönüşüme f(t)'nin Laplace Dönüşümü denir [13,19]. $s = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$ biçiminde kompleks değişkendir. Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü $\alpha > 0$ olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlanır [3,4];

$$L\left\{\frac{d^{\alpha}f(t)}{dt^{\alpha}}; s\right\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{\alpha-k-1}f(t)}{dt^{\alpha-k-1}}\right]_{t=0}\,, (n-1 \leq \alpha < n)$$

Şimdi ise kesirli mertebe integral operatörleri için $\left(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} \varphi\right)(x) = \left(I_{a^+}^{\alpha+\beta} \varphi\right)(x)$ yarı grup özelliğinin karşılandığını gösterelim. Bu amaçla öncelikli olarak;

$$
\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} \varphi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a^+}^{\beta} \varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca Fubini teoreminin özel durumu için [19,20] Dirichlet formülü aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$
\int_a^b dx \int_a^x f(x,y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y) dx \tag{3.29}
$$

Eğer (3.28) ifadesine Dirichlet formülünü ve $t = \tau + s(x-\tau)$ değişken değiştirmesi uygulursak aşağıdaki sonuca ulaşırız;

$$
\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} \varphi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \varphi(\tau) d\tau \int_\tau^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} d\tau \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}} \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} \varphi
\end{aligned}
$$

Böylece kesirli mertebe Riemann-Liouville integral operatörü için yarı grup özelliğinin karşılandığı gösterilmiştir. Kesirli mertebe Riemann-Liouville integral operatörünün sınırlı olduğunu ifade eden Lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.3.1.4. $I_{a^+}^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$ kesirli integral operatörü $L(a,b)$ de sınırlıdır. Yani;

$$\left\|I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha|\Gamma(\alpha)|} \|f\|_{L_1(a,b)} \tag{3.30}$$

İspat : Dirichlet formülünden yararlanırsak;

$$\begin{aligned}\left\|I_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{L(a,b)} &= \int_a^b \left|I_{a^+}^{\alpha} f(x)\right| dx = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int_a^b dx \left|\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt\right| \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int_a^b dx \int_a^x \frac{|f(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\ &= \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\int_a^b |f(t)| dt \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}\int_a^b |f(t)|(b-t)^{\alpha} dt \\ &\leq \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}\int_a^b |f(t)| dt = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha|\Gamma(\alpha)|}\|f\|_{L_1(a,b)}\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Böylece Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün sınırlı olduğu ispatlanmıştır. Şimdi ise Riemann-Liouville kesirli mertebe türevini belirleyelim.

Tanım 3.3.1.5. $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m = [\alpha]$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun α-mertebeli Riemann-Liouville kesirli türevi Riemann-Liouville kesirli integral operatörü yardımıyla tanımlanır [5]. f fonksiyonunun α-mertebeli Riemann-Liouville kesirli türev tanımı aşağıdaki gibi verilir;

$$\widehat{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = D^m\left[I_{a^+}^{m-\alpha} f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)\, dt\right] \tag{3.31}$$

Tanım 3.3.1.6. $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m = [\alpha]$ olmak üzere modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi aşağıdaki gibi verilir [7];

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^x (x-\xi)^{m-\alpha-1} \big(f(\xi) - f(0)\big) d\xi \tag{3.32}$$

Modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevinin bazı özellikleri ($0 < \alpha \leq 1$) [7];

- Kesirli leibniz çarpım kanunu:

$$D_x^\alpha (uv) = u^\alpha v + uv^\alpha \tag{3.33}$$

- Kesirli leibniz formülü:

$$_aI_b^\alpha u^\alpha v = (uv)|_a^b - a{I_b^\alpha} uv^\alpha \tag{3.34}$$

- $(dx)^\alpha$ ya göre integrasyon için

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x f(\xi) d\xi^\alpha \tag{3.35}$$

Tanım 3.3.1.7. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere f, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı integrallenebilir bir fonksiyonun α. mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [3-11];

$$D_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha} \tag{3.36}$$

$$D_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^\alpha} \tag{3.37}$$

Lemma 3.3.1.8. $0 < \alpha < 1$ olsun. Eğer $f(x) \in AC \subset [a,b]$ ise $f(x)$ fonksiyonu hemen hemen her yerde,

$$D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} - \int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \right] \tag{3.38}$$

$$D_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \right] \tag{3.39}$$

biçiminde $D_{a^+}^{\alpha} f(x) \in L_1(a,b)$ ve $D_{b^-}^{\alpha} f(x) \in L_1(a,b)$ türevine sahiptir.

İspat: $D_{a^+}^{\alpha} f \in L_1(a,b)$ olduğunu gösterelim. Yani;

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left| D_{a^+}^{\alpha} f(x) \right| dx &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left| \frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f^{'}(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \right| dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^b dx \int_a^x \frac{\left|f^{'}(t)\right| dt}{(x-t)^{\alpha}} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{|f(a)|(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_a^b \left|f^{'}(t)\right| dt \int_t^b \frac{dx}{(x-t)^{\alpha}} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[|f(a)|(b-a)^{1-\alpha} + \int_a^b \left|f^{'}(t)\right| (b-t)^{1-\alpha} dt \right]
\end{aligned}$$

$\left|f^{'}(t)\right|$ ve $(b-t)^{1-\alpha}$ fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilirler ve $\left|f^{'}(t)\right| \geq 0$, $0 \leq (b-t)^{1-\alpha} \leq (b-a)^{1-\alpha}$ olduğundan ortalama değer teoremine göre öyle M sayısı vardır ki;

$0 \leq M \leq (b-a)^{1-\alpha}$ ve $\int_a^b \left|f^{'}(t)\right| (b-t)^{1-\alpha} dt = M \int_a^b \left|f^{'}(t)\right| dt$

Bu durumda;

$$\int_a^b \left| D_{a^+}^{\alpha} f(x) \right| dx = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(b-a)^{1-\alpha} + M \int_a^b \left|f^{'}(t)\right| dt \right] < \infty$$

$f(x) \in AC \subset [a,b]$ olduğundan $f'(x) \in L_1(a,b)$ olur. Yani $\int_a^b |f'(t)| dt < \infty$ olduğundan $D_{a^+}^{\alpha} f(x) \in L_1(a,b)$ olur. Dolayısıyla analoji olarak $D_{b^-}^{\alpha} f(x) \in L_1(a,b)$ gösterilir.

$\alpha \geq 1$ durumunu inceleyelim.

$[\alpha]$ ile α sayısının tam kısmını, $\{\alpha\}$ ile ise α sayısının kesir kısmını işaretleyelim.

$0 \leq \{\alpha\} < 1$ ve $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$

α tam sayı ise;

$$D_{a^+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \text{ ve } D_{b^-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \alpha = 1,2,3,\ldots$$

α tam sayı değil ise;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{a^+}^{\{\alpha\}} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\{\alpha\}+1} I_{a^+}^{1-\{\alpha\}} f(x)$$

$$\left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{b^-}^{\{\alpha\}} f(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\{\alpha\}+1} I_{b}^{1-\{\alpha\}} f(x)$$

olarak düşüneceğiz.

Tanım 3.3.1.9. $\alpha > 0$ ve $n = [\alpha] + 1$ olmak üzere $f(x), x \in [a,b]$ fonksiyonunun α. mertebeden soldan ve sağdan Rieamann-Liouville kesirli türevleri aşağıdaki biçimdedir [8];

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{3.40}$$

$$\left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \tag{3.41}$$

(3.40) ve (3.41) kesirli mertebe türevlerinin varlığı için yeterlilik koşulu, $\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}}$ integralinin mutlak sürekli $AC^{[\alpha]}([a,b])$ fonksiyonlar sınıfından olması ile temin edilir. Dolayısıyla bu koşulun sağlanması için $f(x) \in AC^{[\alpha]}([a,b])$ olması yeterlidir.

Teorem 3.3.1.10. $\alpha \geq 0$ ve $f(x) \in AC^{n}([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$ olsun. Bu durumda hemen hemen her yerde aşağıdaki biçiminde tanımlı $D_{a+}^{\alpha} f$ Riemann-Liouville kesirli türevi vardır [8].

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-a)} (x-a)^{k-a} + \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{a-n+1}} dt \tag{3.42}$$

İspat :

$f(x) \in AC^{n}([a,b])$ olduğu için (3.25) ifadesine istinaden

$$f(x) = \sum_{k=o}^{n-1} C_k (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi (3.40) eşitliğinde dikkate alalım;

$$\begin{aligned}
D_{a+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \left[\sum_{k=o}^{n-1} C_k (t-a)^k \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dy \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\sum_{k=o}^{n-1} C_k \int_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dt \right]
\end{aligned}$$

Öncelikle $t = a + \tau(x-a)$ değişken değiştirmesi kullanarak $\int_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt$ integralini hesaplayalım.

$$\int_a^x (t-a)^k (x-t)^{n-\alpha-1} dt = (x-a)^{n+k-\alpha} \int_0^1 \tau^k (1+\tau)^{n-\alpha-1} d\tau$$

$$= (x-a)^{n+k-\alpha} B(k+1, n-\alpha) = (x-a)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}$$

Şimdi ise $\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dt$ integralini hesaplayalım. Bu amaçla Tanım 3.3.1.6 ifadesi ile tanımlanan Dirichlet formülü uygulanırsa ve ayrıca iç integralde $t = a + \tau(x-a)$ değişken değiştirmesi dikkate alınırsa, o halde

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t (t-y)^{n-1} \varphi(y) dt = \int_a^x \varphi(y) dy \int_y^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-y)^{n-1} dt$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x (x-y)^{2n-\alpha-1} \varphi(y) dt$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz bu sonuçları $D_{a+}^{\alpha} f(x)$ kesirli mertebe türev formülünde yerine yazarsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\sum_{k=o}^{n-1} C_k (x-\alpha)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x (x-y)^{2n-\alpha-1} \varphi(y) dt \right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\sum_{k=o}^{n-1} C_k \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-\alpha)^{n+k-\alpha} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(2n-\alpha)} \int_a^x \varphi(y) \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1} dt \right]$$

Eğer bu eşitlikte yer alan $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-\alpha)^{n+k-\alpha}$ ve $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1}$ ifadelerinin açık şeklinin;

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-\alpha)^{n+k-\alpha} = (n+k-\alpha)(n+k-\alpha-1) \cdots (k-\alpha+1)(x-\alpha)^{k-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(k-\alpha+n+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-y)^{2n-\alpha-1} = \frac{\Gamma(2n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)}(x-y)^{n-\alpha-1}$$

biçimlerinde olduğu ve ayrıca $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\varphi(y) = f^{(n)}(y)$, $C_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ olduğu dikkate alınırsa o halde kesirli mertebe Riemann-Liouville türevi için;

$$D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)dy}{(x-y)^{\alpha-n+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \cdot (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)dy}{(x-y)^{\alpha-n+1}}$$

nihai sonucunu elde ederiz.

Bilindiği üzere eğer $\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x)$ işlemi doğrulanıyorsa, adi diferansiyel işlemi $\frac{d}{dx}$ ve integral işlemi $\int_a^x \cdots dt$ karşılıklı ters işlemler olur.

Öte yandan genelde $\int_a^x \varphi'(t)dt \neq \varphi(x)$ olduğu dikkate alınmalıdır (bu durumda ilaveten $\varphi(a)$ sabitinin olacağı açıktır). Benzer şekilde $\left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a^+}^n \varphi = \varphi$ olmasına rağmen $I_{a^+}^n \varphi^{(n)} \neq \varphi$ olacaktır(burada ilaveten $(n-1)$ derece polinomun olacağı açıktır). Benzer yorumlarla kesirli mertebe türev için $D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} \varphi = \varphi$ olmasına rağmen $I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} \varphi$ işleminin sonucu her zaman $\varphi(x)$ 'e eşit olmayabilir (bunun sebebi kesirli mertebe diferansiyel işlemi sonucu $k = 1,2,\cdots,[\alpha]-1$ olmak üzere $(x-a)^{\alpha-k}$ polinomlarının oluşmasıdır). İlerleyen aşamalarda daha ayrıntılı muhakeme için, aşağıdaki fonksiyon sınıfını tanımlamamız gerekmektedir.

Tanım 3.3.1.11. $\alpha > 0$ olmak üzere integrallenebilir fonksiyonların α mertebe sol taraf kesirli integrali cinsinden ifade edilen $f(x)$ fonksiyonlar sınıfı $I_{a^+}^{\alpha}(L_p)$ olsun. O halde

$$f \in I_{a^+}^{\alpha}(L_p), \alpha > 0 \;\Leftrightarrow f = I_{a^+}^{\alpha}\varphi, \quad \varphi \in L_p(a,b), \;\; 1 \leq p < \infty$$

Teorem 3.3.1.12. $\alpha > 0$ olmak üzere $f \in I_{a^+}^{\alpha}(L_p)$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki ifadelerle tanımlanır;

$$f_{n-\alpha}(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b]),\ (n = [\alpha] + 1) \tag{3.43}$$

$$f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0, \quad (\, k = 0,1,2,\cdots, n-1) \tag{3.44}$$

İspat: Öncelikle gereklilik koşuluna bakalım. $f = I_{a^+}^{\alpha}\varphi$ ve $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ olsun. O halde (3.28) ifadesi ile tanımlanan yarı grup özelliğinden hareketle aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$f_{n-\alpha}(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f = I_{a^+}^{n-\alpha} I_{a^+}^{\alpha}\varphi$$

Bir başka değişle $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ olmak üzere

$$f_{n-\alpha}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

ve bu durumda (3.43) ve (3.44) koşullarının doğrulanması (3.25) ifadesinden hareketle açıkça görülmektedir.

Şimdi ise Teorem 3.3.1.12 ‘nin yeterlilik koşuluna bakalım. (3.40) ve (3.41) koşullarının doğrulanması durumunda (3.25) ifadesinden hareketle

$$f_{n-\alpha}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt = I_{a^+}^{\alpha}\varphi$$

Sonuç olarak, (3.28) ifadesi ile tanımlanan yarı grup özelliğinden hareketle,

$$I_{a^+}^{n-\alpha} f = I_{a^+}^{n}\varphi = I_{a^+}^{n-\alpha} I_{a^+}^{\alpha}\varphi$$

sonucuna ulaşırız. Buradan $I^{n-\alpha}\left(f - I_{a^+}^{\alpha}\varphi\right) = 0$ ve de $f = I_{a^+}^{\alpha}\varphi$ elde ederiz.

Şimdi ise hangi koşullarda kesirli mertebe türev ve kesirli derece integral işlemlerinin karşılıklı ters işlemler olduğunu belirleyelim.

Teorem 3.3.1.13. $\alpha > 0$ olsun. O halde,

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} \varphi = \varphi(x) \tag{3.45}$$

eşitliği keyfi integrallenebilir fonksiyonlar için ve

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f = f(x) \tag{3.46}$$

eşitliği ise, $f(x) \in I_{a^+}^{\alpha}(L_1)$ fonksiyonu için doğrulanır. Eğer $f(x) \in L_1(a, b)$ ve $D_{a^+}^{\alpha} f$ kesirli mertebe türevlere sahip bir fonksiyon ise;

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a) \tag{3.47}$$

olur. Burada $n = [\alpha] + 1$ ve $f_{n-\alpha}(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} \varphi$.

Özel durumda $0 < \alpha < 1$;

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}$$

İspat:

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{I_{a^+}^{\alpha} \varphi(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$$

O halde bu eşitliğin sağ tarafındaki sonuncu integralde integrasyon sırasını değiştirirsek;

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{dt}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-n+1}}$$

yazabiliriz.

$t = s + \tau(x-s)$

değişken değiştirmesi yapılarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\int_s^x \frac{dt}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha-n+1}} = (x-s)^{n-1}\int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau = (x-s)^{n-1}B(\alpha, n-\alpha)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)}(x-s)^{n-1}$$

Bu sonuç yukarıdaki denklemde dikkate alınırsa,

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \varphi(s)ds\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)}(x-s)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \varphi(s)\,(x-s)^{n-1}ds = \frac{d^n}{dx^n} I_{a^+}^{n}\varphi = \varphi(x)$$

(3.45) ifadesi ispatlanmıştır.

Şimdi ise (3.47) ifadesinin doğruluğunu ispatlayalım. Bu amaçla (3.25) ifadesinden hareket edelim.

$$I_{a^+}^{n-\alpha}f = \sum_{k=o}^{n-1} c_k(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt = \sum_{k=o}^{n-1} c_k(x-a)^k + I_{a^+}^{n}\varphi(x)$$

$$\varphi(x) \in L_1(a,b), \quad c_k = \frac{I_{a^+}^{n-\alpha-k}f(a)}{k!}, \ \varphi(x) = I_{a^+}^{-\alpha}f(x) = D_{a^+}^{\alpha}f(x)$$

Eğer yukarıdaki ifadeden $I_{a^+}^{n}\varphi(x)$ ‘i çekip ve daha sonra onun her iki tarafına $I_{a^+}^{\alpha-n}$ operatörü ile etki edersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$I_{a^+}^{\alpha-n}\ I_{a^+}^{n}\varphi(x) = I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f = I_{a^+}^{\alpha-n}\ I_{a^+}^{n-\alpha}f - \sum_{k=o}^{n-1} c_k\, I_{a^+}^{\alpha-n}(x-a)^k$$

Eğer bu ifade $I_{a^+}^{\alpha-n}\ I_{a^+}^{n-\alpha}f = f$ olduğu dikkate alınarak yeniden düzenlenirse aşağıdaki şekilde olur.

$$I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f = f(x) - \sum_{k=o}^{n-1} c_k\, I_{a^+}^{\alpha-n}(x-a)^k$$

Öte yandan $I_{a^+}^{\alpha-n}(x-a)^k = \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha-n+k)}(x-a)^{\alpha-n+k}$ olduğu dikkate alınarak, aşağıdaki sonuca ulaşırız;

$$I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f = f(x) - \sum_{k=o}^{n-1}\frac{I_{a^+}^{n-\alpha-k}f(a)}{\Gamma(1+\alpha-n+k)}(x-a)^{\alpha-n+k}$$

Ayrıca;

$$I_{a^+}^{n-\alpha-k}f(a) = D_{a^+}^{\alpha+k-n}f(a)$$

$$D_{a^+}^{\alpha-k-1}f(a) = I_{a^+}^{k+1-\alpha}f(a)$$

$$= I_{a^+}^{k+1-n+n-\alpha}f(a)$$

$$= I_{a^+}^{k+1-n}f_{n-\alpha}(a)$$

$$= f_{(n-\alpha)}^{n-k-1}(a)$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\sum_{k=o}^{n-1}\frac{I_{a^+}^{n-\alpha-k}f(a)}{\Gamma(1+\alpha-n+k)}(x-a)^{\alpha-n+k} = \sum_{k=o}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}f_{(n-\alpha)}^{n-k-1}(a)$$

aşağıdaki nihai sonuca varırız;

$$I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a)$$

Yani (3.47) ifadesi ispatlanmış olur.

3.3.2. Grünwald - Leitnikov Yaklaşımı

Grünwald-Letnikov kesirli diferintegralininin yapısı, matematiksel analizin gelişimi açısından daha doğal olmakla birlikte bu diferintegrallerin yaklaşık hesaplanmasında daha yaygın olarak kullanılmaktadır. Konuya ilişkin daha detaylı bilgi edinmek amacıyla, öncelikli olarak n- mertebe türevle n- katlı integral arasındaki genel bağlantı ifadesini oluşturacağız daha sonra ise Grünwald-Letnikov kesirli mertebe türev tanımı verilerek, Grünwald-Letnikov kesirli mertebe türev yaklaşımının Riemann-Liouville kesirli mertebe türev yaklaşımına eşdeğer olduğu durumlar belirlenecektir.

Reel eksenin sonlu aralığı üzerinde yani $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı integrallenebilir bir $f(x) \in AC^n$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun ilgili mertebeden tamsayı türevleri uygun olarak aşağıda verilmiştir.

Birinci mertebe türev için;

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \qquad h = \Delta x$$

Bu uygulamayı tekrarlayarak ikinci mertebe türevi için

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2}$$

Üçüncü mertebe türev için;

$$f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3}$$

Benzer yorumlarla n. mertebe türev için;

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f(x-kh) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Eğer (3.51) ifadesinde $a < x$ ve $N = 1,2,3,\ldots$ olmak üzere $h = \frac{x-a}{N}$ olduğu dikkate alınırsa ve $(D_a^n f)(x)$ işaretlemesi yapılırsa aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$(D_a^n f)(x) = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x - k \cdot \left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \tag{3.49}$$

Bu eşitlikte $k > n$ olması durumunda $\binom{n}{k} = 0$ olur. $n-$ bir tam sayı olmak üzere $n < N-1$ durumu için

$$(D_a^n f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x - k\cdot\left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \tag{3.50}$$

elde edilir. Şimdi ise $\int_a^x f(t)dt$- Riemann integralini ($a < x$ ve $N = 1,2,3,\ldots$ olmak üzere) $h = (x-a)/N$ kısmi integral toplamlarının limiti biçiminde ifade ederek katlı integralleri hesaplamak için gerekli ifadeleri oluşturalım.

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k)\, h \tag{3.51}$$

Eğer bu ifade de $\xi_k = x - kh$ alarak (3.51) ifadesini yeniden düzenlersek aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x-kh)\, h = \lim_{N\to\infty} [f(x) + f(x-h) + f(x-2h) + \cdots + f(a+h)]h$$

Genel ifadeyi oluşturmak için iki katlı ve üç katlı integral ifadelerini de yazalım. Bu durumda iki katlı integral için;

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} f(t_0)dt_0 = \lim_{N\to\infty} h \sum_{k=0}^{N-1} \int_a^x f(t_1 - kh)\, dt_1 =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h \int_a^x [f(t_1) + f(t_1 - h) + f(t_1 - 2h) + \cdots + f(a+h)]\, dt_1$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^2 \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(x-kh) + \sum_{k=0}^{N-1} f(x-(k+1)h) + \sum_{k=0}^{N-1} f(x-(k+2)h) + \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} f(x-(N-1)h)\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^2 [f(x) + 2f(x-h) + 3f(x-2h) + \cdots + Nf(x-(N-1)h)]$$

$$= \lim_{N\to\infty} h^2 \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) f(x-kh)$$

Benzer işlemlerle üç katlı integral için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} dt_1 \int_a^{t_1} f(t_0)dt_0 = \lim_{N\to\infty} h^3 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)(k+2)}{2} f(x-kh)$$

Bu eşitlikte $\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+2)!}{k!2!} = C_{k+2}^{k}$ olduğu dikkate alınırsa n-katlı bir integral için toplam işareti altındaki $f(x-kh)$ fonksiyonunun önündeki katsayının $C_{k+n-1}^{k} = \binom{k+n-1}{k}$ olacağı aşikardır.

Bu husus dikkate alınarak ve $n > 0$ için $(D_a^{-n} f)(x) = \int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_a^{t_1} f(t_0)dt_0$ notasyonu yapılırsa, n-katlı bir integral için nihai ifade şöyle olacaktır;

$$(D_a^{-n} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^n \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{k+n-1}{k} f\left(x - k\cdot\left(\frac{x-a}{N}\right)\right) \tag{3.52}$$

Şimdi ise (3.50) ve (3.52) ifadelerini karşılaştıralım. Bu amaçla (3.50) ifadesinde toplam işareti altındaki $f(x-kh)$ fonksiyonunun önündeki katsayısının [2] $(-1)^k \binom{n}{k} = \binom{k-n-1}{k} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(k+1)}$ olduğu ve $\frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(-n)} = (-n)_k$ kesrinin sonlu olduğu dikkate alınırsa aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz;

$$(D_a^{n} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-n} \frac{1}{\Gamma(-n)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\cdot\left(\frac{x-a}{N}\right)\right)$$

ve

$$(D_a^{-n} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\cdot\left(\frac{x-a}{N}\right)\right)$$

Elde edilen bu sonuçlardan hareketle Grünwald- Letnikov kesirli mertebe türev ve integral kavramları

$$(\mathcal{D}_a^{\alpha} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\frac{x-a}{N}\right) \tag{3.53}$$

$$(\mathcal{D}_a^{-\alpha}f)(x) = (\mathcal{J}_a^{\alpha}f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x - k\frac{x-a}{N}\right) \tag{3.54}$$

ifadeleri ile verilmiştir. Burada $h = \frac{x-a}{N}$.

Tanım 3.3.2.1. $\alpha > 0$ olmak üzere f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon ve α. mertebeden sol ve sağ Grünwald- Leitnikov kesirli türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır [8];

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0\ (nh=x-a)} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh) \tag{3.55}$$

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0\ (nh=b-x)} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t + rh) \tag{3.56}$$

Tanım 3.3.2.2. $-\infty < \alpha < 1$ olmak üzere $f(t)$ parçalı sürekli fonksiyonunun α. mertebeden Leitnikov kesirli türevi aşağıdaki biçimde tanımlanır [8];

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau \tag{3.57}$$

(3.57) denklemine kısmi integrasyon yöntemini uygulayalım;

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[-\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} f(\tau) \Big|_0^t + \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} f(\tau)\, d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[\frac{(t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} f(0) + \frac{1}{(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} f(\tau)\, d\tau \right]
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{(t)^{-\alpha} f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau \tag{3.58}$$

denklemine kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa kesirli integralin $\alpha < 0$ durumu için Riemann- Liouville tanımını elde ederiz.

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{-1-\alpha}f(\tau)\,d\tau \tag{3.59}$$

$(3.48) - (3.49)$ tanımları $\alpha = 0, -1, -2, -3, \ldots$,-n,… için fonksiyonunun kendisini ve [0,t] üzerindeki n-katlı integrallerini verir.

$$D^{0}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t} f(\tau)\,d\tau = f(t)$$

$$D^{-1}f(t) = \frac{1}{\Gamma(2)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2)}\frac{d}{dt}\left[\int_{0}^{\tau} f(\tau)\,d\tau\,(t-\tau)\Big|_{0}^{\tau} + \int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{\tau}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\right)d\tau\right] = \int_{0}^{t} f(t)dt$$

Tanım 3.3.2.3. Keyfi α için Grünwald- Leitnikov kesirli türevi aşağıdaki gibi verilir [8];

$$\mathcal{D}_{a}^{\alpha}f(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x-a}{N}\right)^{-\alpha}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)}f\left(x-k\frac{x-a}{N}\right) \tag{3.60}$$

$n \in \mathbb{Z}^{+}$ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{D}_{a}^{\alpha}f = \mathcal{D}_{a}^{n+\alpha}f$ doğrudur.

(3.60), $\alpha > 0$ durumunda (3.26) Riemann- Liouville kesirli integrali ile aynıdır. $\alpha \leq 0$ durumunda ise (3.40) Rieamann- Liouville kesirli türevi ile aynıdır ve dolayısyla Grünwald- Letnikov kesirli mertebe türev yaklaşımının Riemann- Liouville kesirli mertebe türev yaklaşımına eşdeğer olduğu aşikârdır.

Grünwald- Leitnikov kesirli mertebe $D_{a}^{-\alpha}f$ türevini $\alpha > 0$ durumu için $\mathcal{J}_{a}^{\alpha}f(x)$ biçiminde işaretlersek;

$$\mathcal{J}_a^{\alpha} f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh) \tag{3.61}$$

Teorem 3.3.2.4. $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ olsun. Hemen hemen tüm x' ler için $\mathcal{J}_a^{\alpha} f(x)$ limiti vardır ve

$\mathcal{J}_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$

doğrudur.

İspat : $\alpha > 0$ olsun. Eğer Riemann- Liouville kesirli integrali ile f fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli mertebe türev farkını A ile işaretlersek, o halde aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$A = (\mathcal{J}_a^{\alpha} f)(x) - (I_a^{\alpha} f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

$(I_a^{\alpha} f)(x)$ integralinde $x - t = u$ değişken değiştirmesi yapalım;

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{f(x-u)}{(u)^{\alpha+1}} du$$

$f(t)(x-t)^{\alpha-1}$ fonksiyonu hemen hemen tüm x' ler için integrallenebilir fonksiyon olduğundan $\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$ integrali hemen hemen tüm x' ler için

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(x-\xi_k) h \xi_k^{\alpha-1} \Delta x_k \,, x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$$

toplamının limitidir.

$x_k = kh \,, h = \frac{x-a}{N} \,, N \in \mathbb{N} \,, \Delta x_k = h, k \le \left[\frac{x-a}{h}\right] = N-1$ ve $\xi_k = x_k$ yazarsak;

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x-kh)h}{(kh)^{1-\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h^{\alpha} f(x-kh) \left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right]$$

h yerine $\frac{x-a}{N}$ yazarsak ;

$$A = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N^{\alpha}} f\left(\frac{Nx-kx-k\alpha}{N}\right)\left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right]$$

Bu toplamı iki gruba ayıralım. $0 \le k \le K-1$ ve $K \le k \le N-1$ burada K yeterince büyük, N'den bağımsız bir sayıdır. Bu tür büyük K için;

$$\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} \sim k^{\alpha-1}\left[1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2k} + 0(k^{-2})\right]$$

$k \to \infty$ asimptotik açılımı sağlanıyor.

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N^{\alpha}} f\left(\frac{Nx-kx-k\alpha}{N}\right)\left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right] \\ &\quad + \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=K}^{N-1} \frac{1}{N^{\alpha}} f\left(\frac{Nx-kx-k\alpha}{N}\right)\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2k^{2-\alpha}} + k^{\alpha-1}0(k^{-2})\right] \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{N^{\alpha}} f\left(\frac{Nx-kx-k\alpha}{N}\right)\left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right] \\ &\quad + \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=K}^{N-1} f\left(\frac{Nx-kx-k\alpha}{N}\right)\left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha-2}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2N} + \frac{0(k^{-1})}{N}\right] \end{aligned}$$

$\alpha > 1$ durumunda $\left[\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} - k^{\alpha-1}\right]$ ifadesi sınırlı olduğundan $\frac{1}{N^{\alpha}}$ çarpanı birinci terimi

$N \to \infty$ iken sıfıra götürür.

$\alpha \ge 2$ durumunda $\left(\frac{k}{N}\right)^{\alpha-2} < 1$ ve $\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2N} + \frac{0(k^{-1})}{N}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Bu durumda ikinci toplama işleminde her terim $N \to \infty$ iken $\frac{1}{N}$ olarak sıfıra gider.

Buradan $\alpha > 2$ için;

$$A = \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f(x) - I_{a^+}^{\alpha} f(x) = 0$$

Sonuç olarak $\alpha > 2$ durumunda Rieamann- Liouville ve Grünwald- Leitnikov integralleri aynıdır.

$\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f(x) = I_{a^+}^{\alpha} f(x)$

Rieamann- Liouville kesirli türevi ve kesirli integrali için (3.47) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz $(\alpha > 0)$;

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_{a^+}^{\alpha+n} f(x)$$

$$D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \mathcal{D}_a^q f = \mathcal{D}_a^{n+q} f$$

formülü $(\forall n \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \mathbb{R})$ Grünwald-Leitnikov kesirli türevi ve kesirli integrali için doğrudur $(\alpha > 0)$.

$$\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{J}_{a^+}^{\alpha+n} f(x)$$

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} f(x)$$

Dolayısıyla teorem $\alpha + n > 2$ ve $n - \alpha > 2$ şartını sağlayan keyfi α için (burada n yeterince büyük seçilir) doğrudur.

3.3.3. Caputo Yaklaşımı

Tanım 3.3.3.1. $n - 1 < \alpha < n \ (n \in \mathbb{N}^+)$ olmak üzere $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon olsun. α. mertebeden Caputo kesirli türevi aşağıda belirtilmiştir [5];

$$_*D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^n(t)\, dt$$

Caputo yaklaşımının en temel avantajı, tamsayı mertebeden diferansiyel denklemleriyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır [8].

Eğer $\lim_{x \to c^+} y(x) = y(c)$ sonlu limiti var ise;

$$D_x^{\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_c^x (x-t)^{n-\alpha-1}y(t)\,dt \tag{3.62}$$

Sol Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi ve;

$$_{*}D_x^{\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_c^x (t-x)^{n-\alpha-1}y^n(t)\,dt \tag{3.63}$$

(Burada $n = [\alpha] + 1$) caputo türevi arasındaki ilişki şu şekildedir;

$$D_x^{\alpha}y(x) = \ _{*}D_x^{\alpha}y(x) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}y(c)(x-c)^{-\alpha} \tag{3.64}$$

Caputo yaklaşımı Riemann- Liouville yaklaşımına göre bazı farklılıklara sahiptir. Öyle ki; burada önce fonksiyonun kesirli mertebeden daha büyük en küçük tam sayıya göre diferansiyeli alınır. Daha sonra ise elde edilen diferansiyelleme sonucu $n - \beta$ mertebesine göre integrallenir. Yani ($n - 1 < \beta < n$ ($\beta \in \mathbb{R}$));

$$_{*}D_{a,t}^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta-n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\beta-1}f^n(\tau)\,d\tau \tag{3.65}$$

Riemann-Liouville integralinde ise ilk aşamada integral daha sonra ise diferansiyelleme işlemleri yapılır.

Sonuç olarak Caputo tanımlaması başlangıç koşullu kesirli mertebe diferintegrallenir.

Tanım 3.3.3.2. $\alpha \geq 0$ ve $m = [\alpha]$ olmak üzere $D^m f \in L_1[a, b]$ olmak üzere α-mertebeli Caputo kesirli türev tanımı aşağıdaki gibi verilir [8];

$${}_*D_a^\alpha f(x) = I_a^{m-\alpha}[D^m f]$$

veya;

$${}_*D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \displaystyle\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^m(t)\, dt \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^m f(x) \qquad \alpha = m, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabit bir sayının Caputo türevi sıfırdır. Fakat sonlu bir alt sınır değeri için Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değildir [8]. Yani;

$$D_*^\alpha c = 0$$

$$D_t^\alpha c = \frac{t-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} c$$

Caputo türev tanımına ait özellikler;

$$D_*^\alpha I^\alpha f(x) = f(x)$$

$$I^\alpha D_*^\alpha\, f(x) = \ f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^k(0^+) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Teorem 3.3.3.3. $f(t) = (t-a)^v$ olmak üzere $f(t)$'nin diferintegrali aşağıdaki gibidir [8];

$${}_*D_a^\alpha (t-a)^v = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)} (t-a)^{v-\alpha}, v \in \mathbb{R}$$

İspat : $f(t) = (t-a)^v$ ise $(-\alpha)$ katlı R-L kesirli integralini alalım;

$$D_a^\alpha (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} (t-a)^v\, dx$$

olur.

$v > -1$ olduğunu varsayalım .$x = a + \xi(t-a)$ alalım,

$$D_a^\alpha(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(t-a)^{v-\alpha}\int_a^t \xi^v(1-\xi)^{-\alpha-1}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}B(-\alpha, v+1)(t-a)^{v-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(t-a)^{v-\alpha}\ , \qquad (\alpha < 0\,, v > -1)$$

olur.

Bir de $0 \leq m \leq \alpha < m+1$ durumunu inceleyelim. Grünwald-Leitnikov kesirli türevini kullanmak için $v > m$ almalıyız. Grünwald-Leitnikov kesirli türevinde seri toplamları sıfır olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$D_a^\alpha(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^t (t-x)^{m-\alpha}\frac{d^{m+1}(x-a)^v}{dx^{m+1}}dx \tag{3.66}$$

$\frac{d^{m+1}(x-a)^v}{dx^{m+1}}dx = v(v-1)\dots(v-m)(x-a)^{v-m-1} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)}(x-a)^{v-m-1}$,

$x = a + \xi(t-a)$

eşitliklerini (3.66) denkleminde yerine yazalım;

$$D_a^\alpha(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_0^1 (1-\xi)^{m-\alpha}\xi^{v-m-1}\,d\xi$$

$$= \frac{\Gamma(v+1)B(-\alpha+m+1, v-m)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-\alpha+m+1)}(t-a)^{v-\alpha}$$

$$= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)}(t-a)^{v-\alpha}$$

3.3.4. Kesirli Mertebe Türev ve İntegralin Hesaplanmasına İlişkin Bazı Örnekler

Örnek 3.3.4.1. Kuvvet fonksiyonun kesirli mertebe türevi $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $I_{a^+}^\alpha = D_{a^+}^{-\alpha}$,

$I_{b^-}^{\alpha} = D_{b^-}^{-\alpha}$ ve $\mathcal{J}_a^{\alpha} = \mathcal{D}_a^{-\alpha}$ $(\alpha \geq 0)$ olsun.

$\beta > 0$ olmak üzere $f(x) = (x-a)^{\beta}$ ve $f(x) = (b-x)^{\beta}$ kuvvet fonksiyonlarının kesirli mertebe türevleri aşağıdaki formüllerle belirlenir [7-8]

$$D_x^{\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_c^x (t-x)^{n-\alpha-1} y(t)\, dt \tag{3.67}$$

$$I_{b^-}^{\alpha}\left[(b-x)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (b-x)^{\alpha+\beta} \tag{3.68}$$

Şimdi ise $f(x) = (x-a)$ fonksiyonu için Grünwald- Leitnikov kesirli türevini belirleyelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a^q (x-a) &= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} \left(x - k\frac{(x-a)}{N} - a\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{x-a}{N}\right)^{-q} \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} (x-a)\left(1 - \frac{k}{N}\right) \\
&= (x-a)^{1-q} \lim_{N\to\infty} \left(N^q \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} \right. \\
&\quad \left. - N^{q-1} \sum_{K=0}^{N-1} \frac{k\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} \right) \\
&= (x-a)^{1-q} \lim_{N\to\infty} \left(N^q \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} - N^{q-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k)} \right)
\end{aligned}$$

Eğer bu eşitlikte yer alan $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)}$ ve $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k)}$ ifadeleri yerine onların açık biçimi yazılırsa;

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(k)} = \frac{-q\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N-1)}$$

olur.

O halde;

$$\mathcal{D}_a^q(x-a) = (x-a)^{1-q} \lim_{N\to\infty}\left(N^q \frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)} + N^{q-1}\frac{q\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N-1)}\right)$$

alırız. Daha sonra ise elde ettiğimiz eşitliğin sağ tarafındaki $N^q \frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)}$ ifadesini N ile ve $N^{q-1}\frac{q\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N-1)}$ ifadesini ise $N(N-1)$ ile çarpıp bölersek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\mathcal{D}_a^q(x-a) = (x-a)^{1-q} \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{q+1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)N\Gamma(N)} + \frac{qN^q(N-1)\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)N(N-1)\Gamma(N-1)}\right)$$

Yukarıdaki ifade, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ formülü dikkate alınarak yeniden düzenlenirse,

$$\mathcal{D}_a^q(x-a) = (x-a)^{1-q} \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{q+1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N+1)} + \frac{qN^{q+1}\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N+1)} - \frac{qN^q\Gamma(N-q)}{\Gamma(2-q)\Gamma(N+1)}\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Elde ettiğimiz bu ifadede $j \to \infty$ durumunda $\frac{\Gamma(j+z)}{\Gamma(j+1)}$ kesrinin asimptotik açılımından hareketle türetilen [3,16]

$$\lim_{j\to\infty}\left[j^{c+z+1}\frac{\Gamma(j-z)}{\Gamma(j+1)}\right] = \begin{cases} +\infty & c > 0 \\ 1 & c = 0 \\ 0 & c < 0 \end{cases}$$

formülünü uygularsak aşağıdaki nihai sonuca ulaşırız.

$$\mathcal{D}_a^q(x-a) = (x-a)^{1-q}\left[\frac{1}{\Gamma(1-q)} + \frac{q}{\Gamma(2-q)}\right] = (x-a)^{1-q}\left[\frac{1-q}{\Gamma(2-q)} + \frac{q}{\Gamma(2-q)}\right]$$

$$= \frac{(x-a)^{1-q}}{\Gamma(2-q)}$$

Görüldüğü üzere bu sonuç, (3.67) ifadesinde $\beta = 1$ ve $\alpha = -q$ alınması durumunda elde edilen sonuçla aynıdır.

Örnek 3.3.4.2. Trigonometrik fonksiyonların kesirli mertebe türevi

Burada dairesel $\sin(x-a)$ ve $\cos(x-a)$ fonksiyonları için kesirli mertebe türevleri belirlenecektir.

$x > a$ olmak üzere $I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifade doğrudur.

$$I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \sin(t-a)\,(x-t)^{\alpha-1}dt$$

Eğer bu ifadede $\sin(t-a)$ fonksiyonu Taylor serisine açılırsa,

$$I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_a^x (t-a)^{2k+1}(x-t)^{\alpha-1}dt$$

eldenederiz. Daha sonra ise bu ifadede yer alan $\int_a^x (t-a)^{2k+1}(x-t)^{\alpha-1}dt$ integralini hesaplayalım. Bunun için $t=a+\tau(x-a)$ değişken değişmesi yapacağız ve

$$\beta(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt\,,\mathrm{Re}(z)>0 \text{ ve } \mathrm{Re}(w)>0$$

formülünden yararlanacağız. Böylece

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!}\int_a^x \tau^{2k+1}(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{(2k+1)!}\beta(2k+1,\alpha)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1+\alpha}}{\Gamma(2k+2+\alpha)}\\
&=(x-a)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+1}}{\Gamma(2k+2+\alpha)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Elde edilen bu ifadede $\Gamma(2k+2+\alpha)$ fonksiyonuna

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2Z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

Legendre formülü uygulanırsa

$$\Gamma(2k+2+\alpha)=\frac{2^{2Z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right);$$

ve uygun olarak $\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)$ ve $\Gamma\left(k+\frac{\alpha+3}{2}\right)$ fonksiyonlarına

$$\Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-n)(z-n+1)\ldots(z-1)}$$

$$\Gamma(z+n)=z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z)$$

n=1,2,… formülü uygulanırsa,

$$\Gamma\left(K+1+\frac{\alpha}{2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_K\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(K+\frac{\alpha+3}{2}\right)=\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)_K\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)$$

ifadelerini elde ederiz. Böylece,

$$I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\left[-\frac{1}{y}(x-a)^2\right]^k}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_K\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)_k}$$

sonucunu elde ederiz. Eğer bu eşitliğin sağ tarafındaki toplam sembolü altındaki ifadeyi k! ile çarpıp bölersek hipergeometrik Gauss fonksiyonu elde ederiz.

$$I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a)=\frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1)_K}{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)_k}\frac{\left[-\frac{1}{y}(x-a)^2\right]^k}{k!}$$

Hatırlayalım ki genelleştirilmiş hipergeometrik Gauss fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanır [18];

$${}_pF_q(\alpha_r,\gamma_s;\ z)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k}\frac{z^k}{k!}$$

Burada p ve q $\in Z^+, p\le q+1, z\in C, \alpha_r, \gamma_s\ (\gamma_s\ne 0,-1,-2,\ldots)$ keyfi parametre, $\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_k$ çarpımı $p=0$ veya $q=0$ olduğunda $1'$e eşit kabul edilir. Ayrıca serinin yakınsaklık çapı aşağıdaki gibi belirlenir.

$$|z|=\begin{cases}\infty & \text{if}\quad p\le q\\ 1 & \text{if}\quad p=q+1\end{cases}$$

Böylece yukarıda belirlediğimiz ifadede

$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$

ve

$${}_pF_q(\alpha_r, \gamma_s;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{p}(\alpha_r)_K}{\prod_{s=1}^{q}(\gamma_s)_k}\frac{z^k}{k!}$$

formüllerinin de dikkate alınmasıyla, dairesel $\sin(x-a)$ fonksiyonu için kesirli mertebe türev aşağıdaki biçimde belirlenecektir;

$$I_{a^+}^{\alpha}\sin(x-a) = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\ {}_1F_2\left(1, 1+\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+3}{2}, -\frac{1}{4}(x-a)^2\right)$$

Benzer yorumlarla $x > a$ için dairesel $\cos(x-a)$ fonksiyonu için $I_{a^+}^{\alpha}\cos(x-a)$ kesirli mertebe türevi belirlenir.

$$I_{a^+}^{\alpha}\cos(x-a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \cos(t-a)(x-t)^{\alpha-1}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_a^x (t-a)^{2k}(x-t)^{\alpha-1}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+\alpha}}{(2k)!}\int_a^x t^{2k}(1-t)^{\alpha-1}dt$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k+\alpha}}{\Gamma(2k+\alpha+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k}}{\Gamma\left(k+\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(x-a)^{\alpha}}{2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-a)^{2k}}{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)_k\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)_k}$$

$$= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\ {}_2F_1\left(1\,; \frac{1+\alpha}{2}, 1+\ \frac{\alpha}{2}, -(x-a)^2\right)$$

Örnek 3.3.4.3. Exponansiyel ve Doğal logaritma fonksiyonların kesirli mertebe türevi

Bu örnekte, I_{0+}^{α} – diferintegral operatörünün e^x ve $\ln x$ fonksiyonları üzerine etkisine bakalım.

Öncelikle, $I_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}$ ifadesi ile tanımlanan

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_{\alpha}(z)$$

$I_{0^+}^{\alpha} e^x$ hesaplamak için e^x fonksiyonunun Taylor (Maclaurin) serisini türetelim.

$$I_{0^+}^{\alpha} e^x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^t (x-t)^{\alpha-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^x t^k (x-t)^{\alpha-1} dt$$

$t = x - x\tau$ değişken değiştirmesi yapalım;

$$I_{0^+}^{\alpha} e^x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-\tau)^k d\tau$$

$$= x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}$$

Mittag- Leffler fonksiyonu $z \in \mathbb{C}$' de $\frac{1}{\alpha}$ mertebeden tam bir fonksiyon olup, aşağıdaki kuvvet serisi ile tanımlanır.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

Özel durumda $\alpha = 1,\ \beta = 1$ ve $\alpha = 1,\ \beta = 2$ parametreleri için uygun olarak Mittag - Leffler fonksiyonu aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$E_{1,1}(z) = e^z, \qquad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

Mittag- Leffler fonksiyonunun türevi ise şöyle belirlenir;

$$E'_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta}(z)}{dz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+k)z^k}{\Gamma\big(\beta + \alpha(k+1)\big)}$$

$\alpha > 0,\ \beta > 0$ olmak üzere Mittag- Leffler fonksiyonundan yararlanarak hesaplayalım.

$$I_{0^+}^{\alpha} e^x = x^{\alpha} E_{1,\alpha+1}(x)$$

$$I_{0^+}^{\alpha} \ln x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \ln t (x-t)^{\alpha-1} dt$$

$x - \tau = x\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$I_{0^+}^{\alpha} \ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ln\big(x(1-\tau)\big)\tau^{\alpha-1} d\tau$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\ln x \int_0^1 \tau^{\alpha-1} d\tau + \int_0^1 \ln(1-\tau)\tau^{\alpha-1} d\tau \right]$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\ln x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{1} \ln(1-\tau)d(1-\tau^{\alpha})\right]$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\ln x - \ln(1-\tau)(1-\tau^{\alpha})\,|_0^1 + \int_{0}^{1} \frac{1-\tau^{\alpha}}{1-\tau}d\tau\right]$$

$\ln(1-\tau)(1-\tau^{\alpha})|_0^1 = 0$ olduğunu biliyoruz.

İntegral $\int_0^1 \frac{t^x - t^y}{1-t}dt = \psi(y+1) - \psi(x+1)$ formülünden yararlanarak hesaplanır. Burada,

$$\psi(z) = \frac{d\ln\Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

$$\psi(z) = -\gamma + (z-1)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(h+1)(z+h)}$$

$\psi(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \ldots$ noktasında süreksizdir.

$\gamma = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum_{h=1}^{m}\frac{1}{h} - \ln m\right) = 0,5772156649\ldots$

$\psi(1) = -\gamma$

$$\gamma = \int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right)dx$$

Bu formülde $y = 0,\ \ x = \alpha$ alırsak;

$$I_{0^+}^{\alpha}\ln x = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln x + \psi(1) - \psi(\alpha+1)]$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Kesirli Mertebe Diferansiyel Denklemler İçin Cauchy Biçimli Problemin Çözümün Varlığı ve Tekliği

Sürekli ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayında gerçel eksenin sonlu aralığında kesirli mertebe bayağı diferansiyel denklemler için Cauchy tipi problemin çözümünün varlığı ve tekliği teoremine bakalım. Bu amaçla öncelikli olarak, kesirli mertebe diferansiyel denklemlerle ikinci çeşit volterra integral denklemi arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Varsayalım ki; $\alpha > 0$ ve $x > a$ olmak üzere

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] \tag{4.1}$$

denkleminin

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = b_k;\ b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n \tag{4.2}$$

koşulunu sağlayan çözümünün belirlenmesi isteniyor.

Burada, $n = \begin{cases} \alpha + 1, \text{eğer } \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha, \quad \text{eğer } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$

Ayrıca $\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+)$ ifadesi limitin a noktasının sağ komşuluğunda $(a, a + \varepsilon)$ alındığını göstermektedir. Bir başka deyişle

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = \lim_{x \to a^+} \left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(x), 1 \le k \le n - 1$$

$$\begin{cases} \left(D_{a^+}^{\alpha-n} y\right)(a^+) = \lim_{x \to a^+} \left(I_{a^+}^{\alpha-n} y\right)(x), \alpha \neq n \\ \qquad \left(D_{a^+}^{0} y\right)(a^+) = y(a), \alpha = n \end{cases} \tag{4.3}$$

Burada $I_{a^+}^{\alpha}$- kesirli Riemann- Liouville sağ integrali olup,

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\,, x > a \tag{4.4}$$

biçimin de belirlenir.

Özel durumda $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olması durumunda (4.1)- (4.2) ifadeleri ile tanımlanan problem sıradan Cauchy problemine dönüşür.

$$y^n(x) = f[x, y(x)] \tag{4.5}$$
$$y^{n-k}(a) = b_k, b_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n} \tag{4.6}$$

Bu nedenle (4.1), (4.2) ifadeleri ile tanımlanan problem de (4.5), (4.6) problemine benzer olarak bir Cauchy problemidir. Diferansiyel denklemin mertebesi olan α-parametresinin $0 < \alpha < 1$ aralığında olması durumunda (4.1), (4.2) ve (4.3) ifadesi ile tanımlanan Cauchy problemi

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x)] \tag{4.7}$$
$$I_{a^+}^{1-\alpha} = b, b \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

biçiminde olacaktır. Eğer (4.9) ve (4.10) ifadesi ile tanımlanan Cauchy problemi ağırlık problemi biçiminde düzenlenirse

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x)] \tag{4.9}$$

$$\lim_{x \to a^+}(x-a)^{1-\alpha}y(x) = c, c \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

yazılabilir.

Aslında (4.1), (4.2) ve (4.3) ifadesi ile tanımlanan Cauchy probleminin çözümü ikinci çeşit nonlineer Volterra denkleminin çözümüne indirgenir,

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x - t)^{1-\alpha}} dt, x > a \tag{4.11}$$

Şimdi ise (4.1), (4.2) ifadeleri ile tanımlanan Cauchy probleminin $\mathcal{L}^{\alpha}(a, b)$ uzayında tek bir global çözümün olmasını sağlayan koşulları belirleyelim. Hatırlayalım ki, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ için

$\mathcal{L}^{\alpha}(a, b) := \{y \in L(a, b) : D_{a^+}^{\alpha} y \in L(a, b)\}$

Burada $L(a, b) := L_1(a, b)$- sonlu $[a, b] \in \mathbb{R}$ aralığında integrallenebilir fonksiyonların uzayını temsil eder.

Böylece keyfi $y(x) \in G \subset \mathbb{R}$ için $f[x, y] \in L(a, b)$ varsayımında (4.1)- (4.2) ifadeleri ile tanımlanmış Cauchy probleminin (4.11) ifadesi ile tanımlanan nonlineer ikinci çeşit Volterra denklemine eşdeğer olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bu amaçla öncelikli olarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım [8,15].

Teorem 4.1.1. Varsayalım ki $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$. G- ℝ' de açık küme olsun ve f: $[a, b] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Öyle ki $\forall y \in G$ için $f[x, y] \in L(a, b)$ eğer $y(x) \in L(a, b)$ fonksiyonu $x > a$ olmak üzere $y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x - a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ ikinci çeşit Volterra denklemini sağlıyorsa, o halde hemen hemen her yerde $y(x)$ fonksiyonu

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)], \alpha > 0 \tag{4.12}$$

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = b_k, b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha] \tag{4.13}$$

ifadelerini de sağlar.

İspat: Öncelikle teoremin gereklilik şartını ispatlayalım. Varsayalım ki $y(x) \in L(a,b)$ ve (4.12)- (4.13) ifadelerini de sağlar. $f[x,y] \in L(a,b)$ olduğu için (4.12) ifadesi $[a,b]$ kapalı aralığında hemen her yerde $(D_{a+}^{\alpha}y)(x) \in L(a,b)$ kesirli mertebe türevinin olduğunu ifade eder. Bu durumda, kesirli mertebe türev kavramından hareketle

$$\begin{cases} \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{a+}^{n-\alpha}\right)(x), \quad n=-[-\alpha] \\ \left(I_{a+}^{0}y\right)(x)=y(x) \end{cases} \tag{4.14}$$

yazabiliriz ve dolayısıyla aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left(I_{a^+}^{n-\alpha}y\right)(x) = I_{a^+}^{n}\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x)$$

Öte yandan $(D_{a+}^{\alpha}y)(x) \in L(a,b)$ olduğu için, $\left(I_{a^+}^{n-\alpha}y\right)(x) \in AC^{n}[a,b]$ yazabiliriz. Bu demektir ki, $y(x) \in L_1(a,b)$ fonksiyonu integrallenebilir kesirli mertebe türeve sahiptir. Böylece kesirli mertebe türev ve kesirli mertebe integralin karşılıklı ters operatörler olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} \left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=y(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} \\ y_{n-\alpha}(x)=\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x) \end{cases} \tag{4.15}$$

olur. Ayrıca

$$y_{n-\alpha}^{(n-j)}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-j} I_{a^+}^{n-\alpha}y(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha-j}y\right)(x)$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\left(I_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\left(D_{a^+}^{\alpha-j}\right)(a^+)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} = y(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{4.16}$$

olur.

Şimdi ise $I_{a^+}^{\alpha}$ operatörü ile $\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x) = f[x,y(x)]$ eşitliğinin her iki tarafına etki edelim.

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = I_{a^+}^{\alpha} f[t, y(t)](x)$$

ifadesini elde ederiz. Eğer bu ifade (4.16) denkleminde dikkate alınırsa

$$I_{a^+}^{\alpha} f[t, y(t)](x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j (x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \tag{4.17}$$

sonucuna ulaşırız. Elde edilen bu denklemde kesirli mertebe integral ifadesi yerine yazılarak (4.17) ifadesi yeniden düzenlenirse;

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j (x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a \tag{4.18}$$

ikinci çeşit Volterra denklemini elde ederiz. Böylece gereklilik koşulu ispatlanmış oldu.

Yeterlilik koşulu: Varsayalım ki $y(x) \in L(a, b)$ hemen hemen her yerde ikinci çeşit Volterra denklemini sağlıyor. Yani;

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, x > a \tag{4.19}$$

Bu ifadenin her iki tarafına $D_{a^+}^{\alpha}$- kesirli mertebe diferansiyel operatörü ile etki edelim. O halde aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j \left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x)}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \left(D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f[t, y(t)](x)\right) \tag{4.20}$$

Daha önce de ispatladığımız gibi

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-j)}{\Gamma(1-j)} (x-a)^{-j}$$

olduğu dikkate alınarak ve $j = 1, 2, \dots, [\alpha] + 1$ için $\frac{1}{\Gamma(1-j)}$ ifadesi sıfır olacağından $\left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = 0$ olur. (4.20) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\alpha}f[t,y(t)](x)\right) \tag{4.21}$$

denklemini elde ederiz. Öte yandan $f[t,y(t)] \in L(a,b)$ olduğu için

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}y\right)(x) = f[x,y(x)] \tag{4.22}$$

olacaktır. Elde ettiğimiz bu ifade (4.12) ifadesi ile aynıdır. Şimdi ise (4.13) ifadesinin doğruluğunu ispatlayalım. Bu amaçla (4.11) ifadesi ile tanımlanan eşitliğin her iki tarafına $k = 1,2,\dots,n$ olmak üzere $D_{a^+}^{\alpha-k}$ kesirli mertebe türev operatörü ile etki edelim. Yani;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j\left(D_{a^+}^{\alpha-k}(t-a)^{\alpha-j}\right)}{\Gamma(\alpha-j+1)} + \left(D_{a^+}^{\alpha-k}I_{a^+}^{\alpha}f[t,y(t)](x)\right) \tag{4.23}$$

olur. Bu ifadede bazı özel durumlara bakalım;

$1 \le k \le n-1$ olsun. O halde,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-j)}{\Gamma(1-j+k)}(x-a)^{k-j} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1+\alpha-j)}{(k-j)!}(x-a)^{k-j} & , k > j-1 \\ 0, & k \le j-1 \end{cases}$$

elde ederiz. Dolayısıyla bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} + \left(D_{a^+}^{\alpha-k}I_{a^+}^{\alpha}f[t,y(t)](x)\right) \tag{4.24}$$

Öte yandan $1 \le k \le n-1$ ve $\alpha > 0$ durumunda $\alpha - k > 0$ olacağından

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}I_{a^+}^{\alpha}f[t,y(t)](x)\right) = I_{a^+}^{\alpha-(\alpha-k)}f[x,y(x)] = I_{a^+}^{k}f[x,y(x)]$$

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} + I_{a^+}^{k}f[x,y(x)]$$

yazabiliriz.

O halde bu denklemin açık biçimde ifade edilişi aşağıdaki biçimdedir;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j(x-a)^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f[t,y(t)](x-t)^{k-1}dt \tag{4.25}$$

Eğer (4.25) ifadesinde $x \to +a$ limit değerine geçilirse $k = 1, 2, \ldots, n-1$ olmak üzere

$b_k = \left(D_{a^+}^{\alpha-k}y\right)(a^+)$

koşulunu elde ederiz.

$k = n$ için (4.23) ifadesinden hareketle

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-n}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j(x-a)^{n-j}}{(n-j)!} + \left(D_{a^+}^{\alpha-n} I_{a^+}^{\alpha} f[t,y(t)](x)\right) \tag{4.26}$$

denklemini elde ederiz.

Şimdi ise $n = -[-\alpha], \alpha > 0$ ve $\alpha - (\alpha - n) = n > 0$ olmak üzere $\alpha - n > 0$ durumuna bakalım;

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-n}y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j(x-a)^{n-j}}{(n-j)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f[t,y(t)](x-t)^{n-1}dt \tag{4.27}$$

Eğer bu ifadede $\alpha \neq n$ olmak üzere $x \to +a$ için limite geçilirse,

$b_n = \left(D_{a^+}^{\alpha-n}y\right)(a^+)$ ve $\alpha = n$ için

$b_n = y(a)$

sonucuna ulaşırız. Böylece teoremin yeterlilik koşulu ispatlanmıştır.

Sonuç 4.1.2. $0 < \alpha < 1$, G- ℝ' de açık küme olsun ve $f: (a,b] \times G \to \mathbb{R}$ ve ayrıca $\forall y \in G$ için $f[x,y] \in L(a,b)$ olsun. Eğer $y(x) \in L(a,b)$ fonksiyonu $x > a$ olmak üzere,

$$y(x) = \frac{b_1(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

ikinci çeşit Volterra denklemini sağlıyorsa $y(x)$ fonksiyonu hemen hemen her yerde

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)], 0 < \alpha \leq 1 \tag{4.28}$$

$$\left(I_{a^+}^{1-\alpha} y\right)(a^+) = b, b \in \mathbb{R} \tag{4.29}$$

ifadelerini sağlar. Böylece kesirli mertebe diferansiyel denklemlerle ikinci çeşit Volterra integral denklemi arasındaki ilişkiyi belirledikten sonra, kesirli mertebe diferansiyel denklemler için Cauchy biçimli problemin çözümünün varlığı ve tekliği problemine bakalım. Anlaşılacağı üzere burada

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)], \alpha > 0$$

diferansiyel denkleminin $k = 1, 2, \ldots,\ n = -[-\alpha]$ olmak üzere

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = b_k, b_k \in \mathbb{R}$$

koşulunu sağlayan çözümünün

$$\mathcal{L}^{\alpha}(a, b) = \left\{y \in L(a, b) \colon D_{a^+}^{\alpha} y \in L(a, b)\right\}$$

uzayında var olması ve bu çözümün tek olması incelenecektir.

Teorem 4.1.3. Varsayalım ki $\alpha > 0, n = -[-\alpha]$ ve G- kümesi $\mathbb{R}$' de açık bir kümedir. $f\colon (a, b] \times G \to \mathbb{R}$ olsun. Öyle ki $\forall y \in G$ için $f[x, y] \in L(a, b)$ ve $A > 0$ ve x değişkeninden bağımsız bir sabit olmak üzere $\forall y_1, y_2 \in G \in \mathbb{C}, \forall x \in (a, b]$ için

$$|f[x, y_1] - f[x, y_2]| \leq A|y_1 - y_2|$$

Lipschite koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{L}^{\alpha}(a, b)$ uzayında

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)], \alpha > 0$$

kesirli mertebe diferansiyel denkleminin, $k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha]$ olmak üzere

$$\left(D_{a^+}^{\alpha-k} y\right)(a^+) = b_k, b_k \in \mathbb{R}$$

koşulunu sağlayan Cauchy probleminin çözümü var ve bu çözüm tektir.

İspat: Bu durumda çözümün varlığı ve tekliğini ispatlamak için, Teorem 4.1.1 e istinaden $y(x) \in L(a,b)$ fonksiyonunun (4.11) ifadesi ile tanımladığımız nonlineer Volterra integral denkleminin tek çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Bu nedenle öncelikli olarak $[a,b]$ aralığında Volterra denkleminin çözümüne bakalım. Hatırlarsak (4.11) ifadesi ile tanımlanan denklem keyfi $[a,x_1] \subset [a,b], a < x_1 < b$ aralığında bir anlam ifade etmektedir. Bu nedenle x_1 değerini öyle seçelim ki;

$$A\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

eşitsizliği sağlanmış olsun. Daha sonra ise $y(x) \in L(a,x_1)$ fonksiyonunun (4.11) iadesi ile tanımlanan denklemin $[a,x_1]$ aralığındaki tek çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla $L(a,x_1)$- uzayı için (sıkıştırma haritalama olarak ta adlandırılan) Banach hareketsiz nokta teoreminden yararlanalım. $L(a,x_1)$- uzayı tam metrik uzay olduğu için

$$d(y_1,y_2) = \|y_1-y_2\| = \int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, x > a$$

Volterra denklemini $y(x) = (Ty)(x)$ biçiminde yazarsak,

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{4.30}$$

İfadesini elde ederiz. Burada $y_0(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$ dir.

Banach hareketsiz nokta teoremini uygulayabilmemiz için aşağıda verilen iki durumu ispatlamamız gerekiyor;

i) Eğer $y(x) \in L(a,x_1)$ ise $(Ty)(x) \in L(a,x_1)$

ii) $w = A\frac{(x_1-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ olsun. $\forall y_1, y_2 \in L(a,x_1)$ ise

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a,x_1)} \le w\|y_1-y_2\|_{L(a,x_1)} \tag{4.31}$$

Öncelikli olarak $y_0(x) \in L(a, x_1)$ olduğunu gösterelim;

$$\begin{aligned}\int_a^{x_1} |y_0(x)|dx &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \int_a^{x_1} (x-a)^{\alpha - j} dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \frac{(x-a)^{\alpha-j+1}}{\alpha - j + 1} \Big|_a^{x_1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - x_1)^{\alpha - j + 1} < \infty\end{aligned} \tag{4.32}$$

$\alpha + 1 \leq j, j = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha]$

Teoremin şartına göre $f[x, y] \in L(a, b)$ olduğu için $b = x_1$ alınırsa ve $g(t) = f[t, y(t)]$ alınırsa daha önce tanımlanan bilgilere göre

$$I_a^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \in L(a, x_1)$$

ve sonuç olarak $(Ty)(x) \in L(a, x_1)$ olacaktır. Şimdi ise $L(a, x_1)$- uzayında $(Ty)(x)$ normuna bakalım.

$$\begin{aligned}\|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a,x_1)} &= \left\| \left(y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_1(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right) - \left(y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_2(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right) \right\|_{L(a,x_1)} \\ &= \left\| I_{a^+}^{\alpha} f[x, y_1(x)] - I_{a^+}^{\alpha} f[x, y_2(x)] \right\|_{L(a,x_1)} \\ &\leq \left\| I_{a^+}^{\alpha} (f[x, y_1(x)] - f[x, y_2(x)]) \right\|_{L(a,x_1)}\end{aligned} \tag{4.33}$$

Riemann- Liouville kesirli integral operatörünün sınırlı olmasından hareketle

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{L(a,x_1)} \leq A \frac{(x_1 - a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1 - y_2\|_{L(a,x_1)} \tag{4.34}$$

elde ettiğimiz bu sonuç (4.30) ifadesinin doğruluğunu gösterir. x_1 değerinin seçimine bağlı olarak $w = A\frac{(x_1-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$ eşitsizliğinin doğru olması durumunda Banach hareketsiz nokta teoremine istinaden $[a, x_1]$ aralığında Volterra denkleminin $y^*(x) \in L(a, x_1)$ çözümü var ve bu çözüm tektir. Banach hareketsiz nokta teoremine göre $y^*(x)$ çözümü $(T^m {y_0}^*)(x)$ yakınsak dizisinin limitidir. Yani;

$$\lim_{m\to\infty} \|T^m {y_0}^* - y^*\|_{L(a,x_1)} = 0$$

olur.

Burada ${y_0}^*$- $L(a, b)$ olan keyfi bir fonksiyondur. $\exists k\colon b_k \neq 0$, o zaman ${y_0}^*(x) = y_0(x)$ alınabilir. Burada $y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}$ dir.

Öte yandan $(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ olduğundan $(T^m {y_0}^*)(x)$ dizisi

$$(T^m {y_0}^*)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t, T^{m-1}{y_0}^*(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$m = 1, 2, \ldots$ Recurrent formülü ile belirlenir. Eğer $y_m(x) = (T^m {y_0}^*)(x)$ işaretlemesi yapılırsa;

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(x)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$m = 1, 2, \ldots$ ve $\lim_{m\to\infty} \|y_m - y^*\|_{L(a,x_1)} = 0$ elde ederiz.

Daha sonra $[x_1, x_2]$ aralığını ele alalım. Öyle ki $h_1 > 0$ olmak üzere, $x_2 = x_1 + h_1 < b$ olsun. Eğer Volterra denklemini

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x} \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1} \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, x > a$$

$y(x)$ fonksiyonunun $[a, x_1]$ aralığında tek olduğu dikkate alınırsa yukarıdaki denklem,

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada;

$$y_{01}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x_1} \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

ifadesi ile tanımlanan fonksiyonun bilinen fonksiyon olduğunu hatırlayalım. Böylece yukarıda kullandığımız benzer yorum ve yaklaşımlarla, Volterra denkleminin $[x_1, x_2]$ aralığında $y^*(x) \in L(x_1, x_2)$ tek çözümünün olduğu gösterilir. Sonraki aşamada, $h_2 > 0$ olmak üzere $x_3 = x_2 + h_2 < b$ için belirlediğimiz $[x_2, x_3]$ aralığında Volterra denkleminin tek çözümünün olduğu gösterilir. Eğer bu işlemi tekrarlarsak $y^*(x) \in L(a, b)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Volterra denkleminin tek çözüm olduğu sonucuna ulaşırız. Bir başka deyişle $y(x) = y^*(x) \in L(a, b)$ fonksiyonunun (4.1), (4.2) ifadeleriyle tanımlanan Cauchy probleminin çözümü olduğu ispatlanmış olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Kesirli mertebe matematik analizde farklı türev tanımlarının varlığı, değişik fen ve mühendislik problemlerinin tanımlanma biçimine uygun olarak en iyi çözümünün elde edilmesine olanak sağlamaktadır. Bu nedenle, matematiksel modelleme problemlerinde kesirli mertebe diferintegral denklemlerin kullanımına olan ilgi giderek artmaktadır.

Bu tez çalışmasında, konuya ilişkin yapılan literatür araştırmalarının analizinden hareketle ele alınan konunun güncelliği belirlenmiş ve tanımlanan amaç doğrultusunda kesirli mertebe analizin temel kavramlarından hareketle Grünwald-Letnikov ve Riemann- Liouville yaklaşımlarının eşdeğerliği sistematik bir biçimde incelenmiştir

Klasik ve kesirli matematiksel analizlerin karşılaştırılması yapılarak, reel eksenin sonlu $[a,b]\in R$ aralığında kesirli mertebe türev ve integralin özellikleri verilmiştir.

Sürekli ve integrallenebilir fonksiyonların $B_{p,\theta}^{\langle r\rangle}(G,s)$ Dzhabrailov-Alisoy uzayında $G \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $D_{\alpha}^{v}\, y(x) = f[x, y(x)]$- kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için correct Cauchy probleminin çözümün varlığı ve tekliği hakkında teorem ispatlanmıştır.

Kesirli mertebe ikinci çeşit Volterra denklemi için correct Cauchy probleminin çözümün varlığı ve tekliği hakkında ispatlanan teoremin değişik dinamik sistemlerin matematiksel modellenmesinde ve analizinde yararlı olacağı düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların, özellikle aerosol partiküllerin yüklenme kinetiğinin modellenmesi ve analizinde yaygın olarak kullanılmakta olan Volterra denklemlerinin kesirli mertebe durumlarının incelenmesi için yeni bilimsel ve pratik öneme sahip çalışmaların oluşmasına öncülük edeceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] M. Caputo, *Elasticita e Dissipazione*. Italy: Zanichelli and Bologna, 1969.

[2] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus.* New York: Academic Press, 1974.

[3] Babenko and Yu.I. and Teplomassoobmen, Metod Rascheta Teplovykh i Diffuzionnykh Potokov, Leningrad: Khimiya, 1986.

[4] K.S. Miller and B. Ross, *An İntroduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*. New York: Jhon Willy and Sons, 1993.

[5] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Appiications, Gordon and Breach, Yerdon, 1993.

[6] V. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applications. Long-man & J. Wiley,Harlow & N. York ,1994.

[7] J.J. Distefano, A.R. Stubberud and I.J. Williams, Theory and Problems of Feedback and Control Systems. New York: McGraw-Hill, 1995.

[8] A. Carpintery and F. Mainardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. New York: CSIM Courses and Lectures, 1997.

[9] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*. New York: Academic Press, 1999.

10] A.M Nakhushev, “Fractional Calculus and It’s Application,” Moscow, pp. 272, 2003.

[11] A.A. Kilbas, N.M. Srivastavo and J.J. Tzujillo, *Theory and Applications of Fractonal Differential Equations*. Amsterdam: Elsever, 2006.

[12] V.A. Churikov, “Fractional integration and fractional differentiation based on the d-operator,” *Tomsk Polytechnic University*, pp. 118, 2010.

[13] S. Bayın, *Mathematical Methods in Science and Engineering*. New Jersey: Wiley Interscience, 2006.

[14] V.L. Tarasov, *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems*. New York: Elsevier Science, 2008.

[15] L. Kexue and P. Jigen, “Fractional Resolvents and Fractional Evolution Equations,” *Applied Mathematics Letters*, vol.25, pp. 808-812, 2012.

[16] A. Ates, B.B. Alagoz, G.T. Alisoy, C Yeroglu and H.Z. Alisoy. “Fuzzy Velocity and Fuzzy Acceleration in Fractional Order Motion,” *Balkan Journal of Electrical & Computer Engineering*, Vol. 3 (2), DOI:10.17694/bajece.52354, 2015.

[17] B.B. Alagoz, G. Alisoy, S. Alago and H. Alisoy, “A note on applications of time-domain solution of Cole permittivity models,” Optik, 139, 272-282, 2017.

[18] R. Ayazoglu, Y. Saraç, S. Şener and G. Alisoy, Existence and multiplicity of solutions for a SchrödingerKirchhof type equation involving the fractional p(.,.)-Laplacian operator in Rn, Collect.Math., 2021

[19] A. Korn, and T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Reviev, Dover publications, inc*. Mineola: New York, pp. 1151, 2000.

[20] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Moscow: Science, pp. 496, 1968.

[21] G.T. Kerimova (Alisoy), “Properties of Differential Functions with Repeated Difference- Differential Characteristic Depending on Multi-Package Variables” *PhD Thesis*, Baku, pp. 127, 1997.

[22] G.T. Alisoy, H.Z. Alisoy, On Integral Representations of Multi Package Variable Functions, *International Journal of Applied Mathematics*, 11, 371-386, 2002.

[23] G.T. Alisoy, A.D. Dzhabrailov, H.Z. Alisoy, Properties of Functions in Some Weighted Spaces, *Applicable Analysis*, 84, 405-417, 2005.

[24] G. Alisoy, S. Aktaş, Diferansiyel Fark Özelliklerinin Korunması ile Çok Katlı Değişkenlere Bağımlı Fonksiyonların $G \subset E\_n$ Bölgesi, 2018

[25] M.L. Krasnov, A.I. Kiselev and G.I. Makarenko, “*İntegral Denklemleri, Problemler ve Alıştırmalar*,” M.: Nauka, pp. 216, 1976.