İNJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

KEVSER SOYTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nuray EROĞLU

2022

T.C.
TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

KEVSER SOYTÜRK

ORCID: 0000-0003-1318-0314

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nuray EROĞLU

HAZİRAN-2022

ÖZET

İNJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

Kevser SOYTÜRK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nuray EROĞLU

Bu çalışmanın temelini injektif modüller ve bir modüle göre göreceli injektif modüller oluşturmaktadır. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; injektif modüllerin kısaca tarihçesinden bahsedilip literatürde önemli çalışmalarda bulunan matematikçiler ile çalışmalarına değinilmiştir. Ayrıca, çalışmanın amaç ve kapsamından da bu bölümde bahsedilmiştir. İkinci bölümde; çalışmada kullanılacak temel kavramlar ve bu kavramlarla ilgili özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde; injektif modüller ve injektif zarflar tanımlanıp bu modüllerin farklı karekterisazyonları ile aralarındaki bağlantılar ve özellikle her modülün injektif bir modül içine gömülebileceği söylenmiştir. Ayrıca bu bölümde bölünebilir modüller tanıtılıp injektif modüller ile ilişkisi araştırılmıştır. Dördüncü bölümde; bir modüle göre göreceli injektif modüller tanıtılıp özellikle yarı injektif modüllerden bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde injektiflik, yarı injektiflik, yarı süreklilik ve CS modül kavramları arasındaki ilişkiye yer verilmiştir ve CS modüllerin injektif modüllerin bir genellemesi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Beşinci bölümde ise ileride tez konusu ile ilgili çalışma yapacak genç araştırmacılara yardımcı olacak önerilerde bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Esas alt modül, Tümleyen alt modül, İnjektif modül, İnjektif zarf, Yarı injektif modül, CS modül

ABSTRACT

ON INJECTIVE MODULES

Kevser SOYTÜRK

Department of Mathematics
MSc. Thesis
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Nuray EROĞLU

The basis of this study is injective modules and relative injective modules. The thesis consists of five chapters. In the first part; briefly, the history of injective modules is mentioned and the studies of mathematicians who have made important studies in the literature are mentioned. In addition, the aim and scope of the study are also mentioned in this section. In the second part; The basic concepts to be used in the study and the properties related to these concepts are given. In the third part; Injective modules and injective envelopes are defined and it is said that the different characterizations of these modules and the connections between them and especially each module can be embedded in an injective module. In addition, in this section, divisible modules are introduced and their relationship with injective modules is investigated. In the fourth chapter; relative injective modules were introduced and especially the quasi injective modules were mentioned. In addition, in this section, the relationship between the concepts of injectivity, quasi injectivity, quasi continuity and CS module is given and it is concluded that CS modules are a generalization of injective modules. In the fifth chapter, he made suggestions are made which will help young researchers who will work on the thesis topic in the future.

Keywords: Essential submodule, Complement submodule, Injective module, Injective envelope, Quasi injective module, CS module

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
R	Halka
$\preccurlyeq$	Bağıntı
$(S,\preccurlyeq)$	δ ’de kısmi sıralama bağıntısı
$F[X]$	Katsayıları F ’de olan X bilinmeyenli polinom halkası
M_R	M sağ $R-$modül
${}_RM$	M sol $R-$modül
$N \subseteq M$	N, M ’nin alt kümesi
$N \subset M$	N, M ’nin öz alt kümesi
$N \leq M$	N, M ’nin alt modülü
$N < M$	N, M ’nin öz alt modülü
$< X >$	X ’in ürettiği modül
M / N	M ’nin N ’ye bölüm modülü
$Hom_R(M,N)$	M ’den N ’ye $R-$modül homomorfizmalarının kümesi
$End_R(M)$	M ’den M ’ye $R-$modül endomorfizmalarının kümesi
$M \xrightarrow{f} N$	f, M ’den N ’ye modül homomorfizması
$N \underset{d}{\leq} M$	N, M ’de dik toplanan
$Çek(f)$	f ’nin çekirdek kümesi
$Dom(f)$	f ’nin tanım kümesi
$\operatorname{Im}(f)$	f ’nin görüntü kümesi
$M \cong N$	M, N ’ye izomorf
$\prod_{i\in I} M_i$	$\{M_i\}_{i\in I}$ ailesinin direkt çarpımı
$\bigoplus_{i\in I} M_i$	$\{M_i\}_{i\in I}$ ailesinin (dış) direkt toplamı
$N \underset{e}{\leq} M$	N, M ’de esas alt modül
$N \underset{c}{\leq} M$	N, M ’de tümleyen alt modül
$Soc(M)$	M ’nin sokul alt modülü

$f_{\mid X}$	f 'nin X kümesine kısıtlanışı
$E(M)$	M 'nin injektif zarfı

KISALTMALAR DİZİNİ

$\xrightarrow{i_j}$	j. injeksiyon dönüşümü
$\xrightarrow{\pi_j}$	j. projeksiyon dönüşümü
$\xrightarrow{i}$	İçerim dönüşümü
$\xrightarrow{1_M}$	M modülü üzerinde birim dönüşümü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımını ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren değerli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nuray EROĞLU'na en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Tüm hayatım boyunca desteklerini yanımda hissettiğim canım aileme de göstermiş oldukları sabır ve anlayış için sonsuz teşekkür ederim.

Kevser SOYTÜRK

1. GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Modül teoride önemli yeri olan ve bu çalışmada da yer alan injektif modülleri ilk kez Bear (1940) çalışmasıyla tanıtmış ve literatüre girmesini sağlamıştır. Ayrıca Bear aynı çalışmada her modülün bir injektif modül içine gömülebileceğini göstermiştir. Daha sonraları ise Eckmann ve Schopf (1953) makalelerinde herhangi bir M modülünü her zaman kapsayan minimal injektif bir modülün olabileceğini ve minimal injektif olan bu modülün M modülünün maksimal esas genişlemesi ile aynı olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmaya kadar injektif modüllerin yapısı ile ilgili pek fazla inceleme yapılmamış olmasına rağmen bu tarihten sonra pek çok çalışma yapılmış ve bunlar içinde 1958'deki değişmeli Noetherian halkalar üzerindeki injektif modül çalışmaları ile Matlis bu alana büyük katkıda bulunmuştur.

O tarihlerden günümüze dek pek çok matematikçinin ilgisini çeken injektif modüller; sağladıkları bazı koşullara göre adlandırılmışlardır. Bunlardan bazıları; yarı (quasi) injektif, göreceli (relative) injektif, ker injective, principally injektif, essentially injektif, pseudo injektif modüllerdir. Baer, Eckmann ve Schopf bölünebilir gruplar ve ardından injektif modüllerin tanıtılmasında katkıda bulunan (ilk paragrafta bahsedildiği üzere) matematikçilerdendir. Johnson ile Wong birlikte yaptıkları 1959'daki 'Self injective rings' adlı makaleleri ile yarı injektif halkalar ve 1961'deki 'Quasi injective modules and irreducible rings' adlı makaleleri ile yarı injektif modüllerle ile ilgili ilk çalışmaları yapanlar arasında yer almışlardır. Ayrıca geçmişte; Sandomierski (1964) 'Relative injectivity and projectivity' adlı doktara tezinde, Birekenmeier (1978) 'Modules which are subisomorphic to injective modules' ve Singh (1967) 'On pseudo$-$injective modules and self pseudo injective rings' adlı makalelerle injektifliğe derinlik kazandırmışlardır.

İnjektif modüllerin genellemesi olarak bilinen CS modüllerin temelleri von Neumann (1936a, 1936b) ile atılmış sonrada Utumi, von Neumann'ın bu çalışmalarında ki kavramları halka ve modüller için düşünmüş ve düşündüklerini Utumi (1965) çalışmasında aktarmıştır. Böylece CS modüllere pek çok katkıda bulunmuştur.

1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Bu çalışmanın amacı, injektif modüller ile ilgili bazı bilgileri vermek ve genellemelerinden bahsetmektir. Ayrıca injektif modüller ve genellemeleri üzerine çalışma yapmak isteyen araştırmacılara yol gösterici olacak bulgular vermek amaçlanmıştır. Konunun kolay anlaşılabilmesi için çalışma diyagramlarla desteklenmiştir. Çalışmanın amacına hizmet edecek kavramlardan özellikle esas ve tümleyen alt modüller tanıtılıp, ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Daha sonra injektif modüller ve injektif zarflar ile ilgili gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bir modüle göre göreceli injektif modüller tanıtılıp, göreceli injektif modül çeşidi olan yarı injektif modüller incelenmiş ve 'Sonuç ve Öneriler' kısmında injektif modüllerin bir genellemesi olarak CS modüllerin alınabileceği söylenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar ve bunlarla ilgili bazı özellikler verilmiştir. Çalışma boyunca R halkaları, aksi belirtilmedikçe birimli fakat değişmeli olması gerekmeyen halkalar ve M modülleri, aksi belirtilmedikçe R halkası üzerinde sağ modül olarak alınacaktır.

2.1 Bağıntılar

Tanım 2.1.1 $A\times B$ kümesinin her alt kümesine A ’dan B ’ye bir *bağıntı* denir. A ’dan B ’ye bir bağıntı $\preccurlyeq$ olmak üzere $x \preccurlyeq y$ ise x ile y *bağıntılıdır* denir. Eğer $A = B$ ise bu bağıntıya kısaca *A ’da bir bağıntı* denir (Karakaş, 2010).

Ayrıca A ’da bir bağıntı $\preccurlyeq$ olduğunda $x, y \in A$ iken $x \preccurlyeq y$ ise “ x ’e y ’den önce gelir”, $x \prec y$ ise “ x kesin önce gelir y ” şeklinde okunur.

Tanım 2.1.2 S ’de bir bağıntı $\preccurlyeq$ olsun.

i. S ’den alınan her x elemanı için $x \preccurlyeq x$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı *yansıma* özelliğine sahiptir ve $\preccurlyeq$ bağıntısı *yansıyandır* denir.
ii. S ’den alınan x, y elemanları için $x \preccurlyeq y$ olduğunda $y \preccurlyeq x$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı *simetri* özelliğine sahiptir ve $\preccurlyeq$ bağıntısı *simetriktir* denir.
iii. S ’den alınan x, y, z elemanları için $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ olduğunda $x \preccurlyeq z$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı *geçişme* özelliğine sahiptir ve $\preccurlyeq$ bağıntısı *geçişkendir* denir.
iv. S ’den alınan x, y elemanları için $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ olduğunda $x = y$ ise $\preccurlyeq$ bağıntısı *ters simetri (antisimetrik)* özelliğine sahiptir ve $\preccurlyeq$ bağıntısı *ters simetriktir (antisimetriktir)* denir.
(Karakaş, 2010)

Tanım 2.1.3 S ’de bir bağıntı $\preccurlyeq$ olsun.

i. Bu $\preccurlyeq$ bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişken ise $\preccurlyeq$ bağıntısına S ’de bir *denklik bağıntısı* denir.
ii. Bu $\preccurlyeq$ bağıntısı yansıyan, ters simetrik ve geçişken ise $\preccurlyeq$ bağıntısına S ’de bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir ve $(S, \preccurlyeq)$ ile gösterilir.

iii. Bir $(S, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı kümesinden alınan her x, y elemanı için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ ise $\preccurlyeq$ bağıntsına *tam sıralı bağıntısı* denir ve $(S, \preccurlyeq)$'ye de *tam sıralı küme* denir.
(Karakaş, 2010)

Tanım 2.1.4 Kısmi sıralı bir kümedeki bir elemandan kesin sonra (önce) gelen hiçbir eleman yoksa, bu elemana *maksimal (minimal) eleman* denir (Karakaş, 2010).

Tanım 2.1.5 Kısmi sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine *zincir* denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.6 $(S, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı küme olmak üzere $A \subseteq S$ ve $s \in S$ olsun. Eğer her $a \in A$ için $s \preccurlyeq a$ ($a \preccurlyeq s$) ise s'ye A *kümesinin bir alt (üst) sınırı* denir (Hungerford, 1980).

Teorem 2.1.7 (Zorn Lemma) Boş olmayan S kısmi sıralı kümesinin her zincirinin S'de bir üst sınırı varsa, S'nin en az bir maksimal elemanı vardır (Hungerford, 1980).

Tanım 2.1.8 R halkasının ideallerinin, her artan (azalan)

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots \quad (I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots)$$

zinciri sonlu bir adımda durursa (Yani $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki her $i \geq k$ için $I_k = I_i$ olur.) R' ye *Noetherian (Artinian) halka* denir.

Örneğin;

i. F bir cisim olmak üzere $F[X]$ bir Noetherian halkadır.

ii. $1 < n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bir Artinian halkadır.
(Çallıalp ve Tekir, 2009)

Önerme 2.1.9 R halkasının Noetherian halka olması için gerek ve yeter koşul R'nin her idealinin sonlu üretilmiş (Sonlu üretilmiş ideal tanımı, her ideal bir modül olduğundan Tanım (2.2.9)'da ki ile benzer şekilde verilir.) olmasıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

2.2 Modüller ve Alt Modüller

Tanım 2.2.1 $(M,+)$ değişmeli bir grup ve R halka olsun. M 'deki elemanların, R 'deki elemanlarla skaler çarpımı, $\cdot : M \times R \to M$ ($\cdot : R \times M \to M$) dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M modülüne R üzerinde bir *sağ (sol) modül* veya kısaca *sağ (sol)* $R-$*modül* denir ve M_R ($_R M$) ile gösterilir.

i. $\forall r \in R, \forall m, m' \in M$ için, $(m+m')r = mr + m'r$ ($r(m+m') = rm + rm'$),

ii. $\forall r, r' \in R, \forall m \in M$ için, $m(r+r') = mr + mr'$ ($(r+r')m = rm + r'm$),

iii. $\forall r, r' \in R, \forall m \in M$ için, $m(rr') = (mr)r'$ ($(rr')m = r(r'm)$),

iv. $\forall m \in M$ için $m1_R = m$ ($1_R m = m$).

R değişmeli halka ise sol $R-$modül aynı zamanda sağ $R-$modül olduğundan M modülüne $R-$modül denir. Bu tezde aksi belirtilmedikçe modüller sağ $R-$modül alınacaktır.

Örneğin; V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir $K-$modüldür (Hungerford, 1980).

Önerme 2.2.2 M bir modül olmak üzere $\forall m \in M$ için,

i. $m0_R = 0_M$,

ii. $m(-1_R) = -m$,

olur (Hungerford, 1980).

Tanım 2.2.3 M bir modül ve $\varnothing \neq N \subseteq M$ olsun. N modülü de bir modül ise N 'ye, M 'nin bir *alt modülü* veya *R-alt modülü* ya da M 'ye N 'nin bir *genişlemesi* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

Örneğin; M modülünün kendisi ve sıfırdan ibaret $\{0_M\} = 0$ alt kümesi M 'nin birer alt modülüdür (Hungerford, 1980).

Önerme 2.2.4 M modülünün $\varnothing \neq N \subseteq M$ alt kümesinin bir alt modül olması için gerek ve yeter koşul $n, n' \in N$ ve $r, r' \in R$ için, $nr + nr' \in N$ olmasıdır (Kasch, 1976).

Tanım 2.2.5 M modül olmak üzere, M modülünün kendisinden farklı her alt modülüne *öz alt modül* denir ve N, M 'nin öz alt modülü ise $N < M$ ile gösterilir (Kasch, 1976).

Önerme 2.2.6 M bir modül olsun. M modülünün alt modüller ailesi $\{N_i\}_{i\in I}$ olmak üzere $\bigcap_{i\in I} N_i$, M ’nin bir alt modülüdür (Hungerford, 1980).

Tanım 2.2.7 M modül ve $X \subseteq M$ olsun. X alt kümesini kapsayan, tüm alt modüllerin arakesitine X *’in ürettiği alt modül* denir ve $< X >$ ile gösterilir (Kasch, 1976).

Önerme 2.2.8 M modül ve $X \subseteq M$ olsun.

$$< X > = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i : x_i \in X, r_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\}, & X \neq \varnothing \\ 0 \qquad , & X = \varnothing \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $< X >$, M modülünün bir alt modülüdür (Kasch, 1976).

Tanım 2.2.9 M bir modül, $m \in M$ olmak üzere $\{m\}$ ’nin ürettiği alt modül

$$mR = \{ mr : r \in R \}$$

şeklinde tanımlanır ve $< m >$ ile gösterilir. $< m >$’ye m ile *üretilmiş alt modül* denir. Eğer $M = < m >$ olacak şekilde $m \in M$ bulunabilirse, M ’ye *devirli modül* denir. Sonlu bir alt küme $X \subseteq M$ olmak üzere, $M = < X >$ ise M modülüne *sonlu üretilmiş modül* denir (Hungerford, 1980).

Önerme 2.2.10 M bir modül ve $N \leq M$ olsun.

$$\begin{aligned} M / N \times R &\to M / N \\ (m + N, r) &\mapsto mr + N \end{aligned}$$

skaler çarpımı ile M / N toplamsal bölüm grubu bir $R-$modüldür ve bu bölüm grubuna *bölüm modülü (*M *’nin* N *’ye bölüm modülü)* denir (Hungerford, 1980).

Teorem 2.2.11 (Modüler Kuralı) M bir modül ve $K, L, N \leq M$ olmak üzere $K \subseteq N$ ise,

$$K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$$

olur (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Tanım 2.2.12 M bir modül ve $A \leq M$ olmak üzere $M = A \oplus B$ ($A + B = M$ ve $A \cap B = 0$) olacak şekilde $B \leq M$ var ise A alt modülü M 'de *dik toplanandır* denir ve $A \underset{d}{\leq} M$ ile gösterilir (Kasch, 1976).

Tanım 2.2.13 M bir modül olsun. M 'nin kendisinden ve sıfırdan başka dik toplananı yoksa M 'ye *ayrışamaz (indecomposable) modül* denir (Kasch, 1976).

2.3 Modül Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1 M ile N modülleri için $f : M \to N$ dönüşümü;

i. $m, m' \in M$ olmak üzere $f(m + m') = f(m) + f(m')$,
ii. $r \in R, m \in M$ olmak üzere $f(mr) = f(m)r$,

eşitliklerini sağlarsa, f dönüşümüne M 'den N 'ye bir *modül homomorfizması* veya $R -$ *homomorfizma* denir ve M 'den N 'ye olan tüm homomorfizmaların kümesi $Hom_R(M, N)$ ile gösterilir. Eğer $f \in Hom_R(M, N)$ ise $f(M)$ 'e *f 'nin görüntüsü* denir ve $\mathrm{Im}(f)$ ile gösterilir. Ayrıca $f \in Hom_R(M, N)$ için $\{x \in M : f(x) = 0_N\}$ kümesine de *f 'nin çekirdeği* denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir (Hungerford, 1980).

Aynı zamanda $f_1, f_2 \in Hom_R(M, N)$ ve $m \in M$ keyfi elemanları için $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$ ile tanımlı $+ : Hom_R(M, N) \times Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, N)$ ikili işlemine göre $Hom_R(M, N)$ bir abel grup yapısına sahiptir. $Hom_R(M, N)$'nin sıfır elemanı $M \to N$ sıfır homomorfizmasıdır. $M = 0$ veya $N = 0$ ise, $Hom_R(M, N) = 0$ 'dır.

Eğer R değişmeli halka ise; $r \in R$, $f \in Hom_R(M, N)$ ve $m \in M$ keyfi elemanları için $(rf)(m) = rf(m)$ ile tanımlı $\cdot : R \times Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, N)$ işleme göre $Hom_R(M, N)$ bir modül yapısına sahiptir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 2.3.2 M ile N modülleri için $f: M \to N$ homomorfizma ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $f(0_M) = 0_N$ ve $m \in M$ için $f(-m) = -f(m)$ olur.

ii. $Çek(f)$ kümesi M 'nin bir alt modülüdür.

iii. f 'nin $1-1$ olması için gerek ve yeter koşul $Çek(f) = 0_M$ olmasıdır.

iv. $\operatorname{Im}(f)$ kümesi N 'nin bir alt modülüdür.

(Hungerford, 1980)

Tanım 2.3.3 $f: A \to B$ homomorfizma olsun. Eğer

i. f $1-1$ ise f 'ye *monomorfizma,*

ii. f örten ise f 'ye *epimorfizma,*

iii. f hem $1-1$ hem örten ise f 'ye i*zomorfizma,*

iv. $A = B$ ise f 'ye *endomorfizma,*

v. $A = B$ ve f izomorfizma ise f 'ye *otomorfizma,*

vi. f izomorfizma ise A ile B birbirine *izomorf modüller* ($A \cong B$ ile gösterilir.)

denir (Hungerford, 1980).

Tanım 2.3.4 Bir M modülü için

i. $N \leq M$ olmak üzere $\begin{array}{l} i: N \to M \\ \quad x \mapsto x \end{array}$ monomorfizmasına *içerim dönüşümü,*

ii. $\begin{array}{l} 1_M: M \to M \\ \quad x \mapsto x \end{array}$ homomorfizmasına ise *(* M *üzerinde) birim dönüşümü,*

denir (Hungerford, 1980).

Tanım 2.3.5 A, B ve C birer modül olsun.

i. $\alpha: A \to B$ monomorfizması için $\operatorname{Im}(\alpha) \underset{d}{\leq} B$ oluyorsa α 'ya *split monomorfizma,*

ii. $\beta: B \to C$ epimorfizması için $Çek(\beta) \underset{d}{\leq} B$ oluyorsa β 'ya *split epimorfizma,*

denir (Kasch, 1976).

Önerme 2.3.6 A, B ve C birer modül olmak üzere;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\lambda"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & C \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(\lambda = \beta\alpha)$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $\mathrm{Im}(\alpha) + Çek(\beta) = \beta^{-1}(\mathrm{Im}(\lambda))$ 'dir.

ii. $\mathrm{Im}(\alpha) \cap Çek(\beta) = \alpha(Çek(\lambda))$ 'dir.

Ayrıca Önerme (2.3.6)'dan aşağıdaki ifadelerin doğru olduğu görülür.

i. λ epimorfizma ise $\mathrm{Im}(\alpha) + Çek(\beta) = \beta^{-1}(C) = B$ 'dir.

ii. λ monomorfizma ise $\mathrm{Im}(\alpha) \cap Çek(\beta) = \alpha(0) = 0$ 'dir.

iii. λ izomorfizma ise $\mathrm{Im}(\alpha) \oplus Çek(\beta) = B$ 'dir.

(Kasch, 1976)

Önerme 2.3.7 A, B ve C birer modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $\alpha : A \to B$ homomorfizması için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

  a. α split monomorfizmadır.

  b. $\exists \sigma : B \to A$ vardır ki $\sigma\alpha = 1_A$ olur.

ii. $\beta : B \to C$ homomorfizması için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

  a. β split epimorfizmadır.

  b. $\exists \gamma : C \to B$ vardır ki $\beta\gamma = 1_C$ olur.

(Kasch, 1976)

Tanım 2.3.8 M bir modül olmak üzere $A \leq M$ için

$$\begin{aligned} \pi : M &\to M/A \\ m &\mapsto \pi(m) = m + A \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüm bir örten homomorfizmadır ve bu homomorfizmaya *doğal epimorfizma* denir (Hungerford, 1980).

Teorem 2.3.9 (1. İzomorfizma Teoremi) A ve B birer modül olmak üzere bir $f : A \to B$ modül homomorfizması için,

$$\frac{A}{Çek(f)} \cong f(A)$$

olur (Hungerford, 1980).

Teorem 2.3.10 (2. İzomorfizma Teoremi) M modülü için $K, L \leq M$ ise;

$$\frac{K+L}{K} \cong \frac{L}{K \cap L}$$

olur (Hungerford, 1980).

Teorem 2.3.11 (3. İzomorfizma Teoremi) M modül ve $A, B \leq M$ olmak üzere $A \subseteq B$ ise;

$$\frac{M/A}{B/A} \cong \frac{M}{B}$$

olur (Hungerford, 1980).

Tanım 2.3.12 Bir modül M olsun.

i. $N < M$ olsun. M 'nin N 'yi kapsayan N 'den başka hiçbir öz alt modülü yoksa, N modülüne bir *maksimal alt modül* denir.
ii. $\varnothing \neq N \leq M$ olsun. M 'nin N 'de kapsanan sıfırdan ve N 'den başka hiçbir alt modülü yoksa, N modülüne bir *minimal alt modül* denir.
(Kasch, 1976)

Önerme 2.3.13 A sonlu üretilmiş bir modül ise A'nın her öz alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülü vardır (Kasch, 1976).

Sonuç 2.3.14 Sonlu üretilmiş sıfırdan farklı her modülün en az bir maksimal alt modülü vardır (Kasch, 1976).

2.4 Modüllerin Direkt Toplam ve Çarpımları

Tanım 2.4.1 Bir modüller ailesi $\{M_i\}_{i\in I}$ ve $m_i \in M_i$ $(i\in I)$ olmak üzere,

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i) : m_i \in M_i,\ i\in I\}$$

kartezyen çarpım kümesi alınsın. $(m_i),\ (m_i') \in \prod_{i\in I} M_i$ ve $r\in R$ için;

$$(m_i)+(m_i') = (m_i + m_i') \text{ ve } (m_i)r = (m_i r)$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemleri ile, $\prod_{i\in I} M_i$ bir $R-$modüldür. Bu $\prod_{i\in I} M_i$ modülüne, $\{M_i\}_{i\in I}$ ailesinin *direkt çarpımı* denir. Bu çarpımda, bileşenlerinden ancak sonlu tanesi sıfır olmayan elemanların oluşturduğu alt kümede bu modülün bir alt modüldür. Bu alt modüle de $\{M_i\}_{i\in I}$ ailesinin *(dış) direkt toplamı* denir ve $\bigoplus_{i\in I} M_i$ şeklinde gösterilir (Kasch, 1976).

Tanım 2.4.2 Bir modüller ailesi $\{M_i\}_{i\in I}$ olsun. $\forall j\in I$ için,

$$\begin{aligned} \pi_j : \prod M_i &\to M_j \\ (m_i) &\mapsto \pi_j((m_i)) = m_j \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme j. *projeksiyon* ve her $i\neq j$ için, $m_i = 0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} i_j : M_j &\to \prod M_i \\ m_j &\mapsto i_j(m_j) = (m_i) \quad \left(\text{Burada } i\in I \text{ için } m_i = \begin{cases} m_j ; & i=j \\ 0 ; & i\neq j \end{cases} \text{ şeklindedir.}\right) \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüme de j. *injeksiyon* dönüşümü denir.

Projeksiyon dönüşümü örten, injeksiyon dönüşümü $1-1$ homomorfizma olup, ayrıca $\pi_j i_j = 1_{M_j}$ ve $k\neq j$ için, $\pi_k i_j = 0$ 'dır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 2.4.3 Bir modüller ailesi $\{M_i\}_{i\in I}$ olsun. $\forall i \neq j$ için,

$$M'_j = \left\{(m_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i : i \in I, i \neq j \text{ için } m_i = 0\right\}$$

kümesi, $\bigoplus_{i\in I} M_i$ direkt toplamının bir alt modülüdür. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\forall i \in I$ için $M'_i \cong M_i$ 'dir.

ii. $\sum_{i\in I} M'_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$ olur.

iii. $\forall j \in I$ için $M'_j \cap (\sum_{i\neq j} M'_i) = 0$ 'dır.

(Kasch, 1976)

Önerme 2.4.4 M bir modül ve alt modüller ailesi $\{M_i\}_{i\in I}$ olsun. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ olması için gerek ve yeter koşul

i. $M = \sum_{i\in I} M_i$

ii. $\forall j \in I$ için $M_j \cap (\sum_{i\neq j} M_i) = 0$

olmasıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 2.4.5 M modülünün bir alt kümesi olan X eğer M 'yi üretiyorsa (yani $< X >= M$ ise) öyle bir $f : \bigoplus_{x\in X} R \to M$ homomorfizması vardır ki $M = f(\bigoplus_{x\in X} R)$ olur. Yani bir M modülü, R halkasının kopyalarının bir dış direkt toplamının homomorfik görüntüsüdür. Eğer M sonlu üretilmiş modül ise M modülü R halkasının sonlu sayıda kopyalarının dış direkt toplamının homomorfik görüntüsü olur (Sharpe ve Vàmos, 1972).

2.5 Tam Diziler

Tanım 2.5.1 Modüllerin bir dizisi ve bunlar arasında da

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

homomorfizmaları verilsin. Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}$ için, $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = Çek(f_n)$ ise bu diziye *tam dizi* denir.

Eğer belli bir yerden sonra modüller hep sıfırsa,

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

şeklinde veya belli bir yerden önce modüller hep sıfırsa,

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak,

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

şeklinde ki tam diziye *kısa tam dizi* denir. Açıktır ki,

i. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ dizisi tamdır. $\Leftrightarrow$ f 1-1'dir.

ii. $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ dizisi tamdır. $\Leftrightarrow$ f örtendir.

iii. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ dizisi tamdır. $\Leftrightarrow$ f 1-1 ve örtendir.

önermeleri doğrudur.

Örneğin; A ve B birer $R-$modül ise i_2 injeksiyon ve π_1 projeksiyon dönüşümleri olmak üzere;

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_2} A \oplus B \xrightarrow{\pi_1} B \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizidir (Hungerford,1980).

2.6 Esas Alt Modüller

Tanım 2.6.1 M modül ve $N \leq M$ olmak üzere her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ ise N 'ye M 'de *esas alt modül (essential submodule)* ya da M 'ye N 'nin *esas genişlemesi (essential extension)* denir ve $N \underset{e}{\leq} M$ ile gösterilir. Buna denk olarak $N \leq M$ için $U \leq M$ olmak üzere $U \cap N = 0$ iken $U = 0$ olursa $N \underset{e}{\leq} M$ olur.

Örneğin; $n \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} \underset{e}{\leq} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olur (Goodearl,1976).

Önerme 2.6.2 M modülü için aşağıdakiler doğrudur.

i. $0 \underset{e}{\leq} M$ olması ancak $M = 0$ olması ile mümkündür.

ii. $M \neq 0$ ise $0 \neq A \leq M$ için $0 \neq A = A \cap M$ olduğundan $M \underset{e}{\leq} M$ olur.

(Goodearl, 1976)

Sonuç 2.6.3 Her M modülünün en az bir esas alt modülü vardır (Goodearl, 1976).

Tanım 2.6.4 M modül olmak üzere her $0 \neq K, L \leq M$ için $K \cap L \neq 0$ ise M 'ye *düzgün (uniform) modül* denir. Başka bir deyişle; M 'nin düzgün modül olması için gerek ve yeter koşul $M \neq 0$ ve M 'nin sıfırdan farklı her alt modülünün M 'de esas alt modül olmasıdır.

Örneğin;

i. Her basit modül düzgün modüldür.
ii. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü düzgün modüldür.

(Goodearl, 1976)

Tanım 2.6.5 $f : A \to B$ 1−1 modül homomorfizması ve $f(A) \underset{e}{\leq} B$ ise bu homomorfizmaya *esas monomorfizma* denir (Goodearl, 1976).

Önerme 2.6.6 M modül ve $K, N \leq M$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $N \underset{e}{\leq} M$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall 0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olmasıdır.

ii. $K \subseteq N$ olmak üzere, $K \underset{e}{\leq} M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \underset{e}{\leq} N$ ve $N \underset{e}{\leq} M$ olmasıdır.

iii. $N \underset{e}{\leq} M$ ise $N \cap K \underset{e}{\leq} K$ olur.

iv. $N, K \underset{e}{\leq} M$ ise $N \cap K \underset{e}{\leq} M$ olur.

v. $K \subseteq N$ olmak üzere, $N / K \underset{e}{\leq} M / K$ ise $N \underset{e}{\leq} M$ olur.

vi. $N \underset{e}{\leq} M$ ve $m \in M$ ise $m^{-1}N = \{ r \in R : mr \in N \} \underset{e}{\leq} R_R$ olur.

vii. $M_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ modüllerinin direkt toplamı $M = \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ ve $N_\lambda \underset{e}{\leq} M_\lambda$ ise $\underset{\Lambda}{\oplus} N_\lambda \underset{e}{\leq} M$ olur.

(Dung, Huynh, Smith ve Wisbauer, 1994)

İspat: i. ($\Rightarrow$) $N \underset{e}{\leq} M$ olsun. Böylece $m \neq 0$ iken $mR \neq 0$'dır. $mR \leq M$ ve $N \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $N \cap mR \neq 0$'dır.

($\Leftarrow$) $\forall 0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ olsun. $0 \neq K \leq M$ alınsın. $0 \neq k \in K$ için kabulden $N \cap K \neq 0$ olacağından $N \cap kR \neq 0$ olmalıdır. $0 \neq N \cap kR \subseteq N \cap K$ kapsamasından $N \underset{e}{\leq} M$ olduğu görülür.

ii. ($\Rightarrow$) $K \underset{e}{\leq} M$ olsun. $0 \neq U \leq N \leq M$ alınsın. $K \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $0 \neq U \cap K$ olup $K \underset{e}{\leq} N$'dir. Şimdi de $0 \neq V \leq M$ alınsın. $K \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $0 \neq V \cap K$'dır. $K \subseteq N$ olduğundan $0 \neq U \cap N$ olup tanımdan $N \underset{e}{\leq} M$ olduğu görülür.

($\Leftarrow$) $K \underset{e}{\leq} N$ ve $N \underset{e}{\leq} M$ olsun. $0 \neq U \leq M$ alınsın. $N \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $0 \neq U \cap N$'dır. $K \underset{e}{\leq} N$ olduğundan $0 \neq U \cap N \leq N$ için $0 \neq (U \cap N) \cap K = U \cap (N \cap K) = U \cap K$ olup $K \underset{e}{\leq} M$'dir.

iii. $N \underset{e}{\leq} M$ olsun. $0 \neq U \leq K$ alınsın. $U \cap K \leq K \leq M$ ve $N \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $0 \neq (U \cap K) \cap N = U \cap (N \cap K)$ olup $N \cap K \underset{e}{\leq} K$'dır.

iv. $N, K \underset{e}{\leq} M$ olsun. $0 \neq U \leq M$ alınsın. $N \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $0 \neq U \cap N \leq N \leq M$'dir. Yine $K \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $0 \neq (U \cap N) \cap K = U \cap (N \cap K)$ olup $N \cap K \underset{e}{\leq} M$ olduğu görülür.

v. $N/K \underset{e}{\leq} M/K$ olsun. $U \leq M$ ve $U \cap N = 0$ olduğu kabul edilsin. Modüler Kuralından yararlanılarak $\dfrac{U+K}{K} \cap \dfrac{N}{K} = \dfrac{(U+K) \cap N}{N} = \dfrac{K + \overbrace{(U \cap N)}^{0}}{K} = \dfrac{K}{K} = 0$ bulunur. $\dfrac{N}{K} \underset{e}{\leq} \dfrac{M}{K}$ olduğundan $\dfrac{U+K}{K} = 0$ olup $U + K = K$'dır. Dolayısıyla $U \leq K$ olur. $K \subseteq N$ olduğundan $0 = U \cap N = U$ olup $N \underset{e}{\leq} M$ olduğu görülmüş olur. □

Önerme 2.6.7 $R-$modüller için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $K \underset{e}{\leq} N \leq M$ ve $K' \underset{e}{\leq} N' \leq M$ ise $K \cap K' \underset{e}{\leq} N \cap N'$ olur.

ii. $f : L \to N$ bir modül homomorfizması ve $K \underset{e}{\leq} N$ ise $f^{-1}(K) \underset{e}{\leq} L$ olur.

(Goodearl, 1976)

İspat: i. $K \underset{e}{\leq} N \leq M$ ve $K' \underset{e}{\leq} N' \leq M$ olsun. $0 \neq U \leq N \cap N' \leq N$ alınsın. $K \underset{e}{\leq} N$ kabulünden $0 \neq U \cap K$ 'dır. $0 \neq U \leq N \cap N' \leq N'$ ve $K \leq N$ olduğundan $U \cap K \leq N' \cap N \leq N'$ 'dir. $K' \underset{e}{\leq} N'$ alındığından $0 \neq (U \cap K) \cap K' = U \cap (K \cap K')$ olup $K \cap K' \underset{e}{\leq} N \cap N'$ 'dir.

ii. $f : L \to N$ bir modül homomorfizması ve $K \underset{e}{\leq} N$ olsun. $U \leq L$ ve $U \cap f^{-1}(K) = 0$ olsun. $x \in K \cap f(U)$ için $x = f(u)$ olacak şekilde $u \in U$ vardır. $x = f(u) \in K$ olduğundan $f(u) \in f(U) \cap K$ ve $u \in U \cap f^{-1}(K) = 0$ 'dır. Dolayısıyla $x = f(u) = f(0) = 0$ olup $f(U) \cap K = 0$ 'dır. $K \underset{e}{\leq} N$ kabulünden $f(U) = 0$ 'dır. Böylece $U \leq Çek(f) = f^{-1}(K)$ 'dır. O halde $U = f^{-1}(K) \cap U = 0$ olup $f^{-1}(K) \underset{e}{\leq} L$ 'dir. □

Önerme 2.6.8 $R-$modüller için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $K \leq L \leq M \leq N$ ve $K \underset{e}{\leq} N$ ise $L \underset{e}{\leq} M$ olur.

ii. $i = 1, \ldots, n$ için $A_i \underset{e}{\leq} M$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \underset{e}{\leq} M$ olur.

iii. $\alpha : K \to L, \beta : L \to M$ esas monomorfizmalar ise $\beta\alpha : K \to M$ esas monomorfizmadır.

(Kasch, 1976)

İspat: i. $K \leq L \leq M \leq N$ ve $K \underset{e}{\leq} N$ olsun. $U \leq M$ ve $U \cap L = 0$ alınsın. $U \leq M \leq N$ ve $K \underset{e}{\leq} N$ olduğundan $U \cap K = 0$ iken $U = 0$ olup $L \underset{e}{\leq} M$ 'dir.

ii. $i = 1, \ldots, n$ için $A_i \underset{e}{\leq} M$ olsun. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \underset{e}{\leq} M$ olduğu tümevarım yöntemiyle ispatlanacaktır. $n = 1$ için önermenin doğru olduğu açıktır. $n-1$ için önermenin doğru olduğu kabul edilsin. Şimdi n için doğru olduğu gösterilecektir. $U \leq M$ alınsın. Kabulümüzden $A = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \underset{e}{\leq} M$ 'dir.

$U \cap (A \cap A_n) = (U \cap A_n) \cap A = 0$ olsun. $A \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $U \cap A_n = 0$ 'dır. $A_n \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $U = 0$ olup $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \underset{e}{\leq} M$ 'dir.

iii. $\alpha : K \to L, \beta : L \to M$ esas monomorfizmalar olsunlar. $U \leq M$ alınsın. $\mathrm{Im}(\beta\alpha) \cap U = 0$ olsun. β monomorfizma olduğundan $0 = \beta^{-1}(0) = \beta^{-1}\left(\mathrm{Im}(\beta\alpha)\right) \cap \beta^{-1}(U) = \mathrm{Im}(\alpha) \cap \beta^{-1}(U)$ olur. Buradan α esas monomorfizma olduğundan $\beta^{-1}(U) = 0$ 'dır. Böylece $U \cap \mathrm{Im}(\beta) = 0$ bulunur. $\mathrm{Im}(\beta) \underset{e}{\leq} M$ kabulünden $U = 0$ bulunur ki bu $\mathrm{Im}(\beta\alpha) \underset{e}{\leq} M$ olması demektir. Yani $\beta\alpha : K \to M$ esas monomorfizma olur. □

Önerme 2.6.9 M modül ve $K, L \leq M$ olmak üzere L alt modülü $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal ise $K \oplus L \underset{e}{\leq} M$ 'dir (Goodearl, 1976).

İspat: $U \leq M$ alınsın. $U \cap (K \oplus L) = 0$ olsun. Böylece $U + (K \oplus L) = U \oplus K \oplus L$ olur. Buradan $K \cap (L \oplus U) = 0$ elde edilir. L alt modülünün seçilişi gereği $U \oplus L = L$ olup $U = 0$ 'dır. O halde $K \oplus L \underset{e}{\leq} M$ 'dir. □

Sonuç 2.6.10 M modül olmak üzere M 'nin her alt modülü, M 'nin bir esas alt modülünün dik toplananıdır (Goodearl, 1976).

Önerme 2.6.11 M bir modül ve $0 \neq K \leq M$ olmak üzere $L \leq M$ alt modülü $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal ise $(K \oplus L)/L \underset{e}{\leq} M/L$ 'dir (Dauns, 1994).

İspat: $L \subsetneq N$ olacak şekilde $N \leq M$ alt modülü alınsın. Bu durumda $0 \neq N/L \leq M/L$ 'dir. Varsayılsın ki $N/L \cap (K \oplus L)/L = 0$ olsun. Bu durumda $N \cap (K \oplus L) = L$ 'dir. $N \cap K \subseteq N \cap (K \oplus L) = L$ ve $N \cap K \subseteq K$ olduğundan $N \cap K \subseteq L \cap K = 0$ bulunur. Böylelikle $K \cap N = 0$ özelliğini sağlayan $L \subsetneq N$ alt modülü bulunmuş oldu. Bu durum L alt modülünün seçilişiyle çelişeceğinden varsayım yanlıştır. O halde $0 \neq N/L \cap (K \oplus L)/L$ olmalıdır. Buradan $(K \oplus L)/L \underset{e}{\leq} M/L$ bulunur. □

2.7 Modüllerde Sokul

Tanım 2.7.1 M modülünün tüm minimal alt modüllerinin toplamına M *'nin sokul (socle) alt modülü* denir ve $Soc(M)$ ya da $Soc_R(M)$ ile gösterilir. Eğer M 'nin minimal alt modülü bulunamazsa $Soc(M)=0$ olarak tanımlanır (Beachy, 1998).

Örneğin;

i. K cismi üzerindeki V uzayı için $V = Soc_K(V)$ olur.

ii. $Soc_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})=0$ olur.

(Tercan ve Yücel, 2015)

Önerme 2.7.2 M bir modül ve $N \leq M$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$

ii. $Soc(N) = N \cap Soc(M)$

iii. $Soc(M) = \bigcap \left\{ N : N \underset{e}{\leq} M \right\}$

iv. $(Soc(M+N))/N \subseteq Soc(M/N)$

(Beachy, 1998; Tercan ve Yücel, 2015)

Önerme 2.7.3 Modüllerde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $M_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ modüllerinin direkt toplamı $M = \underset{\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ ise $Soc(M) = \underset{\Lambda}{\oplus} SocM_\lambda$ 'dir.

ii. $Soc(M) \underset{e}{\leq} M$ olması için gerek ve yeter koşul M 'nin sıfırdan farklı her alt modülünün bir minimal alt modül içermesidir.

(Anderson ve Fuller, 1992)

Önerme 2.7.4 Modüllerde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $N \underset{e}{\leq} M$ ise $Soc(N) \underset{e}{\leq} Soc(M)$ 'dir.

ii. $N \leq M$ olmak üzere $Soc(M) \leq N$ olması için gerek ve yeter koşul N 'nin, M 'nin esas alt modüllerinin arakesiti olmasıdır.

iii. $f: M \to N$ homomorfizma ise $f(Soc(M)) \leq Soc(N)$ 'dir.

(Goodearl, 1976)

Önerme 2.7.5 Modüllerde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $N \underset{d}{\leq} M$ ise $Soc(M / N) = (Soc(M) + N) / N$ ’dir.

ii. $SocM \leq N \leq M$ ve $Soc(M / N) \underset{e}{\leq} M / N$ ise $N \underset{e}{\leq} M$ ’dir.

iii. $f : M \to N$ homomorfizma ve $\mathrm{Im}(f) \underset{e}{\leq} N$ ise $f(Soc(M)) = Soc(N)$ ve $Soc(M) = f^{-1}(Soc(N))$ ’dir.

(Kasch, 1976)

2.8 Yarıbasit Modüller

Tanım 2.8.1 $0 \neq M$ modülünün, sıfır ve kendisinden başka hiç alt modülü yoksa M ’ye *basit (simple) modül* denir.

Örneğin; her cisim kendisi üzerinde bir basit modüldür (Kasch, 1976).

Teorem 2.8.2 A bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. A ’nın her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.
ii. A basit alt modüllerin toplamıdır.
iii. A basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
iv. A ’nın her alt modülü A ’nın dik toplananıdır.

(Kasch, 1976)

Tanım 2.8.3 M modülü, minimal alt modüllerin toplamı olarak ifade edilirse M ’ye *yarıbasit (semisimple) modül* denir. M ’nin hiç minimal alt modülü yoksa minimal alt modüllerin toplamı 0 olarak alınır (Beachy, 1998).

Önerme 2.8.4 Yarıbasit modüller için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. Bir yarıbasit modülün her alt modülü yarıbasittir.
ii. Bir yarıbasit modülün epimorfik görüntüsü yarıbasittir.
iii. Yarıbasit modüllerin toplamı yarıbasittir.

(Kasch, 1976)

Tanım 2.8.5 M bir modülünün her alt modülü M 'nin dik toplananı ise M 'ye *tam indirgenebilir (completely reducible) modül* denir (Beachy, 1998).

Önerme 2.8.6 M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

i. M yarıbasit modüldür.
ii. $Soc(M) = M$ 'dir.
iii. M tam indirgenebilir modüldür.
iv. M basit modüllerin direkt toplamına izomorftur.
(Beachy, 1998)

Önerme 2.8.7 M modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul M 'nin her alt modülünün M 'nin bir dik toplananı olmasıdır (Beachy, 1998).

Böylece Önerme (2.8.7) gereğince Teorem (2.8.2)'deki koşulların her birisi M 'nin yarıbasit modül olmasına denktir.

Önerme 2.8.8 M modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul M 'nin esas öz alt modülünün olmamasıdır (Beachy, 1998).

İspat: $(\Rightarrow)$ M yarıbasit olsun. $N < M$ alınsın ve $N \underset{e}{<} M$ olduğu kabul edilsin. Önerme (2.8.7)'den $N \oplus K = M$ olacak şekilde $K \underset{d}{\leq} M$ vardır. Buradan $N \cap K = 0$ olup kabulümüzden $K = 0$ olur. Böylece $N \oplus K = M$ olduğundan $N \oplus 0 = N = M$ bulunur ki bu N alt modülünün seçilişiyle çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup M 'nin esas öz alt modülü yoktur.

$(\Leftarrow)$ M 'nin esas öz alt modülü olmasın. Sonuç (2.6.10) gereğince her $N \leq M$ için $N \oplus K \underset{e}{\leq} M$ olacak şekilde $K \underset{d}{\leq} M$ vardır. Buradan $N \oplus K = M$ olup Önerme (2.8.7) gereğince M yarıbasittir. □

Önerme 2.8.9 M modülünün yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul her $N \leq M$ için $Soc(M / N) = (Soc(M + N)) / N$ olmasıdır (Kasch, 1976).

2.9 Tümleyen ve Kapalı Alt Modüller

Tanım 2.9.1 M bir modül ve $L \leq M$ olmak üzere $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal olan $K \leq M$ alt modülüne L 'nin M 'deki *tümleyeni (complement)* denir ve $K \underset{c}{\leq} M$ ile gösterilir.

$K \underset{c}{\leq} M \Leftrightarrow \exists L \leq M$ vardır ki $K \cap L = 0$ olur ve K bu özelliği sağlayan M 'nin maksimal alt modülüdür.

Örneğin; Bir M modülünde her zaman $0, M \underset{c}{\leq} M$ olur (Dung vd., 1994).

Ayrıca aşağıdaki Örnek (2.9.2)'de görüleceği üzere, M 'nin bir alt modülünün tümleyeni her zaman tek değildir.

Örnek 2.9.2 C cisim olmak üzere $M_C = C \oplus C$ alınırsa, $A = C \oplus 0 \subseteq M$ için

$(x,1)C = \{(xc, c) : c \in C\}$ $(x \in C)$

alt modülü A 'nın C 'deki tümleyenidir. Dolayısıyla $x \in C$ olduğundan A 'nın tümleyeni tek değildir (Goodearl, 1976).

Önerme 2.9.3 M bir modül ve $L, N \leq M$ ve $N \cap L = 0$ olsun. Bu durumda; $N \subseteq K$ olacak şekilde L 'nin M 'de bir K tümleyeni vardır (Dung vd., 1994).

İspat: $\delta = \{A \leq M : A \cap L = 0, N \subseteq A\}$ kümesi tanımlansın. $N \subseteq N$ ve $N \cap L$ olduğundan $N \in \delta$ yani $\delta \neq \varnothing$ olur. δ kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı kümedir. $\mathfrak{M} = \{A_i \in \delta : i \in I\} \subseteq \delta$ ailesi δ 'nin bir zinciri olsun ve $X = \bigcup \mathfrak{M} = \bigcup_{i \in I} A_i$ alınsın. Eğer X, $\mathfrak{M}$ zincirinin bir üst sınırı olarak bulunursa δ 'nin Zorn Lemmadan bir maksimal elemanı var olacaktır. Şimdi bu işlem üç adımda yapılacaktır:

- $a, b \in X, r \in R$ alınsın. $\exists i, j \in I \ni a \in A_i, b \in A_j$ olur. $\mathfrak{M}$ zincir olduğundan $A_i \subseteq A_j$ ya da $A_j \subseteq A_i$ olur. Eğer $A_i \subseteq A_j \Rightarrow ar + b \in A_j \Rightarrow ar + b \in X$ ya da benzer şekilde $A_j \subseteq A_i \Rightarrow ar + b \in X$ bulunur. O halde $X \leq M$ olur.

- $\forall i \in I$ için $N \subseteq A_i$ olduğundan $N \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i = X$ olur.

- $X \cap L = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap L = \bigcup_{i\in I}\left(\underbrace{A_i \cap L}_{0}\right) = 0$ olur.

Böylece X; $\mathfrak{M}$ zincirinin δ ’deki bir üst sınırı olur. O halde Zorn Lemmadan δ ’nin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemana K dersek; $K \in \delta$ için $K \leq M$, $K \cap L = 0$ ve $N \subseteq K$ olur. Buradaki K alt modülü; L ’nin N ’yi kapsayan tümleyenidir ve $K \underset{c}{\leq} M$ olur. $K \leq M$ alt modülü L ile arakesiti sıfır olan maksimal alt modül olduğundan $K \subseteq K' \leq M$ ve $K' \cap L = 0$ ise $K = K'$ olmalıdır.

Açıktır ki Önerme (2.9.3) gereğince herhangi bir $T \leq M$ için T ’nin M içinde bir tümleyeni vardır. Çünkü en azından $0 \leq M$ için $T \cap 0 = 0$ olur.

Önerme 2.9.4 M bir modül ve $L \leq M$ olsun. $L \underset{d}{\leq} M$ ise $L \underset{c}{\leq} M$ ’dir (Goodearl, 1976).

İspat: $L \underset{d}{\leq} M$ olduğundan $M = K \oplus L$ olacak şekilde $K \leq M$ alt modülü vardır. Bu durumda $K \cap L = 0$ ’dır. $L \leq N \leq M$ için $N \cap K = 0$ olsun. $M = K \oplus L$ olduğundan $N = N \cap (K \oplus L)$ olur. Modüler kuralından $N = L \oplus (N \cap K)$ yazılır. Dolayısıyla $N \cap K = 0$ olduğundan $N = L$ olup L, K ’nin M ’de tümleyeni olur. O halde $L \underset{c}{\leq} M$ ’dir. □

Önerme (2.9.4)’ün tersinin doğru olmadığı Örnek (2.9.5)’de görülür.

Örnek 2.9.5 p asal sayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = \dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \oplus \dfrac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}}$ modülünün $K = (1 + p\mathbb{Z}, p + p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ alt modülü M ’de tümleyen alt modüldür. Fakat $K \underset{d}{\nleq} M$ ’dir (Dung vd., 1994).

Önerme 2.9.6 M bir modül olsun. $A, B \leq M$ ve B, A ’nin M ’de tümleyeni olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $A \oplus B \underset{e}{\leq} M$ ’dir.

ii. $(A \oplus B)/B \underset{e}{\leq} M/B$ ’dir.

(Fuller ve Anderson, 1992)

Önerme 2.9.7 M bir modül ve $K, L, N \leq M$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $N \underset{e}{\leq} K \underset{c}{\leq} M$ olacak şekilde N 'yi kapsayan $K \leq M$ alt modülü vardır.

ii. $K \underset{c}{\leq} M$ ve $K \leq N \leq M$ olmak üzere, $N \underset{e}{\leq} M$ olması için gerek ve yeter koşul $N / K \underset{e}{\leq} M / K$ olmasıdır.

iii. $K \underset{c}{\leq} M$ olması için gerek ve yeter koşul $K \underset{e}{\leq} L \leq M$ için $K = L$ olmasıdır.

iv. $K, L \underset{c}{\leq} M$ olmak üzere; K 'nin, L 'nin M 'de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul L 'nin, K 'nin M 'de tümleyeni olmasıdır.

v. $K \underset{c}{\leq} N$ ve $N \underset{c}{\leq} M$ ise $K \underset{c}{\leq} M$ 'dir.

(Dung vd., 1994)

Önerme 2.9.8 M modül olmak üzere $N \leq K \leq M$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $K \underset{c}{\leq} M$ ise $K / N \underset{c}{\leq} M / N$ 'dir.

ii. $K / N \underset{c}{\leq} M / N$ olmak üzere $N \underset{c}{\leq} M$ ise $K \underset{c}{\leq} M$ 'dir.

(Dung vd., 1994)

Önerme 2.9.9 M bir modül olsun. $L \leq N$ için K, L 'nin M 'de tümleyeni ve N, K 'nin M 'de tümleyeni olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. K, N 'nin M 'de tümleyenidir.

ii. N, M 'nin L 'yi esas alt modül olarak içeren alt modüller kümesinin maksimal elemanıdır. Yani N, $\{ A \leq M : L \underset{e}{\leq} A \}$ kümesinin maksimalidir.

(Wisbauer, 1991)

Tanım 2.9.10 M bir modül ve $K \leq M$ olsun. Bu durumda $K \underset{e}{\leq} L \leq M$ iken $K = L$ ise $K \leq M$ alt modülüne *kapalı (closed) alt modül* denir.

Örneğin;

i. Bir M modülünde her zaman 0 ve M kapalı alt modüllerdir.
ii. Bir M modülünün her dik toplananı M 'nin kapalı alt modülüdür.
(Goodearl, 1976)

Önerme 2.9.11 M bir modül ve $A, B \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. A, M 'de kapalı alt modüldür.
ii. $A \underset{c}{\leq} M$ 'dir.
iii. A, B 'nin M 'de tümleyeni ise B, A 'nın M 'de tümleyenidir.
iv. $A \leq B \underset{e}{\leq} M$ ise $B/A \underset{e}{\leq} M/A$'dır.

(Goodearl, 1976)

Önerme 2.9.12 M bir modül olsun. $K, L, N \leq M$ ve $K \subseteq L$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $N \underset{e}{\leq} A$ olacak şekilde M 'nin A kapalı alt modülü vardır.
ii. L, M 'de kapalı alt modül ise L/K, M/K 'de kapalı alt modüldür.
iii. K, L 'de kapalı alt modül ve L, M 'de kapalı alt modül ise K, M 'de kapalı alt modüldür.
(Dung vd., 1994)

2.10 CS Modüller

Tanım 2.10.1 Eğer M modülündeki her K tümleyen alt modülü aynı zamanda M 'de dik toplanan oluyorsa M 'ye *CS modül* adı verilir (Dung vd., 1994).

Önerme 2.10.2 M modülünün CS modül olması için gerek ve yeter koşul $X \leq M$ alındığında $X \underset{e}{\leq} K \underset{d}{\leq} M$ olacak şekilde $K \leq M$ bulunmasıdır (Dung vd., 1994).

İspat: $(\Rightarrow)$ M modülü CS modül ve $X \leq M$ alınsın. Zorn Lemmadan $X \underset{e}{\leq} K \underset{c}{\leq} M$ olacak şekilde $K \leq M$ bulunur. M modülü CS modül olduğundan $K \underset{d}{\leq} M$ olur.

$(\Leftarrow)$ $U \underset{c}{\leq} M$ alınsın. Kabulden $U \underset{e}{\leq} K \underset{d}{\leq} M$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $U \underset{c}{\leq} M$ olduğundan $K = U \underset{d}{\leq} M$ olur ki bu M 'nin CS modül olması demektir. □

Önerme 2.10.3 CS modülün her dik toplananı da CS olur (Dung vd., 1994).

İspat: M modülü CS modül ve $N \underset{d}{\leq} M$ alınsın. Eğer $K \underset{c}{\leq} N$ alınırsa $K \underset{c}{\leq} M$ olur. M CS modül olduğundan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ alt modülü vardır. Buradan $N = N \cap (K \oplus K') = K \oplus (N \cap K')$ eşitliği sağlanacağından $K \underset{d}{\leq} N$ olur. Bu da N 'nin CS modül olması demektir. □

Sonuç 2.10.4 M modülü CS modül olmak üzere $K \underset{c}{\leq} M$ ise K modülü CS modüldür.

3. İNJEKTİF MODÜLLER VE İNJEKTİF ZARFLAR

Bu bölümde bir modülün injektif modül olmasını sağlayan koşullar ve injektif modüller ile ilgili özelliklere yer verilmiştir. İnjektif modüller için oldukça önemli olan Bear Kriterinin birbirine denk koşulları verilip üçüncü ve dördüncü bölümdeki örnek, önerme ve teoremlerde uygulaması yapılmıştır. Sonrasında bölünebilir modül tanıtılıp injektif modül ile ilişkisine değinilmiştir. Bir modülün bir modüle gömülmesi ve genişlemesi irdelenmiş ve devamında esas injektif genişleme, maksimal esas genişleme ve minimal injektif genişleme tanıtılıp birbirine denk koşulları verilmiştir. Bu koşullardan yararlanarak injektif zarf tanımı yapılıp ilgili özelliklerden bahsedilmiştir. Ayrıca Bear, Eckmann-Schopf, Shoda Teoremiyle her modülün bir injektif zarfı olduğu ve tek olmadığına değinilmiştir. Bu bölümün sonunda da literatürde önemli yeri olan Bass-Papp Teoremiyle injektif modüllerin hangi koşulda Noetherian halka olduğu yer almaktadır.

$\xrightarrow{i_j}$, $\xrightarrow{\pi_j}$, $\xrightarrow{i}$, $\xrightarrow{1_M}$ kısaltmaları 3. ve 4. bölümlerde diyagramlarda kullanılacaktır.

Burada i_j, π_j, i ve 1_M sırasıyla j. injeksiyon, j. projeksiyon, içerim ve M modülü üzerinde birim dönüşümü gösterecektir.

3.1 İnjektif Modüller

Önerme 3.1.1 A ile B birer $R-$modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. Keyfi bir $0 \longrightarrow A \longrightarrow B$ tam dizisi için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(hf = g)$ olacak şekilde bir $h : B \to M$ homomorfizması vardır.

ii. I , R ’nin bir sağ ideali olmak üzere keyfi bir $0 \longrightarrow I \longrightarrow R$ tam dizisi için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & R \arrow[dl, "\psi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(\psi i = \phi)$ olacak şekilde bir $\psi : R \to M$ homomorfizması vardır.

iii. $R-$modüllerin keyfi bir $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \longrightarrow Hom_R(C,M) \longrightarrow Hom_R(B,M) \longrightarrow Hom_R(A,M) \longrightarrow 0$ dizisi tamdır.

Ayrıca (i)'de $A \leq B$ ise $f : A \to B$ bir monomorfizma olduğundan genelliği bozmadan $A \xrightarrow{i} B$ içerim dönüşümü olarak alınabilir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Tanım 3.1.2 Önerme (3.1.1)'deki koşullardan birini sağlayan M modülüne *injektif (injective) modül* denir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Örneğin;

i. Bir cisim üzerinde modül yapısına sahip olan vektör uzayları injektiftir.
ii. Her sıfır modülü injektiftir.

M modülü injektif olsun. B modül ve $A \leq B$ olmak üzere bir $f : A \to M$ homomorfizması verilmişse, bu homomorfizma bir $g : B \to M$ homomorfizmasına genişletilebilir. Yani A alt modülüne kısıtlanışı $g_{|_A}$, f'ye eşit olan bir $g : B \to M$ homomorfizması bulunur. Gerçekten $i : A \to B$ içerim monomorfizması alındığında, M injektif modül olduğundan $gi = f$ olacak şekilde bir $g : B \to M$ homomorfizması bulunur. $f = gi = g_{|_A}$ olduğu açıktır (Alizade ve Pancar, 2016).

Önerme 3.1.3 (Bear Kriteri) M bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. M injektif modüldür.
ii. R'nin her I sağ ideali ve her $f \in Hom(I,M)$ için f'nin $\varphi \in Hom(R,M)$ genişlemesi vardır.
iii. R'nin her I sağ ideali ve her $f \in Hom(I,M)$ için $f(a) = ma \ (\forall a \in I)$ olacak şekilde $m \in M$ vardır.

(Hazewinkel, Gubareni ve Kirichenko, 2004)

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) M injektif modül olarak kabul edilirse, injektif modül tanımından $I \leq R$ alınırsa $f : I \to M$ homomorfizması için,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "\varphi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\varphi \in Hom_R(R,M)$ bulunur. Böylece $\varphi i = f$ olduğundan f 'nin φ genişlemesi vardır.

(ii)$\Rightarrow$(i) Herhangi A ile B alt modülleri için $0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B$ monomorfizması ve $t: A \to M$ homomorfizması alınsın. Ek olarak,

$\delta = \left\{ (C_\alpha, h_\alpha) : h_\alpha \in Hom(C_\alpha, M) \text{ ve } \mathrm{Im}(g) \le C_\alpha \le B \text{ için } h_{\alpha}\big|_{\mathrm{Im}(g)} = h \right\}$ kümesi tanımlansın.

$tg^{-1} : \mathrm{Im}(g) \to M$ olduğundan $tg^{-1} \in \delta$ olur. Demek ki $\delta \neq \varnothing$'dır. δ kümesi üzerindeki bağıntı, $(C_\alpha, h_\alpha) \preccurlyeq (C_\beta, h_\beta) \overset{Tn}{\Longleftrightarrow} C_\alpha \le C_\beta$ ve her $x \in C_\alpha$ için $h_\alpha(x) = h_\beta(x)$ şeklinde tanımlanırsa, δ bu bağıntı ile kısmi sıralı küme olur. δ 'nin bir J zinciri için $C_0 = \bigcup_{\alpha \in J} C_\alpha$ ve $h_0 : C_0 \to M$ dönüşümü, $x \in C_0$ için $h_0(x) = h_\alpha(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $x \in C_\alpha \cap C_\beta$ ise $(C_\alpha, h_\alpha) \preccurlyeq (C_\beta, h_\beta)$ ya da $(C_\beta, h_\beta) \preccurlyeq (C_\alpha, h_\alpha)$ olup $h_\beta(x) = h_\alpha(x)$ olur. Böylece h_0 iyi tanımlıdır. O halde Zorn Lemmadan δ 'nin (C_1, h_1) şeklinde bir maksimal elemanı vardır. Eğer $C = B$ olduğu gösterilirse ispat bitecektir. Bunun için $b \in B$ ve $I = \{ r \in R : br \in C \}$ kümesi tanımlansın. $I \le R$ olduğundan

$$\begin{aligned} f &: I \to R \\ & r \mapsto h_1(br) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa homomorfizma olur. Varsayım gereği f 'nin $\varphi : R \to M$ genişlemesi vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} \tau &: C_1 + bR \to M \\ & c_1 + br \mapsto h_1(c_1) + \varphi(r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa $\tau\big|_{C_1} = h_1$ olur. Buradan $(C_1, h_1) \preccurlyeq (C_1 + bR, \tau) \in \delta$ olduğu söylenir. Diğer taraftan (C_1, h_1) ögesi δ 'nin maksimal elemanı olduğundan $(C_1, h_1) = (C + bR, \tau)$ olmalıdır. Böylece $b \in C$ olacağından $B = C$ olduğu gösterilmiş olur.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $i : I \to R$ içerim dönüşümü ve $f \in Hom(I,M)$ olsun. $f = \varphi i$ olacak şekilde $\varphi \in Hom(R,M)$ vardır. $m = \varphi(1) \in M$ olmak üzere f ile φ modül homomorfizmaları olduğundan her $a \in I$ için $f(a) = \varphi i(a) = \varphi(1a) = \varphi(1)a = ma$ 'dır. □

Önerme 3.1.4 M modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f : M \to N$ monomorfizmasının split monomorfizma olmasıdır (Nicholson ve Yousif, 2003).

İspat: $(\Rightarrow)$ M injektif olsun. Böylece $f : M \to N$ monomorfizma ise $gf = 1_M$ olacak şekilde $g : N \to M$ homomorfizması vardır. Önerme (2.3.6) gereğince $\mathrm{Im}(f) \oplus Çek(g) = N$ olup $\mathrm{Im}(f) \leq_d N$ 'dir. O halde f split monomorfizmadır.

$(\Leftarrow)$ f split monomorfizma olsun. Önerme (2.3.7) gereğince $gf = 1_M$ olacak şekilde $g : N \to M$ homomorfizması vardır. O halde M injektiftir. □

Önerme 3.1.5 Bir modüller ailesi $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ olmak üzere $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \Lambda$ için M_λ 'nın injektif olmasıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: $M = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $i_\lambda : M_\lambda \to M$ ve $\pi_\lambda : M \to M_\lambda$ sırasıyla injeksiyon ve projeksiyon dönüşümleri olsun.

$(\Leftarrow)$ Her $\lambda \in \Lambda$ için M_λ modülleri injektif olsun. Keyfi bir tam dizi $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B$ olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(g\psi = f)$ olacak şekilde $g : B \to M$ homomorfizması bulunmalıdır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_\lambda f"'] & B \arrow[dl, "g_\lambda"] \\ & M_\lambda & \end{tikzcd}$$

Her $\lambda \in \Lambda$ için M_λ injektif olduğundan $g_\lambda \psi = \pi_\lambda f$ yazılır. Keyfi $b \in B$ elemanı için $g(b) = (g_\lambda(b))_{\lambda \in \Lambda}$ ile tanımlı $g : B \to M$ dönüşümü homomorfizmadır.

Keyfi $a \in A$ için,

$$g\psi(a) = g(\psi(a)) = (g_\lambda(\psi(a)))_{\lambda\in\Lambda}$$

$$= (g_\lambda \psi(a))_{\lambda\in\Lambda}$$

$$= (\pi_\lambda f(a))_{\lambda\in\Lambda}$$

$$= (\pi_\lambda(f(a)))_{\lambda\in\Lambda}$$

$$= f(a)$$

bulunur. Böylece $g\psi = f$ olacak şekilde $g : B \to M$ homomorfizması bulunduğundan M injektiftir.

$(\Rightarrow)$ M injektif olsun. Keyfi bir tam dizi $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\psi} B$ ve $\lambda \in \Lambda$ için $\mu : A \to M_\lambda$ homomorfizması verildiğinde

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\mu"'] & B \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ & M_\lambda & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(h'\psi = \mu)$ olacak şekilde $h' : B \to M_\lambda$ homomorfizması bulunmalıdır.

M injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_\lambda \mu"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(h\psi = i_\lambda \mu)$ olacak şekilde $h : B \to M$ vardır. Her $b \in B$ için $h'(b) = \pi_\lambda(h(b))$ ile tanımlı $h' : B \to M_\lambda$ dönüşümü homomorfizmadır.

Keyfi $a \in A$ için,

$$h'\psi(a) = (\pi_\lambda h)\psi(a) = \pi_\lambda(h\psi)(a) = \pi_\lambda(i_\lambda \mu)(a) = (\pi_\lambda \overset{\pi_\lambda i_\lambda = 1_{M_\lambda}}{=} 1_{M_\lambda}\, \mu(a) = \mu(a) i_\lambda)\mu(a)$$

olup $\lambda \in \Lambda$ için $h'\psi = \mu$ koşulunu sağlayan $h' \in Hom(B, M_\lambda)$ bulunduğundan $\lambda \in \Lambda$ için M_λ injektiftir. □

Önerme 3.1.6 Bir modüller ailesi $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ injektif ise her $\lambda\in\Lambda$ için M_λ injektiftir.

ii. Λ sonlu bir indis kümesi ve her $\lambda\in\Lambda$ için M_λ injektif ise $\underset{\lambda\in\Lambda}{\oplus} M_\lambda$ injektiftir.

(Sharpe ve Vàmos, 1972)

Önerme 3.1.7 M ve N birer modül olsun. $M\overset{g}{\cong}N$ olmak üzere M 'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul N 'nin injektif olmasıdır (Faith, 1967).

İspat: Keyfi bir $0\longrightarrow A\overset{t}{\longrightarrow}B$ tam dizisi ve $g:M\to N$ izomorfizması alınsın. N modülü injektif olsun. Dolayısıyla,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "k"] \arrow[ddl, "h"] \\
 & M \arrow[d, shift right, "g"'] & \\
 & N \arrow[u, shift right, "g^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(ht=gf)$ olacak şekilde $h:B\to N$ homomorfizması vardır. Burada $k=g^{-1}h$ alınırsa,

$$kt=(g^{-1}h)t=g^{-1}(ht)\;=g^{-1}(gf)=f$$

olur. O halde M injektiftir. Benzer olarak M injektif iken N modülünün injektif olduğu gösterilir. □

Sonuç 3.1.8 İnjektif modüllerin izomorfizma altındaki görüntüsü de injektif olur (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 3.1.9 Bir injektif modülün dik toplananı injektiftir (Faith, 1967).

İspat: M injektif ve $P\underset{d}{\leq}M$ alınsın. Böylece $M=P\oplus Q$ olacak şekilde $Q\leq M$ vardır. Keyfi A ve B modülleri için keyfi bir tam dizi $0\longrightarrow B\overset{t}{\longrightarrow}A$ ve $f:B\to M$ homomorfizması olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, "g"] \arrow[ddl, dashed, "\pi_P g"] \\
 & M \arrow[d, "\pi_P"'] & \\
 & P &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(gt=f)$ olacak şekilde $g:A\to M$ homomorfizması vardır. Eğer $\pi_P:M\to P$ projeksiyon dönüşümü tanımlanırsa $\pi_P g:A\to P$ homomorfizması için $(\pi_P g)t=\pi_P f$ olur. O halde M modülünün dik toplananı olan P modülü injektiftir. □

Önerme 3.1.10 M modül ve $N \leq M$ olmak üzere N injektif ise N, M 'nin bir dik toplananıdır ve N 'nin M 'de $M = K \oplus N$ olacak şekilde $K \leq M$ tümleyeni vardır (Rotman, 2008).

İspat: $N \leq M$ ve N injektif modül olsun. $1_N : N \to N$ birim homomorfizması bir $h : N \to M$ homomorfizmasına genişler. Yani;

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_N"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

diyagramı için $hi = 1_N$ olduğundan Önerme (2.3.6) gereğince $M = Çek(h) \oplus N$ olur. $K = Çek(h)$ alınırsa K alt modülünün N 'nin tümleyeni olduğu kolayca görülür. □

Önerme 3.1.11 M bir $\mathbb{Z}-$modül olmak üzere $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ injektif sağ $R-$modüldür (Alizade ve Pancar, 2016).

İspat: $f : A \to B$ bir monomorfizma ve $g : A \to Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ bir homomorfizma olsun. Her $\alpha \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ için $h(\alpha) = \alpha(1)$ alarak bir $h : Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \to M$ dönüşümü tanımlansın. Her $\alpha, \beta \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ için $h(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(1) = \alpha(1) + \beta(1) = h(\alpha) + h(\beta)$ olduğundan h modül homomorfizmasıdır.

M injektif modül olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "q"] \arrow[ddl, "p"] \\ & Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \arrow[d, "h"'] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(pf = hg)$ olacak şekilde bir $p : B \to M$ homomorfizması vardır. $q : B \to Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ dönüşümü her $b \in B$ ve her $r \in R$ için $q(b)(r) = p(br)$ işlemi ile tanımlansın. Her $r, s \in R$ için,

$$q(b)(r+s) = p(b(r+s)) = p(br) + p(bs) = q(b)(r) + q(b)(s)$$

olduğundan $q(b) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ 'dir. q iyi tanımlıdır. Şimdi q 'nun homomorfizma olduğunu göstermek için keyfi $a, b \in B$ ve $s \in R$ alınsın.

Her $r \in R$ için,

$$q(a+b)(r) = p((a+b)r) = p(ar) + p(br) = q(a)(r) + q(b)(r) = (q(a)+q(b))(r)$$

ve

$$q(as)(r) = p(asr) = q(a)(sr) = (q(a)s)(r)$$

olduğundan, $q(a+b) = q(a) + q(b)$ ve $q(as) = q(a)s$ 'dir. Dolayısıyla q bir homomorfizmadır. Şimdi $qf = g$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermek için keyfi $a \in A$ alınsın. Her $r \in R$ için,

$$(qf(a))(r) = q(f(a))(r) = p(f(a)r)$$

$$= pf(ar) = hg(ar) = (g(ar))(1)$$

$$= (g(a)r)(1) = g(a)(1r) = g(a)(r)$$

olduğundan $qf = g$ 'dir. O halde $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ injektiftir. □

Önerme 3.1.12 M injektif $R-$modül ve $f : R \to S$ halka homomorfizması ise $Hom_R(S, M)$ injektif $S-$modüldür (Enochs ve Jenda, 2000).

Tanım 3.1.13 R bir halka ve $r \in R$ olmak üzere $sr = 0$ $(rs = 0)$ olacak şekilde $0 \neq s \in R$ varsa $r \in R$ 'ye *sağ (sol) sıfır bölen* denir. M bir $R-$modül ve $m \in M$ iken sağ sıfır bölen olmayan her $r \in R$ elemanı için $m = m'r$ olacak şekilde $m' \in M$ varsa, $m \in M$ elemanına *bölünebilirdir* denir. R halkasının sağ sıfır bölen olmayan her r elemanı için M modülünün her elemanı bölünebilirse, yani $M = Mr$ ise, M modülüne *bölünebilir (divisible) modül* denir.

Örneğin;

i. Cisim üzerindeki her vektör uzayı bölünebilirdir.
ii. Her sıfır modülü bölünebilirdir.
(Sharpe ve Vàmos, 1972)

Yardımcı Teorem 3.1.14 M bölünebilir modül ve $N \leq M$ olmak üzere M / N bölünebilir modüldür (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: $m \in M$ olmak üzere $m + N \in M / N$ keyfi elemanını ve sağ sıfır bölen olmayan $r \in R$ elemanı alınsın. M bölünebilir modül olduğundan $m = m'r$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. Böylece $m + N = m'r + N = (m' + N)r$ olacak şekilde $m' + N \in M / N$ elemanı var olduğundan M / N bölünebilir modüldür. □

Yardımcı Teorem 3.1.15 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bölünebilir modüllerin ailesi ise $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ ve $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ bölünebilir modüllerdir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: Keyfi $(m_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ elemanını ve keyfi sağ sıfır bölen olmayan $r \in R$ elemanı alınsın. Her $\lambda \in \Lambda$ için M_λ bölünebilir olduğundan her $\lambda \in \Lambda$ için $m_\lambda = rn_\lambda$ olacak şekilde $n_\lambda \in M_\lambda$ vardır. Böylece $(m_\lambda) = r(n_\lambda) \in r\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olup $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq r\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ bulunur. Zaten $r\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \subseteq \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ bölünebilir modüldür. □

Önerme 3.1.16 Her injektif modül bölünebilirdir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: İnjektif bir modül M olmak üzere $m \in M$ ve sağ sıfır bölen olmayan $r \in R$ elemanı alınsın. Keyfi $s \in R$ elemanı için $f(sr) = ms$ ile tanımlı $f : Rr \to M$ dönüşümü alınsın. $s_1 r = s_2 r$ koşulunu sağlayan $s_1, s_2 \in R$ elemanları için $(s_1 - s_2)r = 0_R$ yazılır. $r \in R$ sağ sıfır bölen olmayan eleman olduğundan $s_1 - s_2 = 0_R$ bulunur. O halde $s_1 = s_2$ olup $ms_1 = ms_2$ elde edilir. $f(s_1 r) = f(s_2 r)$ olduğundan f iyi tanımlıdır. Ayrıca f modül homomorfizmasıdır. M injektif modül ve rR, R 'nin sağ ideali olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & rR \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(gi = f)$ olacak şekilde $g : R \to M$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla her $a \in rR$ için,

$f(a) = g(a)$ 'dır.

Böylece $m = m1_R = f(1_R r) = f(r) = g(r) = g(1_R r) = g(1_R)r$ yazılır. Her $m \in M$ için $m = g(1_R)r$ olacak şekilde $g(1_R) \in M$ elemanı var olduğundan M bölünebilirdir. □

Önerme 3.1.17 Her $\mathbb{Z}-$modül bölünebilir bir modülün alt modülüdür (Hazewinkel vd., 2004).

Önerme 3.1.18 M bölünebilir $\mathbb{Z}-$modül ise $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ injektif sağ $R-$modüldür (Hazewinkel vd., 2004).

Tanım 3.1.19 Birimli ve sıfır bölensiz bir R halkasına *bölge* denir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Tanım 3.1.20 R bir bölge ve M bir modül olsun. R 'nin sıfırdan farklı r elemanı için $rm = 0$ şartını sağlayan $m \in M$ elemanına M 'nin *burulma elemanı* denir. M modülünün her elemanı burulma elemanı ise M 'ye *burulma modülü* denir. M 'nin tek burulma elemanı sıfır ise M 'ye *burulmasız modül* denir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 3.1.21 R değişmeli bölge ve M burulmasız modülü için M injektiftir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: R halkasının keyfi bir ideali I ve $f: I \to M$ bir homomorfizma olsun. Eğer $I = 0$ ise,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(gi = f)$ olacak şekilde $g: R \to M$ homomorfizması vardır. $I \neq 0$ olsun. Böylece $\exists 0_R \neq s \in I$ elemanı vardır. R bir bölge olduğundan s sıfır bölen olmayan elemandır.

M bölünebilir olduğundan $f(s) = ms$ olacak şekilde $m \in M$ elemanı vardır. $t \in I$ için,

$$sf(t) = f(st) = f(ts) = tf(s) = tms = smt$$

bulunur. M burulmasız olduğundan $s(f(t) - mt) = 0$ koşulunu sağlayan $0_R \neq s \in I$ için $f(t) - mt = 0$ yazılır. Dolayısıla $f(t) = mt$ bulunur. Her $r \in R$ için $g(r) = mr$ ile tanımlı $g: R \to M$ homomorfizmadır. Her $a \in I$ için,

$$f(a) = ma = g(a) = gi(a)$$

olduğundan M injektiftir. □

Tanım 3.1.22 Her sağ (sol) ideali temel ideal olan R bölgesine *sağ (sol) temel ideal bölgesi* denir. $r \in R$ omak üzere R sağ (sol) temel ideal bölgesinin sağ (sol) idealleri $rR(Rr)$ formundadır. Eğer R değişmeli bölge ise R 'ye *temel ideal bölgesi* denir.

Örneğin; $\mathbb{Z}$ temel ideal bölgesidir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Teorem 3.1.23 M bir modül ve R sağ temel ideal bölgesi olsun. M 'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul M 'nin bölünebilir olmasıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: $(\Rightarrow)$ M injektif olsun. Her injektif modül bölünebilir olduğundan M bölünebilirdir.

$(\Leftarrow)$ M bölünebilir modül olmak üzere I, R halkasının sağ ideali olsun.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı göz önüne alınırsa $I = 0$ için R sağ temel ideal bölgesi olduğundan $I = sR$ olacak şekilde $0_R \neq s \in I$ elemanı vardır. M bölünebilir olduğundan öyle bir $m \in M$ vardır ki $f(s) = sm$ yazılır.

$r \in R$ keyfi olmak üzere, $g(r) = mr$ ile tanımlı $g : R \to M$ dönüşümü homomorfizmadır. $a \in I = sR$ keyfi olsun. Böylece $a = st$ olacak şekilde bir $t \in R$ elemanı vardır. Böylece $g(a) = g(st) = smt = f(s)t = f(st) = f(a)$ olup $g_{|_I} = f$ 'dir. Dolayısıyla diyagram değişmeli olacak şekilde $g : R \to M$ homomorfizması vardır. Böylece M injektiftir. □

Sonuç 3.1.24 Her abel grup bir $\mathbb{Z}-$modül ve $\mathbb{Z}$ temel ideal bölgesi olduğundan bir abel grubun injektif olması için gerek ve yeter koşul bölünebilir olmasıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 3.1.25 M bir modül ve R temel ideal bölgesi olsun. M injektif olmak üzere M 'nin her bölüm modülü injektiftir (Rotman, 2008).

Tanım 3.1.26 A ve B birer modül olmak üzere $f : A \to B$ bir monomorfizma ise $A \cong \mathrm{Im}(f)$ olur. Bu durumda f *gömülme monomorfizması* adını alır ve A modülü B modülü *içine gömülebilirdir* denir (Tercan ve Yücel, 2015).

Yardımcı Teorem 3.1.27 Her abel grup bir injektif abel grup içine gömülebilirdir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: G bir abel grup olsun. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sırasıyla tamsayılar abel grubu ve rasyonel sayılar abel grubu olmak üzere $F = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}$ ve $H = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q}$ alınsın. Sonlu sayıda $g \in G$ için $n_g \neq 0$ koşulunu sağlayan $(n_g)_{g \in G} \in F$ keyfi elemanı için $\varphi((n_g)_{g \in G}) = \sum_{g \in G} n_g g$ ile tanımlı $\varphi : F \to G$ dönüşümü alınsın. $(n_g)_{g \in G} = (m_g)_{g \in G}$ koşulunu sağlayan $(n_g)_{g \in G}, (m_g)_{g \in G} \in F$ keyfi elemanlar olmak üzere her $g \in G$ için $n_g = m_g$ yazılır. Dolayısıyla her $g \in G$ için $n_g g = m_g g$ olup

$\sum_{g\in G} n_g g = \sum_{g\in G} m_g g$ bulunur. Buradan $\varphi((n_g)_{g\in G}) = \varphi((m_g)_{g\in G})$ olup φ iyi tanımlıdır.Her $g \in G$ için $(n_g)_{g\in G}, (m_g)_{g\in G} \in F$ keyfi elemanlar olmak üzere;

$$\varphi((n_g)_{g\in G} + (m_g)_{g\in G}) = \sum_{g\in G} (n_g + m_g)g = \sum_{g\in G} n_g g + m_g g = \varphi((n_g)_{g\in G}) + \varphi((m_g)_{g\in G})$$

ve her $a_g \in \mathbb{Z}$ için,

$$\varphi((n_g)_{g\in G} a_g) = \sum_{g\in G} (n_g g)a_g = \left(\sum_{g\in G} n_g g \right) a_g = \varphi((n_g)_{g\in G}) a_g$$

olup φ dönüşümü bir $\mathbb{Z}-$modül homomorfizmasıdır. G , $\mathbb{Z}-$modül olarak alındığında $g \in G$ elemanları G grubunun bir üreteç kümesini teşkil eder. Dolayısıyla $x \in G$ keyfi elemanı için $x = \sum_{g\in G} n_g g$ olacak şekilde $n_g \in \mathbb{Z}$ elemanları vardır. φ homomorfizmasının tanımı gereğince $x = \sum_{g\in G} n_g g = \varphi((n_g)_{g\in G})$ olacak şekilde $(n_g)_{g\in G} \in F$ elemanları mevcut olduğundan φ bir $\mathbb{Z}-$ modül epimorfizmasıdır. 1. İzomorfizma Teoremi gereğince $F / Çek(\varphi) \cong G$ yazılır. $Çek(\varphi) = K$ alınırsa $F / K \cong G$ 'dir. $\mathbb{Q}$ bölünebilir $\mathbb{Z}-$modül olduğundan Yardımcı Teorem (3.1.14) ve (3.1.15) gereğince H / K injektiftir. $G \cong F / K \subseteq H / K$ ve H / K injektif olduğundan G bir H / K injektif abel grubu içine gömülebilirdir. □

Yardımcı Teorem 3.1.28 M_R modülü $Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ $R-$modülü içine gömülebilirdir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: Öncelikle $m \in M$ ve $r \in R$ keyfi elemanları için $(\varphi(m))(r) = mr$ ile tanımlı $\varphi : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ dönüşümünün $R-$modül homomorfizması olduğu gösterilecektir. Keyfi $m \in M$ ve her $r, s \in R$ için,

$$(\varphi(m))(r + s) = m(r + s) = mr + ms = (\varphi(m))r + (\varphi(m))s$$

olduğundan $\varphi(m) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$ elde edilir. Dolayısıyla φ iyi tanımlıdır.

Şimdi $m,n \in M$ ve $s \in R$ alınırsa $r \in R$ için,

$$(\varphi(m+n))(r) = (m+n)r = mr + nr = (\varphi(m))(r) + (\varphi(n))(r) = (\varphi(m) + \varphi(n))(r)$$

ve

$$(\varphi(ms))(r) = msr = (\varphi(m))(sr) = (\varphi(m)s)(r)$$

olduğundan φ dönüşümü $R-$modül homomorfizmasıdır. Keyfi $x \in Çek(\varphi)$ için $\varphi(x) = 0$ ve $r \in R$ keyfi elemanı için de $(\varphi(x))(r) = xr = 0$ olur. Dolayısıyla özel olarak $r = 1_R$ elemanı için $x1_R = 0$ sağlanır. Buradan $x = 0$ olup φ bir monomorfizmadır. O halde M modülü $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ $R-$modülü içine gömülebilirdir. □

Teorem 3.1.29 Her $R-$modül bir injektif $R-$modül içine gömülebilirdir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: Bu teoremin özel hali Yardımcı Teorem (3.1.27)'de ispatlanmıştır. M modülü $R-$modül olsun. Böylece M abel gruptur. Yardımcı Teorem (3.1.27) gereğince M bir N injektif abel grubu içine gömülebilirdir. Dolayısıyla bir $\varphi : M \to N$ monomorfizması vardır. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ tam dizisi için Önerme (3.1.1) gereğince $0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \xrightarrow{\alpha} Hom_{\mathbb{Z}}(R,N)$ dizisi tamdır. α bir $\mathbb{Z}-$modül homomorfizması olduğundan $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$, $Hom_{\mathbb{Z}}(R,N)$ içine gömülebilirdir. Yardımcı Teorem (3.1.28) gereğince M, $Hom_{\mathbb{Z}}(R,M)$ içine gömülebilirdir. Buradan monomorfizmaların bir $M \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R,M) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R,N)$ dizisi elde edilir. Burada N injektif olduğundan $Hom_{\mathbb{Z}}(R,N)$ bir injektif $R-$modüldür. Böylece M injektif modülü $R-$modül $Hom_{\mathbb{Z}}(R,N)$ içine gömülebilirdir. O halde her $R-$modül bir injektif $R-$modül içine gömülebilirdir. □

Önerme 3.1.30 A ve B birer $R-$modül ve $A \leq B$ olmak üzere $i : A \to B$ içerim monomorfizması ise A modülünün bir C genişlemesi ve i monomorfizmasının her $a \in A$ elemanı için $g(a) = i(a)$ olacak şekilde bir $g : C \to B$ genişleme izomorfizması vardır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: i içerim monomorfizması olduğundan $i(A)$, B modülünün öz alt modülü olup $A \cong i(A)$ olur. Şimdi $B \setminus i(A)$ kümesinin elemanlarıyla, elemanları özdeş olacak şekilde A'dan farklı herhangi bir X kümesi düşünülsün. Bu durumda bir $f : X \to B \setminus i(A)$ 1-1 ve örten dönüşümü vardır. $C = A \cup X$ olsun. Her $c \in A$ için $g(c) = i(c)$ ve $c \in X$ için $g(c) = f(c)$ şeklinde tanımlı $g : C \to B$ dönüşümü göz önüne alınsın. i ve f 1-1 olduğundan g 1-1'dir. $x, y \in C$ ve $r \in R$ keyfi elemanları için $g(x), g(y) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ olup $g(x) + g(y) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ ve $rg(x) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$'dir. C kümesi üzerinde $x + y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ ve $xr = g^{-1}(g(x)r)$ ile tanımlı $+ : C \times C \to C$ ve $\cdot : C \times R \to C$ işlemleri ile birlikte C kümesi $R-$modüldür. $x, y \in C$ keyfi elemanları için,

$$g(x + y) = g(g^{-1}(g(x) + g(y))) = g(x) + g(y)$$

ve $r \in R, c \in C$ keyfi elemanları için,

$$g(cr) = g(g^{-1}(g(c)r)) = g(c)r$$

olduğundan $g : C \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ modül homomorfizmasıdır.

$b \in B$ keyfi olsun. Dolayısıyla $b \in B \setminus i(A)$ veya $b \in i(B)$'dir. $b \in B \setminus i(A)$ ise, f örten olduğundan $f(k) = b$ olacak şekilde $\exists k \in X \subset C$ elemanı mevcuttur. $b \in i(A)$ ise $b = i(a)$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. g homomorfizmasının tanımı gereğince $b = g(a)$ olacak şekilde $a \in A \subset C$ elemanı vardır. Dolayısıyla $g : C \to B$ modül homomorfizması $R-$modül izomorfizmasıdır. Ayrıca g izomorfizmasının tanımından her $a \in A$ için $g(a) = i(a)$ olur. □

Tanım 3.1.31 M injektif modül ve $N \le M$ ise M modülüne N'nin *injektif genişlemesi* denir (Enochs ve Jenda, 2000).

Teorem 3.1.32 Her $R-$modül bir injektif genişlemeye sahiptir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: A bir $R-$modül olsun. Böylece A bir abel gruptur. Teorem (3.1.29) gereğince B injektif $R-$modül olmak üzere, A bir $Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ injektif $R-$modülü içine gömülebilirdir.

Böylece bir $i : A \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ monomorfizması vardır. Önerme (3.1.30) gereğince C, A'nın bir genişlemesi olmak üzere her $a \in A$ için $g(a) = i(a)$ koşulunu sağlayan bir $g : C \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ izomorfizması vardır. Dolayısıyla C injektif modül olduğundan C, A modülünün injektif genişlemesidir. □

Teorem 3.1.33 M bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. M injektiftir.
ii. M modülü kendisinin her genişlemesinde dik toplanandır.
(Sharpe ve Vàmos, 1972)

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) M injektif ve M modülünün bir genişlemesi A olsun. Dolayısıyla $i : M \to A$ monomorfizması vardır. M injektif olduğundan Önerme (3.1.10) gereğince $M \underset{d}{\leq} A$ olur.

(ii)$\Rightarrow$(i) Teorem (3.1.32) gereğince M bir N injektif genişlemesine sahiptir. M modülü kendisinin her genişlemesinde dik toplanan olsun. Dolayısıyla $N = M \oplus K$ olacak şekilde N modülünün bir K alt modülü vardır. N injektif olduğundan Önerme (3.1.9) gereğince M injektiftir. □

Teorem 3.1.34 M modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul M'nin öz esas genişlemeye sahip olmamasıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: ($\Rightarrow$) M injektif olsun ve M modülünün öz esas genişlemesinin A olduğunu kabul edilsin. Teorem (3.1.33) gereğince M injektif olduğundan $M \underset{d}{\leq} A$'dır. O halde $A = M \oplus N$ olacak şekilde A modülünün bir N alt modülü vardır. $M \neq A$ olduğundan $N \neq 0$'dır. $0 \neq N \leq A$ alt modülü için $M \cap N = 0$ olduğundan A, M'nin bir esas genişlemesi olamaz. Demek ki kabul yanlış olup M öz esas genişlemeye sahip değildir.

($\Leftarrow$) M öz esas genişlemeye sahip olmasın ve B modülü de M'nin bir genişlemesi olsun. Teorem (3.1.33) gereğince M modülünün injektif olması için M'nin B'nin bir dik toplananı olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. $B = M$ ise $M = M \oplus 0$ olduğu açıktır. B, M'nin bir öz genişlemesi olsun. $M \cap X = 0$ koşulunu sağlayan B'nin sıfırdan farklı X alt modüllerinin kümesine Ω denilsin. Hipotez gereğince M öz esas genişlemeye sahip olmadığından $\Omega \neq \varnothing$'dir. Ω, $\subseteq$ bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir.

$\psi,\ \Omega$ kümesinin keyfi bir zinciri olmak üzere $X' = \bigcup_{X \in \psi} X,\ \psi$ 'nin bir üst sınırıdır. Zorn Lemma gereğince Ω bir Z maksimal elemanına sahiptir. $M \subseteq N$ ve $Z \subseteq N$ olduğundan $M + Z \subseteq N$ olur. Buradan 2. İzomorfizma Teoremi gereğince $N / Z \supseteq (M + Z) / Z \cong M / M \cap Z$ yazılır. $Z,\ \Omega$ 'nın bir maksimal elemanı olduğundan $M \cap Z = 0$ 'dır. O halde $N / Z \supseteq (M + Z) / Z \cong M / 0 \cong M$ bulunur.

$N \neq M + Z$ olduğunu kabul edilsin. Böylece N 'nin Z 'yi kapsayan alt modülleri ile N / Z 'in alt modülleri arasında izomorfizma var olduğundan $N / Z \supset (M + Z) / Z$ yazılır. M öz esas genişlemeye sahip olmadığından $(M + Z) / Z$ öz esas genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla Z 'yi kapsayan F 'nin öyle bir Y alt modülü için $Y / Z \cap (M + Z) / Z = 0$ yazılır. O halde $Y \cap (M + Z) / Z = Z / Z$ olup $Y \cap (M + Z) = Z$ bulunur. $Y \cap M \subseteq Y \cap (M + Z) = Z$ ve $Y \cap M \subseteq M$ olduğundan $Y \cap M \subseteq M \cap Z = 0$ 'dır. Buradan $Y \cap M = 0$ olup Ω 'nın tanımı gereğince $Y \in \Omega$ bulunur. Bu ise Z 'nin Ω 'nın bir maksimal elemanı oluşu ile çelişir. O halde $N = M + Z$ olmalıdır. $Z \in \Omega$ olduğundan $M \cap Z = 0$ eşitliğinden $N = M \oplus Z$ bulunur. Teorem (3.1.33) gereğince M injektiftir. □

Önerme 3.1.35 M bir modül olsun. E modülü M 'nin bir esas genişlemesi ve N modülü M 'nin bir injektif genişlemesi ise M 'den N 'ye içerim dönüşümü E 'den N 'ye bir gömülme monomorfizmasına genişler (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: N injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[dl, "g"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $g : E \to N$ homomorfizması vardır. Böylece g homomorfizması $i : M \to N$ içerim dönüşümünün bir genişlemesidir. Keyfi $m \in M \cap Çek(g)$ elemanı alınsın. Böylece $g(m) = 0$ olur. Buradan

$$g(m) = g(i(m)) = gi(m) = i(m) = 0$$

olup $M \cap Çek(g) = 0$ elde edilir. $E,\ M$ 'nin bir esas genişlemesi olduğundan g bir monomorfizma olup $g,\ N$ modülünde M 'nin gömülmesidir. □

3.2 İnjektif Zarflar

Tanım 3.2.1 M modülü A modülünün bir genişlemesi olsun. M, A'nın bir esas genişlemesi ve M'nin bir N öz esas genişlemesi için N, A'nın bir esas genişlemesi olmuyorsa, M'ye A'nın bir *maksimal esas genişlemesi* denir. Başka bir deyişle; M modülü A modülünün bir esas genişlemesi ve M öz esas genişlemeye sahip olmuyorsa M'ye A'nın bir *maksimal esas genişlemesi* denir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Tanım 3.2.2 M modülü A modülünün bir genişlemesi olsun. M injektif ve M'nin A'yı kapsayan N öz alt modülü için N injektif olmuyorsa, M'ye A'nın bir *minimal injektif genişlemesi* denir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 3.2.3 A bir modül olmak üzere N, A'nın bir injektif genişlemesi ise N, A'nın maksimal esas genişlemesi olan E alt modülüne sahiptir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

Önerme 3.2.4 M modülü A'nın bir genişlemesi ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i. M, A'nın esas injektif genişlemesidir.
ii. M, A'nın maksimal esas genişlemesidir.
iii. M, A'nın minimal injektif genişlemesidir.
(Sharpe ve Vàmos, 1972)

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) M, A'nın esas injektif genişlemesi olsun. M injektif olduğundan Teorem (3.1.34) gereğince M öz esas genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla M, A modülünün bir maksimal esas genişlemesidir.

(ii)$\Rightarrow$(i) M, A'nın maksimal esas genişlemesi olsun. Dolayısıyla M öz esas genişlemeye sahip olmayıp Teorem (3.1.34) gereğince injektiftir. O halde M, A'nın esas injektif genişlemesidir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) M, A'nın maksimal esas genişlemesi olsun. Böylece M injektif olup Teorem (3.1.32) gereğince M'de kapsanan A'nın bir F injektif genişlemesi vardır. M, A'nın esas genişlemesi olduğundan $A \subseteq F \subseteq M$ için M, F'nin esas genişlemesidir. Ayrıca F injektif olduğundan Teorem (3.1.34) gereğince F öz esas genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla $E = F$ olmalıdır. M, A'nın bir minimal injektif genişlemesidir.

(iii)$\Rightarrow$(ii) M, A'nın minimal injektif genişlemesi olsun. Önerme (3.2.3) gereğince M, A'nın bir maksimal esas genişlemesi olan F alt modülüne sahiptir. Burada F öz esas genişlemeye sahip olmadığından Teorem (3.1.34) gereğince F injektiftir. M, A'nın minimal injektif genişlemesi F, A'nın injektif genişlemesi olduğundan $F = E$ olup M, A'nın bir maksimal esas genişlemesidir. □

Teorem 3.2.5 M bir modül olmak üzere aşağıdaki koşullar birbirine denk olacak şekilde bir $E(M)$ modülü bulunabilir.

i. $E(M)$, M 'nın esas injektif genişlemesidir.
ii. $E(M)$, M 'nın maksimal esas genişlemesidir.
iii. $E(M)$, M 'nın minimal injektif genişlemesidir.
(Sharpe ve Vàmos, 1972)

Tanım 3.2.6 M ve E birer modül olsun.

i. Teorem (3.2.5)'deki denk koşulları sağlayan $E(M)$ modülüne M modülünün *injektif zarfı (injective envelope)* denir.
ii. $\phi : M \to E$ monomorfizma olmak üzere E injektif ve ϕ esas monomorfizma ($\phi(M) \underset{e}{\leq} E$) ise ϕ'ye M 'nin *injektif zarf dönüşümü* denir.

(Sharpe ve Vàmos, 1972; Kasch, 1976)

Örneğin; $E(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$'dir (Nicholson ve Yousif, 2003).

Önerme 3.2.7 Bir $\phi : M \to E$ monorfizmasının M 'nin injektif zarf dönüşümü olması için gerek ve yeter koşul $E = E(M)$ olmasıdır (Kasch, 1976).

İspat: ($\Rightarrow$) $\phi : M \to E$ monomorfizması M 'nin injektif zarf dönüşümü olsun. Böylece E injektif ve ϕ esas monomorfizma olur. Buradan $\varphi(M) \underset{e}{\leq} E$ ve $\phi(M) \cong M$ olduğundan $M \underset{e}{\leq} E$ olur ve injektif zarf tanımından $E = E(M)$ bulunur.

($\Leftarrow$) $E = E(M)$ olsun. Dolayısıyla E injektif ve $M \underset{e}{\leq} E$'dir. Buradan ϕ monomorfizma olduğundan $\phi(M) \cong M$ olup $\phi(M) \underset{e}{\leq} M$'dir. O halde ϕ monorfizması M 'nin injektif zarf dönüşümüdür.

Teorem 3.2.8 (Bear, Eckmann-Schopf, Shoda) M bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. M bir injektif zarfa sahiptir.

ii. $M \xrightarrow{\alpha} E$ ve $M \xrightarrow{\beta} F$ homomorfizmaları M 'nin injektif zarf dönüşümleri ise $\beta = \tau\alpha$ olacak şekilde $\tau : E \to F$ izomorfizması vardır.

(Nicholson ve Yousif, 2003)

İspat: i. M 'nin bir Q injektif genişlemesi alınsın ve $\delta = \left\{ K \leq Q : M \underset{e}{\leq} K \leq Q \right\}$ kümesi tanımlansın. $M \in \delta$ olduğundan $\delta \neq \varnothing$ 'dır. δ kısmi sıralı kümedir. $\delta^* = \left\{ K_i \leq \delta : i \in I \right\} \subseteq \delta$ ailesi δ 'nin bir zinciri olsun. $\bigcup\limits_{i \in I} K_i$, δ^* 'ın bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemma gereğince δ 'nin bir maksimal A elamanı vardır.

A 'nın bir esas genişlemesinin B olduğu varsayılırsa $i : A \to B$ ve $i : A \to Q$ içerim dönüşümleri için Q injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $h : B \to Q$ homomorfizması vardır.

Önerme (2.3.6) gereğince $Çek(h) \cap A = 0$ 'dır. $A \underset{e}{\leq} B$ olduğundan $Çek(h) \cap A = 0$ iken $Çek(h) = 0$ olup h monomorfizmadır. Buradan 1. İzomorfizma Teoremi gereğince $\operatorname{Im}(h) \cong B$ olur. Böylece $\operatorname{Im}(h)$, A 'nın bir esas genişlemesidir. Bu durumda $\operatorname{Im}(h)$, M 'nin de bir esas genişlemesidir. $M \subseteq A \subseteq \operatorname{Im}(h) \subseteq Q$ ve A maksimal elaman olduğundan $A = \operatorname{Im}(h)$ 'dır. Dolayısıyla $A = B$ 'dir. Bu durumda A öz esas genişlemeye sahip olmadığından Teorem (3.1.34) gereğince A injektiftir. O halde A, M modülünün esas injektif genişlemesi olduğundan $E(M) = A$ olup M injektif zarfa sahiptir.

ii. $\alpha : M \to E$ ve $\beta : M \to F$ monomorfizma ve F injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & E \arrow[dl, dashed, "\tau"] \\ F & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\tau : E \to F$ homomorfizması vardır.

$\alpha,$ M 'nin injektif zarf dönüşümü olduğundan α esas monomorfizma olup $\alpha(M) \underset{e}{\leq} E$ 'dir. β monomorfizma olduğundan ve Önerme (2.3.6) gereğince $\alpha(M) \cap Çek(\tau) = 0$ 'dır. Böylece $Çek(\tau) = 0$ 'dır. Dolayısıyla τ monomorfizmadır. E 'nin injektif olmasından ve Önerme (3.1.4) gereğince τ split monomorfizma olup $\tau(E) \underset{d}{\leq} F$ 'dir. O halde $F = \tau(E) \oplus K$ olacak şekilde $K \leq F$ alt modülü vardır. Buradan $\tau(E) \cap K = 0$ 'dır. Hipotezden $\beta(M) = \tau\alpha(M) \subseteq \tau(E)$ 'dir. $\beta,$ M 'nin injektif zarf dönüşümü olduğundan β esas monomorfizma olup $\beta(M) \underset{e}{\leq} F$ 'dir. Buradan $\tau(E) \underset{e}{\leq} F$ elde edilir. $\tau(E) \cap K = 0$ olduğundan $K = 0$ olup $\tau(E) = F$ 'dir. τ örtendir. O halde τ izomorfizma olur. □

Önerme (3.2.8)'in bir sonucu olarak, bir modülün injektif zarflarının birbirine izomorf olduğu söylenir.

Önerme 3.2.9 B bir $R-$modül olsun. $A \leq B$ ve $E(B),$ B 'nin bir injektif zarfı ise $E(A),$ $E(B)$ 'nin dik toplananıdır (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: $A \subseteq B \subseteq E(B)$ olduğundan $E(B),$ A 'nın injektif genişlemesidir. Önerme (3.2.3) gereğince $E(B),$ A 'nın bir maksimal esas genişlemesi olan alt modüle sahiptir. A 'nın maksimal esas genişlemesi A 'nın injektif zarfı olan $E(A)$ 'dır. Dolayısıyla $E(A) \subseteq E(B)$ olur. $E(B),$ $E(A)$ 'nın bir genişlemesidir. Teorem (3.1.33) gereğince $E(A)$ her genişlemesinin bir dik toplananıdır. O halde $E(A),$ $E(B)$ genişlemesinin bir dik toplananıdır. □

Önerme 3.2.10 Modüller için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. M 'nin injektif olması için gerek ve yeter koşul $E(M) = M$ olmasıdır.
ii. $B,$ A 'nın esas genişlemesi ise $E(A) = E(B)$ 'dir.

(Fuller ve Anderson, 1992)

İspat: i. M injektif iken M 'nin minimal injektif genişlemesi kendisi olduğundan $E(M)=M$ olur.

ii. $B,$ A 'nın bir esas genişlemesi olsun. $E(B),$ B 'nin injektif zarfı olduğundan $E(B),$ B 'nin maksimal esas genişlemesidir. Önerme (2.6.6) gereğince $E(B),$ A 'nın bir esas genişlemesidir. $E(A)\subseteq E(B)$ ve $E(A),$ A 'nın bir maksimal esas genişlemesi olduğundan $E(A)=E(B)$ 'dir.□

Önerme 3.2.11 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ birer $R-$modül olmak üzere $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A_i)$ modülü $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i$ 'nin bir injektif zarfıdır. Başka bir deyişle; $E(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n) = E(A_1) \oplus E(A_2) \oplus \cdots \oplus E(A_n)$ 'dir (Sharpe ve Vàmos, 1972).

İspat: Her $1 \le i \le n$ için $E(A_i),$ A_i 'nin bir injektif zarfı olduğundan ve Önerme (3.2.3) gereğince $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A_i)$ modülü $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i$ 'nin bir esas genişlemesidir. Ayrıca her $1 \le i \le n$ için $E(A_i)$ 'ler injektif olduğundan ve Önerme (3.1.6) gereğince $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A_i)$ injektiftir. Dolayısıyla $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A_i),$ $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i$ 'nin esas injektif genişlemesidir. O halde $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A_i),$ $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i$ 'nin bir injektif zarfıdır. Buradan $E(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A_i) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A_i)$ elde edilir. □

Önerme 3.2.12 M bir modül olmak üzere $E(M)=E(Soc(M))$ 'dir (Hazewinkel vd., 2004).

İspat: Keyfi $X \le M$ alt modülü alınsın. $Soc(M),$ M 'nin tüm minimal alt modüllerinin toplamı olduğundan $X \cap Soc(M) \ne 0$ 'dır. Böylece $Soc(M) \underset{e}{\le} M$ 'dir. $E(M),$ M 'nin maksimal esas genişlemesi olduğundan ve Önerme (2.6.6) gereğince $E(M),$ $Soc(M)$ 'nin maksimal esas genişlemesidir. O halde $E(M)=E(Soc(M))$ 'dir. □

Önerme 3.2.13 M bir $R-$modül ve $\varphi : M \to E$ dönüşümü M 'nin injektif zarf dönüşümü olsun. F injektif ve $\beta : M \to F$ bir monomorfizma ise F 'nin $F = A \oplus B$ ayrışması vardır öyle ki $A \cong E$, $\mathrm{Im}(\beta) \le A$ ve $\beta : M \to A$ dönüşümü M 'nin injektif zarf dönüşümü olur (Fuller ve Anderson, 1992).

Sonuç 3.2.14 $\varphi : M \to E$ $R-$modül homomorfizması olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. $\varphi : M \to E$ homomorfizması M ’nin injektif zarf dönüşümüdür.

ii. E injektif modüldür ve Q injektif olmak üzere her $f : M \to Q$ monomorfizması için

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[dl, "g"] \\ Q & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(g\varphi = f)$ olacak şekilde $g : E \to Q$ monomorfizması vardır.

iii. φ esas monomorfizmadır ve her $f : M \to N$ esas monomorfizması için

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[dl, "g"] \\ E & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(gf = \varphi)$ olacak şekilde $g : N \to E$ monomorfizması vardır.

(Fuller ve Anderson, 1992)

Tanım 3.2.15 $f : M \to N$ esas monomorfizma ve her $g : N \to K$ esas monomorfizma izomorfizma ise f ’ye *maksimal esas monomorfizma* denir (Alizade ve Pancar, 2016).

Teorem 3.2.16 $f : M \to N$ esas monomorfizmasının maksimal esas olması için gerek ve yeter koşul f monomorfizmasının M ’nin injektif zarf dönüşümü olmasıdır (Alizade ve Pancar, 2016).

İspat: $(\Rightarrow)$ N modülünün $g : N \to I$ injektif zarf dönüşümü alınsın. f maksimal esas monomorfizma olduğundan g izomorfizmadır. Dolayısıyla N injektif ve f, M ’nin injektif zarf dönüşümüdür.

$(\Leftarrow)$ Herhangi bir $h : N \to K$ esas monomorfizması alınsın. Böylece $h(N) \cong N$ injektif modüldür. Dolayısıyla bir $L \leq K$ alt modülü için $K = h(N) \oplus L$ elde edilir. $h(N) \underset{e}{\leq} K$ olduğundan $L = 0$ olup h izomorfizmadır. □

Teorem 3.2.17 (Bass-Papp) R'nin sağ Noetherian halka olması için gerek ve yeter koşul injektif modüllerin dik toplamının injektif olmasıdır (Lam, 1998).

İspat: $(\Rightarrow)$ R sağ Neotherian halka ve $i \in I$ elemanları için A_i'ler injektif modül olmak üzere $\bigoplus_{i \in I} A_i = A$ alınsın. $N \leq R$ alınırsa R Noetherian olduğundan Önerme (2.1.9) gereğince $N = x_1R + x_2R + \cdots + x_tR$ olacak şekilde $x_i \in N$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ vardır. $f : N \to A$ homomorfizma olsun. $f(x_i) \in A$ olduğundan $f(x_i)$'lerin sonlu bileşeni dışındaki bileşenleri sıfırdır. Böylece bir $I_r \subseteq I$ $(r = 1, 2, \ldots, t)$ sonlu alt kümesi için $f(x_r) \in \bigoplus_{i \in I_r} A_i$ olur. Eğer $I' = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_t$ ve $\hat{A} = \bigoplus_{i \in I'} A_i$ ise $f(x_r) \in \hat{A}$ olacağından $f(N) \leq \hat{A}$ olur.

I' sonlu indis kümesi olduğundan Önerme (3.1.6) gereğince $\hat{A}$ injektif olur. Bu durumda f homomorfizması $g : R \to \hat{A} \subseteq A$ homomorfizmasına genişletilebilir. Yani A injektif olur.

$(\Leftarrow)$ J_i'ler $(i = 1, 2, \ldots)$ R'nin sağ idealleri olmak üzere $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$ artan zincir dizisi verilsin. $J = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} J_n$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $E(R/J_n)$'ler R/J_n'nin injektif zarfı $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}^+} E(R/J_n)$ olmak üzere $J \leq R$ ve kabulden E injektif olur. $f : J \to E$ homomorfizması $x \in J$ için, $f(x) = (x + J_1, x + J_2, \ldots)$ şeklinde tanımlanırsa $x \in J$ ve $J = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} J_n$ olduğundan $x \in J_k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $n \geq k$'lar için $x + J_n = 0$ olur. Buradan da $f(x) \in E$ elde edilir. E injektif modül olduğundan Bear Kriterinden her $x \in J$ için $f(x) = cx$ olacak şekilde $c \in E$ bulunur. $c = (c_1, c_2, \ldots, c_u, 0, 0, \ldots)$ olacak şekilde $u \in \mathbb{Z}^+$ ve $c_i \in E(R/J_i)$ $(i \in \mathbb{Z}^+)$ vardır. Her $v \geq u$ için $c_v = 0$ olduğundan $x \in J$ için, $(x + J_1, x + J_2, \ldots) = f(x) = (c_1, c_2, \ldots, c_u, 0, 0, \ldots)x$ eşitliğinden $x + J_u = c_u x = 0$ ve buradan da $x \in J_u$ olur. O halde $J_u = J_{u+1} = J_{u+2} = \cdots$ bulunur. Bu ise R'nin Noetherian halka olması demektir. □

4. BİR MODÜLE GÖRE GÖRECELİ İNJEKTİF MODÜLLER

Bu bölümde bir modüle göre göreceli injektif modül olma tanımlanıp bu modüller ile ilgili özelliklere yer verilmiştir. Her modüle göre göreceli injektif olan modülün injektif modül olduğu belirtilmiştir. Göreceli injektif modüllerin yarı basit modüllerle olan ilişkisine değinilmiştir. Daha sonra yarı injektif modül tanımı yapılıp bazı örneklere yer verilmiştir. Her injektif modülün ve her yarı basit modülün, yarı injektif modül olduğu söylenmiştir. Ayrıca tersinin doğru olmadığına ilişkin örneklere değinilmiştir. Yarı sürekli modüller tanımlanıp, bu modüllerin yarı injektif modüller ve CS modüllerle ilişkisi belirtilmiştir.

Tanım 4.1 A ve N birer $R-$modül olsun. Her $\varphi : X \to N$ homomorfizmaları ve her $g : X \to A$ monomorfizmaları için $\psi g = \varphi$ olacak şekilde $\psi : A \to N$ homomorfizması varsa N modülüne *A'ya göre göreceli injektif (relative injective) modül* ya da *$A-$injektif modül* denir. Yani, verilen koşullar altında

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ N & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(\psi g = \varphi)$ olacak şekilde $\psi : A \to N$ homomorfizması bulunabilirse N modülüne *$A-$injektif modül* denir.

Başka bir deyişle, her $X \leq A$ için her $\varphi : X \to N$ homomorfizması $\psi : A \to N$ homomorfizmasına genişletilebilirse N modülüne *$A-$injektif modül* denir.

Her N modülü için M modülü $N-$injektif ise M modülü injektif olur (Mohamed ve Müller, 1990).

Önerme 4.2 M ile N birer modül olsun. M modülünün $N-$injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f : K \to M$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(gi = f)$ olacak şekilde $g : N \longrightarrow M$ homomorfizmasının var olmasıdır.

İspat: L herhangi bir modül olmak üzere $g : L \to N$ monorfizması ile $f : L \to M$ homomorfizması alınsın.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde h homomorfizması bulunursa M modülü $N-$injektif olacaktır. $0 \longrightarrow L \overset{g}{\longrightarrow} N$ ve g monomorfizma olduğundan,

$$\begin{aligned} k: g(L) &\to L \\ g(x) &\mapsto x \end{aligned}$$ homomorfizması izomorfizma olur. $g(L) \le N$ ve kabulden

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & g(L) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & N \arrow[ddl, dashed, "t"] \\ & L \arrow[d, "f"'] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

$\exists t \in Hom_R(M,N)$ öyle ki $ti = fk$ ve $f = t i k_g^{-1}$ olur. Eğer $h = t$ olarak alınırsa, $f = hg$ eşitliğini sağlayan h homomorfizması bulunmuş olur. Bu da M modülünün $N-$injektif olması demektir. □

Örnek 4.3 $\mathbb{Z}-$modül olarak $\mathbb{Z}_4$ modülü $\mathbb{Z}-$injektif değildir. Çünkü;

Eğer $\mathbb{Z}_4$ modülü $\mathbb{Z}-$injektif olsaydı Bear Kriterinden $2\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ ideali için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & \mathbb{Z}_4 & \end{tikzcd}$$

$f(2n) = \bar{n}$ $(n \in \mathbb{Z})$ şeklinde tanımlanan $f: 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizması $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizmasına genişlemesi gerekirdi. Yani; $g|_{2\mathbb{Z}} = f$ olmalıdır.

Fakat $f(2) = \bar{1} = g(2) = g(1 \cdot 2) = g(1)2 = g(1) \oplus g(1) \notin \{\bar{1}, \bar{3}\}$ olduğundan çelişki bulunur. O halde $\mathbb{Z}_4$ modülü $\mathbb{Z}-$injektif değildir (Nicholsan ve Yousif, 2003).

Örnek 4.4 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü $\mathbb{Z}-$injektif değildir. Çünkü;

$$\begin{aligned} f: 2\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 2x &\mapsto x \end{aligned}$$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(gi = f)$ olacak şekilde $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ homomorfizması var olsaydı $x \in \mathbb{Z}$ için,

$gi(2x) = g(2x) = g(2)x = f(2x) = x$ eşitliği sağlanırdı.

Yani $g(2) = g(1)+g(1)=1$ olurdu. Bu ise $g(1)=\frac{1}{2}$ olması ile mümkün olur. Fakat $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ olduğundan $g(1)=\frac{1}{2}$ olamaz. O halde $\mathbb{Z}$ modülü $\mathbb{Z}-$injektif değildir (Lam, 1998).

Önteorem 4.5 N modülü $A-$injektif ise $N\xrightarrow{f}A$ monomorfizması split monomorfizma olur. Ayrıca A ayrışamaz modül ise f bir izomorfizmadır (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: Öncelikle f 'nin split monomorfizma olduğu yani $\mathrm{Im}(f)\underset{d}{\leq}A$ olduğu gösterilecektir. N modülü $N-$injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_N"'] & A \arrow[dl, "h"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ($hf=1_N$) olacak şekilde $h:A\to N$ homomorfizması vardır.

Önerme (2.3.6) gereğince $\mathrm{Im}(f)+Çek(h)=h^{-1}(\mathrm{Im}(1_N))=h^{-1}(N)=A$ ve $\mathrm{Im}(f)\cap Çek(h)$ $=f(Çek(1_N))=f(0)=0$ olur. Buradan $A=\mathrm{Im}(f)\oplus Çek(h)$ olup $\mathrm{Im}(f)\underset{d}{\leq}A$'dir. O halde f split monomorfizmadır.

Ayrıca f split monomorfizma ve A ayrışamaz modül olsun. Bu durumda $A=\mathrm{Im}(f)\oplus Çek(h)$ olduğundan $Çek(h)=0$ olmak zorundadır. Böylece $A=\mathrm{Im}(f)$ olup f örtendir. O halde f bir izomorfizmadır. □

Önerme 4.6 N modülü $A-$injektif olsun. Eğer $B\leq A$ ise N modülü hem $B-$injektif hem de $\frac{A}{B}-$injektif olur (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: N modülü $A-$injektif olsun ve $B\leq A$ alınsın. N modülünün $B-$injektif olduğu açıktır.

$\frac{X}{B}\leq\frac{A}{B}$ ve $\varphi:\frac{X}{B}\to N$ homomorfizması alınsın. $\pi:A\to\frac{A}{B}$ doğal epimorfizma ve $\pi'=\pi_{|_X}$ olsun.

N modülü $A-$injektif olduğundan,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] & A \arrow[ddl, "\theta"] \\
& \dfrac{X}{B} \arrow[d, "\varphi"'] & \\
& N &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\theta : A \to N$ homomorfizması vardır. Yani $\theta i = \varphi\pi'$ olur. Bu durumda, $B \leq X \leq A$ ve $\theta i(B) = \theta(B) = \varphi(\pi'(B)) = \varphi(0) = 0$

olduğundan $Çek(\pi) \leq Çek(\theta)$ olur.

Böylece,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, "\theta"'] \\
& \dfrac{X}{B} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \dfrac{A}{B} \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

$\psi\pi = \theta$ olacak şekilde $\psi : \dfrac{A}{B} \to N$ homomorfizması alınırsa $x \in X$ için,

$\psi(x+B) = \psi\pi(x) = \theta(x) = \varphi\pi'(x) = \varphi(x+B)$

eşitliği sağlanır. Böylece N modülünün $\dfrac{A}{B}-$injektif olduğu ispatlanmış olur. □

Önerme 4.7 N modülünün $A-$injektif olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için N modülünün $aR-$injektif olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: N modülü $A-$injektif ise $a \in A$ için N modülünün $aR-$injektif olacağı Önerme (4.6) gereğince açıktır.

$a \in A$ için N modülünün $aR-$injektif olduğu kabul edilsin ve $X \leq A$ ve $\varphi : X \to N$ homomorfizma olsun.

$$\delta = \left\{ (K, f) : X \leq K \leq A, f : K \to N, f_{|X} = \varphi \right\}$$

olmak üzere $\varphi \in \delta$ olduğundan $\delta \neq \varnothing$ olur.

δ kümesi üzerinde;

$$(U,g)\preccurlyeq(V,h)\overset{Tn}{\Longleftrightarrow} U\leq V \text{ ve } h_{|_U}=g$$

şeklinde tanımlanan bağıntı kısmi sıralama bağıntısıdır. δ 'deki her zincirin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemmadan δ 'nin $(B,\psi)\in\delta$ olacak şekilde maksimal ögesi vardır. Böylece $X\leq B\leq A$ ve $\psi_{|_X}=\varphi$ olur. Buradan $B=A$ olacağı açıktır. Çünkü, $B\neq A$ ise $\exists a\in A\setminus B$ vardır ve $K=\{r\in R: ar\in B\}\neq\varnothing$ olur. Kabulden N modülü aR-injektif olduğundan $aK\neq 0$ olduğu açıktır.

Eğer $\begin{array}{l}\mu: aK\to N\\ \quad ak\mapsto\psi(ak)\end{array}$ şeklinde tanımlanırsa kabulden,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & aK \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mu"'] & aR \arrow[dl, dashed, "\theta"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

$\exists\theta: aR\to N$ öyle ki $\theta i=\mu$ eşitliği sağlanır. Buda $\theta_{|_{aK}}=\psi$ olması demektir.

Eğer $\begin{array}{l}\gamma: B+aR\to N\\ \quad b+aR\mapsto\psi(b)+\mu(ar)\end{array}$ şeklinde tanımlanırsa,

$b+ar=0$ olması ancak $r\in K$ olması ile mümkün olduğundan γ iyi tanımlı olur. Böylece,

$\psi(b)+\theta(ar)=\psi(b)+\mu(ar)$

$=\psi(b)+\psi(ar)$

$=\psi(b+ar)=0$

olur ki bu $(B+aR,\gamma)\in\delta$ olması demektir.

Bu ise (B,ψ) 'nin δ 'nin maksimal ögesi olmasıyla çelişir. O halde $B=A$ olmalıdır. Yani;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ($\psi i=\varphi$) olacak şekilde $\psi: A\to N$ homomorfizması vardır. Bu da N 'nin $A-$injektif olması demektir. □

Önerme 4.8 N modülünün $\underset{i\in I}{\oplus} A_i -$injektif olması için gerek ve yeter koşul $\forall i \in I$ için N modülünün $A_i -$ injektif olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: $(\Rightarrow)$ N modülü $\underset{i\in I}{\oplus} A_i -$injektif iken $A_i \leq \underset{i\in I}{\oplus} A_i$ olduğundan Önerme (4.6) gereğince her $i \in I$ için N modülü $A_i -$ injektif olur.

$(\Leftarrow)$ Her $i \in I$ için N modülünün $A_i -$injektif olduğu kabul edilsin. $U = \underset{i\in I}{\oplus} A_i$, $X \leq U$ ve $\varphi : X \to N$ homomorfizma olsun. Zorn Lemmadan, $X < X'$ ve $\theta : X' \to N$ öyle ki $\theta|_X = \sigma = \varphi$ olacak şekilde $X' \leq U$ alt modülü yoktur. Burada $X \underset{e}{\leq} U$ olur. Eğer $X = U$ olduğu gösterilirse ispat bitecektir. Bunun için $X \neq U$ olduğu kabul edilsin. O zaman, $\exists j \in I$ bulunabilir ki $u \in A_j$ fakat $u \notin X$ olur. N modülü $A_j -$ injektif olduğundan Önerme (4.7) gereğince N modülü $uR -$ injektif olur. $\psi : X + uR \to N$ öyle ki $\psi|_X = \varphi$ şeklinde alırsak bu φ 'nin maksimal oluşu ile çelişir. O halde $X = U$ olmalıdır. Bu ise N 'nin $U = \underset{i\in I}{\oplus} A_i -$injektif olması demektir. □

Önerme 4.9 $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ modülünün $A -$injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \Lambda$ için M_α 'nın $A -$injektif olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: $M = \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ şeklinde ifade edilsin.

$(\Rightarrow)$ M $A -$injektif olsun. $g : X \to A$ monomorfizması ve $\varphi : X \to M$ homomorfizması için,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, "h"] \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\ M_\alpha \arrow[d, shift left, "i_\alpha"] & \\ M \arrow[u, shift left, "\pi_\alpha"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli $(\psi g = i_\alpha \varphi)$ olacak şekilde $\psi : A \to M$ homomorfizması vardır. Eğer $h = \pi_\alpha \psi$ şeklinde alınırsa $hg = \varphi$ olur. O halde her $\alpha \in \Lambda$ için M_α 'nın $A -$injektif olduğu görülür.

($\Leftarrow$) Her $\alpha \in \Lambda$ için M_α $A-$injektif olsun. $g: X \to A$ monomorfizması ve $\varphi: X \to M$ homomorfizması için,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[dl, "h"] \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\
M \arrow[d, shift left, "\pi_\alpha"] & \\
M_\alpha \arrow[u, shift left, "i_\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ($\psi g = \pi_\alpha \varphi$) olacak şekilde $\psi : A \to M_\alpha$ homomorfizması vardır. Eğer $h = i_\alpha \psi$ şeklinde alınırsa $hg = \varphi$ olur. O halde $M = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ modülünün $A-$injektif olduğu görülür. □

Önerme 4.10 A bir modül olsun. $\frac{N}{K}$ modülü $A-$injektif olacak şekilde $K \subseteq N \leq A$ alt modülleri var ise $\frac{N}{K}$, $\frac{A}{K}$'nın bir dik toplananıdır (Tercan ve Yücel, 2015).

İspat: Önerme (4.6) gereğince $\frac{N}{K}$ modülü $\frac{A}{K}-$injektiftir. $1_{\frac{N}{K}} : \frac{N}{K} \to \frac{N}{K}$ birim dönüşümü tanımlanırsa $1_{\frac{N}{K}}$ dönüşümü $\theta : \frac{A}{K} \to \frac{N}{K}$ homomorfizmasına genişler. Yani,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \frac{N}{K} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_{\frac{N}{K}}"'] & \frac{A}{K} \arrow[dl, "\theta"] \\
 & \frac{N}{K} &
\end{tikzcd}$$

olur. $\theta i = 1_{\frac{N}{K}}$ olduğundan $\frac{A}{K} = \frac{N}{K} \oplus Çek(\theta)$ olur. □

Önerme 4.11 A bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i. A yarıbasittir.
ii. Her modül $A-$injektiftir.
iii. A'nın her alt modülü $A-$injektiftir.
iv. Bir $A-$injektif modülünün her alt modülü $A-$injektiftir.
(Tercan ve Yücel, 2015)

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) X herhangi bir modül olsun. $N \le A$ ve $\varphi \in Hom_R(N, X)$ alınsın. A yarıbasit olduğundan $A = N \oplus K$ olacak şekilde $K \le A$ vardır. $n \in N$ ve $k \in K$ için $\theta : A \to X$ dönüşümü $\theta(n+k) = \varphi(n)$ ile tanımlansın. $\theta \in Hom_R(A, X)$'dir. Böylece φ homomorfizması θ'ya genişler. O halde X modülü $A-$injektiftir.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Bir $A-$injektif modül olarak $E(A)$ alınsın. $E(A)$'nın her alt modülü $A-$injektif olduğundan A'nın her alt modülü $A-$injektiftir. □

Tanım 4.12 Bir M modülü $M-$injektif ise M'ye *yarı injektif (quasi injective) modül* denir (Mohamed ve Müller, 1990).

Örneğin;

i. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathbb{Z}-$modül olarak $\mathbb{Z}_n$ yarı injektif modüldür.
ii. Her injektif modül ve her yarıbasit modül yarı injektif modüldür. Fakat tersi her zaman doğru değildir. $\mathbb{Z}-$modül olarak $\mathbb{Z}_4$ Örnek (4.3)'de gösterildiği üzere bu duruma örnek olarak verilebilir.
(Nicholsan ve Yousif, 2003)

Örnek 4.13 $K \neq 0$ halka olmak üzere $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in K \right\}$ üst üçgen matris halkası yarı injektif değildir. Çünkü;

R'nin ideali $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : k \in K \right\} \le R$ alınırsa $\begin{aligned} f : S &\to R \\ \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \end{aligned}$ homomorfizması için,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & R \arrow[dl, dashed, "g"] \\ R & \end{tikzcd}$$

Bear Kriterinden öyle bir $g : R \to R$ homomorfizması bulunabilirki $g_{|S} = f$ ve her $A \in S$ için $f(A) = g(A) = BA$ olacak şekilde $B \in R$ vardır.

$A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ için,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur ve $B = g\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ alınırsa,

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & yk \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

olduğundan çelişki bulunur. O halde R yarı injektif değildir. Dolayısıyla injektif de değildir (Lam, 1998).

Önerme 4.14 M bir modül olmak üzere M 'nin $A-$injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\psi \in Hom(E(A), E(M))$ için $\psi(A) \leq M$ olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: $(\Leftarrow)$ $X \leq A$ ve $\varphi : X \to M$ bir homomorfizma olsun. $E(M)$ injektif olduğundan φ, $\psi : A \to E(M)$ homomorfizmasına genişletilebilir. Varsayım gereği $\psi(A) \leq M$ olduğundan $\psi : A \to M$ homomorfizması φ 'ye genişler. O halde M modülü $A-$injektiftir.

$(\Rightarrow)$ $X = \{a \in A : \psi(a) \in M\}$ olsun. $X \leq A$'dır. M modülü $A-$injektif olduğundan $\psi|_X$ bir $v : A \to M$ homomorfizmasına genişletilebilir. $M \cap (v-\psi)(A) = 0$ olduğu gösterilirse ispat bitecekdir. $m = (v-\psi)(a)$ olacak şekilde $m \in M$ ve $a \in A$ alınsın. v ile ψ homomorfizma olduğundan $m = v(a) - \psi(a)$ 'dır. Buradan $\psi(a) = v(a) - m \in M$ olup $a \in X$ 'dir. Böylece $v(a) = \psi(a)$ olup $m = v(a) - \psi(a) = \psi(a) - \psi(a) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $M \cap (v-\psi)(A) = 0$ olur. $M \underset{e}{\leq} E(M)$ olduğundan $(v-\psi)(A) = 0$ elde edilir. O halde $\psi(A) = v(A) \leq M$ 'dir. □

Sonuç 4.15 M bir modül olmak üzere M 'nin yarı injektif olması için gerek ve yeter koşul her $f \in End(E(M))$ için $f(M) \leq M$ olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

Sonuç 4.16 Her modülün bir minimal yarı injektif genişlemesi vardır ve izomorfizma farkıyla tektir (Mohamed ve Müller, 1990).

Sonuç 4.17 A ve B birer modül olsun. A modülü $B-$injektif ve B modülü $A-$injektif olmak üzere $E(A)\cong E(B)$ ise $A\cong B$'dir. Gerçekten de $E(A)\to E(B)$ izomorfizması $A\to B$ izomorfizmasına kısıtlanır. Ayrıca A ve B yarı injektif modüllerdir (Mohamed ve Müller, 1990).

İspat: $g:E(A)\to E(B)$ izomorfizması alınsın. B modülü $A-$injektif olduğundan Önerme (4.14) gereğince $g(A)\le B$'dir. Benzer şekilde $g^{-1}:E(B)\to E(A)$ izomorfizma ve A modülü $B-$injektif olduğundan $g^{-1}(B)\le A$'dır. $B=gg^{-1}(B)=g(g^{-1}(B))\le g(A)\le B$ olur. $g_{|_A}:A\to B$ bir izomorfizma olur. O halde $A\cong B$'dir.

A modülü $B-$injektif ve $B\cong A$ olduğundan A modülü $A-$injektiftir. Dolayısıyla A yarı injektif modüldür. Benzer şekilde B'nin yarı injektif modül olduğu görülür. □

Önerme 4.18 $M_1\oplus M_2$'nin yarı injektif modül olması için gerek ve yeter koşul $i,j=1,2$ için M_i'nin M_j-injektif modül olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

Sonuç 4.19 Bir modüller ailesi $i=1,2,...,n$ için $\{M_i\}$ olmak üzere $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}M_i$'nin yarı injektif modül olması için gerek ve yeter koşul $j=1,2,...,n$ M_i'nin M_j-injektif olmasıdır (Mohamed ve Müller, 1990).

Önerme 4.20 M yarı injektif modül ise M'nin her dik toplananı yarı injektif modüldür (Nicholsan ve Yousif, 2003).

İspat: $X\le N$ olmak üzere $M=N\oplus K$ ve $\beta:X\to N$ homomorfizması alınsın. M yarı injektif modül olduğundan β homomorfizması $\alpha:M\to M$ homomorfizmasına genişler. Eğer $\pi_N:M\to N$ projeksiyon dönüşümü tanımlanırsa $\lambda=\pi\alpha_{|_N}\in End(N)$, β'ya genişler. O halde M'nin dik toplananı olan N yarı injektif modüldür. □

Önerme 4.21 M yarı injektif modül olsun. $E(M)=\underset{i\in I}{\oplus}K_i$ ise $M=\underset{i\in I}{\oplus}(M\cap K_i)$'dir (Nicholsan ve Yousif, 2003).

İspat: Her $k_i \in K_i$ olmak üzere $m=\sum_{i=1}^{n} k_i \in M$ alınsın. K_i üzerinde $\pi_i : E(M) \to K_i \subseteq E(M)$ projeksiyon dönüşümü tanımlanırsa $k_i \in \pi_i(m) \in \pi_i(M) \subseteq M$ olur. Böylece $k_i \in M \cap K_i$ ve $M \subseteq \oplus_{i\in I}(M \cap K_i)$'dir. $\oplus_{i\in I}(M \cap K_i) \subseteq M$ olduğu açıktır. O halde $M = \oplus_{i\in I}(M \cap K_i)$'dir.

Tanım 4.22 M'nin injektif zarfı $E(M)$ ve olmak üzere, $f^2 = f$ eşitliğini sağlayan $f \in End\left(E(M)\right)$ için $f(M) \le M$ oluyorsa M'ye *yarı süreklidir* denir (Dung vd., 1994).

Önerme 4.23 Her yarı injektif modül yarı süreklidir.

İspat: M yarı injektif olsun. Sonuç (4.15) gereğince her $f \in End\left(E(M)\right)$ için $f(M) \le M$ olur. Böylece $f^2 = f$ eşitliğini sağlayan $f \in End\left(E(M)\right)$ için $f(M) \le M$ olduğundan M yarı süreklidir.

Önerme (4.23)'ün tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü yarı süreklidir fakat Örnek (4.4)'de görüldüğü üzere yarı injektif değildir (Tercan ve Yücel, 2015).

Önerme 4.24 M modülünün injektif zarfı $E(M)$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

i. M yarı süreklidir.

ii. $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$ iken $M = (E_1 \cap M) \oplus (E_2 \cap M) \oplus \cdots \oplus (E_n \cap M)$ olur.

iii. $E(M) = E_1 \oplus E_2$ iken $M = (E_1 \cap M) \oplus (E_2 \cap M)$ olur.

iv. a) M CS modüldür.

b) $K, L \underset{d}{\le} M$ ve $K \cap L = 0$ ise $K \oplus L \underset{d}{\le} M$ olur.

v. $L(M) = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n \le M$ ise $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{n+1}$ öyleki $L_i \underset{e}{\le} M_i$ olacak şeklinde $M_i \le M$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ alt modülleri vardır.

vi. $L_1, L_2 \le M$ ve $L_1 \cap L_2 = 0$ ise $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ öyleki $L_i \underset{e}{\le} M_i$ olacak şekilde $M_i \le M$ $(i = 1, 2, 3)$ alt modülleri vardır.

vii. $L_1, L_2 \le M$ ve $L_1 \cap L_2 = 0$ ise $M = M_1 \oplus M_2$ öyleki $L_i \le M_i$ olacak şekilde $M_1, M_2 \le M$ alt modülleri vardır.

(Mohamed ve Müller, 1990)

Önerme 4.25 Her yarı sürekli modül CS modüldür (Dung vd., 1994).

İspat: M yarı sürekli modülü ve $N \leq M$ alt modülü alınsın. M 'de N 'nin tümleyeni L olsun. Önerme (2.9.6) gereğince $N \oplus L \underset{e}{\leq} M$ olup $E(M) = E(N) \oplus E(L)$ 'dir. Buradan Önerme (4.24) gereğince $M = (M \cap E(N)) \oplus (M \cap E(L))$ olur. Dolayısıyla $N \underset{e}{\leq} M \cap E(N) \underset{d}{\leq} M$ olduğundan Önerme (2.10.2) gereğince M CS modüldür. □

Önerme (4.25)'in tersi her zaman doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}-$modül olarak $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ modülü CS modüldür fakat yarı sürekli değildir (Tercan ve Yücel, 2015).

Sonuç olarak; M injektif $\Rightarrow M$ yarı injektif $\Rightarrow M$ yarı sürekli $\Rightarrow M$ CS gerektirmeleri doğrudur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde injektif modüllerle ilgili çalışma yapmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olabilecek bilgiler yer almaktadır. Ayrıca injektif modüllerin bir genellemesi olarak bilinen CS modüller ve temsil teori (representational theory) alanında çalışma yapacak araştırmacılar için de tezdeki bilgiler faydalı olacaktır.

KAYNAKLAR

Alizade, R. ve Pancar, A. (2016). *Homoloji cebire giriş*. Samsun: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi.

Anderson, F. W. and Fuller, K. R. (1992). *Ring and categories of modules*. Graduate Texts in Mathematics 13, New York: Springer-Verlag.

Baer, R. (1940). Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. *Bulletin of the American Mathematical Society, 46*(10), 800–807. doi:10.1090/s0002-9904-1940-07306-9.

Beachy, J. A. (1998). *Introductory lectures on rings and modules.* Cambridge University Press.

Birkenmeier, G. F. (1978). Modules which are subisomorphic to injective modules. *J. Pure Applied Algebra 13, 169-177.*

Çallıalp, F. ve Tekir, Ü. (2009). *Değişmeli halkalar ve modüller*. İstanbul: Birsen Yayınevi.

Dauns, J. (1994). *Modules and rings.* Cambridge University Press.

Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F. and Wisbauer, R. (1994). *Extending modules.* Florida: CRC Press.

Eckman, B. and Schopf, A. (1953). Über injective Module. *Arch. Math., 4,* 75-78.

Enochs, E. E. and Jenda, O. M. G. (2000). *Relative homological algebra.* Berlin: Walter de Gruyter.

Faith, C. (1967). *Lectures on injective modules and quotient rings*. Berlin: Springer-Verlag.

Goodearl, K. R. (1976). *Ring theory: Nonsingular rings and modules.* New York: Marcel Dekker Inc.

Hazewinkel, M., Gubareni, N. and Krichenko, V. V. (2004). *Algebras, rings and modules.* New York: Kluwer Academic Publishers.

Hungerford, T. W. (1980). *Algebra.* New York: Springer.

Johnson, R. E. and Wong, E. T. (1959). Self injective rings. *Can. Math. Bull., 2, 167-173.*

Johnson, R. E. and Wong, E. T. (1961). Quasi injective modules and irreducible rings. *London J. Math., Soc. 36, 260-268.*

Karakaş, H. İ. (2010). *Soyut cebire giriş,* Ankara: TUBA Ders Kitapları.

Kasch, F. (1982). *Modules and rings.* London: Academic Press.

Lam, T. Y. (1998). *Lectures on modules and rings.* New York: Springer.

Matlis, E. (1958). Injective modules over Noetherian rings. *Pasific J. Math. 8, 511-528.*

Mohamed, S. H. and Müller, B. J. (1990). *Continuous and discrete modules*. In London Math. Soc, Vol. 147, Cambridge University Press.

Nicholson, W. K. and Yousif, M. F. (2003). *Quasi Frobenius rings.* Cambridge: Cambridge University Press.

Pancar, A. ve Türkmen, B. N. (2014). *İnjektif modüllere giriş*. Ankara: Pegem Akademi.

Rotman, J. J. (2008). *An introduction to homological algebra.* Springer.

Sandomierski, F. L. (1964). Relative injectivity and projectivity. *Ph. D. Thesis, State University.*

Sharpe, D. W. and Vàmos, P. (1972). *Injective modules.* Cambridge: Cambridge University Press.

Singh, S. (1967). On pseudo-injective modules and self pseudo injective rings. *J.Math. Sci. İndia, 23-31.*

Tercan, A. and Yücel, C. C. (2015). *Module theroy, extending modules and generalizations.* Springer.

Utumi,Y. (1965). On continuous rings and self injective rings. *Trans. Amer. Soc, 118,* 158-173.

von Neumann, J. (1936). Continuous geometry . *Proc. Nat. Acad. Sci., 22,* 92-100.

von Neumann, J. (1936). Examples of countinous geometries. *Proc. Nat. Acad. Sci., 22,* 101-108.

Wisbauer, R. (1991). *Foundations of modüle and ring theroy.* Gordon and Breach Science Publishers.

Xu, J. (1996). *Flat covers of modules.* Berlin: Springer.