**BAZI OPERATÖR UZAYLARININ**
**BÖLÜM UZAYLARI VE TEMSİLLERİ**

**Cansu Binnaz BİNBAŞIOĞLU**

**Yüksek Lisans Tezi**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Erdal BAYRAM**
**2019**

**T.C.**

**TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# BAZI OPERATÖR UZAYLARININ BÖLÜM UZAYLARI VE TEMSİLLERİ

**Cansu Binnaz BİNBAŞIOĞLU**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Erdal BAYRAM**

**TEKİRDAĞ-2019**

Dr. Öğr. Üyesi Erdal BAYRAM danışmanlığında, Cansu Binnaz BİNBAŞIOĞLU tarafından hazırlanan “Bazı Operatör Sınıflarının Bölüm Uzayları ve Temsilleri” isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

**Jüri Başkanı:** Prof. Dr. Mahmut ERGÜT İmza:

**Üye:** Doç. Dr. Mehmet SEZGİN İmza:

**Üye:** Dr. Öğr. Üyesi Erdal BAYRAM (Danışman) İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU
Enstitü Müdürü

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI OPERATÖR UZAYLARININ BÖLÜM UZAYLARI VE TEMSİLLERİ

**Cansu Binnaz BİNBAŞIOĞLU**

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Erdal BAYRAM

Bu çalışma matematikte oldukça öneme sahip bölüm uzayları üzerinedir. Bu konu üzerine belirlenen iki hedeften birincisi olarak vektör uzayları, normlu uzaylar ve Banach cebirleri bağlamında bölüm uzayları ile ilgili gerekli tanımlar, teoremler ve sonuçlar toplanarak sistematik bir şekilde verildi. İkinci olarak Banach örgüleri arasında tanımlı regüler operatörlerin L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ile oluşturulan bölümleri elde edildi ve sıralı uzayların kendine has olan bazı özellikleri elde edildi. Ayrıca L-zayıf kompakt operatörler ile oluşturulan bölümler için bir temsil de sunuldu.

**Anahtar Kelimeler:** Bölüm uzayları, Banach örgüleri, L-zayıf kompakt operatör, M-zayıf kompakt operatör.

**2019, 82 sayfa**

# ABSTRACT

Msc. Thesis

QUOTIENT SPACES OF SOME OPERATOR CLASSES AND THEIR REPRESENTATIONS

**Cansu Binnaz BİNBAŞIOĞLU**

Tekirdağ Namık Kemal University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal BAYRAM

This thesis have been studied quotient spaces which are very important in mathematics. Two main goals have been reached in this direction. The one of them is to collected and systematically give the necessary general definitions, theorems and results regarding quotient spaces of vector spaces, normed spaces and Banach algebras. Our second objective was to obtain quotient spaces of regular operators by L-weakly and M-weakly compact operators defined between Banach lattices. They are also provided a representation for the quotient of regular operators by the class of L-weak compact operators.

**Keywords:** Quotient spaces, Banach lattices, L-weakly compact operators, M-weakly compact operators.

**2019, 82 pages**

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

## SİMGE DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\overline{A}$ | A kümesinin kapanışı |
| $T^*$ | T 'nin adjoint (eşlek) operatörü |
| $[x]$ | $x$ 'in denklik sınıfı |
| $\lVert x \rVert$ | $x$ vektörünün normu |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $c_0$ | Sıfıra yakınsak reel diziler uzayı |
| $\ell_\infty$ | Sınırlı reel diziler uzayı |
| $C(K)$ | $K$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonlar |
| $B_X(a,r)$ | $X$ 'de $a$ merkezli $r$ yarıçaplı birim yuvar |
| $L(X,Y)$ | Lineer operatörler kümesi |
| $B(X,Y)$ | Sınırlı ve lineer operatörler kümesi |
| $W(X,Y)$ | Zayıf kompakt operatörler kümesi |
| $K(X,Y)$ | Kompakt operatörler kümesi |
| $W_L(X,Y)$ | L-zayıf kompakt operatörler kümesi |
| $W_M(X,Y)$ | M-zayıf kompakt operatörler kümesi |
| $L^r(X,Y)$ | Regüler lineer operatörler kümesi |
| $W_L^r(X,Y)$ | Regüler L-zayıf kompakt operatörler kümesi |
| $W_M^r(X,Y)$ | Regüler M-zayıf kompakt operatörler kümesi |

## ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca bana her konuda titizlikle, sabırla yardım eden ve değerli fikirleriyle beni yönlendiren, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım Dr.Öğr.Üy. Erdal Bayram ’a çok teşekkür ederim. Ve tabi ki hayatımın her anında desteklerini, güvenlerini ve sevgilerini bana her zaman hissettirdikleri için aileme çok minnettarım.

# 1. GİRİŞ

Bölüm uzayları, çarpım uzayları, dual uzaylar yeni matematiksel objelerin üretildiği yollardan bazılarıdır. Bir küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntısına göre oluşturulan denklik sınıflarının kümesine bölüm kümesi denir. Tabi ki denklik bağıntısının tanımlandığı küme üzerindeki cebirsel veya topolojik yapılar yardımıyla bölüm kümeleri üzerinde de aynı türden yapılar inşa edilebilir. Bölüm uzayları analizin çok geniş bir kısmında kullanılan önemli araçlardan birisidir. Örneğin fonksiyonel analizin birçok kısmında kullanılan ultraproduct 'ları içerirler. Bazen bölüm uzaylarının yapısı oldukça çok şey anlatmaktadır. Örneğin, ayrılabilir her uzay $\ell_1$ 'in bir bölüm uzayına izomorfiktir. Benzer şekilde, vektör uzaylarının bölüm uzayları da önemli sonuçlar verir. Çünkü vektör uzayları arasında tanımlı $f : V \to W$ örten lineer dönüşümü için, $V / \ker f$ ile $W$ arasında bir izomorfizm vardır. Bazı durumlarda bölüm uzayları orijinal uzayın özelliklerine sahip değilken, bazı durumlarda da çok önemli özellikler bölümler tarafından korunur. Tam tersine $X / M$ ve M 'nin sahip olduğu özellikler $X$ 'in de sahip olmasını gerektirebilmektedir. Bu ise bölüm uzaylarının yapısına bakarak orjinal uzayın yapısı hakkında bilgi sahibi olmamıza imkan sağlar.

Sıralı vektör uzayları teorisi ve özellikle Riesz uzayları olarak da bilinen vektör örgüleri, F. Riesz, L.V. Kantorovich ve H. Freudenthal adındaki üç matematikçinin 1930 lu yıllardaki çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasındaki amaç sınırlı sıralı uzaylar teorisinde tanımlanan regüler operatörlerin bazı kapalı alt sınıflarına göre bölüm uzaylarının araştırılmasıdır. Başlangıç olarak sınırlı operatörler uzayı içinde kapalı olan kompakt ve zayıf kompakt operatörlerin bölüm uzayları ele alınmıştır. Bunun sebebi literatürde bu bölüm uzayları hakkında birçok çalışma yapılmış olması ve diğer farklı operatör alt sınıflarına göre bölüm uzaylarının incelenmesine yardımcı olabilmesidir. Sunulan çalışmada ilgilenilen konular üç ana bölümde toplanmıştır.

İkinci bölüm dört kısımdan oluşmuştur. Bölüm uzayları teorisindeki en temel tanım ve sonuçlar birinci kısımda verilmeye çalışılmıştır. İkinci kısımda lineer uzayların bölüm uzayları ele alınmıştır. Bu kısımda denklik bağıntıları ile alt uzaylar arasındaki ilişkiye dikkat çekilmiş, bölüm uzaylarının da bir vektör uzayı olduğu ispat edilmiş, boyut tanımlanmış ve bölüm dönüşümün bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısım ise normlu uzayların bölüm uzayları ile ilgilidir. Normlu uzayların sadece kapalı alt uzaylarına göre bölüm uzaylarında norm olabilen bölüm normu tanımlanmış, bu norma göre bölüm dönüşümün sürekliliği ve operatör normu gibi özellikleri gözlenmiştir. Ayrıca bölüm uzaylarının tam olup olmadığı durumlar için sonuçlar ispatları ile verilmiştir. Son kısımda ise bölüm uzaylarının Banach cebir yapısı ile ilgili özellikler yer almıştır.

Üçüncü bölüm tamamıyla normlu uzaylar arasında tanımlı sınırlı operatörler uzayının bölüm uzaylarına ayrılmış ve dört kısımdan oluşturulmuştur. Birinci kısımda sınırlı operatörler uzayının cebirsel yapısı ve operatör normu ile ilgili bazı özellikleri yer almıştır. Ayrıca görüntü uzayının Banach uzayı olması durumda kapalı alt uzaylarına göre bölüm uzaylarının da Banach uzayı olduğu ispatlanmıştır. Bu bölümün ikinci kısmında kompakt ve zayıf kompakt operatör sınıflarının özellikleri verilmiştir. Bu sınıflar B(X,Y) içinde kapalı olduklarından bölüm uzaylarının da normlu uzay, Y Banach uzay olması durumunda bölüm uzaylarının da Banach uzay oldukları vurgulanmıştır. Üçüncü kısım ise operatörler arasında bileşke işlemine göre B(X) 'in bir Banach cebir yapısına sahip olması ile ilgilidir. Bu bölümde B(X) 'in kompakt ve zayıf kompakt operatörlere göre bölüm uzaylarının da bir Banach cebiri olduğu ispatlanmış ve sahip olduğu bazı özellikler yer almıştır. Son kısımda ise üçüncü kısımda ele alınan Calkin ve zayıf Calkin cebirlerinin bazı temsilleri sunulmuştur.

Dördüncü bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümün ilk kısımında sıralı uzaylar teorisindeki temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. İkinci kısım ise sıralı uzayların bölümleri ve sıralı uzayların kendine has özelliklerinin incelenmesi yer almaktadır. Üçüncü kısım üç parçadan oluşmakta ve genel olarak Banach örgüleri arasında tanımlı regüler operatörlerin pozitif L-zayıf ve pozitif M-zayıf kompakt operatörler ile üretilmiş alt sınıfları ile elde edilen bölümler irdelenmiştir. Ayrıca son kısımda pozitif L-zayıf kompakt operatörler ile üretilmiş alt uzay ile elde edilen bölüm uzayı için bir sunulmuştur.

# 2. BÖLÜM UZAYLARI

## 2.1 Bölüm Kümeleri

Bu bölümde bölüm uzayları ile ilgili temel tanımlar ve bazı özellikler verilecektir.

### 2.1.1 Tanım

$X$ ve $Y$ boş olmayan herhangi iki küme olsun. $X \times Y$ kümesinin boş olmayan her alt kümesine $X$ 'den $Y$ 'ye bir *bağıntı* denir. $X \times X = X^2$ kümesinin boş olmayan her alt kümesine $X$ üzerinde *ikili bağıntı* denir (Luxemburg ve Zaanen 1971).

### 2.1.2 Tanım

$\sim$, $X$ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\sim$ bağıntısı

i. $Her\ x \in X\ için\ (x, x) \in \sim$. (Yansıma özelliği)

ii. $Her\ x \in X\ için\ (x, y) \in \sim\ iken\ (y, x) \in \sim$. (Simetri özelliği)

iii. $Her\ x \in X\ için\ (x, y) \in \sim\ ve\ (y, z) \in \sim\ iken\ (x, z) \in \sim$. (Geçişme özelliği)

özelliklerini sağlıyor ise $\sim$ bağıntısına bir *denklik bağıntısı* denir (Luxemburg ve Zaanen 1971).

Örneğin;

- "$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$" biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı $\mathbb{R}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.
- $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olmak üzere "$(x, y) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow xy_1 = x_1 y$" biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

### 2.1.3 Tanım

Boş olmayan bir $X$ kümesi üzerinde $\sim$ denklik bağıntısına göre her bir $x \in X$ için $[x] = \{ y \in X : y \sim x \}$ kümesine $x$ 'in denklik sınıfı ve $X/\sim\ = \{[x] : x \in X\}$ küme ailesine de *denklik sınıfları ailesi* veya *bölüm kümesi* denir (Luxemburg ve Zaanen 1971).

Açıktır ki denklik sınıfları, yani bölüm kümesi $X$ 'in bir parçalanışıdır.

**2.1.4 Örnek**

$A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ kümesi üzerinde,

$$\beta = \{(a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c),\ (d,\ d),\ (a,\ c),\ (c,\ a),\ (c,\ d),\ (a,\ d),\ (d,\ c),(d,a)\ \}$$

bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre denklik sınıfları $[a]=\{a,\ c,\ d\ \}$, $[b]=\{b\ \}$, $[c]=\{a,\ d,\ c\ \}$, $[d]=\{a,\ d,\ c\ \}$ olduğundan bölüm kümesi $A/\beta=\{[a],[b]\}$ olur.

**2.1.5 Örnek**

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}/\{0\}$ olmak üzere $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c$ denklik bağıntısına göre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$ bölüm kümesi rasyonel sayılar kümesini tanımlar.

**2.1.6 Tanım**

$X/\sim$ bölüm kümesi olmak üzere;

$$\pi:\ X\ \to X/\sim,\ \ x\ \to \pi(x)\ =[x]$$

dönüşümüne *bölüm dönüşümü* denir (Luxemburg ve Zaanen 1971).

Bölüm dönüşümünün örten olduğu kolaylıkla görülür. Bu noktadan sonra $\pi$ bölüm dönüşümü olarak kullanılacaktır.

**2.1.7 Örnek**

$\pi_1,\ \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izdüşüm dönüşümleri örten, sürekli ve açık olduklarından birer bölüm dönüşümüdür.

**2.1.8 Örnek**

$\pi : Z\times Z^* \to Z\times Z^*/\sim$, (a,b) $\to \dfrac{a}{b}$ biçiminde tanımlanan dönüşüm bölüm dönüşümüdür.

**2.1.9 Tanım**

$(X,\ \tau)$ topolojik uzayı olmak üzere, $\pi$ bölüm dönüşümünü sürekli kılan $X/\sim$ üzerindeki en geniş topoloji olan

$$\tau_\pi = \{ \mathrm{A} \subset X/\sim \ : \ \pi^{-1}(A) \ \in \ \tau \}$$

topolojisine *bölüm topolojisi* ve $(X/\sim,\ \tau_\pi)$ ikilisine de *bölüm topolojik uzayı* denir (Luxemburg ve Zaanen 1971).

**2.1.10 Örnek**

$(\mathbb{R}, d)$ alışılmış topoloji uzayı olsun. Her $x,\ y \in \mathbb{R}$ için "$x \ \sim \ y \ \Leftrightarrow \ (x \ ve \ y \ \le \ 0) \ veya \ (x,\ y \ > 0)$" şeklinde tanımlanan denklik bağıntısını ele alalım. $\mathbb{R}/\sim \ = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ bölüm kümesi üzerinde bölüm topolojisi $\tau_\pi = \{\varnothing,\ \mathbb{R}/\sim,\ \{[1]\}\}$ olur. Çünkü, $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing \ \in \ \tau$, $\pi^{-1}(\mathbb{R}/\sim) = \mathbb{R} \in \ \tau$, $\pi^{-1}(\{[1]\}) \ = \mathbb{R}^+ \in \ \tau$ olur.

## 2.2 Lineer Uzayların Bölümleri

Aşağıdaki önerme lineer uzayların bölüm uzaylarını tanımlayan denklik bağıntıları ile alt uzayları arasındaki yakın ilişkiyi ortaya koyar.

**2.2.1 Önerme**

$X$ bir vektör uzayı ve $M$ bir alt uzay olmak üzere her $x, y \in M$ için

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in M$$

şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır (Heil 2017).

i) $\sim$, $X$ üzerinde denklik bağıntısıdır.

ii) Her bir $\mathrm{x} \ \in \ \mathrm{X}$ için $[x] = \{x + m : m \in M\} = x + M$ olur.

iii) $f + M = g + M$ olması için gerek ve yeter koşul $f - g \in M$ olmasıdır.

iv) Eğer $f \in X$ ve $m \in M$ ise $f + M = f + m + M$ olur.

O halde $X$ lineer uzayının her bir $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{X}$ alt uzayı ile bir denklik bağıntısı tanımlanabileceğinden bir bölüm uzayı elde edilir. Önceki önerme de verilen $x_1, x_2 \in \ \mathrm{X}$ için

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in M$$

olarak tanımlanan bağıntısına göre $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ için denklik sınıfları

$$[x] = \{x + m : m \in M\} = x + M$$

olacaktır. Dolayısıyla $X$ 'in her bir $M$ alt uzayına göre bölüm kümesi $X / M = \{x + M : x \in X\}$ 'dir.

**2.2.2 Örnek**

$\mathbb{C}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı ve $P$ tüm polinomları içeren alt uzay olmak üzere, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ 'nin denklik sınıfları

$$f + P = \{ f + p : p \text{ bir polinom}\}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre, $f + P = g + P$ olması için gerek ve yeter koşul $f - g$ ‘nin polinom olmasıdır. Böylece, $f + P$ denklik sınıfını $f$ 'nin polinomlara göre modülü olarak düşünebiliriz. Yani, farklı polinomlar ile tanımlanan fonksiyonların denklik sınıflarıdır (Heil 2017).

**2.2.3 Örnek**

$X = \mathbb{R}^3$ vektör uzayı ve $M_1 = \{(x, y, 0) : \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}$ ve $M_2 = \{(x, 0, 0) : \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}$ alt uzaylarına göre bölüm uzayları sırasıyla

$$X / M_1 = \{[(0, 0, z)] : \mathrm{z} \in \mathbb{R}\} \text{ ve } X / M_2 = \{[(x, 0, 0)] : x \in \mathbb{R}\}$$

olacaktır.

$X$ vektör uzayının $M \subseteq X$ alt uzayına göre denklik sınıflarının toplamı ve skalerle çarpımı, $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

ve

$$c.(x + M) = cx + M$$

biçiminde tanımlanabilir. Öncelikle bu işlemlerin iyi tanımlı olduklarını göstermemiz gerekir.

Kabul edelim ki $x_1+M=x_2+M$ ve $y_1+M=y_2+M$ olsun. Önerme 2.2.1 (iii) özelliğinden $x_1-x_2=k\in M$ ve $y_1-y_2=l\in M$ vardır. Eğer $h\in(x_1+y_1)+M$ olursa bir $m\in M$ için $h=x_1+y_1+m$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$h=(x_2+k)+(y_2+l)+m=(x_2+y_2)+(k+l+m)\in(x_2+y_2)+M$$

olur. Böylece $(x_1+y_1)+M\subseteq(x_2+y_2)+M$ olduğu görülür. Simetriden karşıt kapsamada doğru olacağından toplam iyi tanımlıdır. Benzer şekilde $\alpha\in\mathbb{F}$ için $h\in\alpha(x_1+M)=\alpha x_1+M$ olduğundan bir $m\in M$ için $h=\alpha x_1+m$ yazılabilir. O halde $k=x_1-x_2\in M$ tanımladığımızda $x_1=x_2+k$ olacağından

$$h=\alpha x_1+m=\alpha(x_2+k)+m=\alpha x_2+\alpha k+m\in\alpha x_2+M$$

olur. Böylece $\alpha x_1+M\subseteq\alpha x_2+M$ olduğu görülür. Yine simetriden karşıt kapsamanın doğru olmasından skalerle çarpımın iyi tanımlı olduğu elde edilir.

Sonuç olarak yukarıda tanımlanan işlemlere göre lineer uzayların alt uzaylarına göre bölüm kümelerinin vektör uzayı olduklarını ifade edebiliriz.

### 2.2.4 Önerme

$X$ lineer uzay ve $M\subseteq X$ alt uzay olmak üzere; yukarıda verilen toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre $X/M$ vektör uzayıdır (Heil 2017).

**İspat:**

$x,y\in X$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ olsun.

1. Toplam işlemi değişmelidir. Gerçekten;

$$[x]+[y]=(x+M)+(y+M)=(x+y)+M=(y+x)+M=(y+M)+(x+M)=[y]+[x].\square$$

2. $X$ 'in sıfır vektörünün denklik sınıfı $\theta+M=M$ olur ve toplamsal birimdir.

$$[\theta]+[x]=(\theta+M)+(x+M)=(\theta+x)+M=x+M=[x].\square$$

3. Toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

$$
\begin{aligned}
([x]+[y])+[z] &= ((x+M)+(y+M))+(z+M) \\
&= (x+y+M)+(z+M) \\
&= (x+y+z)+M \\
&= (x+M)+(y+z+M) \\
&= (x+M)+((y+M)+(z+M)) \\
&= [x]+([y]+[z]).\square
\end{aligned}
$$

4. Her bir $x+M \in X/M$ 'in toplamsal tersi vardır ve $-x+M \in X/M$ olur. Gerçekten,

$$[x]+[-x]=(x+M)+(-x+M)=(x+(-x))+M=\theta+M=M=[\theta]$$

$$[-x]+[x]=(-x+M)+(x+M)=(-x+x)+M=\theta+M=M=[\theta]\ \square$$

5. Her bir $x+M \in X/M$ için

$$1[x]=1(x+M)=(1x)+M=x+M=[x]$$

olduğundan 1 skaler ile çarpımın birimidir. $\square$

6. $\alpha(\beta[x])=\alpha.(\beta(x+M))=\alpha(\beta x+M)=(\alpha\beta x)+M=\alpha\beta(x+M)=\alpha\beta[x].\square$

7. $\alpha([x]+[y])=\alpha.((x+M)+(y+M))=\alpha.((x+y)+M)=\alpha(x+y)+M$

$$=\alpha(x+M)+\alpha.(y+M)=\alpha[x]+\alpha[y]\ \square$$

8. $(\alpha+\beta)[x]=(\alpha+\beta)(x+M)=(\alpha+\beta)x+M=(\alpha x+\beta x)+M$

$$=\alpha(x+M)+\beta(x+M)=\alpha[x]+\beta[x].\square$$

$X$ bir vektör uzayı ve $M$, $X$ 'in boş olmayan alt kümesi olsun. $M$ 'den alınan her bir sonlu sayıda vektörün lineer kombinasyonlarının oluşturduğu alt uzaya $M$ 'nin *gerdiği* veya *ürettiği alt uzay* denir ve $Sp\{M\}$ ile gösterilir. Eğer $M$ lineer bağımsız bir küme ve $X=Sp\{M\}$ oluyorsa $M$ 'ye, $X$ 'in bir *bazı* veya *tabanıdır* denir. O halde $X$ vektör uzayının bir sonlu tabanı varsa $X$ 'e sonlu boyutlu vektör uzayı, aksi halde sonsuz boyutlu vektör uzayı adı verilir. Zorn teoreminin bir sonucu olarak sıfırdan farklı her vektör uzayının bir bazı vardır ve baz vektörlerinin sayısına $X$ 'in *boyutu* denir ve $\dim X$ ile göstereceğiz.

**2.2.5 Teorem**

$V$ sonlu boyutlu vektör uzayı, $W\subset V$ alt uzay ve $\{w_1,\dots,w_m,v_1,\dots,v_n\}$, $\{w_1,\dots,w_m\}$ 'de sırasıyla $V$ ve $W$ 'nin tabanları olsun. Bu durumda $\{[v_1],\dots,[v_n]\}$ kümesi $V/W$ 'nin bir tabanıdır ve $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$ olur (Heil 2017).

**İspat:**

$x\in V/W$ ve bir $v\in V$ için $x=[v]$ olsun. $\{w_i,v_j\}$, $V$ 'nin tabanı olduğundan

$$v=\sum_{i=1}^{m}a_iw_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

yazılabilir. Dolayısıyla $i\in\{1,\dots,m\}$ için $[w_i]=[0]$ sıfır olduğundan

$$x=[v]=\left[v=\sum_{i=1}^{m}a_iw_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\right]=v=\sum_{i=1}^{m}a_i[w_i]+\sum_{j=1}^{n}b_j[v_j]$$

olur. Yani $V/W=sp\{[v_j]\}_{j=1}^{n}$ 'dir.

Kabul edelim ki $\forall\ j\in\{1,\dots,n\}$ için $b_j\in F$ ve $\sum_{j=1}^{n}b_j[v_j]=0$ sağlansın. Buna göre $\sum b_jv_j\in W$ olur. Fakat $W$, $\{w_i\}_{i=1}^{m}$ tarafından üretildiğinden $\sum_{i=1}^{m}a_iw_i=\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$ olacak biçimde $a_i\in F$ elemanları vardır ve $x\in V/W$ de $\sum_{i=1}^{m}(-a_i)w_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j=0$ yazılabilir. Dolayısıyla $\{w_1,\dots,w_m,v_1,\dots,v_n\}$ 'nin lineer bağımsızlığı gereği $\forall j\in\{1,\dots,n\}$ ve $\forall\ i\in\{1,\dots,m\}$ için $a_i=b_j=0$ olmalıdır. Bu ise $\{[v_j]\}_{j=1}^{n}$ kümesinin lineer bağımsızlığını gösterir.

Sonuç olarak $\left\{[v_j]\right\}_{j=1}^{n}$, $V/W$ için bir tabandır. O halde $\dim(V/W)=\dim V-\dim W$ eşitliği açık olarak görülür. □

Aynı zamanda bu teoremin tersi bir sonucu da vardır. $v_1,...,v_n \in V$ olmak üzere $\{[v_1],...,[v_n]\}$, $V/W$ için taban ve $W$ 'nin herhangi bir tabanı da $\{w_j\}$ ise $\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_n\}$ 'de $V$ için bir tabandır. Çünkü $n=\dim V-\dim W$ olduğundan $\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_n\}$ boyutu $\dim V$ 'dir. $v\in V$ için $[v]=\sum_{j=1}^{n}a_j[v_j]$ ise $v-\sum_{j=1}^{n}a_j[v_j]=0$ olacağından $v-\sum_{j=1}^{n}a_jv_j\in W$ olur ve bu durumda $v-\sum_{j=1}^{n}a_jv_j=\sum_{i=1}^{m}b_iw_i$ olacak biçimde $b_i\in\mathbb{R}$ sayıları bulunabilir. Bu da $V=sp\{w_1,...,w_m,v_1,...,v_n\}$ olduğunu gösterir. □

**2.2.6 Tanım**

$X$ vektör uzayının $M\subseteq X$ alt uzayına göre bölüm uzayının boyutu $M$ 'nin *eş boyutu (codimension)* ile isimlendirilir ve $co\dim(M)$ ile gösterilir. Yani;

$$co\dim(M)=\dim(X/M)$$

(Heil 2017).

**2.2.7 Örnek**

$M=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^p : x_1=0\right\}$, kapalı alt uzayı için $co\dim(M)=1$ ve $l^p\cong M$ sağlanır (Heil 2017).

**2.2.8 Örnek**

$M=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\ell^p : x_{2k}=0 \quad \forall\ k\in\mathbb{N}\right\}$ kapalı alt uzayı için $co\dim(M)=\infty$, $l^p\cong M$ ve $l^p/M\cong l^p$ sağlanır (Heil 2017).

$X/M$ 'in vektör uzayı olması sebebiyle bölüm dönüşümünün bazı özelliklerini aşağıdaki önermedeki gibi verebiliriz.

**2.2.9 Önerme**

$X$ vektör uzayının $M\subseteq X$ alt uzayı için $\pi: X\to X/M$ bölüm dönüşümü için aşağıdakiler sağlanır (Heil 2017).

i. $\pi$ lineer ve örtendir.

ii. $\ker(\pi) = M$

iii. $E \subseteq X$ için $\pi^{-1}(\pi(E)) = E + M = \{u + m : u \in E, m \in M\}$ olur.

**İspat:**

**i.** Her bir $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$\pi(x + \alpha y) = x + \alpha y + M = x + \alpha y + m_1 + m_2$$

olacak biçimde $m_1, m_2 \in M$ bulunabilir. Dolayısıyla

$$x + m_1 + \alpha y + m_2 = x + M + \alpha(y + M) = \pi(x) + \alpha\pi(y)$$

olur. Yani $\pi$ lineerdir. Her bir denklik sınıfının bir üreticisinin olması ve bölüm dönüşümünün tanımından $\pi$ 'nin örtenliği açıktır. $\square$

**ii.** $y \in \ker(\pi) = \{x \in X : \pi(x) = \theta_{X/M}\} \Leftrightarrow \pi(y) = \theta_{X/M}$

$$\Leftrightarrow y + M = \theta_X + M$$

$$\Leftrightarrow y \in M$$

olduğundan $Ker(\pi) = M$ eşitliği görülür. $\square$

**iii.** $\pi(E) = \{x + M : x \in E\}$ olduğundan

$$y \in \pi^{-1}(\pi(E)) \Leftrightarrow \pi(y) \in \pi(E)$$

$\Leftrightarrow y + M = x + M$ olacak biçimde $\exists\, x \in E$ vardır.

$\Leftrightarrow y \in E + M$

'dir. Yani $\pi^{-1}(\pi(E)) = E + M$ sağlanır. $\square$

### 2.2.10 Teorem

$U$ ve $V$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayları, $W \subseteq \ker\psi$ olacak biçimde $W \subseteq V$ alt uzay ve $\psi : V \to U$ lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $\psi = \phi \circ \pi$ sağlanacak şekilde bir tek $\phi : V/W \to U$ lineer dönüşümü vardır (Heil 2017).

Bu özellik aşağıdaki diyagram ile özetlenebilir:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \\ V/W \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

**İspat:**

$\phi : V/W \to U,\ [v] \mapsto \psi(v)$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda $\phi$ iyi tanımlıdır. Çünkü, $[v] \in V/W$ için $[v]=[v_1]=[v_2]$ olacak biçimde $v_1, v_2 \in V$ varsa $v_1 = v_2 + w$ olacak şekilde bir $w \in W$ vardır. Böylece,

$$\psi(v_1) = \psi(v_2 + w) = \psi(v_2) + \psi(w) = \psi(v_2)$$

olur. Ayrıca $\psi$ lineer olduğundan $\phi$ 'nin lineer olması ve tanımı gereği $\psi = \phi o \pi$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki $\sigma o \pi = \psi = \phi o \pi$ olacak şekilde $\sigma : V/W \longrightarrow U$ olsun. O halde her $v \in V$ için $\sigma([v]) = \phi([v])$ olur ki $\pi$ 'nin örten olması $\sigma = \phi$ eşitliğini gerektirir. Yani $\phi$ tektir. □

Örneğin, $\mathbb{R}$ üzerinde her mertebeden diferensiyellenebilen fonksiyonların uzayı $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$, sabit fonksiyonların uzayı $W \subseteq V$ ve $\psi : V \to V,\ \psi(f) \mapsto f'$ diferensiyel operatörünü düşünelim. O halde $W \subseteq \ker(\psi)$ olduğundan $\psi = \phi o \pi$ olacak şekilde bir tek $\phi : V/W \longrightarrow V$ dönüşümü vardır. Buna göre $f, g \in V$ fonksiyonlarının $[f]=[g]$ sağlaması için gerek ve yeter koşul $f' = g'$ olmasıdır.

Diğer taraftan tüm örten dönüşümler ile bölümler oluşturulabilir. Kabul edelim ki $T : V \to U$ örten dönüşüm olsun. O halde teorem gereği birebir ve örten olan $\overline{T} : V/\ker T \to U$ lineer dönüşümü vardır. Böylece, $\psi : V \to U$ lineer dönüşümünün $T$ örten dönüşümü vasıtasıyla faktör edilmesiyle $\psi$ dönüşümünün $V/W$ bölümü ile faktör edilmesi aynıdır.

Yukarıdaki teoremin yararlı bir sonucu da vardır. $\mathbb{F}$ üzerinde iki vektör uzayı $V_1$, $V_2$ ve $W_1 \subseteq V_1$, $W_2 \subseteq V_2$ alt uzaylar olsun. Bölüm dönüşümlerini $\pi_1 : V_1 \longrightarrow V_1/W_1$ ve $\pi_2 : V_2 \longrightarrow V_2/W_2$ ile gösterelim. Kabul edelim ki $T : V_1 \longrightarrow V_2$ lineer dönüşümü için $T(W_1) \subseteq W_2$ sağlansın. $\widetilde{T} : V_1 \longrightarrow V_2/W_2,\ x \mapsto \pi_2(T(x))$ dönüşümünü düşünürsek $W_1 \subseteq Ker(\widetilde{T})$ sağlanır. Böylece Teorem 2.2.10 gereği $\overline{T} o \pi_1 = \widetilde{T}$ olacak şekilde bir tek $\overline{T} : V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ lineer dönüşümü vardır. Bu durum, aşağıdaki diyagram ile betimlenebilir:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\widetilde{T}"] & V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1/W_1 \arrow[r, "\overline{T}"] & V_2/W_2 \end{tikzcd}$$ □

## 2.3 Normlu Uzayların Bölümleri

Lineer uzayların alt uzaylarına göre bölüm uzaylarının, verilen toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre lineer uzay olduğunu önceki bölümde görüldü. O halde normlu uzayların alt uzaylarına göre elde edilen bölüm uzaylarının üzerinde hangi normların tanımlanabileceği ve ne zaman tam olabileceklerini sormak doğaldır. Bu bölümde bu noktalar ele alınacaktır.

### 2.3.1 Önerme

$X$ normlu lineer uzay ve bir alt uzayı $M$ olmak üzere; her $x \in X$ için tanımlanan,

$$\|.\|_{X/M} : X/M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$[x] \to \|[x]\|_{X/M} = dist(x, M) = \inf\{\|x-m\| : \ m \in M\}$$

fonksiyonu için aşağıdakiler geçerlidir (Heil 2017).

i. İyi tanımlıdır.

ii. $X/M$ üzerinde bir yarı-normdur.

iii. $M$ kapalıysa $X/M$ üzerinde bir normdur.

**İspat:**

Notasyon sadeliği için $\|[x]\|_{X/M}$ yerine $\|x\|_{X/M}$ kullanacağız.

i. X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu negatif olmayan değerler aldığından $\{\|x-m\| : \ m \in M\}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de alttan 0 ile sınırlıdır ve dolayısıyla bir infimuma sahiptir. İnfimumum tekliğinden fonksiyon iyi tanımlıdır.

ii. Her bir $[x] \in X/M$ için $\|[x]\|_{X/M} \geq 0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\|\alpha(x+M)\|_{X/M} = \|\alpha x + M\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \|\alpha x - m\| = |\alpha| \inf_{m \in M} \|x-m\| = |\alpha| \|x+M\|_{X/M}$$

olur. Üçgen eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $\forall \varepsilon > 0$ ve $x, y \in X$ için

$$\|x-m_1\| \leq \|x\|_{X/M} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ve} \qquad \|y-m_2\| \leq \|y\|_{X/M} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde $m_1, m_2 \in M$ vardır. Dolayısıyla,

$$\|x+y\|_{X/M} = \inf_{m\in M}\|x+y-m\| \le \|x+y-m_1-m_2\| \le \|x-m_1\|+\|y-m_2\| \le \|x\|_{X/M}+\|y\|_{X/M}+\varepsilon$$

eşitsizliğinden istenen elde edilir. Son olarak M 'nin alt uzay olması sebebiyle

$$\|[0]\|_{X/M} = \inf_{m\in M}\|m\| = 0$$

olur.

M 'in sadece alt uzay olması, bu fonksiyonun bir norm olması için genelde yeterli değildir. Çünkü, $\|x\|_{X/M} = 0$ olmasına rağmen $0 \ne x \in \overline{M}/M$ elemanının var olduğu durumları görmek kolaydır. Örneğin; Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesi düşünülebilir. Ancak, M kapalı ise, durum farklıdır.

iii. M 'nin kapalı olması nedeniyle $\|[x]\|_{X/M} = 0$ eşitliğinin $[x]=[0]$ olmasını gerektirdiğini göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $M$ kapalı ve $\|x\|_{X/M} = \inf\{\|x-m\| : m\in M\} = 0$ olsun. O halde infimum özelliğinden, her bir $n\in\mathbb{N}$ için $\|x-m_n\| < \frac{1}{n}$, yani $n\to\infty$ iken $\|x-m_n\|\to 0$ olacak biçimde bir $(m_n)\subset M$ dizisi vardır. Bu ise $M$ 'nin kapalı olması sebebiyle $x\in M$ ve dolayısıyla $x\in[0]$ olmasını gerektirir. Yani $[x]=[0]$ 'dır. □

Sonuç olarak, $X$ normlu uzay ve bir alt uzayı $M$ ise $\left(X/M,\ \|.\|_{X/M}\right)$ normlu uzaydır. Böylece sıradaki önermede verildiği gibi, bölüm dönüşümünün bazı topolojik özelliklerinden bahsedebiliriz.

### 2.3.2 Önerme

$X$ normlu lineer uzay ve $M$ kapalı alt uzayı için aşağıdakiler sağlanır (Heil 2017).

i. Her bir $x\in X$ için $\|\pi(x)\|_{X/M} = \|x+M\|_{X/M} \le \|x\|$ eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla $\pi$ süreklidir.

ii. $X$ 'de $r$ yarıçaplı, $x$ merkezli açık yuvar $B_X\left(x,r\right)$ ve $X/M$ 'de $r$ yarıçaplı, $x+M$ merkezli açık yuvar $B_{X/M}\left(x+M,r\right)$ için $\pi\left(B_X\left(x,r\right)\right)=B_{X/M}\left(x+M,r\right)$ sağlanır.

iii. $W\subseteq X/M$ açık olması için gerekli ve yeterli koşul $\pi^{-1}\left(W\right)=\left\{f\in X: f+M\in W\right\}\subset X$ açık olmasıdır.

iv. $\pi$ açık bir dönüşümdür. Yani, $U\subset X$ açık ise $\pi(U)\subset X/M$ açıktır.

**İspat:**

i. Bölüm normunun tanımı ve M 'nin alt uzay olmasından, her bir $x\in X$ için $\|\pi(x)\|_{X/M}\leq\|x+0\|=\|x\|$ eşitsizliği kolaylıkla görülür. Böylece normun sürekliliği, $\pi$ bölüm dönüşümünün de sürekli olmasını gerektirir.

ii. İlk olarak $x=\theta$ durumunu göz önüne alalım. Kabul edelim ki $y+M\in\pi\left(B_X\left(\theta,r\right)\right)$ olsun. O halde $y+M=h+M$ olacak biçimde $h\in B_X\left(\theta,r\right)$, yani $\|h\|<r$ vardır. Böylece $\inf_{m\in M}\|y-m\|=\|y+M\|_{X/M}=\|h+M\|_{X/M}\leq\|h\|<r$, dolayısıyla $y+M\in B_{X/M}\left(\theta+M,r\right)$ olur. Bu ise $\|y-m\|<r$ olacak biçimde bir $m\in M$ olduğunu, yani $y-m\in B_X\left(\theta,r\right)$ olduğunu gösterir. Buradan da

$$y+M=y-m+M=\pi\left(y-m\right)\in\pi\left(B_X\left(\theta,r\right)\right)$$

olduğu görülür.

Keyfi bir $x\in X$ seçelim. $y+M\in\pi\left(B_X\left(x,r\right)\right)$ olsun. $h\in B_X\left(x,r\right)$ için $y+M=h+M$ alındığında bir $m\in M$ için $y-h=m\in M$ ve $\|h-x\|<r$ yazılabilir. Böylece $\|y+M\|_{X/M}=\|h+M\|_{X/M}\leq\|h-x\|<r$ ve $\|y+M\|_{X/M}\leq\|y-m-x\|<r$ sağlanır. O halde $y+M\in B_{X/M}\left(x+M,r\right)$ 'dir. Buradan $\inf_{m\in M}\|y-x-m\|=\|y+x+M\|_{X/M}<r$ olur Böylece $\|y-x-m\|<r$ olan bir $m\in M$ vardır Dolayısıyla $y-m\in B_X\left(x,r\right)$ 'dir. Buradan da

$$y+M=y-m+M=\pi\left(y-m\right)\in\pi\left(B_X\left(x,r\right)\right)$$

olduğu görülür.

iii. $\pi$ sürekli olduğundan $W \subset X / M$ açık ise $\pi^{-1}(W) \subset X$ açık olmak zorundadır. Tersine kabul edelim ki $W \subset X / M$ için $\pi^{-1}(W) \subset X$ açık olsun. Herhangi bir $x + M \in W$ elemanını seçelim. $x \in \pi^{-1}(W)$ olduğundan $B_X(x, r) \subseteq \pi^{-1}(W)$ olacak biçimde $r > 0$ vardır. (ii) 'den $B_{X/M}(x+M, r) = \pi(B_X(x, r)) \subseteq \pi(\pi^{-1}(W)) = W$ sağlanır. Yani $W$ açıktır.

iv. Kabul edelim ki $U \subset X$ açık olsun. O halde Önerme 2.2.9 (iii) 'den

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U + M = \{u + m : u \in U, m \in M\} = \bigcup_{m \in M}(U + m)$$

olur. Buradan, $U$ açık kümesi için $U + m$ açıktır ve açık kümelerin birleşimleri açık olduğundan $\pi^{-1}(\pi(U))$ açıktır. (iii) 'den $\pi(U) \subset X / M$ açık olduğu görülür. □

Normlu uzaylar için bölüm dönüşümünün normunu bulmak için ispatsız vereceğimiz aşağıdaki lemmadan faydalanacağız.

### 2.3.3 Lemma

$X$ normlu uzay ve $M$ kapalı alt uzay olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|x\| = 1 \qquad \text{ve} \qquad dist(x, M) = \inf_{m \in M}\|x - m\| > 1 - \varepsilon$$

olacak biçimde bir $x \in X$ vardır (Kreyszig 1978).

### 2.3.4 Önerme

$X$ normlu uzay ve $M \subset X$ kapalı alt uzay olmak üzere $\pi : X \to X / M$ kanonik dönüşümü için $\|\pi\| = 1$ 'dir. Yani bölüm fonksiyonu bir büzülme dönüşümüdür. (Heil 2017).

**İspat:**

Riesz lemması gereğince $\varepsilon > 0$ için $\|x\| = 1$ ve

$$\|\pi(x)\| = dist(x, M) = \inf_{m \in M}\|x - m\| > 1 - \varepsilon$$

olacak biçimde $x \in X$ vardır. O halde $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\|\pi\| > 1 - \varepsilon$ sağlanacağından $\|\pi\| > 1$ 'dir. Diğer taraftan

$$\|\pi(x)\| = \inf_{m \in M}\|x - m\| \leq \|x - 0\| \leq \|x\|$$

olduğundan operatör normu tanımı gereğince

$$\|\pi\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} \|\pi(x)\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} \inf_{m\in M} \|x-m\| \le \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\le 1}} \|x\| \le 1$$

olur. □

Banach uzayların kapalı alt uzaylarına göre bölüm uzaylarının tamlığı aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

**2.3.5 Teorem**

$X$ Banach uzayının kapalı bir alt uzayı $M$ için $X/M$ Banach uzayıdır (Heil 2017).

**İspat:**

$X$ normlu uzayının tamlığının $X/M$ 'in tam olmasını gerektirdiğini kanıtlamak yeterlidir.

Bilindiği gibi bir Cauchy dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır. Kabul edelimki $(x_n + M)_{n\in\mathbb{N}}$, $X/M$ 'de Cauchy dizisi olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) + M\right\|_{X/M} = \left\|\left(x_{n_{k+1}} + M\right) - \left(x_{n_k} + M\right)\right\|_{X/M} < 2^{-k}$$

olacak biçimde bir $\left(x_{n_k} + M\right)_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. $\left(x_{n_k} - y_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $X$ 'de yakınsak olacak biçimde $y_k \in M$ elemanları bulmak istiyoruz.

$$y_1 = 0 \text{ ise } \inf_{m\in M} \left\|\left(x_{n_1} - y_1\right) - \left(x_{n_2} - m\right)\right\| = \inf_{m\in M} \left\|\left(x_{n_1} - x_{n_2}\right) + m\right\| = \left\|\left(x_{n_1} - x_{n_2}\right) + M\right\|_{X/M} < \frac{1}{2}$$

olur. Dolayısıyla $\left\|\left(x_{n_1} - y_1\right) - \left(x_{n_2} - y_2\right)\right\| < \frac{1}{2}$ olacak biçimde $y_2 \in M$ vardır ve

$$\inf_{m\in M} \left\|\left(x_{n_2} - y_2\right) - \left(x_{n_3} - m\right)\right\| = \inf_{m\in M} \left\|\left(x_{n_2} - x_{n_3}\right) + m\right\| = \left\|\left(x_{n_2} - x_{n_3}\right) + M\right\|_{X/M} < \frac{1}{2^2}$$

sağlanır. Aynı şekilde $\left\|\left(x_{n_2} - y_2\right) - \left(x_{n_3} - y_3\right)\right\| < \frac{1}{2^2}$ olacak biçimde $y_3 \in M$ vardır. Bu şekilde devam edersek tümevarımla $\|h_k - h_{k+1}\| < \frac{1}{2^k}$ olacak biçimde $h_k = x_{n_k} - y_k$

elemanlarını buluruz. $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $X$ 'de Cauchy dizisi ve $X$ tam olduğundan yakınsaktır, yani, $h_k \to h$ olacak biçimde bir $h \in X$ vardır. O halde

$$\begin{aligned}\left\|\left(x_{n_k}+M\right)-\left(h+M\right)\right\|_{X/M} &= \left\|x_{n_k}-y_k-h+M\right\|_{X/M} \\ &= \left\|h_k-h+M\right\|_{X/M} \\ &\leq \left\|h_k-h\right\| \to 0\end{aligned}$$

olduğundan $\left(x_{n_k}+M\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak alt dizidir. $\left(x_n+M\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi yakınsak alt diziye sahip olduğundan yakınsak olmalıdır. Bu da $X/M$ 'nin tam olduğunu gösterir. □

**2.3.6 Örnek**

$c_0=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}:\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0\right\}$ ve $c=\left\{x=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}:\lim\limits_{k\to\infty}x_k \text{ var}\right\}$, $l^\infty$ içinde kapalı olduklarından $l^\infty/c$ ve $l^\infty/c_0$ bölüm uzayları Banach uzaylarıdır (Heil 2017).

**2.3.7 Örnek**

$I\subset\mathbb{R}$ bir aralık ve $p\in[1,\infty)$ olsun. $I$ üzerinde tanımlı $p$-integrallenebilir Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}^p(I)$ ile gösterelim ve $\|f\|_p=\left(\int\limits_I |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ olsun. Yani $L^p(I)=\left\{f:I\to\mathbb{C}\mid f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_p<\infty\right\}$ 'dir.

$$|f+g|^p\leq\left(|f|+|g|\right)^p\leq\left(2\max\left\{|f|,|g|\right\}\right)^p=2^p\max\left\{|f|^p,|g|^p\right\}\leq 2^p\left(|f|^p,|g|^p\right)$$

eşitsizliği yardımıyla fonksiyonlar arasında noktasal toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre $\mathcal{L}^p(I)$ bir lineer uzaydır. Fakat Minkowski eşitsizliğinden biliyoruz ki $f\mapsto\|f\|_p$ dönüşümü bir yarı norm olmasına karşın bir norm tanımlamaz. Diğer taraftan $N:=\left\{f\in L^p(I):\|f\|_p=0\right\}$ için $L^p(I):=\mathcal{L}^p(I)/N$ bölüm uzayı $[f]\mapsto\|[f]\|_p:=\|f\|_p$ normu ile bir Banach uzayıdır. Burada belirtmeliyiz ki bir fonksiyonun $N$ 'de olması için gerekli ve yeterli koşul fonksiyonun hemen hemen her yerde sıfır olmasıdır.

Benzer şekilde $I$ üzerinde esas sınırlı olan Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{L}^{\infty}(I)$ ile gösterelim ve $\|f\|_{\infty} := \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ hemen hemen her yerde}\}$ olsun. Yani $\mathcal{L}^{\infty}(I) = \{f : I \to \mathbb{C} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \|f\|_{\infty} < \infty\}$ 'dir. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi $f \mapsto \|f\|_{\infty}$ dönüşümü bir yarı normdur. $\mathcal{L}^{\infty}(I)$ 'nın hemen hemen her yerde sıfır olan fonksiyonların kümesi $N := \{f \in L^{\infty}(I) : \|f\|_{\infty} = 0\}$ olmak üzere $[f] \mapsto \|[f]\|_{\infty} := \|f\|_{\infty}$ normu ile $L^{\infty}(I) := \mathcal{L}^{\infty}(I)/N$ bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.3.5 'in tersi genelde doğru olmasa da aşağıdaki teorem tersinin de doğru olabileceği bir durumu vermektedir.

**2.3.8 Teorem**

$X$ normlu uzayının kapalı bir alt uzayı $M$ olsun. Eğer $M$ ve $X/M$ 'nin her ikisi de tam ise $X$ tam olmak zorundadır (Heil 2017).

**İspat:**

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ 'de Cauchy dizisi olsun. O halde $(x_n + M)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $X/M$ 'de Cauchy dizisidir. $X/M$ 'in tam olması $(x_n + M)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $x+M$ elemanına yakınsamasını gerektirir. Yani $\inf_{m\in M}\|x_n - x + m\| = \|x_n - x + M\|_{X/M} \to 0$ sağlanır. Bölüm normunun tanımı gereği $\|x_n - x + h\| \to 0$ olan bir $h \in X$ vardır. Dolayısıyla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisinin yakınsaklığı $X$ 'in tam olduğunu gösterir. □

**2.3.9 Sonuç**

$X$ normlu uzayının kapalı bir alt uzayı $M$ ve sonlu boyutlu bir alt uzayı $N$ ise $M+N$ kapalıdır (Heil 2017).

**İspat:**

$N$ sonlu boyutlu olduğundan bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tabanına sahiptir. $\pi : X \to X/M$ bölüm dönüşümünün lineerliğinden

$$\pi(N) = \pi(span\{e_1, ..., e_n\}) = span\{\pi(e_1), ..., \pi(e_n)\} = span\{e_1 + M, ..., e_n + M\}$$

sağlanır ve bu eşitlik $\pi(N)$ 'in sonlu boyutlu, dolayısıyla kapalı alt uzay olduğunu gösterir. Dahası $\pi$ sürekli olduğundan $\pi^{-1}(\pi(N))$ kapalıdır. Böylece Önerme 2.2.9 (iii) sonucu $\pi^{-1}(\pi(N)) = M + N$ eşitliğinden istenen görülür. □

Aşağıdaki teorem bölüm uzaylarının uygulamada ne kadar önemli olduğuna dair önemli bir örnektir.

**2.3.10 Teorem**

Ayrılabilir her Banach uzayı, $\ell_1$ 'in bir bölüm uzayına izometrik izomorfiktir (Hajlasz 2009, Teorem 4.6).

**İspat:**

$X$ ayrılabilir Banach uzayı, $\ell_1$ 'in kapalı bir alt uzayı $Y$ olsun. $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ kapalı birim yuvarı içinde sayılabilir ve yoğun olan $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ alt kümesini ve

$$T : \ell^1 \longrightarrow X, \quad T(\lambda_1, \lambda_2, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

lineer dönüşümünü düşünelim. O halde,

$$\left\| T(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \left\| (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_1 \qquad \cdots(*)$$

olduğundan $T$ süreklidir. Diğer taraftan, her $x \in X$, her pozitif $k$ tamsayısı ve $\varepsilon > 0$ için $\big\| x - \|x\| x_n \big\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n > k$ vardır. Aşikar olarak $x = 0$ için $T(0) = x$ olur. $x \neq 0$ ise, $\big\| x - \|x\| x_n \big\| < \varepsilon$ eşitsizliği $\left\| \frac{x}{\|x\|} - x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ ifadesine denktir ve $x_n$ 'nin varlığı, birim yuvar içinde yoğun olduklarından görülür. $\lambda_{n_1} = \|x\|$ iken $\left\| x - \lambda_{n_1} x_{n_1} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $n_1$ olsun. Benzer şekilde, $\lambda_{n_2} = \left\| x - \lambda_{n_1} x_{n_1} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ iken $\left\| \left( x - \lambda_{n_1} x_{n_1} \right) - \lambda_{n_2} x_{n_2} \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde

$n_2 > n_1$ olsun. $\lambda_{n_3} = \left\| x - \lambda_{n_1} x_{n_1} - \lambda_{n_2} x_{n_2} \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$ iken $\left\| \left( x - \lambda_{n_1} x_{n_1} - \lambda_{n_2} x_{n_2} \right) - \lambda_{n_3} x_{n_3} \right\| < \frac{\varepsilon}{8}$ olacak şekilde $n_3 > n_2$ olsun. Bu şekilde devam edildiğinde,

$$\lambda_{n_{k+1}} = \left\| x - \left( \lambda_{n_1} x_{n_1} + ... + \lambda_{n_k} x_{n_k} \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad \dots (**)$$

olacak şekilde $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, ...$ dizisi elde edilir. $i \notin \{n_1, n_2, n_3, ...\}$ ise $\lambda_i = 0$ olacak $\lambda_{x,\varepsilon} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...)$ alalım. Açıktır ki, $\left\| \lambda_{x,\varepsilon} \right\|_1 \leq \|x\| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + ... = \|x\| + \varepsilon$ olduğundan $\lambda_{x,\varepsilon} \in \ell^1$ 'dir. Böylece $T$ 'nin sürekliliği ve $(**)$ eşitsizliği $T(\lambda_{x,\varepsilon}) = x$ olmasını gerektirir. Bu ise $T$ 'nin $X$ üzerinde örten olduğunu gösterir.

$Y = \ker T = \left\{ \lambda \in \ell^1 : T(\lambda) = 0 \right\}$ olsun. Böylece $T$, $\ell^1 / Y$ ve $X$ lineer uzayları arasında örten cebirsel izomorfizm indirger. $T$ sürekliliği $Y$ ‘nin, $\ell^1$ 'de kapalı olmasını gerektirir ki bu ise $\ell^1 / Y$ ‘in bir Banach uzayı olmasını sağlar. Ayrıca $T(\lambda) = x$ ise $[\lambda] = \left\{ \gamma : T(\gamma) = x \right\} \in \ell^1 / Y$ olur.

Son olarak bu cebirsel izomorfizmin aynı zamanda izometri olduğunu gösterelim. Yani, $T(\lambda) = x$ olduğunda $\|[\lambda]\| = \|x\|$ olmalıdır. $T(\lambda_{x,\varepsilon}) = x$ olduğundan $\lambda_{x,\varepsilon} \in [\lambda]$ ve dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $\|[\lambda]\| \leq \left\| \lambda_{x,\varepsilon} \right\| \leq \|x\| + \varepsilon$ 'dur. Dolayısıyla $\|[\lambda]\| \leq \|x\|$ sağlanır. Diğer taraftan $T(\lambda) = x$ ise her $\gamma \in [\lambda]$ için $(*)$ eşitsizliği $\|x\| = \|T(\gamma)\| \leq \|\gamma\|_1$ olmasını ve dolayısıyla $\|[\lambda]\| = \inf_{\gamma \in [\lambda]} \|\gamma\|_1 \geq \|x\|$ olmasını gerektirir. Son iki eşitsizlikten $\|[\lambda]\| = \|x\|$ olduğu görülür. Yani $T : \ell^1 / Y \to X$ örten bir izometridir. □

### 2.4 Banach Cebirleri ve Bölümleri

$F$ cismi üzerinde bir vektör uzayı $\mathcal{A}$ için

$$. : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad , \quad (x, y) \to xy$$

işlemi tanımlansın. Buna göre $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in K$ için

$$(xy)z = x(yz)$$

$$x(y+z)=xy+xz$$

$$(x+y)z=xz+yz$$

$$\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya bir *cebir* denir. $F$ cismi $\mathbb{R}$ yada $\mathbb{C}$ ise $\mathcal{A}$ 'ya sırasıyla reel yada *kompleks cebir* denir. Ayrıca, her $x,y\in\mathcal{A}$ için $xy=yx$ sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ değişmeli cebir, her $x\in\mathcal{A}$ için $xe=ex=x$ olan $e\in\mathcal{A}$ varsa $\mathcal{A}$ birimli cebir olarak isimlendirilir. $e$ elemanına birim eleman denir ve eğer varsa birim tektir (Caradus, Pfaffenberger ve Yood 1974).

Örneğin;

- $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sayılar kümesi adi çarpma işlemleri ile birimli ve değişmeli cebirlerdir.
- Rasyonel katsayılı polinomların kümesi ve reel katsayılı polinomların kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birimli ve değişmeli cebirlerdir.
- $n\times n$ reel değişkenli matrisler, matris çarpımına göre birimli bir cebirdir fakat değişmeli değildir.

**2.4.1 Tanım**

$\mathcal{A}$ cebiri üzerinde tanımlı bir norm için

$$\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya *normlu cebir* denir. Eğer $\mathcal{A}$ birimli ve birimi $e$ ise $\|e\|=1$ olacaktır. $\mathcal{A}$ normlu cebiri tam ise bu takdirde $\mathcal{A}$ 'ya *Banach cebiri* denir (Caradus, Pfaffenberger ve Yood 1974).

**2.4.2 Örnek**

$\mathrm{K}$ kompakt metrik uzay olmak üzere $C(\mathrm{K})=\{f:K\to\mathbb{R}: f \text{ sürekli}\}$ lineer uzayı, $\|f\|_\infty=\sup_{t\in\mathrm{K}}|f(t)|$ normu ile bir normlu uzaydır. Diğer taraftan fonksiyonların noktasal çarpımı, $(fg)(x)=f(x)g(x)$ ile birimli ve değişmeli cebirdir ve

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x\in K}|fg(x)| \le \left(\sup_{x\in K}|f(x)|\right)\left(\sup_{x\in K}|g(x)|\right) = \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

sağlanacağından bir Banach cebiridir.

**2.4.3 Tanım**

$\mathcal{A}$ bir cebir ve $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ lineer alt küme olsun.

i. Eğer $I$ , $\mathcal{A}$ 'nın işlemlerine göre işlemlerine göre bir cebir oluyorsa *alt cebirdir* denir.

ii. Her $x \in A$ ve $y \in I$ için $xy \in I$ ise $I$ *sol ideal*, benzer şekilde $yx \in I$ ise *sağ idealdir* denir. Hem sağ hem sol ideal olan ideallere *çift taraflı ideal* denir.

Bu tanımlamalara göre açıktır ki her ideal bir alt cebir olur. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir.

$X$ normlu uzayının kapalı alt uzayına göre bölüm uzayının normlu uzay, hatta $X$ tam uzay olduğunda ise Banach uzayı olduğu daha önceden gösterilmişti. Benzer olarak bir Banach cebirinin kapalı ideallerine göre bölüm uzaylarının da Banach cebiri olduğu sıradaki teorem ile verilmiştir.

**2.4.4 Teorem**

$A$ bir Banach cebiri ve $I$ kapalı çift taraflı ideal olsun. Bu durumda

$$[x][y] = [xy] = xy + I$$

işlemleri ve bölüm normuyla birlikte $A/I$ bir Banach cebiridir (Caradus, Pfaffenberger ve Yood 1974).

**İspat:**

$A/I$ 'nin Banach uzayı olduğunu Teorem 2.3.5 'den biliyoruz. $I$ çift taraflı kapalı ideal ise teoremin ifadesinde verilen çarpım işleminin $A/I$ 'de cebir olma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını görelim.

Her $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in K$ için

$$([x][y])[z]=[xy][z]=[xyz]=xyz+\mathrm{I}=x(yz+\mathrm{I})=[x][yz]=[x]([y][z])$$

$$[x]([y]+[z])=[x][y+z]=x((y+z)+\mathrm{I})=xy+xz+\mathrm{I}=[xy]+[xz]$$

$$([x]+[y])+[z]=[x+y][z]=(x+y)z+\mathrm{I}=xz+yz+\mathrm{I}=[xz]+[yz]$$

$$\alpha([x][y])=\alpha(xy+\mathrm{I})=\alpha xy+\mathrm{I}=(\alpha x)y+\mathrm{I}=[\alpha x][y]$$

Diğer taraftan $x, y \in \mathcal{A}$ için

$$\begin{aligned}\|[x][y]\| = \|[xy]\| &= \inf_{a\in I}\|xy+a\| \le \inf_{a,b\in I}\|xy+xb+ay+ab\| \\ &= \inf_{a,b\in I}\|(x+a)(y+b)\| \le \inf_{a,b\in I}\|x+a\|\|y+b\| \\ &= \|[x]\|\|[y]\|\end{aligned}$$

sağlanır. □

# 3. OPERATÖR SINIFLARININ BÖLÜM UZAYLARI

Önceki bölümde ele alınan bölüm uzayları kavramının operatör sınıfları için karşılıkları ve özellikleri bu bölümde ele alınacaktır. Her ne kadar kompleks vektör uzayları için de verilebilecek olan bu sonuçlarda, her zaman reel vektör uzaylarını düşüneceğiz. Bu bölümdeki amacımız sınırlı operatörler uzayının bazı alt sınıflarına göre bölüm uzaylarını tanımlamak ve temsillerini vermektir.

## 3.1 Sınırlı Operatörler Uzayı

Bu kısımda ilk olarak sınırlı operatörler ile ilgili temel tanımlamalar yapılacak ve bazı alt sınıfları hakkında gerekli bilgilere yer verilecektir.

$X$ , $Y$ vektör uzayları ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in D(T)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$T(x+\alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$$

eşitliğini sağlayan $T$, *lineer operatör* olarak adlandırılır. Tüm lineer operatörler kümesini $L(X,Y)$ ile, eğer $X = Y$ ise kısaca $L(X)$ ile göstereceğiz. Yani;

$$L(X,Y) = \{T : X \to Y : T \ lineer\}$$

$L(X,Y)$ üzerinde toplama ve skalar ile çarpma işlemlerini $T_1,\ T_2 \in L(X,Y)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \quad \text{ve} \quad (\alpha T)(x) = \alpha T(x)$$

şeklinde tanımladığımızda, $L(X,Y)$ bir vektör uzayı olur.

### 3.1.1 Tanım

$X$ , $Y$ normlu uzaylar ve $T: X \to Y$ bir dönüşüm (lineer olması gerekmeyen) olsun. $\forall x \in D(T)$ için $\|Tx\| < c\|x\|$ olacak biçimde $c > 0$ sayısı varsa $T$ operatörüne *sınırlıdır* denir (Kreyszig 1978).

Bu tanıma göre, sınırlı operatörler sınırlı kümeleri sınırlı kümelere resmeder. Tüm lineer ve sınırlı operatörlerin kümesini $B(X,Y)$ ile, eğer $X=Y$ ise kısaca $B(X)$ ile göstereceğiz. Yani;

$$\mathrm{B}(X,Y)=\{T:X\to Y:T \text{ lineer ve sınırlı}\}$$

Yukarıda tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile $B(X,Y)$, $L(X,Y)$ için bir alt vektör uzayı olacaktır. Normlu uzaylar aynı zamanda metrik uzay olduklarından, süreklilik kavramı aşağıdaki şekilde verilir.

**3.1.2 Tanım**

$X$, $Y$ normlu uzaylar ve $T:X\to Y$ bir dönüşüm (lineer olması gerekmeyen) olsun. Her $\varepsilon>0$ verildiğinde, $\|x-x_0\|<\delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall$ $x\in D(T)$ için $\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$ olacak biçimde $\exists$ $\delta>0$ varsa $T$, $x_0\in D(T)$ *noktasında süreklidir* denir. $T$, $\forall x\in D(T)$ noktasında sürekli ise $T$ dönüşümüne *süreklidir* denir (Kreyszig 1978).

Açıktır ki her sürekli operatör aynı zamanda sınırlıdır. Fakat bu önermenin tersi genelde doğru değildir. Ancak aşağıdaki teorem lineer operatörler için bu iki kavramın çakıştığını belirtir. Bu yüzden $B(X,Y)$ aynı zamanda lineer ve sürekli operatörlerden oluşur da diyebiliriz.

**3.1.3 Teorem**

$X$ ile $Y$ normlu uzaylar ve $T:X\to Y$ lineer dönüşüm ise $T$ 'nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul sürekli olmasıdır (Kreyszig 1978).

$X$, $Y$ normlu uzaylar olmak üzere $T\in B(X,Y)$ olsun. Bu durumda $\forall x\in D(T)$ için $\|Tx\|<c\|x\|$ olacak biçimde $c>0$ sayısı vardır. O halde $\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:x\neq 0\right\}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de üstten sınırlı olacağından supremumu vardır. Dolayısıyla her bir sınırlı operatöre karşılık bir tek pozitif sayı karşılık gelir. Bu sayıya $T$ operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir. Üstelik,

$$\|\,.\,\|:B(X,Y)\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$$

$$T \to \|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

fonksiyonu bir norm tanımlar ve bu norm operatör normu olarak isimlendirilir. Dolayısıyla $\left(B(X,Y),\ \|.\|\right)$ bir normlu uzaydır. Kolaylıkla gösterilebileceği üzere aşağıdaki eşitlikler de geçerlidir.

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| = \inf\left\{c > 0 : \|Tx\| < c\|x\|\right\}$$

**3.1.4 Teorem**

$Y$ bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ 'de Banach uzayıdır (Kreyszig 1978).

Bu durumda önceki bölümde bölüm uzayları için verilen Teorem 2.3.5 uygulanabilir.

**3.1.5 Sonuç**

$X$, $Y$ normlu uzaylar ve $I \subset B(X,Y)$ kapalı alt uzay ise $B(X,Y)/I$ normlu uzay olur. Ayrıca $X$, $Y$ Banach uzayları olması durumunda $I \subset B(X,Y)$ kapalı alt uzayı için $B(X,Y)/I$ bir Banach uzayı olur.

$B(X,Y)$ ‘nin Banach cebiri yapısının olduğu ve bunun yardımıyla bölüm uzaylarının da benzer bir yapıya sahip olup olmadıklarını vurgulamamız gerekir.

**3.1.6 Teorem**

$X$ Banach uzayı olmak üzere, $B(X)$ bileşke işlemi ve operatör normuna göre Banach cebiridir. Üstelik her bir $T \in B(X)$ için $TI = IT = T$ sağlandığından $\mathrm{I} : X \to X$ özdeşlik operatörü $B(X)$ cebirinin birimidir.

**İspat:**

$B(X)$ 'in noktasal toplam ve skalar ile çarpma işlemlerine göre vektör uzayı olduğunu daha önceden biliyoruz. Her $T,S,U \in B(X)$ ve $x \in X$ $,\alpha \in K$ için

$$((TS)U)(x) = TSU(x) = (T(SU))(x)$$

$$(T(S+U))(x) = T(S(x)+U(x)) = TS(x)+TU(x) = (TS+TU)(x)$$

$$((T+S)U)(x) = (T+S)U(x) = TU(x)+SU(x) = (TU+SU)(x)$$

$$(\alpha(TS))(x) = (\alpha T)S(x) = \alpha T(S(x)) = T(\alpha S(x)) = (T(\alpha S))(x)$$

eşitlikleri sağlandığından $B(X)$ cebirdir. Ayrıca $T,S \in B(X)$ için

$$\|TS(x)\| \leq \|T\|\|Sx\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$$

ve dolayısıyla

$$0 \leq \frac{\|TS(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\|\|S\|$$

sağlanacağından, $\|T\|\|S\|$ 'nin $\left\{\frac{\|TS(x)\|}{\|x\|}, x \in X\right\}$ kümesi için bir üst sınır olduğu görülür. Üstten sınırlı her kümenin supremumu var olacağından $0 \leq \sup\limits_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \frac{\|TS(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\|\|S\|$ dolayısıyla

$\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ eşitsizliği sağlanır. Yani, $B(X)$ Banach cebiridir. □

O halde aşağıdaki sonuç Teorem 2.4.4 'dan görülür.

### 3.1.7 Sonuç

$B(X)$ Banach cebirinin her bir çift taraflı kapalı ideali $I$ için $B(X)/I$ bölümü Banach cebiridir.

## 3.2 Kompakt ve Zayıf Kompakt Operatörler

Sınırlı operatörler uzayının birçok kapalı alt uzayı düşünülebilir. Fakat literatürde birçok çalışma yapılmış kompakt ve zayıf kompakt operatörlerin alt uzaylarına göre bölüm uzayları ile ilgileneceğiz. Bu nedenle söz konusu operatör sınıflarının sahip olduğu bazı temel sonuçlar için bu bölüm oluşturulmuştur.

$X$ metrik uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse, $X$ uzayına kompakttır denir. Benzer olarak $M \subset X$ olmak üzere, $M$ kümesindeki her dizi, limiti $M$ kümesinde olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahipse, $M$ kompakt alt küme adını alır. Örneğin, Heine Borel teoremi gereğince, $M \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul $M$ 'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

**3.2.1 Tanım**

$X$, $Y$ normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Her bir $E \subset X$ sınırlı kümesi için $T(E)$ 'nin kapanışı olan $\overline{T(E)}$ kompakt ise $T$ operatörüne *kompakttır* denir. Diğer bir değişle $T \in L(X,Y)$ 'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\overline{T(B_X)}$ 'in kompakt, yani her bir sınırlı $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\{Tx_n\} \subset Y$ dizisinin yakınsak bir alt dizisinin var olmasıdır (Kreyszig 1978).

Tüm kompakt lineer operatörlerin kümesini $K(X,Y)$ ile, eğer $X = Y$ ise kısaca $K(X)$ ile göstereceğiz.

**3.2.2 Örnek**

1. $X$ veya $Y$ sonlu boyutlu normlu uzaylar ise, her lineer $T : X \to Y$ operatörü kompakttır.
2. Görüntü kümesi sonlu boyutlu olan her operatör kompakttır.
3. $\mathrm{C}^1([a,b]) \mapsto \mathrm{C}([a,b])$ gömme (inclusion) dönüşümü kompakttır.

Aşağıdaki teoremde kompakt operatörler ile ilgili en temel sonuçlar toplanmıştır.

**3.2.3 Teorem**

$X$, $Y$ ve $Z$ Banach uzayları olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır (Kreyszig 1978).

i. $K(X,Y)$, $\mathrm{B}(X,Y)$ 'de kapalı alt uzaydır.

ii. $T \in K(X,Y)$ ve $T(X)$ kapalı ise $\dim(T(X)) < \infty$ olur.

iii. $U \subset X$, $V \subset Y$ kapalı alt uzaylar ve $\mathrm{T(U)} \subseteq \mathrm{V}$ ise $T \in K(X,Y) \Leftrightarrow T|_U \in K(U,V)$.

iv. $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ sürekli operatörler olmak üzere, $S$ yada $T$ kompakt ise $TS$ kompakttır.

v. $K(X)$, $B(X)$ içinde çift taraflı idealdir.

vi. $T \in B(X,Y)$ kompakt olması için gerek ve yeter koşul adjoint operatörü $T^* \in K(Y^*, X^*)$'nin kompakt olmasıdır. (Schauder, 1930)

$X$ bir normlu uzay ve $(x_n) \subset X$ bir dizi olmak üzere, eğer her $f \in X^*$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, $(x_n)$ dizisi $x$'e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilir. Kompaktlık tanımına paralel olarak $A \subseteq X$'deki her dizi zayıf yakınsak bir alt diziye sahip ise $A$'ya zayıf kompakttır denir.

**3.2.4 Tanım**

$X$, $Y$ normlu uzaylar ve $T \in L(X,Y)$ olsun. Her bir $E \subset X$ sınırlı kümesi için $\overline{T(E)}^{w(Y,Y')}$ zayıf kompakt ise $T$ operatörüne zayıf kompakttır denir. Tüm zayıf kompakt lineer operatörler kümesini $W(X,Y)$ ile, eğer $X = Y$ ise kısaca $W(X)$ ile göstereceğiz (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

Sonsuz boyutlu Banach uzayları için zayıf kompaktlık tanımını diziler ile verebilmek için Eberlein-Smulian teoremi kullanılır. Bu teoreme göre sonsuz boyutlu bir Banach uzayı $Y$ için $T \in L(X,Y)$'nin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul her bir sınırlı $\{x_n\} \subset X$ dizisi için $\{Tx_n\} \subset Y$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisinin var olmasıdır.

Açıktır ki, norm yakınsama zayıf yakınsamayı gerektirdiğinden, tüm kompakt lineer operatörler zayıf kompakttır. Ayrıca tüm zayıf kompakt lineer operatörler süreklidir. O halde

$$K(X,Y) \subseteq W(X,Y) \subseteq B(X,Y)$$

kapsamaları, öz olduğu durumlar da var olmak üzere, geçerlidir.

Aşağıda ispatsız vereceğimiz iki teorem zayıf kompakt operatörler ile ilgili bazı önemli sonuçları vermektedir.

**3.2.5 Teorem**

$X$, $Y$ ve $Z$ Banach uzayları olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

i. $X$ veya $Y$ yansımalı ise $W(X,Y)=B(X,Y)$ sağlanır.

ii. $W(X,Y)$, $\mathrm{B}(X,Y)$ içinde kapalı alt uzaydır.

iii. $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ sürekli operatörler olmak üzere, $S$ yada $T$ zayıf kompakt ise $TS$ zayıf kompakttır.

iv. $W(X)$, $B(X)$ içinde çift taraflı idealdir.

**3.2.6 Teorem**

$X$ , $Y$ Banach uzayları olmak üzere $T: X \to Y$ operatörü için aşağıdakiler denktir (Gantmacher 1940).

i. $T \in W(X,Y)$

ii. $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$

iii. $T^{*} \in W(Y^{*}, X^{*})$

Önerme 2.3.1 ve Teorem 2.3.5 gereği aşağıdaki sonuç kolayca görülür.

**3.2.7 Sonuç**

$B(X,Y)/K(X,Y)$ ve $B(X,Y)/W(X,Y)$ bölüm uzayları normlu uzay; $Y$ Banach uzay olması durumunda ise birer Banach uzaylarıdır.

**3.3 Calkin ve Zayıf Calkin Cebirleri**

$K(X)$ ve $W(X)$ sınıflarının $B(X)$ cebiri içinde çift taraflı kapalı ideal olduğu Teorem 3.2.4 (v) ve Teorem 3.2.6 (iv) 'da verilmişti. Bu nedenle aşağıdaki sonuç Teorem 2.4.4 'den hemen görülür.

**3.3.1 Sonuç**

$X$ Banach uzayı olmak üzere; $B(X)/K(X)$ ve $B(X)/W(X)$ Banach cebirleridir.

Bölümlerle oluşturulan bu Banach cebirlerinin ilk kez Calkin (1941) tarafından tanımlanmasına atfen, $B(X)/K(X)$ Banach cebirine *Calkin cebiri*, $B(X)/W(X)$ Banach cebirine de *zayıf Calkin cebiri* denir. Bu cebirlerin bazı özelliklerini vererek bölümü sonlandıracağız.

Teoremlerin ifadelerinde bulunan tek bir tam norm olması demek vektör uzayının üzerinde tek bir tam normun tanımlanabildiği anlamında değildir. Bunun anlamı, başka tam normlarda tanımlanabilir ancak bu tam normların birbirine denk normlar olmalarıdır. $I$ çift taraflı kapalı ideal olmak üzere $B(X)/I$ üzerindeki $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ biçimindeki iki normun denk olması demek ise, her $T \in B(X)$ için $c_1\|T+I\|_1 \leq \|T+I\|_2 \leq c_2\|T+I\|_1$ eşitsizliğini sağlayan $c_1, c_2 > 0$ sayılarının var olmasıdır.

**3.3.2 Teorem**

$X \cong X \oplus X$ olacak biçimdeki $X$ Banach uzayı için $B(X)/K(X)$ ve $B(X)/W(X)$ bir tek tam norma sahiptir (Skillicorn 2015).

**İspat:**

$I$ , $B(X)$ 'de kapalı ideal ve $\|\cdot\|$ bölüm normundan farklı olarak $B(X)/I$ bölümünü Banach cebiri yapan diğer bir norm $\||\cdot|\|$ olsun. $Id:(B(X)/I, \|\cdot\|) \to (B(X)/I, \||\cdot|\|)$ özdeşlik dönüşümü sınırlıdır. Bu yüzden her $T \in B(X)$ için $\||T+I|\| \leq c\|T+I\|$ olacak biçimde $c > 0$ sayıları vardır. Benzer şekilde ters dönüşüm teoreminin bir sonucu olarak $k.\|T+I\| \leq \||T+I|\|$ sağlanacak şekilde $k > 0$ sayısı bulunabilir. Böylece $B(X)/I$ üzerindeki iki norm denktir. $I = K(X)$ yada $I = W(X)$ alındığında istenen görülür. □

Örneğin aşağıdaki Banach uzayları için Calkin cebiri bir tek tam norma sahiptir.

- Sonlu boyutlu Banach uzayı,
- $c_0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $\ell_p$ uzayları,
- $1 \leq p < q \leq \infty$ için $\ell_p \oplus \ell_q$ ve $1 \leq q \leq \infty$ için $c_0 \oplus \ell_q$ uzayları,
- $p, r \in [1, \infty]$ için $\left(\oplus_{n=1}^{\infty} \ell_r^n\right)_{\ell_p}$ ve $\left(\oplus_{n=1}^{\infty} \ell_r^n\right)_{c_0}$ uzayları,
- $K$ sonsuz kompakt metrik uzay için $C(K)$ uzayı,
- $1 \leq p \leq \infty$ için $L_p[0,1]$ uzayı (Skillicorn 2015).

Benzer olarak aşağıdaki Banach uzayları için de zayıf Calkin cebiri bir tek tam norma sahiptir:

- Sonlu boyutlu Banach uzayları,
- $B(X)/W(X)=\{0\}$ olacak şekildeki yansımalı Banach uzayları (Skillicorn 2015).

Teorem 3.3.2 'nin genelde doğru olmadığını göstermeden önce ispatı için gerekli olan Argyros ve Motakis tarafından verilen bir Banach uzayının inşaası ile ilgili aşağıdaki teorem verilmiştir.

**3.3.3 Teorem**

Aşağıdaki şartları sağlayan bir $X_{AM}$ Banach uzayı vardır (Argyros ve Motakis 2016).

i. $X_{AM}$ yansımalıdır ve bir Schauder bazına sahiptir.

ii. Her $T \in B(X_{AM})$ .operatörü ve $\lambda \in \mathrm{K}$ ve $S$ strictly singüler operatörleri için $T = \lambda I_{X_{AM}} + S$ yazılabilir.

iii. $X_{AM}$ üzerindeki herhangi iki strictlysingüler operatörün birleşimi kompakttır.

iv. $S(X_{AM})$ ayrılabilir değildir.

**3.3.4 Sonuç**

Aşağıdaki önermeler sağlanır (Skillicorn 2015, Teorem 2.3).

1. $B(X_{AM})/K(X_{AM})$ Calkin cebiri en az iki tane denk olmayan tam normlara sahiptir.

2. $B(X^*_{AM})/K(X^*_{AM})$ Calkin cebiri en az iki tane denk olmayan tam cebir normlarına sahiptir.

### 3.4 Bazı Operatör Bölümleri İçin Temsiller

Bu kısımda kompakt ve zayıf kompakt operatörler ile oluşturulmuş bölümler için bazı temsiller tanımlanacaktır.

*X* Banach uzayı olmak üzere

$$\ell_\infty(X)=\left\{(x_n)\subset X : \forall n\in\mathbb{N} \text{ için } \|x_n\|_X \le M \text{ olacak biçimde } M>0 \text{ vardır}\right\}$$

kümesi dizi uzaylarında tanımlanan cebirsel işlemler ile bir vektör uzayıdır ve $\|(x_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X$ normu ile $\left(\ell_\infty(X), \|.\|_\infty\right)$ Banach uzayıdır. Benzer şekilde

$$c_0(X)=\left\{(x_n)\subset X : \ \|x_n\|_X \longrightarrow 0\right\}$$

dizi uzayı $\ell_\infty(X)$ uzayının kapalı alt uzayıdır. Dolayısıyla $\ell_\infty(X)/c_0(X)$ bölüm uzayı Banach uzayıdır (Berberian 1962, Quigley 1960).

$X$ ve $Y$ Banach uzayları olmak üzere, $x=(x_n)\in\ell_\infty(X)$ dizisinin elemanlarına $T: X\to Y$ sınırlı lineer operatörünün terim terim uygulanmasıyla elde edilen

$$\begin{aligned} Q(T): \ell_\infty(X)/c_0(X) &\longrightarrow \ell_\infty(Y)/c_0(Y) \\ \left[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] &\longrightarrow \left[(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \end{aligned}$$

dönüşümü iyi tanımlıdır (Berberian 1962, Quigley 1960). Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} Q: B(X,Y)/K(X,Y) &\longrightarrow B\left(\ell_\infty(X)/c_0(X), \ell_\infty(Y)/c_0(Y)\right) \\ [T] &\longrightarrow Q(T) \end{aligned}$$

temsili tanımlanabilir. Bu dönüşüm için $\|Q(T)\|=\|T\|$ sağlanır (Choi ve Davis 1974). Ayrıca bu dönüşümün lineer ve sınırlı olduğu açıktır. Buna göre $Q$ dönüşümünün temel özellikleri aşağıdaki şekilde verilir.

### 3.4.1 Önerme

Yukarıda tanımlanan $Q$ dönüşümü için aşağıdaki önermeler sağlanır (Choi ve Davis 1974; Davis ve Rosenthal 1974).

1. $Q(T)$ birebirdir $\Leftrightarrow T$ alttan sınırlıdır $\Leftrightarrow Q(T)$ alttan sınırlıdır.

2. $Q(T)$ yoğun $\Leftrightarrow T$ yoğun.

3. $Q(T)$ tersinir $\Leftrightarrow T$ tersinir.

Berberian (1962) ve Quigley (1960) çalışmalarında $\ell_\infty(X)$ uzayının $c_0(X)$ dizi uzayına göre bölümünü kullanmışlardır. Buoni, Harte ve Wickstead (1977) ise bu uzaya göre daha geniş olan bir alt uzay olan $\ell_\infty(X)$ uzayının $m(X)$ ile bölümünü ele almışlar ve $B(X,Y)/K(X,Y)$ için bir temsil vermişlerdir.

### 3.4.2 Tanım

$X$ Banach uzayının elemanlarından oluşan ve her alt dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olan dizilerin uzayı $m(X)$ ile gösterilir. Yani,

$$m(X)=\left\{(x_n)\subset X:\forall\left(x_{n_k}\right)\subset(x_n) \text{ alt dizisi için yakınsak olan } \exists\left(x_{n_{k_i}}\right)\subset\left(x_{n_k}\right) \text{ alt dizisi vardır.}\right\}$$

olur. Eşdeğer olarak,

$$(x_n)\subset m(X) \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n\} \text{ total sınırlıdır}$$

(Buoni, Harte ve Wickstead 1977).

### 3.4.3 Önerme

Her bir X Banach uzayı için $m(X)$, $\ell_\infty(X)$ uzayının kapalı lineer alt uzayıdır ve $T\in B(X,Y)$, total sınırlı dizileri total sınırlı dizilere dönüştürür. $T\in K(X,Y)$ ise sınırlı dizileri kompaktlık tanımından dolayı total sınırlı dizilere dönüştürür. Yani,

$$T\in B(X,Y) \;\Rightarrow\; T(m(X))\subseteq m(Y)$$

$$T\in K(X,Y) \;\Leftrightarrow\; T(\ell_\infty(X))\subseteq m(Y)$$

önermeleri sağlanır (Buoni, Harte ve Wickstead 1977).

Berberian (1962) ve Quigley (1960) inşasına benzer olarak $c_0(X)$ alt uzayının yerine $m(X)$ uzayını kullanarak benzer dönüşümler inşa edilebilir.

$X$ ve $Y$ Banach uzayları olmak üzere her bir $T\in B(X,Y)$ operatörü için

$$
\begin{aligned}
P(T): \ell_\infty(X)/m(X) &\longrightarrow \ell_\infty(Y)/m(Y) \\
[(x_n)]_{n\in\mathbb{N}} &\longrightarrow [(Tx_n)]_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

dönüşümü Önerme 3.4.3 ile iyi tanımlıdır (Buoni, Harte ve Wickstead 1977). Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
P: B(X,Y)/K(X,Y) &\longrightarrow B(\ell_\infty(X)/m(X), \ell_\infty(Y)/m(Y)) \\
[T] &\longrightarrow P(T)
\end{aligned}
$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bu dönüşüm birebir ve norm azalandır (Lebow ve Schechter 1971). Ayrıca bu dönüşümün lineer ve sınırlı olduğu aşağıdaki eşitsizlik ile hemen görülür.

$$
\begin{aligned}
\|P(T)[x_n]\|_{\ell_\infty(X)/m(X)} &= dist(P(T)[x_n], m(Y)) \\
&= \inf\{\|P(T)[x_n] - (y_n)\| : (y_n) \in m(Y)\} \\
&= \inf\{\|(Tx_n) + (z_n) - (y_n)\| : (y_n), (z_n) \in m(Y)\} \\
&= \inf\{\|(Tx_n) - (y_n - z_n)\| : (y_n - z_n) \in m(Y)\} \\
&= \inf\{\|(Tx_n) - (u_n)\| : (u_n) \in m(Y)\} \\
&\leq \inf\{\|Tx_n - Tw_n\| : (w_n) \in m(X)\} \\
&\leq \inf\{\|T\|.\|x_n - w_n\| : (w_n) \in m(X)\} \\
&= \|T\|_X .\inf\{\|x_n - w_n\| : (w_n) \in m(X)\} \\
&= \|T\|_X .\|[x_n]\|_{\ell_\infty(X)/m(X)}
\end{aligned}
$$

olduğundan $P(T)$ sınırlıdır. Buradan da $\|P(T)\| \leq \|T\|_X$ ve dolayısıyla $\|P\| \leq 1$ olduğu görülür.

Diğer taraftan $T \in K(X,Y)$ için $P(T) = P(0)$ olur. Çünkü, $(x_n) \subset \ell_\infty(X)$ için $\overline{\{Tx_n\}}$ kompakttır. O halde kompaktlık tanımından her bir $(Tx_{n_k}) \subset (Tx_n)$ alt dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir. Yani, $(Tx_n) \in m(Y)$ iken $[(Tx_n)]_{n\in\mathbb{N}} = [(0)]$ olur.

Buoni ve Klein benzer teknikleri kullanarak $B(X,Y)/W(X,Y)$ ve genelleştirilmiş Calkin cebiri için bir temsil vermiştir (Buoni ve Klein 1979). $X$ ve $Y$ Banach uzayları olmak üzere $T:X\to Y$ zayıf kompakt ise sınırlı dizileri zayıf yakınsak alt dizilere sahip olan dizilere götürür. $X=Y$ ise $W(X)$, $B(X)$ 'in çift taraflı kapalı ideali olur. Yukarıda verilen $B(X,Y)/K(X,Y)$ bölümünün temsiline benzer olarak $B(X,Y)/W(X,Y)$ 'nin temsilini yapabilmek için tanımladığımız $m(X)$ uzayını $\ell_\infty(X)$ 'un farklı bir alt uzayı olacak şekilde aşağıdaki gibi modifiye etmek gerekir.

**3.4.4 Tanım**

$X$ Banach uzayının elemanlarından oluşan ve her alt dizisi zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olan dizilerin uzayı $m_w(X)$ ile gösterilir. Yani,

$$m_w(X)=\left\{(x_n)\in\ell_\infty(X):\overline{(x_n)}^{w}\subset X \text{ zayıf kompakt}\right\}$$

(Buoni ve Klein 1979).

Bu tanıma göre açıktır ki, $x=(x_n)\in m_w(X)$ olması için gerek ve yeter şart $(x_n)$ dizisinin her alt dizisinin zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.

Bölüm uzayının temel özelliklerinin verildiği daha önceki bölümden biliyoruz ki $\ell_\infty(X)$ uzayı Banach uzayı olduğunda $\ell_\infty(X)/m_w(X)$ bölümünün Banach uzayı olması için $m_w(X)$ alt uzayının kapalı alt uzay olması gerekir. O halde aşağıdaki teorem önemli olacaktır.

**3.4.5 Önerme**

$X$ Banach uzayı olmak üzere $m_w(X)$, $\ell_\infty(X)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır (Buoni ve Klein 1979).

**İspat:**

$x=(x_n)\in\overline{m_w(X)}$ alalım. İlk olarak $(x_n)$ dizisinin $X$ içindeki bir elemana yakınsak olan zayıf-Cauchy dizisi olan bir alt dizisiye sahip olduğunu göstereceğiz. $y_{1,n} \xrightarrow{w} y_1$ ve $\left\| (x_{1,n}) - (y_{1,n}) \right\|_\infty < 1$ olacak şekilde $(x_{1,n})$ alt dizisi ve $y_1 = (y_{1,n}) \in m_w(X)$ vardır. Şimdi kabul edelim ki $1 \leq l \leq j-1$ için

1. $(x_{l,n})$, $(x_{l-1,n})$ 'nin alt dizisidir.
2. $y_{l,n} \xrightarrow{w} y_l$
3. $\left\| (x_{l,n}) - (y_{l,n}) \right\|_\infty < \frac{1}{l}$

şartlarını sağlayan $(x_{l,n})$ ve $(y_{l,n})$ dizileri vardır. $(x_{j-1,n}) \in m_w(X)$ olduğundan $y_{j,n} \xrightarrow{w} y_j$ ve $\left\| (x_{j,n}) - (y_{j,n}) \right\|_\infty < \frac{1}{j}$ olacak şekilde $(y_{j,n}) \in \overline{m_w(X)}$ ve $(x_{j-1,n})$ 'nin $(x_{j,n})$ alt dizisi vardır. Ayrıca, her $j$ için 1, 2, 3 'ü sağlayan dizilerde vardır. İddia ediyoruz ki, her $n, m \geq M$ için

$$\left| f(x_{j,n}) - f(x_{j,m}) \right| \leq \frac{4\|f\|}{j}$$

olacak şekilde $M$ vardır. Bunu görmek için $y_{j,n} \xrightarrow{w} y_j$ olduğunu hatırlayacak olursak her $n > M$ için

$$\left| f(y_{j,n}) - f(y_j) \right| \leq \frac{\|f\|}{j}$$

olacak şekilde $M$ vardır. Şimdi her $n, m \geq M$ için

$$\left| f(x_{j,n}) - f(x_{j,m}) \right| \leq \left| f(x_{j,n}) - f(y_{j,n}) \right| + \left| f(y_{j,n}) - f(y_j) \right| + \left| f(y_j) - f(y_{j,m}) \right| + \left| f(y_{j,m}) - f(x_{j,m}) \right|$$

eşitsizliğinden $\left| f(x_{j,n}) - f(x_{j,m}) \right| \leq \frac{4\|f\|}{j}$ elde edilir. O halde $(x_{i,i})$ 'nin zayıf Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Verilen $f \in X^*$ ve $\varepsilon > 0$ için $\frac{4\|f\|}{j} < \varepsilon$ olacak şekilde $j$ seçelim. Bu yüzden her $n, m \geq M_0$ için $\left| f(x_{j,n}) - f(x_{j,m}) \right| \leq \frac{4\|f\|}{j}$ olacak şekilde $M_0$ vardır. $M = \max(j, M_0)$ alalım. $(x_{n,k})$ ve $(x_{m,k})$, $(x_{j,k})$ 'nin alt dizileri olduğundan her $n, m \geq M$

için $\left|f\left(x_{n,n}\right)-f\left(x_{m,m}\right)\right|\leq\frac{4\|f\|}{j}<\varepsilon$ olur. $x=\left(x_n\right)\in\overline{m_w\left(X\right)}$ 'nin herhangi bir zayıf Cauchy alt dizisinin zayıf yakınsak olduğu görüldü. Son olarak $x=\left(x_n\right)\in\overline{m_w\left(X\right)}$ dizinin zayıf Cauchy dizisi olarak alalım. $F:X^*\rightarrow\mathbb{C}$, $F\left(f\right)=\lim_{n\rightarrow\infty}f\left(x_n\right)$ tanımlayalım. $\left|F\left(f\right)\right|\leq\|f\|\sup_n\|x_n\|$ ise $F\in X^{**}$ 'dir. O halde $\varepsilon>0$ için $\left\|F-y^{**}\right\|<\varepsilon$ olacak şekilde $y\in X$ 'in var olduğunu göstermeliyiz. Bunu görmek için $\left\|\left(x_n\right)-\left(y_n\right)\right\|<\frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde $\left(y_n\right)\in m_w\left(X\right)$ dizisi ile $y_{n_k}\xrightarrow{w}y$ olacak şekilde $\left(y_{n_k}\right)$ alt dizisi seçelim. $\|f\|\leq1$ olacak şekilde $f\in X^*$ aldığımızda yeteri kadar büyük $k$ için $\left|f\left(y_{n_k}\right)-f\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ ve $\left|f\left(x_{n_k}\right)-F\left(f\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ olur. Böylece,

$$\left|F\left(f\right)-y^{**}\left(f\right)\right|\leq\left|F\left(f\right)-f\left(x_{n_k}\right)\right|+\left|f\left(x_{n_k}\right)-f\left(y_{n_k}\right)\right|+\left|f\left(y_{n_k}\right)-f\left(y\right)\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{3}+\|f\|.\left\|x_{n_k}-y_{n_k}\right\|+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

olur. O halde $F$, $X^{**}$ içinde $X$ 'in kanonik görüntüsünün norm kapanışıdır. Bu görüntü norm kapalıdır; yani, $x$ 'in kanonik görüntüsü $F$ olacak şekilde $x\in X$ vardır. Böylece teoremimizi kanıtlayan $m_w\left(X\right)=\overline{m_w\left(X\right)}$ sağlanmış olur. □

$m_w\left(X\right)$ ve zayıf kompakt operatörlerin tanımları göz önüne alındığında, kompakt operatörler için verdiğimiz Önerme 3.4.3 zayıf kompakt operatörler için de açık olarak görülür.

**3.4.6 Önerme**

$X$ Banach uzayı ise $m_w\left(X\right)$, $\ell_\infty\left(X\right)$ uzayının kapalı lineer alt uzayıdır. $T\in B\left(X,Y\right)$ ise zayıf yakınsak dizileri zayıf yakınsak dizilere götürür. $T\in K\left(X,Y\right)$ ise sınırlı dizileri zayıf kompaktlık tanımında dolayı zayıf yakınsak dizilere götürür.

Yani,

$$T \in B(X,Y) \Rightarrow T(m_w(X)) \subset m_w(Y)$$

$$T \in W(X,Y) \Leftrightarrow T(\ell_\infty(X)) \subseteq m_w(Y)$$

önermeleri doğrudur (Buoni ve Klein 1979).

O halde şimdi $B(X,Y)/K(X,Y)$ bölümünün temsili için tanımladığımız dönüşümü benzer olarak $B(X,Y)/W(X,Y)$ bölümü için aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz. $T \in B(X,Y)$ için

$$\begin{aligned} P(T): \ell_\infty(X)/m_w(X) &\longrightarrow \ell_\infty(Y)/m_w(Y) \\ [(x_n)]_{n\in\mathbb{N}} &\longrightarrow [(Tx_n)]_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

iyi tanımlıdır ve bu durumda

$$T \in W(X,Y) \Leftrightarrow P(T) = 0$$

sağlanır. Dolayısıyla $B(X)/W(X)$ 'in bir temsili aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} P: B(X,Y)/W(X,Y) &\longrightarrow B(\ell_\infty(X)/m_w(X), \ell_\infty(Y)/m_w(Y)) \\ [T] &\longrightarrow P(T) \end{aligned}$$

Buna göre $(x_n) \in \ell_\infty(X)$ ve $(y_n) \in m_w(X)$ için

$$P[T][x_n] = (T+W)[x_n] = T[x_n] + W[x_n] = T(x_n + y_n) + W(x_n + y_n)$$

$$= T(x_n) + T(y_n) + W(x_n) + W(y_n) = T(x_n) + m_w(X)$$

olur.

### 3.4.7 Önerme

$X$, $Y$ ve $Z$ Banach uzayları olmak üzere

$$P: T \in B(X,Y) \longrightarrow P(T) \in B(X^{**}/X, Y^{**}/Y)$$

dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır (Gonzales 1994, Önerme 1):

(i) $P(I_X) = I_{X^{**}/X}$

(ii) $S,T \in B(X,Y)$ ve $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ise $P(\lambda S + \mu T) = \lambda P(S) + \mu P(T)$

(iii) $T \in B(X,Y)$ ve $S \in B(Y,Z)$ ise $P(ST) = P(S)P(T)$

(iv) $\|P(T)\| \leq \|T\|$

(v) $P(T)^* = U\,R(S^*)V$ olacak şekilde $U$ ve $V$ izomorfizmleri vardır.

(vi) $T \in B(X,Y)$ için $\dfrac{\|P(T)\|}{2} \leq \|P(T^*)\| \leq 2\|P(T)\|$

# 4. SIRALI UZAYLARDA BÖLÜM UZAYLARI

## 4.1 Riesz Uzayları ve Banach Örgüleri

Bu kısımda sıralı uzaylar teorisindeki en temel kavramlar ve teoremler verilecektir. Bu kısımdaki tanım ve teoremler için Luxemburg ve Zaanen (1971), Aliprantis ve Burkinshaw (1985) ve Meyer-Nieberg (1991) referans olarak kullanılmıştır.

### 4.1.1 Tanım

Reel lineer uzayı $E$ üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısı “ $\leq$ ” olsun. Buna göre sıralama ile vektör uzayının cebirsel işlemleri uyumlu ise, yani $x, y \in E$ olmak üzere

i. Her için $z \in E$ için $x \leq y$ iken $x+z \leq y+z$

ii. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

gerektirmeleri sağlanıyorsa, $E$ 'ye sıralı vektör uzayı denir.

$E$ sıralı vektör uzayında $x \geq 0$ ise $x$ elemanına pozitiftir denir ve tüm pozitif elemanlarının kümesi $E^{+}$ ile gösterilir (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

### 4.1.2 Tanım

$E$ sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için

$$x \vee y := \sup \{x,y\} \in E \qquad \text{ve} \qquad x \wedge y := \inf \{x,y\} \in E$$

ise $E$ Riesz uzayı veya vektör örgüsü olarak adlandırılır (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

### 4.1.3 Örnekler

Aşağıdaki fonksiyon uzaylarında sıralama noktasal sıralama olarak, yani

$$f \geq g \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X \quad \text{için} \quad f(x) \geq g(x)$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre aşağıda verilen uzaylar Riesz uzayı örnekleridir.

i. $R^{X} = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ fonksiyon} \right\}$

$X$ topolojik uzay olmak üzere

ii. $C(X)=\{f: X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ sürekli}\}$

iii. $C_b(X)=\{f: X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ sınırlı}\}$

iv. $(\mathrm{X},\Sigma,\mu)$ ölçüm uzayı ve $0<p<\infty$ olmak üzere

$$L_p(\mu)=\left\{f \in M(X,\Sigma): \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\right\}$$

v. $L_\infty(\mu)=\{f \in M(X,\Sigma): ess\sup|f|<\infty\}$

vi. Klasik dizi uzayları $c_0, c, \ell_p \, (1\leq p \leq \infty)$ bileşen sıralaması adı verilen

$$(x_n)\leq(y_n) \ \Leftrightarrow \ \forall\, n\in\mathbb{N} \ \text{ için } \ x_n \leq y_n$$

sıralamasına göre Riesz uzaylarıdır.

$E$ bir Riesz uzayı ve $x\in E$ olmak üzere $x^+ := x\vee 0$ ve $x^- := -x\vee 0$ elemanlarına sırasıyla $x$ 'in pozitif kısmı ve negatif kısmı denir. ve $|x| := x\vee(-x)$ elemanına $x$ 'in modülü denir.

**4.1.4 Teorem**

$E$ Riesz uzayında aşağıdaki eşitlikler her $x,y\in E$ için sağlanır (Aliprantis 1985, Teorem 1.3).

i. $x = x^+ - x^-$

ii. $|x| = x^+ + x^-$

iii. $x^+ \wedge x^- = 0$

iv. $x = (x-y)^+ + x\wedge y$

**4.1.5 Tanım**

$E$ bir Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi $A$ olsun.

i. $\forall\, x,y\in A$ iken $x\vee y\in A$ ve $x\wedge y\in A$ ise $A$ 'ya Riesz alt uzayı veya alt örgüsü denir.

ii. $y\in A$ olmak üzere $|x|\leq|y|$ iken $x\in A$ oluyorsa $A$ kümesine *katı ( solid )* küme denir. $A$ kümesini kapsayan en küçük katı kümeye $A$ kümesinin *katı zarfı* denir ve tam olarak $sol(A)=\{x\in E:\exists\, y\in A \text{ için } |x|\leq |y|\}$ ile verilir.

iii. $E$ Riesz uzayının katı alt vektör uzaylarına *ideal* adı verilir. $E$ Riesz uzayının boştan farklı bir $A$ alt kümesini kapsayan en küçük ideale $A$ *kümesinin doğurduğu ideal* denir ve tam olarak

$$\left\{y\in E:\exists\ \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in\mathbb{R}^+ \text{ ve } \exists\ x_1,x_2,...,x_n\in A \text{ için } |y|\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|x_k|\right\}$$

ile verilir. Bir $x\in E$ elemanının ürettiği ideale *esas ideal* denir ve $x\in E$ elemanının ürettiği esas ideal $I_x=\{y\in E:\exists\ \lambda\in\mathbb{R}^+,\ |y|\leq\lambda|x|\}$ olur.

iv. $(x_\alpha)\subset E$ bir ağ olmak üzere $|x_\alpha-x|\leq y_\alpha\downarrow 0$ koşulunu sağlayacak biçimde $(y_\alpha)\subset E$ ağı varsa $(x_\alpha)$, $x\in E$ elemanına sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha\xrightarrow{o}x$ şeklinde gösterilir. Buna göre $(x_\alpha)\subset A$ ağı için $x_\alpha\xrightarrow{o}x$ olduğunda $x\in A$ oluyorsa $A$ kümesine sıra kapalıdır denir.

v. Sıra kapalı ideale band denir. Bir $x\in E$ elemanının ürettiği esas band $B_x=\{y\in E:|y|\wedge n|x|\uparrow y\}$ formundadır.

vi. $E$ bir Riesz uzayı olmak üzere, $x\leq y$ koşulunu sağlayan $x,y\in E$ elemanları ile tanımlanan $[x,y]:=\{z\in E:x\leq z\leq y\}$ kümesine sıralı aralık denir. $E$ uzayının bir $A$ alt kümesi bir sıralı aralık tarafından kapsanıyorsa, $A$ kümesine sıra sınırlı küme denir.

### 4.1.6 Örnekler

i. $E=C(0,1)$ ve $E$ içinde $[0,1]$ üzerindeki tüm afin fonksiyonların alt uzayı $A$ olsun. $A$ noktasal sıralı olan bir Riesz uzayı ve $E$ 'nin alt uzayıdır. Fakat, alt örgüsü değildir.

ii. Tüm yakınsak reel dizi uzayı $c$, $\ell_\infty$ 'un alt örgüsü olmasına rağmen ideal değildir.

iii. Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı $c_0$, $\ell_\infty$ 'un bir idealidir fakat band değildir.

$I$ indeks kümesi için $(x_\alpha)$, $E$ Riesz uzayında bir ağ olsun. Her $\alpha,\beta\in I$ için $x_\alpha\leq x_\gamma$ ve $x_\beta\leq x_\gamma$ koşullarını sağlayan bir $\gamma\in I$ varsa $(x_\alpha)$ ağı yukarı yönlendirilmiştir denir ve $(x_\alpha)\uparrow$ şeklinde gösterilir. $(x_\alpha)\uparrow$ ve $\sup\{x_\alpha\}=x$ ise $(x_\alpha)\uparrow x$ ile gösterilir. Benzer şekilde her $\alpha, \beta \in I$ için $x_\alpha \geq x_\gamma$ ve $x_\beta \geq x_\gamma$ koşullarını sağlayan bir $\gamma \in I$ varsa $(x_\alpha)$ ağı aşağı yönlendirilmiştir denir ve $(x_\alpha)\downarrow$ şeklinde gösterilir. $(x_\alpha)\downarrow$ ve $\inf\{x_\alpha\} = x$ ise $(x_\alpha)\downarrow x$ ile gösterilir (Meyer-Nieberg 1991).

### 4.1.7 Tanım

Her bir $x \in E^+$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ sağlanıyorsa $E$ Riesz uzayına Arşimedyandır denir (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

Örneğin, klasik fonksiyon Riesz uzayları Arşimedyandır. Fakat $\mathbb{R}^2$ üzerinde sözlük sıralama (lexicographicplane) adı verilen sıralama şu şekilde tanımlanır: $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ gerek ve yeter şart $x_1 > y_1$ ya da $x_1 = y_1$ olduğunda $x_2 \geq y_2$ olmasıdır. Buna göre $\mathbb{R}^2$ sözlük sıralamaya göre Archimedean olmayan Riesz uzayıdır.

### 4.1.8 Tanım

$E$ Riesz uzayının her sıra sınırlı kümesinin $E$ içinde bir supremumu ve infimumu varsa $E$ uzayına Dedekind tam uzay denir. Benzer olarak, sıra sınırlı sayılabilir her kümenin $E$ içinde bir supremumu ve infimumu varsa $E$ uzayına $\sigma$-Dedekind tam uzay denir (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

Örneğin, $L_p(\mu)$ uzayları Dedekind tam olmalarına karşın $C[0,1]$ Dedekind tam değildir.

### 4.1.9 Tanım

$E$ Riesz uzayı olmak üzere, $|x| \leq |y|$ olacak biçimdeki her $x, y \in E$ için $\|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa, $E$ üzerinde tanımlanan $\| \,.\, \|$ normuna örgü normu ve $(E, \| \,.\, \|)$ uzayına normlu Riesz uzayı denir. Eğer, $E$ normlu Riesz uzayı bu örgü normuna göre tam ise, $E$ Banach örgüsü olarak adlandırılır (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

$E$ normlu Riesz uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli operatörlerin vektör uzayı $\mathrm{E}^*$ ile gösterilecektir. Her Banach örgüsü Arşimedyan Riesz uzayıdır ve bir Riesz uzayını Banach örgüsü yapan tüm normlar denktir (Aliprantis 1985; Sonuç 12. 4).

### 4.1.10 Tanım

Bir Riesz uzayı üzerinde $\| \, . \, \|$ örgü normu tanımlansın. $x_\alpha \downarrow 0$ olacak şekildeki her $\{x_\alpha\}$ ağı için $\|x_\alpha\| \to 0$ sağlanıyorsa, $\| \, . \, \|$ normuna sıra sürekli norm denir. Bu koşulu sağlayan normlu Riesz uzayına da sıra sürekli norma sahip normlu Riesz uzay denir (Aliprantis ve Burkinshaw 1985).

Örnek olarak $1 \le p < \infty$ olmak üzere, $L^p(\mu)$ fonksiyon uzayları sıra sürekli norma sahip Banach örgüleridir. $C[0,1]$, $L^\infty(\mu)$ ve $\ell_\infty$ sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleridir.

### 4.1.11 Teorem

$E$ bir Banach örgüsü için aşağıdaki önermeler denktir (Aliprantis 1985; Teorem 12. 9, Teorem 12. 10, Teorem 12. 12):

i. $E$ uzayı sıra sürekli norma sahiptir.
ii. $0 \le x_n \le x$ koşulunu sağlayan $(x_n)$ monoton dizisi norm Cauchy dizisidir.
iii. E Dedekind tamdır ve $x_n \downarrow 0$ koşulunu sağlayan her $(x_n)$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ .
iv. Sıra sınırlı her dik dizi sıfıra norm yakınsaktır.
v. E, $E^{**}$ içinde bir idealdir.
vi. E ‘nin her sıra aralığı zayıf kompakttır.

Ayrıca $E$ sıra sürekli norma sahip Riesz uzayı ise, $E$ uzayının norm tamlaması da sıra sürekli norma sahiptir.

## 4.2 Riesz Bölüm Uzayları

$E$ bir Riesz uzay ve $A$ bir ideal olsun. Önceki bölümlerde de tanımlandığı üzere $E/A$ bölüm uzayının elemanları $[u] = \{z \in X : u - z \in Y\} = u + Y$ olacak biçimindeki denklik sınıflarıdır ve bu elemanlar arasında tanımlı

$$[u] + [v] = [u+v] \qquad \text{ve} \qquad \lambda[u] = [\lambda u]$$

cebirsel işlemlerine göre $E/A$ lineer uzaydır. Bu durumda

$$[u]=[v]\Leftrightarrow u-v\in A$$

ilişkisi vardır.

Reel vektör uzayı $X$ 'in herhangi bir $C$ alt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa pozitif koni veya kısaca koni olarak adlandırılır.

i. $C+C\subseteq C$

ii. Her bir $\alpha\in\mathbb{R}^+$ için $\alpha C\subseteq C$

iii. $C\cap(-C)\subseteq\{0\}$

Bilindiği üzere bir Riesz uzayı üzerindeki sıralama ile konisi arasında bire bir ilişki vardır. $C$ eğer $E$ reel lineer uzayında koni ise $u,v\in E$ için

$$\text{“}[u]\leq[v]\ \Leftrightarrow\ u-v\in C\text{”}$$

sıralaması ile $E$ sıralı vektör uzayı olur ve $E^+=C$ 'dir. Tersine $E$ bir Riesz uzayı ise $E^+$ bir konidir.

**4.2.1 Teorem**

$E$ Riesz uzayının bir ideali $A$ olmak üzere,

$$\pi(E^+)=\{[u]\in E/A : u\in E^+\}$$

$$=\{[u]\in E/A : [u]=[v] \text{ olacak şekilde } \exists\ v\in E^+ \text{ vardır}\}$$

$E/A$ bölüm uzayı için bir konidir.

**İspat:**

Açıktır ki $[u],[v]\in\pi(E^+)$ ve $\lambda\geq 0$ için $u+v\in E^+$ ile $\lambda u\in E^+$ sağlanacağından $[u]+[v]\in\pi(E^+)$ ve $\lambda[u]\in\pi(E^+)$ olur. Kabul edelim ki $[u]\in\pi(E^+)\cap[-\pi(E^+)]$ olsun. Bu durumda $[u]=[v]=-[w]$ olacak şekilde $v,w\in E^+$ vardır. Buradan $[v+w]=[0]$ veya $u+w\in A$ olduğu görülür. O halde $0\leq v\leq v+w$ ve $A$ 'nın ideal olduğu göz önüne alınırsa $v\in A$ ve dolayısıyla $[u]=[v]=[0]$ olur. □

O halde $E/A$ reel vektör uzayı üzerine $\pi\left(E^{+}\right)$ konisi ile indirgenen sıralama şu şekildedir:

$$\text{“}[u]\leq[v] \;\Leftrightarrow\; u_1\leq v_1 \text{ olacak şekilde } \exists u_1\in[u] \text{ ve } \exists v_1\in[v] \text{ vardır.”}$$

Bunu görmek için $[u]\leq[v]$ olduğunu kabul edelim. Bunun anlamı $[v-u]\in\pi\left(E^{+}\right)$ ve $v-u-w=a\in A$ olacak şekilde $w\in E^{+}$ var olmasıdır. $v_1=v-a$ ve $u_1=u$ olarak alındığında $0\leq w=v-a-u$ sağlanacağından $u_1\in[u]$, $v_1\in[v]$ ve $u_1\leq v_1$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $u_1\in[u]$, $v_1\in[v]$ için $u_1\geq v_1$ sağlandığında $[v]-[u]=[v_1]-[u_1]=[v_1-u_1]\in\pi\left(E^{+}\right)$ vardır. Böylece, $[u]\geq[v]$ olur. □

Ancak bölüm uzayı üzerine farklı sıralamalar da tanımlanabilir. Aşağıdaki Lemma tanımlanan bu sıralamaya denk bir sıralama bağıntısı verir.

**4.2.2 Lemma**

$E$ Riesz uzayının bir ideali $A$ olmak üzere $[f],[g]\in L/A$ için aşağıdakiler denktir (Luxemburg ve Zaanen 1971, Lemma 18.8).

1. $[f]\leq[g]$
2. $f_1\in[f]$ için $f_1\leq g_1$ olacak biçimde en az bir $g_1\in[g]$ vardır.
3. Her $f_1\in[f]$ ve $g_1\in[g]$ için $g_1-f_1\geq q$ olacak biçimde bir $q\in A$ vardır.

$A$, $E$ içinde alt örgü olmadığında bile $E/A$ 'nin vektör örgüsü olması mümkündür. Örneğin, $E=R^2$ klasik sıralı uzay ve $A$, $(\varepsilon_0,-\varepsilon_0)$ formundaki elemanların kümesi olduğunda $E/A$, alışılmış sıralama ile $\mathbb{R}$ uzayına izomorftur. Ancak, açıktır ki $\pi$ örgü homomorfizması ve $E/A$ vektör örgüsü olduğunda $A$ 'nın da alt örgü olması zorunluluğu vardır (Jameson 1970**).** Üstelik bölüm dönüşümünün Riesz homomorfizması olması durumunda çekirdeği $Ker(\pi)=\{x\in E:\pi(x)=[0]\}$ bir idealdir ve $Ker(\pi)=A$ olur. Bu nedenle Riesz uzayları için idealler ile oluşturulan bölümler düşünülecektir.

### 4.2.3 Teorem

$E$ Riesz uzayının bir ideali $A$ ise $E/A$ Riesz uzayıdır (Luxemburg ve Zaanen 1971, Lemma 18.9).

**İspat:**

Önceki teoremde verildiği üzere $\pi\left(E^{+}\right)$ konisi ile $E/A$ sıralı vektör uzayıdır. $u,v\in E$ alalım. Her $\alpha\geq 0$ ve $[u]\geq[0]$ için $\alpha[u]=[\alpha u]\geq[0]$ olur. Ayrıca, $[u]\leq[v]$ ise $u_1\leq v_1$ olacak biçimde $u_1\in[u]$ ve $v_1\in[v]$ vardır. $w\in[w]$ alındığında $u_1+w\leq v_1+w$ sağlanacağından $[u_1+w]\leq[u_1+w]$ olur. Buradan

$$[u]+[w]=[u_1]+[w]=[u_1+w]\leq[v_1+w]=[v_1]+[w]=[v]+[w]$$

olduğu görülür. Yani sıralama cebirsel yapı ile uyumludur.

Diğer taraftan $[u],[v]\in E/A$ için $[u\vee v]\geq[u],[v]$ olduğu açıktır. $[w]\geq[u\vee v]$ eşitsizliğini sağlayan $[w]\in E/A$ üst sınırını düşünelim. O halde $w-u\geq q_1$ ve $w-v\geq q_2$ olacak biçimde $q_1,q_2\in A$ vardır. $q=\inf\left(q_1,q_2\right)\in A$ için $w-u\geq q$ ve $w-v\geq q$ olur. Buradan,

$$w\geq(u+q)\vee(v+q)=(u\vee v)+q$$

ve dolayısıyla $w-(u\vee v)\geq q$ elde edilir. Yani $[w]\geq[u\vee v]$ olur. Aynı şekilde $u+v=(u\vee v)+(u\wedge v)$ eşitliğinden de $[u]\wedge[v]=[u\wedge v]$ olduğu görülebilir. □

Böylece $E/A$ için supremum ve infimum işlemlerinin $[u]\vee[v]=[u\vee v]$ ve $[u]\wedge[v]=[u\wedge v]$ şeklinde olduğu görülür. Dolayısıyla $u\in E/A$ için $[u]^{+}=\left[u^{+}\right]$, $[u]^{-}=\left[u^{-}\right]$ ve $\|[u]\|=[|u|]$ eşitlikleri de geçerlidir.

### 4.2.4 Örnek

**1.** $(\Omega,\Sigma,\mu)$ bir ölçü uzayı ve

$$I=\{x\in S(\mu):\text{hemen hemen her yerde } x(t)=0\}$$

olduğunda $I$, $S(\mu)$ içinde bir idealdir (ve böylece her $L_p(\mu)$ içinde). Eşlenik bölüm uzayları sadece $S(\mu)$ ve $L_p(\mu)$ 'dir.

Her bir $x,y\in E$ çiftleri için $\phi(x\vee y)=\phi(x)\vee\phi(y)$ sağlanıyorsa $\phi:E\to F$ lineer dönüşümüne Riesz homomorfizmi veya örgü homomorfizmi denir. Vektör uzay yapısını korudukları gibi örgü yapısını da koruyan örgü homomorfizmleri ile idealler birbirleri ile yakından ilişkilidirler.

**4.2.5 Önerme**

$E$ Riesz uzayının bir ideali $A$ ise $\pi:E\longrightarrow E/A$ bölüm dönüşümü Riesz homomorfizmasıdır ve $Ker(\pi)=A$ 'dır.

**İspat:**

$\forall u,v\in E$ için

$$\pi(u\vee v)=[u\vee v]=[u]\vee[v]=\pi(u)\vee\pi(v)$$

eşitliğinden bölüm dönüşümünün Riesz izomorfizmi olduğu görülür. □

Sonuç olarak bölüm dönüşümünün örtenliğinden, $E$ Riesz uzayının bir ideali ile oluşturulan bölüm uzayı $E$ 'nin örgü homomorfik görüntüsüdür. Tersine $\phi:E\to F$ bir örgü homomorfizmi ise $\phi(E)$ Riesz uzayı ve $Ker(\phi)$ ideal olduğundan $[x]\to\pi(x)$ Riesz izomorfizmi ile $E/A$ ve $\phi(E)$ Riesz izomorfik olur.

Arşimedyanlık özelliğine sahip olma veya olmama Riesz uzaylarının bölümleri için kalıtsal bir özellik değildir.

**4.2.6 Örnek**

$\mathbb{R}^2$ sözlük sıralama ile Arşimedyan değildir. Ancak düşey eksen ile oluşturulan bölüm uzayı, alışılmış sıralamaya göre Riesz uzayı olan $\mathbb{R}$ ile izomorf olduğundan Arşimedyandır.

### 4.2.7 Örnek

Doğal sıralaması ile $\ell_\infty$ Riesz uzayını ve $F$ sıralı konveks alt uzayını göz önüne alalım. $e=(1,1,...)$ ve $x=\left(1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},...\right)$ olsun. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $-e\leq nx\leq e+e_n$ olacak biçimde $e_n\in F$ vardır ve dolayısıyla, $-\pi(e)\leq n\pi(x)\leq\pi(e)$ sağlanır. Fakat $x\notin F$ olduğundan $\ell_\infty/F$ 'nin Arşimedyan olmadığı görülür (Jameson 1970).

### 4.2.8 Örnek

$L=C([0,1])$ Riesz uzayının alt kümesi

$$A=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R}:\exists\varepsilon>0 \text{ vardır ve } f([0,\varepsilon])\subset\{0\}\right\}$$

kümesini düşünelim. $A$ bir ideal olmasında karşın $L/A$ Arşimedyan değildir (Jonge ve van Rooji 1977).

Fakat normlu Riesz uzayları Arşimedyan olduklarından ve bu çalışmada Banach örgülerinin bölümleri ile ilgilenmemiz nedeniyle Riesz uzaylarının Arşimedyan oldukları kabul edilecektir. Ancak konunun bütünlüğü adına bölüm uzaylarının bu özelliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilmiştir.

### 4.2.9 Teorem

$E$ Riesz uzayının bir ideali $A$ olmak üzere aşağıdakiler denktir (Luxemburg ve Moore 1967, Teorem 5.1).

1. $E/A$ Arşimedyandır.
2. A relatif düzgün kapalıdır.
3. $u_n\uparrow u(r.u.)$ olacak biçimdeki $0\leq(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ için $u\in A$ 'dır.
4. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0\leq u,v\in E$ ve $(nu-v)^+\in A$ ise $u\in A$ 'dır.

$E$ kısmi sıralı kümesinin bir alt kümesi $A$ olsun. $E$ içinde $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ tanımlı olacak şekilde azalan olmayan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi var olduğunda $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\in A$ oluyorsa $A$ 'ya *dizisel sıra* *kapalıdır* ya da $E$ içinde $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ tanımlı olacak şekilde artan olmayan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi var olduğunda $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \in A$ oluyorsa $A$ 'ya dizisel sıra kapalıdır denir (Fremlin 2002).

### 4.2.10 Teorem

$E$ Riesz uzayı $\sigma$-Dedekind tam ve dizisel sıra kapalı ideali $A$ ise $E/A$ $\sigma$-Dedekind tamdır (Fremlin 2002, Önerme 353J).

**İspat:**

$E$ Riesz uzayı $\sigma$-Dedekind tam ise $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ üstten sınırlı dizisi için $u = \sup\{u_n\} \in E$ olur. $U = \{[u_n] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E/A$ için $[u]$ üst sınırdır. Kabul edelim ki $p$, $U$ 'nun herhangi bir üst sınırı olsun. $A$ kapalı olduğundan $u_n - a \in I$ olacak şekilde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $[u_n] \leq p$ vardır. Buradan, $u - a = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n - a) \in I$ ve $[u] \leq p$ 'dir. Böylece, $[u]$ en küçük üst sınırdır. Kabul edelim ki $[(p_n)] \in E/I$ için $[p]$ üst sınır olsun. $[u] = [p]$ ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $[(u_n)] = [(p_n)]$ olacak şekilde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ alalım. $v_n = u \wedge \sup_{i\leq n}(u_i)$ seçilirse $[(v_n)] = [(p_n)]$ olur. Dolayısıyla $v = \sup_{n\in\mathbb{N}}(v_n)$ iken

$$[v] = \left[\sup_{n\in\mathbb{N}}(v_n)\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}}[(v_n)] = \sup_{n\in\mathbb{N}}[(p_n)] \in E/I$$

olduğundan $E/I$ $\sigma$-Dedekind tamdır. □

Aşağıdaki teorem Lebesgue özelliği de denilen normun sıra sürekliliğinin idealler ile oluşturulan bölümler için korunan bir özellik olduğunu belirtir.

### 4.2.11 Teorem

Arşimedyan lokal solid Riesz uzayı $(E,\tau)$ Lebesgue özelliğine sahip ve $A$ bir ideal ise lokal solid bölüm Riesz uzayı $(E/A, \tau/A)$ Lebesgue özelliğine sahiptir (Aliprantis ve Burkinshaw 2003, Teorem 8.11).

### 4.3 L-zayıf ve M-zayıf Kompakt Operatörler İle Bölümler

#### 4.3.1 L-zayıf ve M-zayıf Kompakt Operatörler

Bu kesimde ele aldığımız zayıf kompakt operatörlerin bir alt sınıfı olan M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt operatörlerin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. M-zayıf kompakt ve L-zayıf kompakt operatörler ilk defa P. Meyer-Nieberg tarafından tanımlanmıştır (Meyer 1974). Daha sonraları Dodds-Fremlin L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin birbirleriyle çakıştığı veya kompakt operatörlerle çakıştığı durumları göstermiştir (Dodds 1979). A.W. Wickstead ve Z.L. Chen bu operatörlerin modüllerinin var olduğu durumları ve bu operatörler yardımıyla Shur özelliğine sahip Banach uzaylarının karakterizasyonu ile ilgili sonuçlar elde etmiştir (Chen 1999). Sonrasında ise literatürde oldukça fazla çalışma yer almıştır. Bu çalışmalar çoğunlukla operatörlerin birbiri arasındaki veya diğer operatör sınıfları ile olan ilişkileri hakkındadır.

**4.3.1.1 Tanım**

$E$ Banach örgüsünün boştan farklı bir alt kümesi $A$ olsun. Her $(x_n) \subset \text{sol}\,(A)$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ sağlanıyorsa, $A$ kümesine L-zayıf kompakt küme denir (Meyer-Nieberg 1974).

$E$ Banach örgüsü olmak üzere, $x \in E$ için $\{x\}$ kümesinin L-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $x \in E^a$ olmasıdır. Dolayısıyla, $E$ uzayının her L-zayıf kompakt kümesi $E^a$ ideali tarafından kapsanır.

**4.3.1.2 Tanım**

$E$ Banach örgüsü, $X$ Banach uzayı ve $T : X \to E$ bir sürekli operatör olsun. $T$ operatörü $X$ uzayının norm sınırlı kümelerini $E$ uzayının L-zayıf kompakt kümelerine resmediyorsa, $T$ operatörüne L-zayıf kompakt operatör denir (Meyer-Nieberg 1974).

**4.3.1.3 Tanım**

$E$ Banach örgüsü, $X$ Banach uzayı ve $T : E \to X$ bir sürekli operatör olsun. Her bir $(x_n) \subset E$ norm sınırlı dik dizisi için, $\lim \|Tx_n\| = 0$ koşulunu sağlayan $T$ operatörüne M-zayıf kompakt operatör denir (Meyer-Nieberg 1974).

**4.3.1.4 Teorem**

$E$ Banach örgüsü ve $X$ Banach uzayı olmak üzere, $E$ uzayından $X$ uzayı içine tanımlanan bütün M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi, $L(X,E)$ uzayının kapalı alt vektör uzayıdır. Benzer şekilde $X$ uzayından $E$ uzayı içine tanımlanan bütün L-zayıf kompakt operatörlerin kümesi, $L(X,E)$ uzayının kapalı alt vektör uzayıdır (Aliprantis 1985, Teorem 18.14).

**İspat:**

Açıktır ki, $E$ uzayından $X$ uzayı içine tanımlanan bütün M-zayıf kompakt operatörlerin kümesi $L(X,E)$ içinde bir alt vektör uzayıdır. $L(E,X)$ içinde bütün M-zayıf kompakt operatörlerin kapanışında olan $T$ operatörünü alalım. O halde $\varepsilon > 0$ için $\|T-S\| < \varepsilon$ olacak biçimde M-zayıf kompakt $S: E \longrightarrow X$ operatörü vardır ve $(x_n)$ norm sınırlı dik dizisi için

$$\|Tx_n\| \leq \|(T-S)x_n\| + \|Sx_n\| < \varepsilon + \|Sx_n\|$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre $\limsup\|Tx_n\| \leq \varepsilon$ olduğu görülür ve $\varepsilon > 0$ keyfi seçldiğinden $\|Tx_n\| = 0$ elde edilir. Yani T operatörü M-zayıf kompakttır. $S,T \in L(X,E)$ iki L-zayıf kompakt operatör olmak üzere iki L-zayıf kompakt operatörün toplamının L-zayıf olduğu görülür. O halde M-zayıf kompaktlık özelliğinden ve Teorem 4.3.1.8 ile $(S+T)^* = S^* + T^*$ olduğundan $S+T$ L-zayıf kompakttır. Böylece bütün L-zayıf kompakt operatörler kümesi $L(X,E)$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğu görülür. $L(X,E)$ içinde $\lim\|T_n - T\| = 0$ koşulunu sağlayan L-zayıf kompakt operatörlerin bir dizisi $\{T_n\} \subseteq L(X,E)$ olsun. O halde $L(E^*, X^*)$ içinde $\lim\|T_n^* - T^*\| = 0$ sağlanır. $T_n^*$ operatörleri M-zayıf kompakt olduğundan $T^*$ operatörü M-zayıf kompakttır. Böylece Teorem 4.3.1.8 gereği, $T$ operatörü L-zayıf kompakttır. □

**4.3.1.5 Teorem**

1. $E$ Banach örgüsü, $X$ Banach uzayı olsun. $T: E \rightarrow X$ operatörü M-zayıf kompakt ise; her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x \in U_E$ için $\left\|T\left(|x|-u\right)^+\right\| < \varepsilon$ olacak biçimde en

az bir $u \in E^{+}$ vardır. Dolayısıyla, $x = (x-y)^{+} + x \wedge y$ eşitliği ile $T(U_E) \subseteq T[-u,u] + \varepsilon U_X$ sağlanır.

2. $E$ Banach örgüsü, $X$ Banach uzayı olsun. $T: X \to E$ operatörü L-zayıf kompakt ise; her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x \in U_X$ için $\left\| \left( |Tx| - u \right)^{+} \right\| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir $u \in E^{+}$ vardır. Dolayısıyla, $x = (x-y)^{+} + x \wedge y$ eşitliği ile $T(U_X) \subseteq [-u,u] + \varepsilon U_E$ sağlanır (Aliprantis 1985, Teorem 18.9 ve Teorem 18.10).

Bu teoreme göre L-zayıf kompakt ve pozitif M-zayıf kompakt operatörlerin yarı kompakt oldukları söylenebilir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, $I: \ell_{\infty} \to \ell_{\infty}$ özdeşlik operatörü yarı kompakt olmasına rağmen zayıf kompakt değil dolayısıyla L- veya M-zayıf kompakt değildir.

### 4.3.1.6 Önerme

$E$ Banach örgüsünün her L-zayıf kompakt kümesi relatif zayıf kompakttır. Dolayısıyla her L-zayıf kompakt operatör zayıf kompakttır. Benzer şekilde her M-zayıf kompakt operatör de zayıf kompakttır (Aliprantis 1985, Positive Operatör Teorem 18.10).

Fakat zayıf kompakt operatörler L-zayıf veya M-zayıf kompakt olmak zorunda değildir. Örneğin, $I: \ell_2 \to \ell_2$ özdeşlik operatörü zayıf kompakt olmasına rağmen L- veya M-zayıf kompakt değildir. Çünkü $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\ell_2$ 'nin doğal tabanı olmak üzere $\lim \|e_n\|_{\ell_2} \neq 0$ 'dir. Operatör sınıflarımız ile zayıf kompakt operatörlerin tanım veya görüntü uzaylarının özelliklerine göre hangi durumlarda çakıştıkları aşağıdaki teoremde verilmiştir. Üstelik bu operatör sınıfları için L ve M harflerinin kullanım sebepleri de bu teoremden anlaşılabilir.

### 4.3.1.7 Teorem

1. $E$ bir AM-uzayı, $X$ Banach uzayı ve $T: E \to X$ bir sürekli operatör olsun. $T$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul M-zayıf kompakt olmasıdır (Aliprantis ve Burkinshaw 1985, Teorem 18.11).

2. $E$ bir AL-uzayı, $X$ Banach uzayı ve $T: X \to E$ bir sürekli operatör olsun. $T$ operatörünün zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul L-zayıf kompakt olmasıdır (Aliprantis ve Burkinshaw 1985, Teorem 18.11).

Diğer taraftan operatörlerimiz ile kompakt operatörler farklı sınıflardır. Örneğin $T:\ell_1 \to \ell_\infty, T(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| (1,1,1,...)$ operatörü kompakt olmasına rağmen L-zayıf veya M-zayıf kompakt değildir. Benzer şekilde (Meyer 1991, Teorem 3.6.20) gereği $1 \le p < q \le \infty$ olmak üzere $T:\ell_q \to \ell_p$ formunda L-ve M-zayıf kompakt olup kompakt olmayan operatörler bulmak kolaydır. Ancak bu operatör sınıflarının ilişkili olduğu durumlarda vardır. Örneğin $E^a$ idealinin her relatif kompakt alt kümesi L-zayıf kompakt olduğundan sıra sürekli norma sahip Banach örgüleri arasında tanımlı kompakt operatörler L-zayıf kompakttır (Meyer 1991). Bu durumun dual versiyonu M-zayıf kompakt operatörler için de söylenebilir. Operatörlerimiz arasında var olan ve çok sık kullanılan dual ilişki aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**4.3.1.8 Teorem**

$E$ bir Banach örgüsü ve $X$ bir Banach uzayı olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır (Meyer 1991, Önerme 3.6.11).

1. $T:E \to X$ operatörünün M-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $T^*:X^* \to E^*$ operatörünün L-zayıf kompakt olmasıdır.

2. $T:X \to E$ operatörünün L-zayıf kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $T^*:E^* \to X^*$ operatörünün M-zayıf kompakt olmasıdır.

L-zayıf kompakt operatörlerin M-zayıf kompakt veya M-zayıf kompakt operatörlerin L-zayıf kompakt olma zorunluluğu yoktur. Fakat F sıra sürekli norma sahip ise, her $T:E \to F$ regüler M-zayıf kompakt operatör L-zayıf kompakt; $E^*$ sıra sürekli norma sahip ise, her $T:E \to F$ regüler L-zayıf kompakt operatör M-zayıf kompakttır (Chen 1999, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2). Ayrıca, Dodds-Fremlin (1979) tanımlandıkları uzayların özelliklerine göre L-zayıf kompakt operatörler ile M-zayıf kompakt operatörlerin çakışabildiklerini göstermiştir.

**4.3.1.9 Teorem**

$E$ ve $F$ Banach örgüleri olsun. $E^*$ dual uzayı ve $F$ sıra sürekli norma sahip olmak üzere, $T:E \to F$ sıra sınırlı operatörü için aşağıdaki önermeler denktir (Dodds ve Fremlin 1979):

1. $T$ operatörü L-zayıf kompakttır

2. $T$ operatörü M- zayıf kompakttır

3. $T^*$ operatörü L- zayıf kompakttır

4. $T^*$ operatörü M- zayıf kompakttır

**5.** $(x_n) \subset E^+$ ve $(x_n^*) \subset F_+^*$ norm sınırlı dik dizileri için $\lim x_n^*(Tx_n) = 0$

### 4.3.2 L- ve M-zayıf Kompakt Operatörler İle Bölümler

Teorem 4.3.1.4 'de ispatlandığı üzere L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler $L(E,F)$ içinde operatör normuna göre kapalıdır. Dolayısıyla Önerme 2.3.1 ‘in sonucu olarak aşağıdaki teorem açıktır.

**4.3.2.1.Teorem**

Bölüm normu ile $L(E,F)/W_{L,M}(E,F)$ normlu uzaydır. Eğer $F$ Banach uzayı ise $L(E,F)/W_{L,M}(E,F)$ Banach uzayıdır.

**İspat:**

Her $T \in L(E,F)$ için

$$\|\cdot\|_{L(E,F)/W_L(E,F)} : L(E,F)/W_L(E,F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$[T] \to \|[T]\|_{L(E,F)/W_L(E,F)} = dist(T,S) = \inf\{\|T-S\| : S \in W_L(E,F)\}$$

şeklinde tanımlanan norm ile Önerme 2.3.1 ve Teorem 2.3.5 gereği istenen görülür. □

Ancak $L(E,F)$ ve $W_{L,M}(E,F)$ genelde vektör örgüsü değildir. Bu yüzden örgü yapısına sahip bölüm uzayları elde etmek için bu sınıflar uygun değildir.

E ve F Arşimedyan Riesz uzayları olmak üzere $T(E^+) \subseteq F^+$ koşulunu sağlayan $T : E \to F$ operatörüne pozitiftir denir ve tüm pozitif operatörlerin sınıfı $L^+(E,F)$ ile gösterilecektir. İki pozitif operatörün farkı olarak yazılabilen operatörlere ise regüler operatör denir. Tüm regüler operatörlerin sınıfı $L^r(E,F)$ ile gösterilecektir. Her bir $T,S \in L^r(E,F)$ için

"$T \leq S \quad \Leftrightarrow \quad S-T \in L^+(E,F)$" bağıntısı ile $L^r(E,F)$ bir sıralı vektör uzayıdır. Diğer taraftan her bir pozitif operatör sürekli olduğundan aşağıdaki kapsamalar sağlanır.

$$L^+(E,F) \subseteq L^r(E,F) \subseteq L(E,F)$$

Diğer taraftan regüler operatörler operatör normuna göre genelde Banach uzayı değildir. Fakat regüler norm olarak adlandırılan

$$\|T\|_r = \inf\left\{\|S\|_o : S \in L(E,F)_+, |Tx| \leq S|x|, \forall \ x \in E\right\}$$

normu ile $L^r(E,F)$ Banach uzayıdır ve $\|T\|_o \leq \|T\|_r$ sağlanır.

Benzer şekilde sınırlı operatörler gibi regüler operatörler de genelde bir vektör örgüsü yapısında olmazlar. Ancak $L^r(E,F)$ 'nin Riesz uzayı olduğu durumlar vardır. Örneğin $E$ atomik ve sıra sürekli norma sahipse $\left(L^r(E,F), \|.\|_r\right)$ Banach örgüsüdür (Wickstead 2007, Theorem3.4). Yine benzer şekilde $F$ Dedekind tam ise $\left(L^r(E,F), \|.\|_r\right)$ Banach örgüsüdür ve modül Riesz-Kantorovich formülleri ile tanımlanır (Abramovich ve Wickstead 1992). Ancak $L^r(E,F)$ 'nin vektör örgüsü olduğu fakat modülün bu formüllerle verilmediği bir operatör örneği M. Elliot tarafından verildiği bilinmektedir. Eğer $T \in L^r(E,F)$ operatörü bir modüle sahip ise $\|T\|_r = \||T|\|$ olur. Sıkça kullanacağımız için $\left(L^r(E,F), \|.\|_r\right)$ 'nin Banach örgüsü olması için $F$ 'nin Dedekind tamlığının gerekliliği aşağıda ispatı ile verilmiştir.

**4.3.2.2 Teorem**

$E$ Banach örgüsü olmak üzere her $T \in L^r(E,F)$ için

$$\|T\|_r = \inf\left\{\|S\| : S \in L_+(E,F), \ |Tx| \leq S|x| \ \forall x \in E_+ \ \right\}$$

regüler normu ile $L^r(E,F)$ bir Banach uzayıdır ve $\|T\| \leq \|T\|_r$ olur. Üstelik $F$ Dedekind tam ise $\|T\|_r = \||T|\|$ olacak biçimde $L^r(E,F)$ bir Banach örgüsüdür (Meyer-Nieberg 1991, Teorem 1.3.6).

**İspat:**

Regüler normun $\|.\| \leq \|.\|_r$ olacak şekilde $L^r(E,F)$ üzerinde bir norm olduğu kolayca görülür. O halde $(T_n)_{n=1}^{\infty} \in L^r(E,F)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bazı alt uzaylar alınarak her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|T_n - T_{n+1}\|_r \leq 2^{-n}$ olduğu söylenebilir. Her $x \in E$ için $\|S_n\| \leq 2^{-n}$ ve $|T_n x - T_{n+1}x| \leq S_n|x|$ olacak şekilde $S_n \in L_+(E,F)$ alalım. $\|.\| \leq \|.\|_r$ olduğundan $\|T - T_n\| \to 0$ olan $T \in L(E)$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için operatör normu içinde $Q_n = \sum_{m=n}^{\infty} S_m$ yakınsak serisi alındığında $\|Q_n\| \leq 2^{1-n}$ ve $Q_n \in L_+(E,F)$ olduğu görülür. Her $x \in E$ için

$$|(T - T_n)x| = \lim_{m\to\infty} |(T_m - T_n)x| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |(T_{m+1} - T_m)x| \leq Q_n|x|$$

elde edilir. Buradan $-Q_n \leq (T - T_n) \leq Q_n$ olduğundan $T$ 'ninregüler operatör ve $\|T - T_m\|_r \leq \|Q_m\| \leq 2^{1-m}$ olduğu görülür. Ayrıca, $F$ Dedekind tam ise Meyer (1991), Teorem 1.3.2 ve Teorem 1.3.5 gereği $L^r(E,F)$ 'nin bir Riesz uzayı olduğu söylenebilir. □

Ancak açıktır ki $L^r(E,F)$ Banach örgüsü olduğunda bile alt sınıflarının Riesz uzayı veya regüler norm ile Banach örgüsü olmasına gerek yoktur. Örneğin pozitif kompakt operatörler ile üretilen operatör sınıfı $K^r(E,F)$ genelde Riesz uzayı değildir. Eğer $E^*$ ve $F$ sıra sürekli norma sahip ise bu operatör sınıfı Riesz uzayıdır ancak regüler norm ile Banach uzayı değildir (Chen ve Wickstead 2007).

Diğer taraftan Banach örgüleri arasında tanımlı sınırlı operatörlerin alt uzaylarının Banach örgüsü olması ve özelliklerinin aktarılması için baskınlık özelliği önemlidir. $0 \leq S \leq T \in M$ olduğunda $S \in M$ ise sınırlı operatörlerin bir alt sınıfı olan $M$ baskınlık özelliğine sahiptir denir. Sınırlı operatörlerin birçok alt sınıfı ekstra koşullar haricinde bu özelliğe sahip değildir. Örneğin; kompakt, zayıf kompakt, Dunford-Pettis operatörleri gibi sınıflar bu özelliğe sahip değildir. Ancak, $L$-zayıf ve $M$-zayıf kompakt operatörler ekstra koşul olmaksızın baskınlık özelliğine sahiptir. Bu nedenle, bu sınıfların sıralı uzaylar teorisindeki özelliklerden bir çoğunu sağladığı umulabilir.

Fakat baskınlık özelliğinin sağlanmasına rağmen $W_L(E,F)$ve $W_M(E,F)$ 'nin vektör örgüsü olması genelde doğru değildir. $T \in W_L(E,F)$ (ya da $T \in W_M(E,F)$) 'nin modülünün var olmadığı bazı durumlar vardır. Örneğin; bir modüle sahip olmayan $T : L^2[0,1] \longrightarrow c(L^2[0,1])$ regüler $L$-zayıf ve $M$-zayıf kompakt operatörü veya modüle sahip olsa bile modülün $L$-zayıf ya da $M$-zayıf kompakt olmadığı $T : \ell_1(L^2[0,1]) \longrightarrow \ell_\infty(L^2[0,1])$ formundaki operatör örnekleri verilmiştir (Chen ve Wickstead 1999, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3**).** Bu örnekler $W_{L,M}(E,F) \cap L^r(E,F)$ ve $W_{L,M}(E,F)$ 'nin genelde vektör örgüsü olmadığını gösterir. Dolayısıyla $W_L(E,F)$ ve $W_M(E,F)$ 'nin daha küçük alt sınıfları ile çalışmak doğaldır.

Pozitif $L$-zayıf ve $M$-zayıf kompakt operatörler ile üretilmiş

$$W_L^r(E,F) = \{T_1 - T_2 : T_1, T_2 \in W_L(E,F)_+\}$$

ve

$$W_M^r(E,F) = \{T_1 - T_2 : T_1, T_2 \in W_M(E,F)_+\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eşit oldukları durumlar olsa da genelde öz olan

$$W_{L,M}^r(E,F) \subseteq W_{L,M}(E,F) \cap L^r(E,F) \subseteq W_{L,M}(E,F)$$

kapsamaları sağlanır.

Banach örgüleri teorisinde normun sıra sürekliliği çok önemli bir faktördür. $x_\alpha \downarrow 0$ olacak biçimdeki her bir$(x_\alpha) \subset E$ için $\|x_\alpha\| \to 0$ sağlanıyorsa $E$ sıra sürekli norma sahiptir denir. Örneğin, standart normları ile $L^1[0,1]$, $\ell_1$, $c_0$ sıra sürekli norma sahip olmalarına karşın $L^{\infty}[0,1]$, $\ell_{\infty}$, $c$ sıra sürekli norma sahip değillerdir. $E$ Banach örgüsünün sıra sürekli kısmı olarak adlandırılan

$$E^{a}=\left\{x\in E:[0,|x|]\text{ içindeki her monoton dizi yakınsak}\right\}$$

kümesi sıra sürekli norma sahip maksimal idealdir ve sıra sürekli norma sahip olduğundan sıra tamdır. Örneğin $(\ell_{\infty})^{a}=c^{a}=c_0$ olur. Normlu Riesz uzaylarının sıra sürekli kısımları L-zayıf kompakt operatörler için önemli bir araçtır. Çünkü tüm L-zayıf kompakt kümeler $E^{a}$ tarafından kapsanacağından her $T\in W_L(X,E)$ için $T(X)\subset E^{a}$ sağlanır. Yani aslında $W_L(E,F^{a})=W_L(E,F)$ olur. M-zayıf kompakt operatörler ise $F^{a}$ içinde değer almak zorunda değildirler.

$x\in E$ için $(f\otimes y)(x)=f(x)y$ olarak tanımlandığında $f\in E^{*}$ ve $0\neq y\in F^{a}$ için $f\otimes y\in W_L(E,F)$, benzer olarak, $f\in(E^{*})^{a}$ ve $0\neq y\in F$ için $f\otimes y\in W_M(E,F)$ olur. Dolayısıyla

$$F^{a}=\{0\}\ \Leftrightarrow\ W_L(E,F)=\{0\}$$

ve

$$(E^{*})^{a}=\{0\}\ \Leftrightarrow\ W_M(E,F)=\{0\}$$

gerektirmelerini görmek zor değildir.

Teorem 4.3.1.4 ‘de ispatlandığı üzere L-zayıf ve M-zayıf operatörler operatör normuna göre $L(E,F)$ 'nin kapalı alt uzaylarıdır. Aşağıdaki teorem benzer durumun regüler norm için de geçerli olduğunu ifade eder.

**4.3.2.3.Önerme**

$W_L^{r}(E,F)$ regüler norm altında $L^{r}(E,F)$ içinde kapalıdır. Eğer $F$ sıra tam ise $W_M^{r}(E,F)$ 'de regüler norm altında $L^{r}(E,F)$ içinde kapalıdır.

**İspat:**

$T$ operatörü $L^r(E,F)$ içindeki $W_L^r(E,F)$ 'nin kapanışında olsun. Buna göre $\|T_n - T\|_r \longrightarrow 0$ olacak şekilde bir $(T_n) \subseteq W_L^r(E,F)$ dizisi vardır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $T_n$ operatörleri Dedekind tam olan $F^a$ değerli olduklarından modülleri vardır ve baskınlık özelliği yardımıyla $|T_n| \in W_L^r(E,F)$ olur. Buna göre $|T|$ vardır ve $\||T_n| - |T|\|_r \to 0$ sağlanır (Chen ve Wickstead 2007, Teorem2.1). Diğer taraftan $0 \le \||T_n| - |T|\| \le \||T_n| - |T|\|_r$ olduğundan $\||T_n| - |T|\| \to 0$ sağlanır ve $W_L(E,F)$, $L(E,F)$ içinde kapalı olduğundan $|T| \in W_L(E,F)$ 'dir (Aliprantis ve Burkinshaw 1985, Teorem 18.14(2)). Buradan da $T = |T| - (|T| - T) \in W_L^r(E,F)$ olduğu görülür. □

$W_M^r(E,F)$ durumunda, $T \in W_M^r(E,F)$ operatörünün $|T|$ modülünün varlığı için $F$ 'in sıra tamlığına ihtiyaç vardır (Bayram ve Burkinshaw 2017). Geriye kalan ispatın birinci kısmına benzer bir yolla yapılabilir. □

**4.3.2.4 Teorem**

$W_L^r(E,F)$ bir Dedekind tam vektör örgüsüdür (Bayram ve Wickstead 2017, Theorem2.2).

**4.3.2.5 Teorem**

$F$ Dedekind tam ise $W_M^r(E,F)$ bir Dedekind tam vektör örgüsüdür (Bayram ve Wickstead 2017,Theorem2.3).

Sonuç olarak $W_L^r(E,F)$ ve $F$ Dedekind tam olduğunda $W_M^r(E,F)$, $L^r(E,F)$ içinde kapalı ve baskınlık özelliğini sağladıklarından aynı zamanda idealdirler. O halde bölüm uzaylarına yönelik aşağıdaki sonuç verilebilir.

**4.3.2.6 Sonuç**

$L^r(E,F)$ Riesz uzayı olduğunda $L^r(E,F)/W_L^r(E,F)$ ve $L^r(E,F)/W_M^r(E,F)$ Lemma 4.2.2 'de verilen sıralama ile sıralaması ile Riesz uzayıdır.

**İspat:**

Teorem 4.2.3 'den açıktır. □

**4.3.2.7 Sonuç**

$F$ Dedekind tam olduğunda $L^r(E,F)/W_L^r(E,F)$ ve $L^r(E,F)/W_M^r(E,F)$ bölümleri $\sigma$-Dedekind tamdır.

**İspat:**

$F$ Dedekind tam olduğunda $L^r(E,F)$ Dedekind tam olacağından ispat Önerme 4.3.2.3 ve Teorem 4.2.10 'dan açıktır. □

**4.3.2.8 Sonuç**

$L^r(E,F)/W_L^r(E,F)$ bölüm uzayı

$$[T] \to \|[T]\|_{L^r(E,F)/W_L^r(E,F)} = dist(T,S) = \inf\left\{\|T-S\| : S \in W_L^r(E/F)\right\}$$

şeklinde tanımlı bölüm normu ile bir Banach örgüsüdür.

**İspat:**

Teorem 4.3.2.3 ve Teorem 4.3.2.4 'den açıktır. □

Normun sıra sürekliği kapalı idealler ile bölümler tarafından korunan bir özelliktir. Fakat regüler normun sıra sürekli olması genelde doğru değildir. Böyle durumlara dair bazı sonuçlar Chen ve ark. (2013) tarafından verilmiştir.

**4.3.2.9 Teorem**

$L^r(E,F)$ üzerinde tanımlı regüler norm sıra sürekli ise $E^*$ ve $F$ sıra sürekli norma sahiptir **(**Chen ve ark. 2013**)**.

**4.3.2.10 Teorem**

$L^r(E,F)$ 'nin sıra sürekli norma sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her bir pozitif operatörün L-zayıf ve M-zayıf kompakt olmasıdır **(**Chen ve ark. 2013**)**.

### 4.3.2.11 Teorem

$W_L^r(E,F)$ üzerinde tanımlı regüler normun sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $E^*$ 'nün sıra sürekli norma sahip olmasıdır. Benzer şekilde $W_M^r(E,F)$ üzerinde tanımlı regüler normun sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $F$ 'nin sıra sürekli norma sahip olmasıdır (Bayram ve Wickstead 2017, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2).

Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki basit çıkarım yapılabilir.

### 4.3.2.12 Sonuç

$L^r(E,F)$ 'nin Riesz uzayı ve regüler normun sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $L^r(E,F)/W_L^r(E,F)=\{0\}$ ve $L^r(E,F)/W_M^r(E,F)=\{0\}$ olmasıdır.

### 4.3.2.13 Teorem

$E$ Dedekind $\sigma$-tam Banach örgüsü ve $A$ norm kapalı ideal olsun. $\ell_\infty$ 'un $E$ 'de örgü izometrik gömülüşü varsa $E/A$ veya $A$ 'da böyle bir gömülüşe sahiptir (Wojtowicz 2002, Corollary 1.2).

Bir Dedekind $\sigma$-tam Banach örgüsünün $\ell_\infty$ 'a göre örgü izometrik alt uzaya sahip olması onun sıra sürekli norma sahip olmaması için gerek ve yeter şarttır (Meyer 1991, Sonuç 2.4.3). O halde $L^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahip değilse $L^r(E,F)/W_{L,M}^r(E,F)$ veya $W_{L,M}^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahip değildir.

### 4.3.2.14 Sonuç

1. $F$ sıra sürekli norma sahip fakat $E^*$ sahip değilse $L^r(E,F)/W_M^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahip değildir.

2. $F$ Dedekind tam olmak üzere $E^*$ sıra sürekli norma sahip fakat $F$ sahip değilse $L^r(E,F)/W_L^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahip değildir.

**İspat:**

1. $F$ sıra sürekli norma sahip fakat $E^*$ sahip olmasın. Bu durumda $L^r(E,F)$ sıra sürekli

norma sahip değildir (Chen ve ark. 2013). Diğer taraftan Chen ve ark. (2013) 'ün ispatına göre $L^r(E,F)/W_M^r(E,F) \neq \{0\}$ sağlanır. Üstelik $F$ sıra sürekli norma sahip olduğundan $W_M^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahiptir (Bayram ve Wickstead 2017, Teorem 3.2). O halde Teorem 4.3.2.13 gereği $L^r(E,F)/W_M^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahip değildir.

2. Bayram ve Wickstead (2017), Teorem 3.1 gereği $E^*$ sıra sürekli norma sahip olduğunda $W_L^r(E,F)$ sıra sürekli norma sahip olduğu göz önüne alındığında ispat 1 ‘e benzer olarak yapılabilir. □

Bölüm 2.4 ‘te Banach cebirlerine değinilmiş, bölüm 3.3 ‘de ise, birer bölüm uzayları olan Calkin ve zayıf Calkin cebirlerinden söz edilmişti. Budan sonra ki amacımız ise L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ile oluşturulan bölümlerin cebir yapısı ile ilgili bazı sonuçları vermektir. İlk olarak regüler operatörler uzayının cebir yapısına değineceğiz.

**4.3.2.15 Teorem**

$E$ Dedekind tam Banach örgüsü olmak üzere $L^r(E)$, bileşke işlemi ve regüler norma göre Banach cebiridir. Üstelik, her $T \in L^r(E)$ için $T\mathrm{I} = \mathrm{I}T = T$ sağlandığından, $I$ özdeşlik operatörü $L^r(E)$ cebirinin birimidir.

**İspat:**

$L^r(E)$ 'nin operatörler arasındaki sıralama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kısmi sıralı vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Her $T,S,U \in L^r(E)$ ve $x \in E$ $,\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$((TS)U)(x) = TSU(x) = (T(SU))(x)$$

$$(T(S+U))(x) = T(S(x)+U(x)) = TS(x)+TU(x) = (TS+TU)(x)$$

$$((T+S)U)(x) = (T+S)U(x) = TU(x)+SU(x) = (TU+SU)(x)$$

$$(\alpha(TS))(x) = (\alpha T)S(x) = \alpha T(S(x)) = T(\alpha S(x)) = (T(\alpha S))(x)$$

eşitlikleri sağlandığından $L^r(E)$ cebirdir. Diğer taraftan hipotezimiz ile Teorem 4.3.2.2 'den $L^r(E)$ regüler norm ile bir Banach örgüsüdür ve $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$ sağlanır. Yani, $L^r(E)$ Banach cebiridir. □

Regüler kompakt ve regüler zayıf kompakt operatörlerin aksine aşağıdaki örneklerin de gösterdiği üzere $L^r(E) \cap W_M(E)$ ve $L^r(E) \cap W_L(E)$ genelde çift taraflı ideal değildir.

### 4.3.2.16 Örnek

$i : L^2[0,1] \longrightarrow L^1[0,1]$ inclusion operatörünü kabul edelim. $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\ell_1$ 'in doğal tabanı olmak üzere n. Rademacher fonksiyonu $r_n$ için $S : \ell_1 \longrightarrow L^2[0,1], S(e_n) = r_n$ operatörünü tanımlayalım. Açıktır ki, $i$ pozitif M-zayıf kompakt bir operatördür ve $S$ regüler bir operatördür. Diğer taraftan, $iS$ M-zayıf kompakt değildir. Çünkü, $(e_n)$, $\ell_1$ 'de norm sınırlı dik dizi iken $\|iS(e_n)\|_{L^1[0,1]} = \|r_n\|_{L^1[0,1]} = 1$ sıfıra yakınsak değildir. Böylece, $E = \ell_1 \oplus L^2[0,1] \oplus L^1[0,1]$ Banach örgüsü ve $E$ üzerinde $U(x,y,z) = (0, S(x), 0)$, $V(x,y,z) = (0,0,i(y))$ olmak üzere $U$ regüler operatör ve $V$ regüler M-zayıf kompakt operatördür. Fakat, $VU$ M-zayıf kompakt değildir. Dolayısıyla, M-zayıf kompakt operatörlerin $L^r(E)$ içinde çift taraflı olmasına ihtiyaç yoktur. Ayrıca, $V^*$ regüler L-zayıf kompakt operatör ve $U^*$ regüler operatör iken $U^*V^*$ L-zayıf kompakt değildir. Bu ise gösterir ki, L-zayıf kompakt operatörlerin $L^r(E)$ içinde çift taraflı olmasına ihtiyaç yoktur (Bayram ve Wnuk 2013).

### 4.3.2.17 Teorem

$E^a \neq \{0\}$ olmak üzere bir $E$ Banach örgüsü için aşağıdakiler denktir (Bayram ve Wnuk 2013, Teorem 3.3):

i) $W_L(E) \cap L^r(E)$, $L^r(E)$ içinde çift taraflı idealdir.

ii) Her $T \in W_L(E) \cap L^r(E)$ ve her $S \in F(E)$ için $ST \in W_L(E)$

iii) Her $T \in W_L(E) \cap L^r(E)$ ve her $S : E \to E$ sonlu rank operatörü için $ST \in W_L(E)$

iv) $E$ sıra sürekli norma sahiptir.

**4.3.2.18 Teorem**

$\left(E^*\right)^a \neq \{0\}$ olmak üzere bir $E$ Banach örgüsü için aşağıdakiler denktir (Bayram ve Wnuk 2013, Teorem 3.4):

i) $W_M(E) \cap L^r(E)$, $L^r(E)$ içinde çift taraflı idealdir.

ii) Her $T \in W_M(E) \cap L^r(E)$ ve her $S \in F(E)$ için $TS \in W_M(E)$

iii) Her $T \in W_M(E) \cap L^r(E)$ ve her $S : E \to E$ sonlu rank operatörü için $TS \in W_M(E)$

iv) $E^*$ duali sıra sürekli norma sahiptir.

Bu teoremlerin ispatlarına baktığımızda aşağıdaki teoremlerin de doğru olduğu görülür.

**4.3.2.19 Teorem**

$W_L^r(E,F)$'nin (sırasıyla $W_M^r(E,F)$'nin) regüler operatörler içinde çift taraflı ideal olması için gerek ve yeter koşul $E$ 'nin (sırasıyla $E^*$ 'nün) sıra sürekli norma sahip olması gerekir.

Bu nedenle aşağıdaki sonuç önceki bölümde ki Teorem 2.2.4 'ten hemen görülür.

**4.3.2.20 Sonuç**

$E$ sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olmak üzere $L^r(E)/W_L^r(E)$ bileşke işlemi ve bölüm normu ile Banach cebiridir. Eğer $E$ Dedekind tam ve $E^*$ sıra sürekli norma sahip ise $L^r(E)/W_M^r(E)$ bir Banach cebiridir.

### 4.3.3 L-zayıf Kompakt Operatör Bölümleri İçin Bir Temsil

Bu kısımda Gonzales ve ark. , Saksman ve Tylli'nin (1995) ‘de Banach uzayları arasında tanımlı zayıf kompakt operatörler ile bölümler için yapılan temsillere benzer olarak $L^r(E,F)/W_L^r(E,F)$ bölüm uzayı için bir temsili ve temsil dönüşümünün bazı özellikleri verilecektir.

$L^r(E,F)$ Riesz uzayı olduğunda $L^r(E,F)/W_L^r(E,F)$ bölümünün Riesz uzayı olduğu daha önceki kısımda söylenmişti. Diğer taraftan $E^a$, $E^{**}$ uzayının kapalı ideali olduğundan $E^{**}/E^a$ Riesz uzayı olacaktır (Meyer 1991, Teorem 2.4.2 ve Teorem 2.4.10). Her bir $S \in L^r(E,F)$ için tanımlanan

$$R([S]) : E^{**}/E^a \longrightarrow F^{**}/F^a, \; R([S])(x^{**}+E^a) = [S^{**}x^{**}] = S^{**}x^{**} + F^a$$

operatörünü düşünelim. Buna göre aşağıdaki dönüşüm iyi tanımlıdır.

$$R : L^r(E,F)/W_L^r(E,F) \longrightarrow L^r(E^{**}/E^a, F^{**}/F^a)$$

$$[S] \longrightarrow R([S])$$

Bu koşullar altında tanımlanan $R$ dönüşümünün temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

**4.3.3.1 Teorem**

$E$ ve $F$ Banach örgüleri olmak üzere her $S \in L^r(E,F)$ için yukarıda tanımlanan $R$ dönüşümü aşağıdaki önermeleri sağlar.

1. $S \in W_L^r(E,F) \Rightarrow R([S]) = 0$
2. $R$ pozitif lineer dönüşümdür.
3. $\|R([S])\|_r \leq \|S^{**}\|_{E^{**}}$ ve $\|R\| \leq 1$ sağlanır.
4. $R(I_E) = I_{E^{**}/E^a}$
5. $ST$ tanımlı olduğunda $R([ST]) = R([S])R([T])$ sağlanır.

**İspat:**

1. $S \in W_L^r(E,F)$ ise $S^* \in W_M^r(F^*,E^*)$ ve $S^{**} \in W_L^r(E^{**},F^{**})$ dır. Diğer taraftan L-zayıf kompakt operatörler aynı zamanda zayıf kompakt olduklarından $S^{**}(E^{**}) \subseteq F$ ve dolayısıyla $S^{**}(E^{**}) \subseteq F^a$ olur. Dolayısıyla $W_L^r(E,F) \subseteq Ker(R)$ sağlanır.

2. Her $S,T \in L^r(E,F)$, $x^{**} \in E^{**}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$R\left(\alpha[T]+\beta[S]\right)\left[x^{**}\right]=\left[(\alpha T+\beta S)^{**}x^{**}\right]=\left[(\alpha T)^{**}x^{**}+(\beta S)^{**}x^{**}\right]$$
$$=\alpha\left[\left(T^{**}x^{**}\right)\right]+\beta\left[\left(S^{**}x^{**}\right)\right]=\alpha R([T])+\beta R([S])$$

3. eşitliği sağlandığından $R$ dönüşümü lineerdir. Kabul edelim ki $0\leq S\in L^r(E,F)$ ve $\left[x^{**}\right]\in\left(E^{**}/E^a\right)^+$ olsun. Buna göre $x^{**}\in\left(E^{**}\right)^+$ ve dolayısıyla $S^{**}x^{**}\in\left(F^{**}\right)^+$ çıkar. Bölüm dönüşümünün Riesz homomorfizmi olmasından $\left[S^{**}x^{**}\right]\in\left(F^{**}/F^a\right)^+$ olur ve dolayısıyla $R([S])\left[x^{**}\right]\in\left(F^{**}/F^a\right)^+$ elde edilir. Bu ise $R([S])\geq 0$ olduğunu gösterir.

4. Her bir $x^{**}\in E^{**}$ için
$$R([I_E])\left[x^{**}\right]=\left[I_E^{**}x^{**}\right]=\left[x^{**}\right]=I_{E^{**}/E^a}\left[x^{**}\right]$$
eşitliğinden istenen görülür.

5. $S,T\in L^r(E,F)$ ve $x^{**}\in E^{**}$ için
$$\begin{aligned}
\left\|R([S])\left[x^{**}\right]\right\|_{F^{**}/F^a} &= dist\left(R([S])\left[x^{**}\right],F^a\right)\\
&=\inf\left\{\left\|R(S)\left[x^{**}\right]-y\right\|:y\in F^a\right\}\\
&=\inf\left\{\left\|S^{**}x^{**}+z-y\right\|:z,\ y\in F^a\right\}\\
&=\inf\left\{\left\|S^{**}x^{**}-u\right\|:u\in F^a\right\}\\
&=\inf\left\{\left\|S^{**}x^{**}-u\right\|:u\in F^a\right\}\\
&\leq\inf\left\{\left\|S^{**}x^{**}-S^{**}w\right\|:w\in E^a\right\}\\
&\leq\inf\left\{\left\|S^{**}\right\|.\left\|x^{**}-w\right\|:w\in E^a\right\}\\
&=\left\|S^{**}\right\|_{E^{**}}.\inf\left\{\left\|x^{**}-w\right\|:w\in E^a\right\}\\
&=\left\|S^{**}\right\|_{E^{**}}.\left\|\left[x^{**}\right]\right\|_{E^{**}/E^a}
\end{aligned}$$

olduğundan $R(S)$ sınırlıdır. Üstelik $\|R(S)\|\leq\left\|S^{**}\right\|=\|S\|$, dolayısıyla $\|R\|\leq 1$ olduğu da görülür.

6. *E, F, G* Banach örgüleri $S\in L^r(E,F)$ ve $T\in L^r(G,E)$ ve her $x^{**}\in G^{**}$ için
$$R([ST])\left[x^{**}\right]=\left[(ST)^{**}x^{**}\right]=\left[S^{**}\left(T^{**}x^{**}\right)\right]=\left[S^{**}\left(R([T])\left[x^{**}\right]\right)\right]=R([S])R([T])\left[x^{**}\right]$$
eşitliğinden istenen görülür.□

**4.3.3.2 Tanım**

E ve F Banach örgüleri olmak üzere her bir $T \in L^r(E,F)$ için $|T|$ var ve $|T^*| = |T|^*$ eşitliği sağlanıyorsa $(E,F)$ değişmez modül özelliğini sağlıyor denir (Meyer-Nieberg 1991).

**4.3.3.3 Teorem**

$(E,F)$ ve $(F^*,E^*)$ değişmez modül özelliğine sahip olacak biçimdeki E ve F Banach örgüleri için R dönüşümü Riesz homomorfizmdir.

**İspat:**

$S \in L^r(E,F)$ ve $x^{**} \in E^{**}$ için $R\big(|[S]|\big)[x^{**}] = R\big([|S|]\big)[x^{**}] = \big[|S|^{**} x^{**}\big]$ sağlanır. Hipotezlerimiz gereği $|S|^{**} = |S^{**}|$ elde edilir (Wickstead 2007). Böylece

$$R\big(|[S]|\big)[x^{**}] = \big[|S|^{**} x^{**}\big] = \big[|S^{**}| x^{**}\big]$$

çıkar. Riesz-Kantorovich formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned} R\big(|[S]|\big)[x^{**}] &= \Big[\sup\Big\{|S^{**}y^{**}| : |y^{**}| \le x^{**}\Big\}\Big] = \Big[\sup\Big\{\big|R([S])[y^{**}]\big| : |y^{**}| \le x^{**}\Big\}\Big] \\ &= \sup\Big\{\big|R([S])[y^{**}]\big| : \big[|y^{**}|\big] \le [x^{**}]\Big\} = \sup\Big\{\big|R([S])[y^{**}]\big| : \big|[y^{**}]\big| \le [x^{**}]\Big\} \\ &= \big|R([S])\big|[x^{**}] \end{aligned}$$

elde edilir. □

**KAYNAKLAR**

Aliprantis CD, Burkinshaw O (1985). Positive Operators. Pure and Applied Mathematics Volume 119, 383p, Academic Press, Inc..

Aliprantis CD, Burkinshaw O, (2003). Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics Second Edition. Mathematical Surveys and Monographs Volume 105, 360p, American Mathematical Society.

Argyros SA, Motakis P (2016). A Dual Method of Constucting Hereditarily Indecomposable Banach Spaces. Positiviy, 20 (3): 625-662.

Bayram E, Wnuk W (2013). Some Algebra Ideals of Reguler Operators. Commentationes Mathematıcae, Vol 53, No 2: 127-133.

Bayram E, Wickstead AW (2017). Banach Lattices of L-weakly and M-weakly Compact Operators. Archiv der Mathematik, 108(3): 293-299.

Buoni JJ, Harte R, Wickstead T (1977). Upper and Lower Fredholm Spectra. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 66, No: 2: 309-314.

Buoni JJ, Klein AJ (1979). On The Generalized Calkin Algebra. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 80, No 1: 9-12.

Calkin SW (1941). Two-Sided Ideals and Congruences in The Ring of Bounded Operators in Hilbert Space. Annals of Mathematics Second Series,Vol. 42, No:4: 839-873.

Canez S. Notes on QuotientSpaces.

https://www3.nd.edu/~jdiller/teaching/archive/spring12_20820/quotient-spaces.pdf

Caradus SR, Pfaffenberger WE, Yood B (1974). Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol.9, Marcel Dekker, Inc. New York.

Chen ZL, Wickstead AW (1999). L-Weakly and M-Weakly Compact Operators. Indagationes Mathematicae (N.S.), 10 (3): 321-336.

Chen ZL, Wickstead AW (1999). Equalities Involving the Modulus of an Operator. Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy, Vol. 99A, No. 1: 85-92.

Chen ZL, Feng Y, Chen JX (2013), The Order Continuity of the Regular Norm on Regular Operator Spaces. Volume Article ID 183786.

Choi MD, Davis C (1974). The Spectral Mapping Theorem for Joint Approximate Point Spectrum. Bulletin of The American Mathematical Society, Vol. 80 No 2.

Davis C, Rosenthal P (1974). Solving Linear Operator Equations. Canadian Journal of Mathematics, Vol. XXVI, No 6, pp.1384-1389.

Fremlin (2002). Measure Theory and Measure Algebras. Reader in Mathematics, University of Essex, Vol 3. 672 pp.

Gantmacher V (1940). Über Schwache Totalstetige Operatoren, Mat. Sb. (*N.S.*) **7** (49), 301–308. MR **2**, 224

Gonzalez M (1994). Representations of The Weak Calkin Algebra. Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti Classe I diScienze Fis. Mat. eNat, Vol. LXXII: 153-169.

Gonzalez M, Saksman E, Tylli H O (1995). Representing Non-Weakly Compact Operators. Studia Mathematica, 113(3): 205-282.

Hajlasz P (2009). Functional Analysis.
https://www.pitt.edu/~hajlasz/Notatki/Functional%20Analysis2.pdf

Heil C. Functional Analysis LectureNotes: QuotientSpaces.
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4230/2017v/heil-quotientspaces.pdf

Jameson G (1970). Ordered Linear Spaces. Lecture Notes in Mathematics 141, 290p, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Jonge E, van Rooji ACM (1977). Introduction to Riesz Spaces. Mathematical Centre Tracts 78, 244p, Mathematısch Centrum Amsterdam.

Kreyszig E (1978). Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley&Sons, 703p, USA.

Langford E, Aliprantis CD (1975). Regularity Properties of Quotient Riesz Seminorms. Mathematics, California, USA.

Lebow A, Schechter M (1971). Semigroups of Operators and Measures of Non-compactness, J. Functional Analysis 7, 1-26.

Luxemburg WAJ, Moore LC (1967). Archimedean Quotient Riesz Spaces. California Institute of Technology, 725-739.

Luxemburg WAJ, Zaanen AC (1971). Riesz Spaces I. North-Holland, Amsterdam.

Meyer-Nieberg P (1973). Zur schwachen kompaktheit in Banachverbänden, Math. Z., 134, 303-315.

Meyer-Nieberg P (1974). Über klassen schwach kompakter operatoren in Banachverbänden, *Math. Z.,* 138: 145-159.

Meyer-Nieberg P (1991). Banach Lattices. Universitext, 411p, Springer-Verlag.

Meyer MJ (1992). On a Topologıcal Property of Certain Calkin Algebras. London Mathematical Society, 24(6): 591-598.

Moore LC (1966). Locally Convex Riesz Spaces and Archimedan Quotient Spaces. Thesis, California Institute of Technology Pasadena, California.

Pagter B, Wickstead AW (2015). Free and Projective Banach Lattices. Proceedings of The Royal Society of Edinburg, 145A, 105-143.

Skillicorn R (2015). The Uniqueness of norm problem for Calkin Algebras arXiv:1507.08118v1 [math.FA].

Wickstead AW (2007). Regular Operators between Banach Lattices. Positivity Trends in Mathematics, 255-279.

Wnuk W (1999). Banach Lattices with Order Continuous Norms. Advenced Topics in Mathematics, Polish Scientic Publishers PWN, Warsaw.

Wnuk W, Wiatrowski B (2005). Order Properties of Quotient Riesz Spaces. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia, LIII, 417-428.

Wnuk W, Wiatrowski B (2007). On The Levi and Lebesgue Properties. Indag Mathematic, N.S., 18 (4): 641-650.

Wnuk W (2011). On Discrete and Continuous Quotient Riesz Spaces. Positivity, DOI 10. 1007/s11117-009-0042-3.

Wojtowicz M (2002). The Lattice Isometric Copies of $\ell_\infty(\Gamma)$ in Quotients of Banach Lattices. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2003, Issue 47: 3003-3006.

Wojtowicz M (2005). The Lattice Copies of $\ell_\infty(\Gamma)/c_0(\Gamma)$ in Quotient of a Banach Lattice. Indag Mathematic, N.S., 16 (1): 147-155.

Zaanen AC (1997). Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces. Springer.

## ÖZGEÇMİŞ

1990 ‘da Tekirdağ ‘da doğdu. 2008 yılında Muratlı Anadolu lisesinden ve 2012 yılında da Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Mezuniyetten sonra çeşitli eğitim kurumlarında öğretmen olarak görev yaptı ve 2015 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2018 yılı Eylül ayında Van Gevaş ilçesinde İzzeddin Şir Anadolu lisesinde sözleşmeli matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen adı geçen okulda görev yapmaktadır.