T.C.

NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUMMER KONGRÜANSLARININ P-ADİK L-FONKSİYONLARI İLE İSPATI

Rıdvan TOSUNCUK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. Mehmet KIRDAR

TEKİRDAĞ-2017

Doç. Dr. Mehmet KIRDAR’ın danışmanlığında Rıdvan TOSUNCUK tarafındanhazırlanan “Genelleştirilmiş KummerKongrüanslarının P-adic L-Fonksiyonları ile İspatı” isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Juri Başkanı: Doç.Dr. Mehmet KIRDAR *İmza*:

Üye: Yrd.Doç.Dr. Nuray EROĞLU *İmza*:

Üye: Yrd.Doç.Dr. Özen ÖZER *İmza*:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUMMER KONGRÜANSLARININ P-ADİK

L-FONKSİYONLARI İLE İSPATI

Rıdvan TOSUNCUK

Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet KIRDAR

Bu tez çalışmasında Genelleştirilmiş Kummerkongrüanslarının ispatı Washington(1996) IntroductiontoCyclotomicFields kitabı temel alınarak yapılmıştır.Dirichlet L-Fonksiyonu ve P-adic L-Fonksiyonu ile ilgili temel kavramlar verilmiş ve gerekli teoremler ifade edilmiştir. Bu kavram ve teoremler ile Genelleştirilmiş KummerKongrüanslarının ispatı yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: KummerKongrüansları, Dirichlet L-fonksiyonu, P-adic L-fonksiyonu

2017, 26 sayfa

ABSTRACT

Msc. Thesis

PROOF OF THE GENERALIZED KUMMER CONGRUENCES

BY USING P-ADIC L-FUNCTIONS

Rıdvan TOSUNCUK

Namık Kemal University
Graduate School of Natural andAppliedSciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet KIRDAR

Inthisthesis, theproof oftheGeneralizedKummerCongruences is donebased on thebook of Washington(1996) IntroductiontoCyclotomicFields. Basic conceptsaboutDrichle L-Functionsand P-adic L-Functionshavebeengivenandnecessarytheoremshavebeenpointedout. Withtheseconceptsandtheorems, theproof oftheGeneralizedKummerCongruences has beendone.

Keywords: KummerCongruences, Dirichlet L-functions, P-adic L-functions

2017, 26pages

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGE LİSTESİ

$\chi(a)$: Dirichlet karekteri

$\omega(z)$: Teichmüller karakteri

B_n : Bernoulli sayıları

$L(s,\chi)$: Dirichlet L-Fonksiyonu

$\zeta(s,b)$: Hurwitz Zeta Fonksiyonu

$\zeta(s)$: Riemann Zeta Fonksiyonu

$B_{n,\chi}$: Genelleştirilmiş Bernoulli sayıları

$B_n(X)$: Bernoulli Polinomları

$L_p(s,\chi)$: P-adic L-Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bernoulli sayıları, sayı kuramı ile derin ilişkili bir rasyonel sayı dizisidir. Sayı değerleri Riemannzeta fonksiyonunun negatif tam sayılarda aldığı değerlerle ilgilidir. Bernoulli sayıları JakobBernoulli tarafından, Japon matematikçi Seki Köwa ile hemen hemen aynı dönemde bulunmuştur.

B_nBernoulli sayısının n'e bölünmesi ile elde edilen kongrüanslarErnstEduardKummer (1851) tarafından bulunmuştur.Bukongrüanslar matematiğin topoloji ve diferansiyel geometri gibi farklı dallarında dahi ortaya çıkar.B_n/noranının payı ve paydası önemli matematiksel değişmezleri verir.

Bu çalışmada Genelleştirilmiş Kummerkongrüanslarının ispatı, p-adic L-fonksiyonu yardımıyla gösterilecektir. 2. ve 3. Bölümde ihtiyacımız olan kavramlar tanıtılacaktır. Bu kavramlar Dirichlet karakteri, p-adik sayıları, Bernoulli sayıları ve bunların özellikleridir. Bu kavramların üzerine kurulu p-adic L-fonksiyonu tanımlanacaktır ve bu fonksiyonla ilgili gerekli teoremler verilecektir. 4.Bölümde Kummerkongrüansları tanıtıldıktan sonra örnekleri gösterilecek ve p-adic L-fonksiyonları yardımıyla ispatı yapılacaktır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Tanım.

Belirli bir k (k>1) tam sayısı için

i. $\chi(1) = 1$
ii. $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$
iii. $\chi(n+k) = \chi(n)$
iv. $(n,k) > 1 \iff \chi\ (n) = 0$

koşullarını sağlayan $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{C}$ ye tanımlı χ çarpımsal fonksiyonuna bir k modül Dirichlet karakteri denir. $(a,k) = 1$olan her a için φ , Euler φ -fonksiyonu olmak üzere $a^{\varphi(n)} \equiv 1(mod\ k)$ olduğundan $\chi(a)$ birimin bir köküdür.

k, m nin bir katı olmak üzere ve Ψ, bir m modül Dirichlet karekteri ise

$$\chi(a) = \begin{cases} \Psi(a), & (a,k) = 1 \\ 0 \quad , & (a,k) \neq 1 \end{cases}$$

ile bir $k$modül Dirichlet karakteri elde edilebilir. $m < k$ olmak üzere , χ in m modül bir başka karakterden elde edilemeyen minimum k modülüne χ in kondüktörü denir.

Dirichletkarekteri kalan sınıfları ile ifade edersek

$$\chi: (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$$

biçiminde bir grup temsili olarak düşünülebilir.

Bir Dirichletkarekteri olan k modülprincipalkarekteri aşağıdaki biçimde tanımlanır.

2.2 Tanım

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 1 & , \quad (n,k) = 1 \\ 0 & , \quad (n,k) > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlan karaktere k modül principal karakter denir.

2.3 Tanım

p bir asal sayı ve $a_i \in \{0,1,\dots,p-1\}$ olmak üzere $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$ şeklinde ifade edilen sayılara p-adik tamsayı denir. Tüm p-adik tamsayıların oluşturduğu halka $\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir.(Koblitz 1948)

2.4 Tanım

$p$bir asal sayı olmak üzere

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i p^i : 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan küme p-adik rasyonel sayılar kümesi denir.(Koblitz 1948)

$x \in \mathbb{Q}_p$ise

$$x = \cdots + a_2 p^2 + a_1 p^1 + a_0 + \frac{a_{-1}}{p} + \frac{a_{-2}}{p^2} + \cdots + \frac{a_{-k}}{p^k}$$

şeklindedir ve özel olarak $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = a_{-k} = 0$ ise $x \in \mathbb{Z}_p$ dir.

2.5 Tanım

$p$bir asal sayı olmak üzere,$q = \begin{cases} 4 & , \; p = 2 \\ p & , \; p \neq 2 \end{cases}$ biçiminde tanımlı olsun.$z \epsilon \mathbb{Z}_p^x$ için

$$\omega(z) = \lim_{n\to\infty} z^{p^n}$$

şeklinde tanımlı $\omega: \mathbb{Z}_p^x \to \mathbb{Z}_p^x$ grup homomorfizmasına Teichmüller karakteri denir. Teichmüller karakterin kondöktörü q olup,Teichmüller karakteri $(p-1)$.birimin bir köküdür.(Washington, L.C. 1996)

Teichmüller karakterin bazı özellikleri:

Her $a\epsilon\mathbb{Z}_p$ için

i. $a \equiv \omega(a)(mod\ q)$

ii. $\omega(a)^p = \omega(a)$

2.6 Tanım

$S_p(n)$ile 1 den $(n-1)$'e kadar olan sayıların p-inci kuvvetlerinin toplamını gösterelim. Bu durumda,

$$S_0(n) = n - 1$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$$

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{n^2(2n^2-2n-1)(n-1)^2}{12}, \ldots$$

yazılabilir.

JakobBernoulli deneysel olarak $S_p(n)$ polinomlarının

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} - \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{12}n^{p-1} + 0.n^{p-2} + \cdots$$

formunda olduğunu ispatlamıştır. Bu açılımda görünen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, 0,…sayıları Bernoulli sayılarıdır ve k. Bernoulli sayısı B_k ile gösterilir.

Bernoulli sayıları üreteç fonksiyonu yardımı ile de tanımlanabilir.

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

fonksiyonuBernoulli sayılarının üreteç fonksiyonudur.

$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = B_0 + B_1 t + B_2 \frac{t^2}{2!} + B_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots$

açılımda$t \to 0$ iken eşitliğin sol tarafılim$_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1} = 1$ ve sağ tarafıB_0 olacağından

B_0=1 olarak elde edilir.

Aşağıdaki indirgeme formülü yardımı ilen>0 için diğer Bernoulli sayıları bulunabilir.

$$B_{n=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Örneğin, n=2 için,

$$B_{2=} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_k = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2$$

$$0 = 1 + 2B_1$$

$$B_1 = -\tfrac{1}{2},$$

n=3 için,

$$B_{3=} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} B_k = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3$$

$$0 = 1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 3B_2$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

Diğer Bernoulli sayıları bu yöntemle bulunabilir.B_1 dışındaki bütün tekindisliBermoulli sayıları 0 a eşittir.

2.7 Özellik

Bu kısımdaRasyonelkongrüansları için bir özellik verilecektir. Bu özellik, Kummerkongrüansların gösteriminde kullanılacaktır.

$p$asal sayı ve $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} (mod\ p)isead \equiv bc(mod\ p)$

2.8 Tanım

$a$noktasıf fonksiyonunun bir ayrık tekil noktası ve merkezi silinmişa merkezli bir açık dairede f fonksiyonunun Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

isec_{-1} katsayısına f fonksiyonunun a noktasındaki kalıntısı veya rezidüsü denir ve

$$res(f, a) = c_{-1}$$

olarak gösterilir.

2.9 Rezidü Teoremi

f fonksiyonu bir $U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı açık bölgesininsonlu sayıda $a_1, \ldots, a_n$noktası hariç her yerde analitik ve C bu bölgenin sınırı olsun. Bu durumda

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} res(f, a_i)$$

olur.

2.9.1 Örnek

$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$olsun. Ayrık ve tekil noktalarımız -1 ve 1 noktalarıdır. Bu noktalarda pay sıfır değerini almadığından -1 basit kutup noktası, 1 ise ikinci dereceden bir kutup noktasıdır.

$$res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}$$

elde edilir. g(z) =$\frac{z^2}{(z+1)}$ olmak üzere

$$g(1) \neq 0 \ ve \ f(z) = \frac{\mathrm{g(z)}}{(z-1)^2}$$

olduğundan$g'(z) = \frac{2z(z+1)-z^2}{(z+1)^2}$ ve

$$res(f,1) = g'(1) = \frac{3}{4}$$

elde edilir. Dolayısı ile γ izi $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$'de olan herhangi bir zincir olmak üzere

$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{3}{4}D(\gamma,1) + \frac{1}{4}D(\gamma,-1)\right)$. Burada D sembolü konturun tekillikler etrafındaki dolanım sayısıdır.

Özel olarak γ olarak sırasıyla$C_1(-1) ve\ C_1(1)$ basit kapalı eğrilerini alırsak

$$\int_{C_1(-1)} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz = \frac{\pi i}{2} ve \int_{C_1(1)} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz = \frac{3\pi i}{2}$$

elde edilir.

3. DIRICHLET L FONKSİYONU VE P-ADİC L FONKSİYONU

3.1 Dirichlet L-Fonksiyonu

χ bir Dirichlet karakter ve kondöktörüf olmak üzere

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\quad ,\qquad Re(s)>1$$

fonksiyonunaDirichlet L-Fonksiyonu denir. Diğer bir gösterimi

$L(s,\chi)=\prod_{p\ asal}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$ dir.

3.1.1 Tanım

$$s\in\mathbb{C}\ komplex\ değişken\ \ Re(s)>1\ ve\ 0<b\leq 1\ için$$

$$\zeta(s,b)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(b+n)^s}$$

fonksiyonuHurwitzZeta Fonksiyon olarak tanımlanır.(Koblitz 1948)

Buradan yola çıkılarak, Dirichlet L-fonksiyonu

$$L(s,\chi)=\sum_{a=1}^{f}\chi(a)f^{-s}\zeta\left(s,\frac{a}{f}\right)$$

biçimindeHurwitzZeta fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir.

3.1.2 Tanım χ bir f modül Dirichlet karakter olmak üzere,

$$\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\frac{te^{at}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\chi}\frac{t^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanan $B_{n,\chi}$ sayılarına Genelleştirilmiş Bernoulli sayıları denir.

Özel olarak, $\chi = 1$ olarak alınırsa

$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!} = \frac{te^t}{e^t-1} = \frac{t}{e^t-1} + t$olur kiburadan $B_{n,1} = B_n$ sağlanır.

3.1.3 Tanım

$$\frac{te^{Xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(X) \frac{t^n}{n!}$$

eşitliğindeki$B_n(X)$ katsayılarınaBernoulliPolinomları denir.

$$B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$$

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum B_n \frac{t^n}{n!} \qquad ve \qquad e^{Xt} = \sum X^n \frac{t^n}{n!}$$

açılımları çarpılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$B_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i X^{n-i}$$

3.1.4 Teorem

$B_{n,\chi}$ genelleştirilmişBernoullisayıları ve$F$, χ karakterinin kondaktörüf'nin bir katı olmak üzere,

$$B_{n,\chi} = F^{n-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a)\ B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{n-1} \sum_{a=1}^{F} \chi(a)\ B_n\left(\frac{a}{F}\right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{a=1}^{F} \chi(a) \frac{te^{(a/F)Ft}}{e^{Ft} - 1}$$

$g = \frac{F}{f}$ $\quad ve \quad a = b + cf$ dersek

$$\sum_{b=1}^{f} \sum_{c=0}^{g-1} \chi(b) \frac{te^{(b+cf)t}}{e^{fgt}-1} = \sum_{b=1}^{f} \chi(b) \frac{te^{bt}}{e^{ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\chi} \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir.

3.1.5 Teorem

$n \geq 1$ için

$$L(1-n,\chi) = -\frac{B_{n,\chi}}{n}$$

Daha genel olarak $0 < b \leq 1$için

$$\zeta(1-n,b) == -\frac{B_n(b)}{n}$$

eşitliği vardır.(Conway 1986).

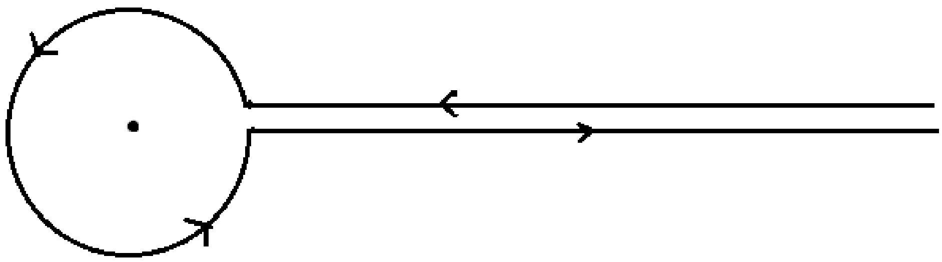
İspat

Bernoullipolinomlarının üreteç fonksiyonu F(t) olmak üzere,

$$F(t) = \frac{te^{(1-b)t}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-n) \frac{t^n}{n!}$$

$H(s) = \int F(z) z^{-2} dz$şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

Aşağıdaki yol üzerinden integral alalım.



Şimdi,C^{+}=$(\infty,\mathcal{E})+\{\gamma(t)\coloneqq \mathcal{E}e^{-it}: t\in[0,2\pi]\}+(\mathcal{E},\infty)$ yolu üzerinde integral alınırsa,

$$\int_{C^{+}} F(z)z^{s-2}dz=\int_{(\infty,\mathcal{E})} F(z)z^{s-2}dz+\int_{\gamma} F(z)z^{s-2}dz+\int_{(\mathcal{E},\infty)} F(z)z^{s-2}dz$$

elde ederiz. $z^{s-1}=e^{(s-1)log|z|}e^{(s-1)2\pi i}$ifadesinden yola çıkarak aşağıdaki dönüşümleri elde ederiz.

$$\int_{(\infty,\mathcal{E})} F(z)z^{s-2}dz=-\int_{\in}^{\infty} F(t)t^{s-2}dt$$

$$\int_{(\mathcal{E},\infty)} F(z)z^{s-2}dz=e^{2\pi is}\int_{\in}^{\infty} F(t)t^{s-2}dt$$

$$H(s)=\left(e^{2\pi is}-1\right)\int_{0}^{\infty} F(t)t^{s-2}dt+\int_{\gamma} F(z)z^{s-2}dz$$

Re(s)> 1 ve$\mathcal{E}\to 0$olduğundan$\int_{\gamma} F(z)z^{s-2}dz\to 0$ olur ve

$H(s)=\left(e^{2\pi is}-1\right)\int_{0}^{\infty} F(t)t^{s-2}dt$elde edilir. Buradan

$$F(t)=\frac{te^{(1-b)t}}{e^{t}-1}=te^{-bt}\frac{1}{1-e^{-t}}$$

$\frac{1}{1-e^{-t}}=\sum_{m=0}^{\infty} e^{-mt}$olduğundan

$F(t) = t\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(b+m)t}$yerine yazılırsa

$$H(s) = \left(e^{2\pi is} - 1\right)\int_0^{\infty} t^{s-1}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-(b+m)t}\,dt$$

$$=\left(e^{2\pi is} - 1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-(b+m)t}dt$$

Değişken değiştirmeler yapılırsa;

$$=\left(e^{2\pi is} - 1\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+b)^s}\,\Gamma(s)$$

$$=\left(e^{2\pi is} - 1\right)\Gamma(s)\zeta(s,b)$$elde edilir.

Buradan $\zeta(s,b) = H(s)/\left(e^{2\pi is} - 1\right)\Gamma(s)$ elde edilir.

$s = 1 - n$olduğunu varsayalım. $.n \geq 1$olan bir tam sayı olduğundan

$e^{2\pi is} = 1$ olur ve buradan

$H(1-n) = \int_{\gamma} F(z)z^{-n-1}dz = (2\pi i)\frac{B_n(1-b)}{n!}$elde edilir. Diğer yandan,

$\lim_{s\to 1-n}\left(e^{2\pi is} - 1\right)\Gamma(s)=(2\pi i)\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$elde edilir.

Bulduğumuz ifadeler $\zeta(s,b) = H(s)/\left(e^{2\pi is} - 1\right)\Gamma(s)$ifadesinde yerine yazılırsa,

$\zeta(1-n,b) = (-1)^{n-1}\frac{B_n(1-b)}{n} = -\frac{B_n(b)}{n}$elde edilmiş olur.

Sonuç olarak;

$$L(1-n,\chi) = \sum_{a=1}^{f}\chi(a)f^{n-1}\,\zeta\left(1-n,\frac{a}{f}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{f} \chi(a) f^{n-1} B_n\left(\frac{a}{f}\right)$$

$$= -\frac{B_{n,\chi}}{n}$$

İspat tamamlanmış olur.

3.2P-adik L-Fonksiyonu

χ bir Dirichlet karakter ve kondöktörüf , s bir p-adic sayı olmak üzere

$$L_p(s,\chi) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

fonksiyonuna p-adik L-Fonksiyonu denir.(Washington, L.C. 1996)

P-adic L-fonksiyonunun eulerçarpımsal ifadesi

$L_p(s,\chi) = (1 - \chi(p)p^{-s})\, L(s,\chi)$ dir.

Buradan, $n \in \mathbb{Z}$ $ve\; n \geq 1$için

$L_p(1-n,\chi) = (1 - \chi(p)p^{n-1})\, L(1-n,\chi)$ve ispatta kullanılacak olan

$L_p(1-n,\chi) = (1 - \chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\, L(1-n,\chi\omega^{-n})$

eşitliği elde edilir.

3.2.1 Teorem

$L_p(1-n,\chi) = -(1 - \chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\, \frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n}$

eşitliği sağlanır.

İspat

$L_p(s,\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a) H_p(s,a,F)$,olmak üzere

$s = 1$de$L_p(s,\chi)$ nin rezidüsü (kalıntısı)

$\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a)(1/F\,)$biçiminde bulunur.

Eğer$\chi = 1$ olursa bu toplam $1 - \frac{1}{P}$olarak elde edilir. Aksi halde,

Eğer$\chi \neq 1$ olursa toplam $\frac{1}{F}\sum_{a=1}^{F} \chi(a) - \frac{1}{F}\sum_{b=1}^{\frac{F}{p}} \chi(pb)$biçimindedir.

Birinci toplam sıfırdır. Eğer $p\,\big|\,f\ ise\ \forall b\ için\ \ \chi(pb) = 0\ olur.$

Eğer $p \nmid f\ ise\ f\,\big|\,(F/p)$ olur ki bu durumda ikinci toplam sıfır olur.

Bu nedenle$L_p(s,\chi)$'in $\chi \neq 1\ için\ s = 1$ de kutbu yoktur.

$n \geq 1$ için,

$$L_p(1-n,\chi) = \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi(a) H_p(1-n,a,F)$$

$$= -\frac{1}{n}F^{n-1}\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{F} \chi\,\omega^{-n}(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}F^{n-1}\sum_{a=1}^{F} \chi\,\omega^{-n}(a) B_n\left(\frac{a}{F}\right)$$

$$+\frac{1}{n}p^{n-1}\left(\frac{F}{p}\right)^{n-1}\sum_{b=1}^{F/p} \chi\,\omega^{-n}(pb) B_n\left(\frac{b}{F/p}\right)$$

elde edilir.

Eğer $p \mid f_{\chi\omega^{-n}}$ise $\chi\omega^{-n}(pb) = 0$ dir. Aksi takdirde $f_{\chi\omega^{-n}} \mid F/p$ olur.

Teorem 3.1.4 kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılır,

$$L_p(1-n,\chi) = -\frac{1}{n}\left(B_{n,\chi\omega^{-n}} - \chi\omega^{-n}(p)p^{n-1}B_{n,\chi\omega^{-n}}\right)$$

$$= -\frac{1}{n}(1\text{-}\ \chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})B_{n,\chi\omega^{-n}}$$

$$L_p(1-n,\chi) = -(1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\ \frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n}$$

İspat tamamlanmış olur.

3.2.2 Teorem$\chi \neq 1$ ve $pq \nmid f$ olmak üzere p-adik L-fonksiyonu

$$L_p(s,\chi) = a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \cdots$$

şeklindedir öyle ki $|a_0| \leq 1$ ve $\forall i \geq 1$ için $p \mid a_i$.(Washington,L.C. 1996)

4. KUMMER KONGRÜANSLARI

4.1.Teorem

$m, n \in \mathbb{Z}^{+}$, $m \equiv n \not\equiv 0(mod\ p-1)$ ve p bir asal sayı olmak üzere

$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n}(mod\ p)$denkliği sağlanır.

Genelleştirilmiş ifadesi olarak, a bir doğal sayı, $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$, $m \equiv n(mod\ (p-1)p^{a})ven \not\equiv 0(mod\ p-1)$,$p$ bir asal sayı olmak üzere

$(1-p^{m-1})\frac{B_m}{m} \equiv (1-p^{n-1})\frac{B_n}{n}(mod\ p^{a+1})$denkliği sağlanır.

Şimdi bu ifadelerin doğruluğunu bazı örnekler ile gösterelim. Daha sonra p-adik L-Fonksiyonlarını kullanarak ispat edeceğiz.

4.2 Örnek

$p = 5$ için bu kongrüansın doğruluğunu inceleyelim.

$$p - 1 = 5 - 1 = 4$$

i. $m = 2\ ve\ n = 6$ için

$2 \equiv 6 \not\equiv 0(mod\ 4)$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_6 = \frac{1}{42}$$

$\frac{1}{2.6} \equiv \frac{1}{42.6}(mod\ 5)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$12.1 \equiv 252.1(mod\ 5)$$

$5 \mid 252 - 12$olduğundan

$\frac{1}{2.6} \equiv \frac{1}{42.6}(mod\ 5)$ kongrüansın doğruluğu gösterilmiş olur.

ii. $m = 6\ ve\ n = 10$ için

$6 \equiv 10 \not\equiv 0 (mod\ 4)$

$B_6 = \dfrac{1}{42} \quad , B_{10} = \dfrac{5}{66}$

$\frac{1}{42.6} \equiv \frac{5}{66.10} (mod\ 5)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$5.42.6 \equiv 66.10.1 (mod\ 5)$$

$$210 \equiv 660 (mod\ 5)$$

$5 \mid 660 - 210$olduğundan

$\frac{1}{42.6} \equiv \frac{5}{66.10} (mod\ 5)$ kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

4.3 Örnek

$p = 7$ için bu kongrüansların doğruluğunu inceleyelim.

$p - 1 = 7 - 1 = 6$

i. $m = 2\ ve\ n = 8$ için

$2 \equiv 8 \not\equiv 0 (mod\ 6)$

$B_2 = \dfrac{1}{6} \quad , B_8 = \dfrac{-1}{30}$

$\frac{1}{2.6} \equiv \frac{-1}{30.8} (mod\ 7)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$12.(-1) \equiv 30.8 (mod\ 7)$$

$$-12 \equiv 240 (mod\ 7)$$

$7 \mid 240 - (-12)$olduğundan

$\frac{1}{2.6} \equiv \frac{-1}{30.8} (mod\ 7)$ kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

ii. $m = 4\ ve\ n = 10\ için$

$4 \equiv 10 \not\equiv 0 (mod\ 6)$

$B_4 = \frac{-1}{30}, \qquad B_{10} = \frac{5}{66}$

$\frac{-1}{30.4} \equiv \frac{5}{66.10} (mod\ 7)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$66.10.(-1) \equiv 30.4.5(mod\ 7)$$

$$-660 \equiv 600(mod\ 7)$$

$7 \mid 600 - (-660)$olduğundan

$\frac{-1}{30.4} \equiv \frac{5}{66.10} (mod\ 7)$ kongrüansın doğruluğu gösterilmiş olur.

iii. $m = 8\ ve\ n = 14\ için$

$8 \equiv 14 \not\equiv 0 (mod\ 6)$

$B_8 = \frac{-1}{30}, \qquad B_{14} = \frac{7}{6}$

$\frac{-1}{30.8} \equiv \frac{7}{6.14} (mod\ 7)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$6.14.(-1) \equiv 30.8.7(mod\ 7)$$

$$-84 \equiv 1680(mod\ 7)$$

$7 \mid 1680 - (-84)$olduğundan

$\frac{-1}{30.8} \equiv \frac{7}{6.14} (mod\ 7)$ kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

4.4 Örnek

$p = 11$ için bu kongrüansların doğruluğunu inceleyelim.

$p - 1 = 11 - 1 = 10$

i. $m = 2 \; ve \; n = 12$ için

$2 \equiv 12 \not\equiv 0 (mod\ 10)$

$B_2 = \dfrac{1}{6}, \qquad B_{12} = \dfrac{-691}{2730}$

$\frac{1}{2.6} \equiv \frac{-691}{12.2730} (mod\ 11)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$2.6. (-691) \equiv \ 12.2730 (mod\ 11)$

$11 \mid 32760 - (-8292)$olduğundan

$\frac{1}{2.6} \equiv \frac{-691}{12.2730} (mod\ 11)$kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

ii. $m = 4 \; ve \; n = 14 \; için$

$4 \equiv 14 \not\equiv 0 (mod\ 10)$

$B_4 = \dfrac{-1}{30}, \qquad B_{14} = \dfrac{7}{6}$

$\frac{-1}{4.30} \equiv \frac{7}{14.6} (mod\ 11)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$4.30.7 \equiv (-1). 14.6 (mod\ 11)$$

$11 \mid 840 - (-84)$olduğundan

$\frac{-1}{4.30} \equiv \frac{7}{14.6} (mod\ 11)$kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

iii. $m = 6\ ve\ n = 16\ için$

$6 \equiv 16 \not\equiv 0 (mod\ 10)$

$B_6 = \frac{1}{42}, \qquad B_{16} = \frac{-3617}{510}$

$\frac{1}{6.42} \equiv \frac{-3617}{16.510} (mod\ 11)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$6.42.(-3617) \equiv 16.510 (mod\ 11)$$

$11 \mid -911484 - 8160$olduğundan

$\frac{1}{6.42} \equiv \frac{-3617}{16.510} (mod\ 11)$kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

iv. $m = 8\ ve\ n = 18\ için$

$8 \equiv 18 \not\equiv 0 (mod\ 10)$

$B_8 = \frac{-1}{30} \quad , B_{18} = \frac{43867}{798}$

$\frac{-1}{8.30} \equiv \frac{43867}{18.798} (mod\ 11)$olmalı

Burada 2.7 özelliğini kullanırsak

$$8.30.43867 \equiv (-1)18.798 (mod\ 11)$$

$11 \mid 10528080 - (-14364)$olduğundan

$\frac{-1}{8.30} \equiv \frac{43867}{18.798} (mod\ 11)$kongrüansının doğruluğu gösterilmiş olur.

4.5KUMMER KONGRÜANSININ İSPATI

Özel denklikler a=0 durumu olduğu için genelleştirilmişdenklikleri ispatlayacağız. Hatırlatmak gerekirse:

$m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m \equiv n(mod\ (p-1)p^a)$, $n \not\equiv 0(mod\ p-1)$ ve p bir asal sayı olmak üzere

$(1-p^{m-1})\frac{B_m}{m} \equiv (1-p^{n-1})\frac{B_n}{n}(mod\ p^{a+1})$denkliği sağlanır.

Şimdi Teorem 3.8 i kullanarak

$$L_p(1-n,\chi) = -(1-\chi\omega^{-n}(p)p^{n-1})\ \frac{B_{n,\chi\omega^{-n}}}{n}$$

$$L_p(1-n,\omega^n) = -(1-\omega^n\omega^{-n}(p)p^{n-1})\ \frac{B_{n,\omega^n\omega^{-n}}}{n}$$

ve

$$L_p(1-m,\omega^m) = -(1-\omega^m\omega^{-m}(p)p^{m-1})\ \frac{B_{m,\omega^m\omega^{-m}}}{m}$$

$\omega^m\omega^{-m} = 1\ \ \ ve\ \ \ \omega^n\omega^{-n} = 1$ olduğundan,

$$L_p(1-n,\omega^n) = -(1-p^{n-1})\ \frac{B_n}{n}$$

$$L_p(1-m,\omega^m) = -(1-p^{m-1})\ \frac{B_m}{m}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu noktadan sonra Teorem 3.2.2 kullanılarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$L_p(1-m,\omega^m) = a_0 + a_1(-m) + a_2(-m)^2 + \cdots$$

$|a_0| \leq 1$ ve$\forall i \geq 1$ için $p \mid a_i$.

Bu noktada teoremde verilen

$m \equiv n(mod\ (p-1)p^a)$ifadesini kullanacağız.

$\forall i \geq 1$için$p \mid a_i$ olduğunu da göz önüne alırsak

$a_i(-n)^i \equiv a_i(-m)^i(mod\ p^{a+1})$olduğu göstermeliyiz.

$k, r, l \in Z^+$

$m = k(p-1)p^a - l \quad ve\ n = r(p-1)p^a - l$ diyelim.

$t \in Z^+$olmak üzere $a_i = tp$ diyelim.

$$a_i(-m)^i = tp(-k(p-1)p^a + l)^i$$

$$= tp\left(\binom{i}{0}(-k(p-1)p^a)^i + \binom{i}{1}(-k(p-1)p^a)^{i-1}l + \cdots + \binom{i}{i}l^i\right)$$

$$= t\binom{i}{0}(-k(p-1))^i p^{ai+1} + t\binom{i}{1}(-k(p-1))^{i-1}p^{a(i-1)+1}l + \cdots + tp\binom{i}{i}l^i$$

$$a_i(-n)^i = tp(-r(p-1)\ p^a + l)^i$$

$$= tp\left(\binom{i}{0}(-r(p-1)p^a)^i + \binom{i}{1}(-r(p-1)p^a)^{i-1}l + \cdots + \binom{i}{i}l^i\right)$$

$$= t\binom{i}{0}(-r(p-1))^i p^{ai+1} + t\binom{i}{1}(-r(p-1))^{i-1}p^{a(i-1)+1}l + \cdots + tp\binom{i}{i}l^i$$

$a_i(-n)^i \equiv a_i(-m)^i(mod\ p^{a+1})$olması için

$p^{a+1} \mid a_i(-n)^i - a_i(-m)^i$olmalı

$$a_i(-n)^i - a_i(-m)^i = t\binom{i}{0}p^{ai+1}\left(\big(-r(p-1)\big)^i - \big(-k(p-1)\big)^i\right) +$$
$$t\binom{i}{1}p^{a(i-1)+1}l\left(\big(-r(p-1)\big)^{i-1} - \big(-k(p-1)\big)^{i-1}\right) + \cdots + \left(tp\binom{i}{i}l^i - tp\binom{i}{i}l^i\right)$$

İfadedeki bütün çarpanlar $i \geq 1$ için p^{a+1} e tam bölündüğünden

$a_i(-n)^i \equiv a_i(-m)^i (mod\ p^{a+1})$sağlanmış olur.

$L_p(1-m, \omega^m) = a_0 + a_1(-m) + a_2(-m)^2 + \cdots$

$\equiv a_0 + a_1(-n) + a_2(-n)^2 + \cdots (mod\ p^{a+1})$olur.

$$\equiv L_p(1-n, \omega^n)\ (mod\ p^{a+1})$$

$$L_p(1-n, \omega^n) = -(1-p^{n-1})\ \frac{B_n}{n}$$

$$L_p(1-m, \omega^m) = -(1-p^{m-1})\ \frac{B_m}{m}$$

Olduğundan

$-(1-p^{n-1})\ \frac{B_n}{n} \equiv -(1-p^{m-1})\ \frac{B_m}{m} (mod\ p^{a+1})$olur

her iki tarafı (-1) ile çarparsak,

$(1-p^{n-1})\ \frac{B_n}{n} \equiv (1-p^{m-1})\ \frac{B_m}{m} (mod\ p^{a+1})$elde edilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. KAYNAKLAR

Anonim (2016). Dirichlet Charecter.

https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichletcharacter#cite_note-A139-6 (erişimtarihi,17.01.2016.).

Anonim (2016). DirichletCharecter.http://dlmf.nist.gov/27.8 (erişim tarihi,17.01.2016.).

Anonim (2016). Teichmüller Charecter.

https://en.wikipedia.org/wiki/Teichm%C3%BCller_character (erişim tarihi,17.01.2016.).

Anonim (2016). Bernoulli Sayıları.

https://tr.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_say%C4%B1s%C4%B1 (erişim tarihi:17.01.2016).

Borevich Z.I.,Shafarevich,I.R. (1966). NumberTheory. 435 sayfa:18-47, New York

ÇapkınM. (2009). Bernoulli Sayıları, Polinomları ve Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Bursa

Koblitz N. (1948). P-adicNumber, p-adic Analysis, 147 sayfa: 1-51, New York

Özden H. (2009). P-adic q-Ölçüm ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Bursa

Tali, H.H. (2010). Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Rezidü Teoremi ve Bazı Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul

Urbanowicz J. ,Williams,K.S. (2000). Congruencesfor L- Funcrions, 253 sayfa: 9-21

Washington L.C. (1996). Introduction to Cyclotomic Fields, 485 sayfa:20-63

6. TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında yardımlarını ve desteğini eksik etmeyen, akademik başarısı ve kişiliğiyle örnek alınacak çok değerli danışmanım Doç. Dr. Mehmet KIRDAR'a en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ihtiyaç duyduğum her an yardımını ve anlayışını hiçbir şekilde eksik etmeyen, çok değerli eşime çok teşekkür ederim.

7.ÖZGEÇMİŞ

Rıdvan TOSUNCUK 23/02/1987 Bayburt doğumlu olup 2003 yılında Kaynarca Şevket Sabancı Lisesinden ve 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun olmuştur. Mezuniyet sonrası Aile ve Sosyal Politikalar Bakanlığında bir süre görev yaptıktan sonra 2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığına Öğretmen olarak atanmıştır. Halen Kadırga Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.