REZONANS KONUMUNDAKİ
YARI LİNEER SINIR DEĞER
PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Nihan DEMİRKOL

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nurettin ÇALIŞKAN
2015

T.C.

NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REZONANS KONUMUNDAKI YARI LINEER SINIR DEĞER PROBLEMLERININ ÇÖZÜMLERININ VARLIĞI

Nihan DEMİRKOL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. NURETTİN ÇALIŞKAN

TEKİRDAĞ-2015

Yrd. Doç. Dr. Nurettin ÇALIŞKAN'ın danışmanlığında, Nihan DEMİRKOL tarafından hazırlanan "Rezonans Konumundaki Yarı Lineer Problemlerinin Çözümlerinin Varlığı" isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Juri Başkanı : Doç. Dr. Mustafa POLAT *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin ÇALIŞKAN *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal BAYRAM *İmza* :

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REZONANS KONUMUNDAKİ YARI LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Nihan DEMİRKOL

Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nurettin ÇALIŞKAN

Bir özdeğer etrafında alt-doğrusal non-lineerlikler için, yarı doğrusal sınır değer problemi ele alındı. Non-lineerliğin monoton veya yeterince küçük Lipschitz olması koşullarında varlık teoremleri kanıtlandı.

Anahtar kelimeler: Sınır Değer problemi, Landesman Lazer koşulu, Lipschitz koşulu , Non Rezonans durumu, Schauder Sabit Nokta Teoremi.

2015, 34 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

THE EXISTENCE OF THE SOLUTIONS OF THE SEMI-LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON RESONANS CASE

Nihan DEMİRKOL

Namık Kemal University
Graduate School of Naturel and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Nurettin ÇALIŞKAN

A semi-linear boundary value problem for sublinear non-linearities near eigenvalue is analised. Existence teorem are given fort he cases when the non-linearities monotone or when the non-linearity is sufficiently small Lipschitz.

Key Words: Boundary Value Problem, Landesman Lazer Condition, Lipschitz Condition, Non Rezonans Case, Schauder Fixed Point Theorem.

2015, 34 Pages

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1.GİRİŞ

17. yüzyılın başlarında, diferansiyel ve integral kavramlarının Leibnitz ve Newton tarafından ortaya atılmasıyla birlikte "Diferansiyel Denklemler" matematiğin belki de günümüze kadar en çok araştırılan bilim dalı olmuştur.

İlk defa 1676'da Leibnitz tarafından kullanılan "Diferansiyel Denklem" bağımlı değişkeni ve bir ya da daha fazla sayıda bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemi ifade eder. Doğadaki olayları açıklamak için en etkin sistematik yol "diferansiyel denklem" dilini kullanmaktır. Astronomi, mühendislik, ekonomi, fizik, kimya, biyoloji ve diğer pek çok uygulamalı bilimler diferansiyel denklemlerin önemli uygulama alanlarıdır.

Doğal olaylarda da, değişkenler ve bunların birbirine göre değişim hızları olayı yöneten bazı temel yasalarla bağlıdırlar. İşte bu yasalar matematiksel sembollerle yazıldığında sonuç çoğu zaman bir diferansiyel denklemdir.

Diferansiyel denklemler, bir noktadaki fonksiyon değerlerinin verildiği ve başlangıç değerler olarak adlandırılan Başlangıç Değer Problemleri ve ayrı noktalarda değerlerin verildiği Sınır Değer Problemleri olarak iki farklı formda incelenir. Başlangıç Değer Problemleri üzerindeki çalışmalar 19. Yüzyılın içinde sonlandırılmış ve sonuçları lisans ders kitaplarında yer almıştır.

20. yüzyıl boyunca yarı lineer sınır değer problemleri incelenmiş

$$\begin{cases} Lu + f(u) = h(x) & ,x \in \Omega \\ Bu = 0 & ,x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

problemi üzerinde çalışılmış, f ile h fonksiyonları üzerine konulan uygun koşullarla, problemin çözümü olduğu gösterilmiştir. Genel olarak bakıldığında, f üzerine konulmuş iki tür non-lineerite vardır; ilki $f'(u)$ değerinin, lineer sınır değer probleminin özdeğerlerinden uzak olma hali ve diğeri $f'(u)$ değerinin lineer probleminin $Lu + \lambda u = 0;\ Bu = 0$ özdeğerleri ile çakıştığı rezonans durumu. İlk durum için varyasyonel yöntemler, derece teorisi, alt- üst çözümler ya da sabit nokta teoremleri kullanılarak çözümün varlığı gösterilebilir. Ama ikinci durum için dikkat edilmelidir. Çünkü çözüm olmayabilir.

Özdeğerlerden uzak olma halinde en bilindik sonuç 1930'da **A. Hammerstein** tarafından elde edilmiştir. Hammerstein, $L = \Delta$ alarak Laplasyenin Dirichlet Sınır koşulları ile ilk öz değeri λ_1 ve μ keyfi sabit olmak üzere eğer $|f'(u)| \leq \mu < \lambda_1$ koşulu sağlanıyor ise

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = h(x), x \in \Omega \\ \qquad u = 0 \quad , x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

sınır değer probleminin tek çözüme sahip olduğunu, eğer $f'(-\infty) < \lambda_1, f'(+\infty) < \lambda_1$ koşulları sağlanıyorsa, tek olmayan bir çözüm olduğunu gösterdi (Hammerstein, A. 1929).

Non –Rezonans durum için temel sonuçlardan biri **Lazer ve Leach** (1969) tarafından elde edilmiştir. Lazer ve Leach

$$\begin{cases} y'' + h(x, y, y')y = f(x, y, y') \\ y(0) = a, y(\pi) = b \end{cases} \tag{1.3}$$

sınır değer problemi üzerine çalışmışlar, eğer N tam sayı değeri için

$$N^2 < \gamma_N \leq h(x, s, r) \leq \gamma_{N+1} < (N+1)^2$$

Eşitsizliklerini sağlayan γ_N ve γ_{N+1} sayıları bulunabilirse ve eğer $h(x, s, r)$ ve $f(x, s, r)$ fonksiyonları $[0, \pi] \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ üzerinde sürekli ve f sınırlı ise problemin en az bir çözümünün var olduğunu göstermişlerdir (Lazer, Leach 1969).

Non lineerliğin özdeğerlerle çakıştığı rezonans durumunda ise f ve h fonksiyonlarının üzerine konulan farklı koşullarla problemin çözümü üzerine sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tip denklemler üzerine ilk sonuç Ambrosetti A. ve Prodi G. (1972) tarafından elde edildi. $0 < f'(-\infty) < \lambda_1$, $f''(s) > 0$ ve $\lambda_1 < f'(+\infty) < \lambda_2$ koşulları altında, ϕ_1 Dirichlet sınır koşulları ile Laplasyen'in ilk özvektörü olmak üzere,

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = t\phi_1 + h_1(x) \ , \ x \in \Omega \\ u = 0, \ \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

sınır değer probleminin $t > t_1(h_1)$ için iki çözümünün var olduğu , $t < t_1$ için tek çözümünün var olduğunu gösterdiler (Ambrosetti A. and Prodi G. 1972).

İkinci önemli sonuç Kazdan J. ve Warner F. (1975) tarafından oluşturuldu. Onlar daha genel bir f için alt ve üst çözümlerini kullanarak, $\int h_1 \phi dx = 0$ iken,

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = t\phi_1 + h_1(x) \ , x \in \Omega \\ u = 0 \ , \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

probleminin $t > t_0$ ise en az bir çözümün var olduğunu, $t < t_0$ için ise çözümün olmadığını kanıtladılar.

1977 de Cesari ve Kannan ikilisi, g sınırlı ise

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(u) = h(x) \ , \ x \in \Omega \\ u = 0 \ , \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.6}$$

probleminin çözümünün varlığına dair, herhangi bir sınırlı u_1 fonksiyonu için $\int_\Omega g\left(R\phi + u_1\right) R\phi \geq 0$ koşulunu sağlayacak yeterince büyük $R > 0$ var olması gerektiğini gösterdiler (Cesari ve Kannan 1977).

Aguinaldo L. ve Schmitt $u^{-}(t) = \max\left\{-u(t), 0\right\}$ olmak üzere, $p : \left[0, \pi\right] \to \mathbb{R}$, sürekli fonksiyonu $\int_0^\pi p(s) \sin s ds \leq 0$ koşulunu sağlıyorsa herhangi bir $\alpha > 0$ için

$$\begin{cases} u'' + u = \alpha u^{-} + p(t); \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

probleminin bir çözümünün olduğunu gösterdiler (Aguinaldo L. ve Schmitt 1978).

Aynı yıl yapılan bir çalışmada, Dancer

$$\limsup_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} < \lambda_1 < \liminf_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} < \infty$$

koşulları altında

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = t\phi_1 + h_1(x) \ , \ x \in \Omega \\ u = 0 \ , \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

probleminin $t < t_0$ ise çözüm olmadığını, $t > t_0$ ise en az iki çözüm olduğunu ve $t = t_0$ ise en az bir çözüm bulunduğunu gösterdi. Dancer bu kanıtı yaparken derece teorisinden yararlandı (Dancer E. N. 1978).

$g(u) - \lambda_1 u \geq c|u| - b$ fonksiyonu $\lambda_2 < g'(\infty) < \lambda_3$ koşulunu sağlıyorsa ve λ_2 tek katlı ise, yeterince büyük $s > 0$ için Lazer ve Mckenna

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h_1(x) + s\sin x, \ x \in \Omega \\ u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

probleminin en az 3 farklı çözümünün olduğunu gösterdiler (Lazer C.and Mckenna P. J.1981).

Aynı ikili 1983'de yaptıkları bir çalışmada ise $\limsup\limits_{s\to-\infty} \dfrac{g'(s)}{s} < 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için eğer $n^2 < \lim\limits_{s\to\infty} g'(s) < (n+1)^2$ koşulu sağlanıyorsa yeterince büyük $t > 0$ için

$$\begin{cases} u'' + g(u) = h_1(x) + t\sin x \ , \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

sınır değer probleminin 2n tane farklı çözümünün var olduğunu gösterdiler (Lazer A.C and Mckenna P. J. 1983).

Kannan ve Otega

$$\begin{cases} x'' + x + g(x) = p(t) \\ x(0) = 0, x(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

problemi üzerine çalıştılar ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif, sınırlı, sürekli, $g(\infty)$ ve $g(-\infty)$ limitleri var, Landesman Lazer koşulu sağlıyorsa ve yeterince küçük $\delta > 0$ için $p \in C[0,\pi]$ fonksiyonu $\left| \int_0^\pi p(t)\sin t dt \right| < \delta$ koşullarını sağlıyorsa tek çözüm için var olduğunu gösterdiler (Kannan and Otega R 1986).

Sürekli h ve g fonksiyonları için eğer g fonksiyonu sınırlı, azalan ve Lipschitz sürekli ve $w \in Int(Range\, g)$ ise Nieto

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h(x), \ x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.12}$$

Neumann Probleminin çözüm kümesinin boştan farklı olduğunu ve tıkız olduğunu kanıtladı (Nieto 1986)

Nieto (1987) çalışmasında, g fonksiyonu artan Landesman Lazer ve Lipshitz koşullarını sağlıyorsa ve $|u| \geq r$ için $g(u)/u \leq \gamma < 3$ özelliği varsa,

$$\begin{cases} -u'' + u + g(u) = h(x) \ , \ 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

probleminin çözüm kümesinin tıkız, bağlantılı ve boş kümeden farklı olduğunu gösterdi. (Nieto J 1987)

Yine benzer bir problem için, g azalmayan fonksiyonu $\gamma \in (0,3]$ için $|g(u)| \leq \gamma |u| + c$ koşulunu sağlıyorsa ve h_1, h_2 fonksiyonları $\int_0^\pi h_1(x) \sin x dx = 0$ ve $g(-\infty) + \delta \leq h_2(x) \leq g(\infty) - \delta$ şeklinde seçilebilirse,

$$\begin{cases} u'' + u + g(u) = h(x) \ , \ 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Dirichlet probleminin en az bir çözümünün var olduğunu gösterdi (Nieto J 1990).

Iannacci ve Nkashama $g : (0,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x,u)u \geq 0$ ve $0 \leq \Gamma(x) \leq 3$, $|u| \geq r$ için, $|g(x,u)| \leq (\Gamma(x) + \sigma)|u| + b(x)$ koşulunu sağlıyorsa,

$$\begin{cases} u'' + u(x) + g(x,u(x)) = h(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

sınır değer probleminin $\int_0^\pi h(x) \sin x dx = 0$ koşulunu sağlayan en az bir çözümünün olduğunu gösterdiler (Iannacci and Nkashama 1989).

$h(t, x_1, x_2)$ ve $f(t, x_1, x_2)$ sürekli fonksiyonları için eğer f sınırlı ve h fonksiyonu $n^2 \leq a(t) \leq h(t, x_1, x_2) \leq b(t) \leq (n+1)^2$, $t \in [0,\pi]$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ koşulunu sağlıyorsa keyfi a, b reel sayıları için Weiguo, Ziting ve Zuhe

$$\begin{cases} y'' + h(t, y, y')y = f(t, y, y') \\ y(0) = a, y(\pi) = b \end{cases} \tag{1.16}$$

problemini incelediler ve problemin $[0,\pi]$ aralığında tanımlı bir çözümünün var olduğunu gösterdiler. (Weiguo, Ziting, Zuhe 1999)

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konunun tarihçesi ele alınmıştır. Yarı lineer eliptik sınır değer problemi üzerine çalışan araştırmacıların, problem üzerine koydukları koşullar ve elde ettikleri sonuçlar kronolojik sıra ile verilmiştir. Yapılan alan taramasında araştırmacıların kullandıkları yöntemler de incelenerek, çalışmalarının birer özeti sunulmaya çalışılmıştır.

İkinci bölümde öncelikle kullanılacak tanım ve teoremler bulunmaktadır. Lineer sınır değer probleminin özdeğerlerinden uzak olma hali ve özdeğerleri ile çakıştığı rezonans durumu kabaca incelenmiş, bu iki durum için de örneklere yer verilmiştir. Bölüm sonunda Landesman Lazer koşulunu kısaca anlatarak bu konuda örneklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde problemin tanıtımı sonrasında, Landesman Lazer koşulunun sağlanması üzerine bazı ek koşullar getirilerek problemin çözümünün varlığı incelenmiştir. İlkinde Lipschitz koşulu, ikincisinde Alt Doğrusallığa izin verilerek incelenen problemin en az bir çözümünün var olduğunu söyleyen iki teorem verilmiştir. Ayrıca, çözüm olduğu koşulda ise Landesman Lazer koşulunun sağlandığını söyleyen bir teorem ve bu bölümde yer almaktadır.

2. NOTASYON VE ÖN BİLGİLER

2.1. Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Simetrik Operatör :

İkinci mertebeden

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı L operatörü eğer $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $i, j = 1,...,n$ koşulunu sağlıyorsa simetriktir, ve bir D kümesi içinde pozitif sabit μ için

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \varsigma_i \varsigma_j \geq \mu \sum_{i,j=1}^{n} \varsigma_i^{\,2} \tag{2.2}$$

eşitsizliği bütün $x \in D$ için sağlanıyorsa L operatörü D üzerinde düzgün eliptiktir denir (KAZDAN 1975).

2.1.2. Lipschitz koşulu : $\forall x, y\ [a,b]$ için $\left| f(x) - f(y) \right| \leq k|x-y|$ olacak biçimde $k > 0$ reel sayısı varsa $f : [a,b] \to [a,b]$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar denir (KREYSZIG 1989).

2.1.3. Bolzano-Weierstrass teoremi : $\mathbb{R}$ ’de (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ ’de) sınırlı her dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir. (Denk olarak; $\mathbb{R}$ ’de sınırlı ve sonsuz elemana sahip bir küme en az bir yığılma noktasına sahiptir.) (KREYSZIG 1989).

2.1.4. Tıkızlık (Kompaktlık) : (X, ζ) topolojik uzay ve $M \subset X$ olsun. M ’nin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse M ye kompakt küme denir. Sonlu boyutlu uzaylarda kompakt kümelerin daha açık karakterize edebiliriz. Bolzano-Weierstrass teoreminin sonucu olarak, sonlu boyutlu normlu bir uzayda (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ ’de) bir kümenin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır (KREYSZIG 1989).

2.1.5. Eş Süreklilik : X bir topolojik uzay, $A \subset C(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ sürekli} \}$ ve $x \in X$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $\sup_{y \in U, f \in A} | f(x) - f(y) | < \varepsilon$ olacak biçimde x'i içeren bir U açık kümesi var ise, A kümesi x noktasında eşsüreklidir denir. A kümesi her $x \in X$ noktasında eş sürekli ise, A'ya eş süreklidir denir (KREYSZIG1989).

2.1.6. Arzela-Ascoli Teoremi: $C[a,b]$ içindeki sınırlı ve eşsürekli (f_n) dizisinin, $C[a,b]$'nin supremum normuna göre sınırlı ve bir yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla $C[a,b]$'nin bir alt kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul uniform normuna göre kapalı, sınırlı ve eş sürekli olmasıdır (KREYSZIG1989).

2.1.7. Özdeğer teoremi : L simetrik, λ reel parametre, p sürekli ve ∂D düzgün olsun.

$$\begin{cases} Lu + p(x)u + \lambda u = 0 \,,\; x \in D \\ u = 0,\; x \in \partial D \end{cases} \tag{2.3}$$

problemi için $A = -(Lu + p(x))$ olacak biçimde $A : D(A) \to H$ tanımlayalım. A operatörü, H için bir baz oluşturan ortonormal özfonksiyonlar dizisine sahiptir ve karşılık gelen özdeğerler $\lambda_1 \le \lambda_2 \le ... \le \lambda_n \le ... \to \infty$ koşulunu sağlar (KAZDAN 1975).

2.1.8. Krein-Rutman Teoremi: Özdeğer problemindeki ilk özdeğer λ_1 reel ve basittir. λ_1'e karşılık gelen ϕ özfonksiyonu ve L'nin eşleniği ile tanımlanan ψ özfonksiyonu D içinde asla sıfırlanmaz ve $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$ dir (KESAVAN 1989).

2.1.9. Tamlık Aksiyomu: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin üstten sınırlı boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük üst sınırı vardır. Bu nedenle $\mathbb{R}$ **'ye** tamdır denir (KREYSZIG1989).

2.1.10. Daraltan dönüşüm : (X,d) bir metrik uzay ve, $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y)$ bağıntısını sağlayan bir $0 \le \alpha < 1$ sayısı varsa T 'ye daraltan dönüşümdür denir (SMART 1974).

2.1.11. Schauder Sabit Nokta Teoremi : X Banach uzayının kapalı, sınırlı ve dışbükey M kümesini, kendisine dönüştüren tamamen sürekli T operatörünün M kümesinde en az bir sabit noktası vardır. Yani; M kapalı, sınırlı, dışbükey ve $T(M) \subseteq M$ ise $Ty = y$ olacak biçimde en az bir $y \in M$ vardır (KESAVAN 1989).

2.1.12. Carathéodory Fonksiyonu: $g:[0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için; $g(.,y)$, $(0,\pi)$ üzerinde her $y\in\mathbb{R}$ için ölçülebilir ve $g(x,.)$, $\mathbb{R}$ üzerinde her $x\in(0,\pi)$ için sürekli ise g fonksiyonuna Carathéodory fonksiyonu denir (Iannacci and Nkashama 1989).

2.2. Başlangıç Değer Problemi : Tüm koşulların bağımsız değişkenin bir tek değerinde tanımlandığı bir problemdir. Başlangıç koşullarının tümü bağımsız değişkenin belirli bir değerine karşılık gelmelidir. $xy-$düzleminin D gibi bir bölgesinde (bölge açık ve bağlantılı bir kümedir.) x ve y'nin sürekli bir fonksiyonu f olmak üzere $d^2y/dx^2 = f(x,y)$ ikinci basamaktan diferansiyel denklemini ele alalım. $(x_0, y_0)\in D$ olsun. Başlangıç değer problemi, denkleminin x_0'ı içinde bulunduran bir aralıkta tanımlı ve $\varphi(x_0)=y_0, \varphi'(x_0)=y_1$ başlangıç şartı ile φ çözümünü bulma problemidir.

2.3.Sınır Değer Problemi : Bir diferansiyel denklemin, verilen bölgenin sınırlarında, önceden belirtilmiş koşulları sağlayan çözümünü bulma problemidir.

Verilen bir $[a,b]$ aralığında

$$y'' = f(x,y,y')$$

denklemi ve buna ilave olarak aralığın sınırlarında

$$\varphi(a)+\varphi'(a)=y_1,\ \varphi(b)+\varphi'(b)=y_2 \qquad (2.4)$$

koşullarını sağlayan $\varphi(x)=y$ çözümünün bulunmasına $y''=f(x,y,y')$ denklemi için bir **Sınır Değer Problemi** denir.

Sınır değer probleminde koşullar bağımsız değişkenin birden fazla değeri için tanımlanır. Çünkü genel çözüm birden fazla keyfi sabit içermektedir. Bu sabitler kullanılarak, sabitlerin sayısına (dolayısıyla denklemin mertebesine) eşit sayıda koşulu sağlatmak imkânına sahibiz. Eğer verilen koşulların sayısı denklemin mertebesinden az ise bu koşulları sağlayan çözümün bir tane olması beklenemez. Aksine, eğer verilen lineer bağımsız koşulların sayısı denklemin mertebesinden büyük ise bu koşulları sağlayan bir çözümün bulunması da garanti altına alınamaz.

2.3.1.Özdeğer Problemi

$$(p(x)y')' + \left[q(x) + \lambda r(x)\right]y = 0, \left(a < x < b\right) \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

biçiminde sınır değer problemlerine sıkça rastlanmaktadır. Burada $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ $[a,b]$ aralığında ($a < b$) gereken özelliklere sahip belli gerçel fonksiyonlar, λ gerçel parametre, a_1, a_2 $(a_1^2 + a_2^2 \neq 0)$, b_1, b_2 $(b_1^2 + b_2^2 \neq 0)$ verilen gerçel sayılar, $y(x)$ ise aranan fonksiyondur.

(2.5), (2.6) probleminde sıfırdan farklı çözüm sağlayan λ sayılarına sözü edilen problemin **özdeğerleri**, bunlara uygun çözümlere ise **özfonksiyonları** denir.

ÖRNEK: $a \neq 0$ bir reel sayı olmak üzere,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Sınır Değer Problemi incelendiğinde, λ sabitinin $\lambda < 0$ ve $\lambda = 0$ koşulunda problemin sınır değerleri kullanıldığında sıfır çözüm verdiği görülür.

$\lambda > 0$ durumunda ise, ele alınan problemin özdeğeri

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \; n = \overline{1,\infty} \tag{2.8}$$

olur ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),\ n = \overline{1,\infty} \qquad (2.9)$$

olur.

Sınır değer problemini inceleyip çözümün varlığı ve sayısını araştırırken, problemin karşılığı olan lineer problemlerin özdeğerlere uzak ya da özdeğerler ile çakışıyor olması problemi değiştirir.

2.4. Non Lineer Eliptik Sınır Değer Problemi

Biz de bu çalışmada, diferansiyel denklemlerin özdeğer ve özfonksiyonlarını ele alarak kendi problemimizin çözümünün varlığını ve tekliğini araştıracağız.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + f(x,y) = h(x),\ 0 < x < \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (2.10)$$

türünden yarı–doğrusal sınır değer problemleri ve bunların doğal genellemesi olan yarı-doğrusal eliptik sınır değer problemleri çok sayıda araştırmaya konu olmuştur.

Problemin çözümlerinin varlığı açısından kabaca iki durum söz konusudur ;

i) $f_s(x,s)$ değerinin, lineer sınır değer probleminin özdeğerlerinden uzak olma hali Non lineerliğin doğrusal problemin özdeğerlerinden uzak kaldığı durum

ii) $f_s(x,s)$ değerinin lineer problem $y'' + \lambda y = 0;\ y(0) = y(\pi) = 0$ özdeğerleri ile çakıştığı rezonans durumu.

Non lineerliğin doğrusal problemin özdeğerlerinden uzak kaldığı ilk durumda, her hangi bir Sabit Nokta Teoremi kullanarak çözümün varlığı gösterilebilir. Rezonans durumu olarak adlandırılan ikinci durumda ise problemin çözümü olmayabilir.

Yine kabaca genellersek, non lineerliğin doğrusal problemin özdeğerlerinden uzak kaldığı durumda en az bir çözüm vardır. Bu doğrultuda Lazer ve Leach'in elde ettiği sonuçtan söz edebiliriz (Lazer A.C.& Leach D.E. 1969).

g ve h, $[0,\pi]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonlar olsun. Her $(x,s,r)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ için

$$n^2 < \gamma_n \le g(x,r,s) \le \gamma_{n+1} < (n+1)^2$$

olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı ve γ_n, γ_{n+1} sabitleri varsa her $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} y'' + g(x,y,y')y = h(x,y,y'), & 0 < x < \pi \\ y(0) = a, \quad y(\pi) = b \end{cases} \tag{2.11}$$

probleminin en az bir çözümü vardır.

Lazer ve Leach'in bu sonucunda $n^2 < \gamma_n \le g(x,r,s) \le \gamma_{n+1} < (n+1)^2$ koşulunun non-lineerliğin doğrusal problemin özdeğerlerinden uzak kalması anlamına geldiğine işaret etmiştir.

2.4.1.Özdeğerlere uzak iken

Sürekli $f:[0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve sınırlı $h:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} y'' + f(x,y) = h(x), & x \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

sınır değer problemini düşünelim. f fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını kabul edelim

Sınır Değer Problemi

$$G(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & 0 \le t \le x \\ x(1-t) & x \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

olmak üzere ,

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)\left[f(t,y(t)) - h(t)\right] dt \tag{2.14}$$

integral denklemine denktir

Problemi Daralan Map Teoremi [Edelstein M.(1962)] yerine formüle etmek için, $y \in L^2([0,1])$ olmak üzere

$$Ty(x) = \int_0^1 G(x,t)\ \left[f(t,y(t)) - h(t)\right] dt \tag{2.15}$$

tanımlayalım. $y,z \in L^2[0,1]$ alındığında, f üzerine konulan Lipschitz koşulu ve Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
|Ty(x)-Tz(x)| &= \left|\int_0^1 G(x,t)\left[f(t,y(t)-f(t,z(t)\right]dt\right| \\
&\le L\left(\int_0^1 |G(x,t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |y(t)-z(t)|^2\,dt\right)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

olur. Buradan da

$$
\int_0^1 |Ty(x)-Tz(x)|^2\,dx \le L^2\left(\int_0^1 |y(t)-z(t)|^2\,dt\right)\int_0^1\left(\int_0^1 |G(x,t)|^2\,dt\right)dx \qquad \text{s(2.17)}
$$

olur. Katlı integrali hesapladığımızda,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 |G(x,t)|^2\,dtdx &= \int_0^1\left\{\int_0^x \left[t(1-x)\right]^2 dt + \int_x^1 \left[x(1-t)\right]^2\,dt\right\}dx \\
&= \int_0^1\left[\frac{1}{3}x^3(1-x)^2 - \frac{1}{3}x^2(x-1)^3\right]dx \\
&= 1/90
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

elde edilir ve bu değer yerine konulduğunda,

$$
\int_0^1 |Ty(x)-Tz(x)|^2\,dx \le \frac{1}{90}L^2\left(\int_0^1 |y(t)-z(t)|^2\,dt\right) \tag{2.19}
$$

olur. İki tarafın karekökü alındığında ise

$$
\|Ty-Tz\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |Ty(x)-Tz(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \frac{L}{\sqrt{90}}\|y-z\|_{L^2} \tag{2.20}
$$

bulunur.

Eğer L Lipschitz sabiti

$L<\sqrt{90}$

koşulunu sağlarsa, L^2 uzayı tam olduğundan T dönüşümü

$$
Ty(x) = y(x)
$$

tek çözümüne sahiptir.

Dikkat edilirse L Lipschitz sabitinin üzerine konan koşulda ortaya çıkan sayı, verilen probleme bağlı lineer problemin

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & x \in (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

ilk özdeğerinden küçük olması gerekmektedir. Yani

$$L < \sqrt{90} < \pi^2 = \lambda_1$$

olmalıdır.

2.4.2.Özdeğerlerle çakışıyorsa

$$\begin{cases} y'' + y = h(x), & x \in (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Sınır değer problemini düşünelim. “Parametrelerin Değişimi” yöntemi kullanılarak problemin çözümünü

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \int_0^x h(t)\sin(x-t)dt \tag{2.22}$$

şeklinde yazabiliriz. Sınır değerleri kullanıldığında $y(0) = c_2 = 0$ ve ikincisi için

$$y(\pi) = \int_0^\pi h(t)\sin t dt = 0 \tag{2.23}$$

elde ederiz. Böylece, eğer h fonksiyonu $\int_0^\pi h(x)\sin x dx = 0$ özelliğini sağlıyorsa problemin çözümü vardır ve bu çözüm c keyfi sabit olmak üzere,

$$y(x) = c \sin x + \int_0^x h(t)\sin(x-t)dt \tag{2.24}$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi, $h(x) = x$ olarak alındığında

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \pi \neq 0$$

olduğundan, istenilen koşul sağlanmaz. Bu da bize

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

probleminin çözümünün olmadığını söyler.

2.5.Landesman Lazer Koşulu

Genel olarak daha karmaşık olan rezonans durumunda ise doğrusal özdeğer probleminden de tahmin edilebileceği gibi çözümün varlığı ortogonalite tipi bazı yan koşulların gerçekleşmesine bağlıdır (Landesman E.M. & Lazer A.C. 1970). Burada oldukça genel olarak Landesman ve Lazer'in aşağıdaki sonucuna yer verelim.

$D \subset \mathbb{R}^n$ açık ve sınırlı bir bölge,

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

D üzerinde tanımlı diverjans formunda ikinci mertebeden bir düzgün eliptik operatör, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli, sonlu $g(+\infty),\ g(-\infty)$ limitleri olan ve her $s \in \mathbb{R}$ için $g(-\infty) \leq g(s) \leq g(+\infty)$ bağıntısını sağlayan bir fonksiyon olsun (g sürekli artan olmak zorunda değil).

$$\begin{aligned} &Lu + \alpha u = 0, \quad && x \in D \\ &u = 0 && x \in \partial D \end{aligned} \tag{2.26}$$

doğrusal probleminde α bir basit özdeğer ve w buna karşılık gelen özfonksiyon olsun. $w(x)$ 'in pozitif ve negatif değer aldığı bölgeleri sırası ile D_+ ve D_- ile gösterelim. Bir $h \in L^2(D)$ için L^2 iç çarpım olmak üzere

$$g(-\infty) \int_{D_+} |w|\, dx - g(\infty) \int_{D_-} |w| dx < (h, w) < g(\infty) \int_{D_+} |w|\, dx - g(\infty) \int_{D_-} |w| dx$$

sağlanıyorsa,

$$\begin{aligned} &Lu + \alpha u + g(u) = h(x), \quad x \in D \\ &u = 0 \qquad\qquad\qquad\quad\;\; x \in \partial D \end{aligned} \tag{2.27}$$

yarı doğrusal probleminin en az bir zayıf çözümü vardır. Tersine problemin bir çözümü varsa yukarıdaki eşitliklerin kesin olmayanları (yani $\leq$ durumu) için varlık vardır.

ÖRNEK 1:

$$\begin{cases} y'' + y + \arctan(y) = k \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

problemini incelersek; $g(y) = \arctan(y)$ verildiğinden

$$\lim_{s\to\infty} g(s) = g(\infty) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ve} \qquad \lim_{s\to-\infty} g(s) = g(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

limitleri var ve sonludur.

Verilen probleme karşılık gelen özdeğer probleminin özfonksiyonu $w(x) = \sin x$ olur. Bu durumda $D_+ = \{x \in [0,\pi] \mid \sin x > 0\} = [0,\pi]$ ve $D_- = \{x \in [0,\pi] \mid \sin x < 0\} = \varnothing$ olacağından, bu değerler kullanılarak yukarıdaki eşitsizlik

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin x dx < \int_0^\pi k \sin x dx < \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \sin x dx$$

olur. Buradan da

$$-\pi < 2k < \pi$$

ya da $|k| < \frac{\pi}{2}$ bulunur. Bu da bize $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2}$ dışında verilen k değerleri için çözümün olmadığını söyler.

ÖRNEK 2:

$D = [0,\pi] \times [0,\pi]$ ve $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} \Delta u + 2u + Arc\tan(u) = K & (x,y) \in D \\ u = 0 & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{2.29}$$

problemini düşünelim.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & (x,y) \in D \\ u = 0 & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{2.30}$$

probleminin özdeğerleri $\lambda_{n,m} = n^2 + m^2, \quad n,m \in Z$ ve bu özdeğerlere bağlı özfonksiyon $\phi_{nm}(x,y) = \sin nx \sin my$ olarak bulunur. En küçük özdeğer $\lambda_{1,1} = 2$ ve buna bağlı özfonksiyon $\phi(x,y) = \sin x \sin y$, verilen bölge içinde değeri ise

$$D_+ = \{(x,y) \in [0,\pi]x[0,\pi] | \sin x \sin y > 0\} = [0,\pi]x[0,\pi]$$

ve

$$D_- = \{(x,y) \in [0,\pi]x[0,\pi] | \sin x \sin y < 0\} = \varnothing$$

olur. $\lim\limits_{s\to\infty} Arc\tan s = \frac{\pi}{2}$ ve $\lim\limits_{s\to-\infty} Arc\tan s = -\frac{\pi}{2}$ değerleri de kullanılarak Landesman-Lazer koşulu uygulandığında

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\int_0^\pi \sin x \sin y dxdy \le \int_0^\pi\int_0^\pi K \sin x \sin y dxdy \le \frac{\pi}{2}\int_0^\pi\int_0^\pi \sin x \sin y dxdy$$

ya da $\frac{-\pi}{2} < K < \frac{\pi}{2}$ bulunur ki, buda bize

$$\begin{cases} \Delta u + 2u + Arc\tan(u) = K & (x,y) \in D \\ u = 0 & (x,y) \in \partial D \end{cases} \tag{2.31}$$

sınır değer probleminin çözümünün olabilmesinin koşulunun

$|K| < \frac{\pi}{2}$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiğini söyler.

3.ANA SONUÇ

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x) \ , \ \ 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

sınır değer probleminde $\lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$ değerleri özdeğer, $\phi(x) = \sin nx$ fonksiyonları bu özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlardır. $\lambda \neq n^2$ durumunda (bkz 2.4.1 bölümü) özdeğerlere uzak iken de gösterildiği gibi her $f \in C([0,\pi])$ için problemin en az bir çözümü vardır. Verilen problemin ilk özdeğeri $\lambda_1 = 1$dir. Eğer $\lambda < 1$ koşulu sağlanıyor ise problemin çözümü tekdir.

$\lambda = n^2, n \in \mathbb{N}$ koşulunda ise (bkz. **2.4.2** bölümü) sürekli bir $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\int_0^\pi f(t) \sin nt dt = 0 \qquad (3.2)$$

koşulu sağlanıyorsa çözüm vardır ve $c_1 \in \mathbb{R}$ keyfi olmak üzere, çözüm

$$y(x) = c_1 \sin nx + \frac{1}{n} \int_0^x \sin n(x-t) f(t) dt$$

şeklindedir. Özel olarak,

$$\int_0^\pi \left[c_1 \sin nx + \frac{1}{n} \int_0^x f(t) \sin n(x-t) dt \right] \sin nx \, dx = 0$$

ya da

$$c_1 = -\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi f(t) \left[(\pi - t) \cos nt + \frac{1}{n} \sin nt \right] dt$$

alındığında, özel çözüm $v(x)$

$$v(x) = -\frac{\sin nx}{n\pi} \left[\int_0^\pi f(t) \left[(\pi - t) \cos nt + \frac{1}{n} \sin nt \right] dt + \frac{1}{n} \int_0^x f(t) \sin n(x-t) dt \right] \qquad (3.3\ )$$

şeklinde olduğu görülür. Buradan da, problemin genelleştirilmiş Green fonksiyonu H_n olmak üzere,

$$H_n\left(x,t\right)=\frac{1}{n}\left[\frac{t}{\pi}\sin nx\cos nt-\frac{1}{n\pi}\sin nx\sin nt-\begin{Bmatrix}\cos nx\sin nt\,, 0\le t\le x\\ \sin nx\cos nt\,, x\le t\le \pi\end{Bmatrix}\right]$$

bulunur ve bu fonksiyon

$$H_n(x,t)=\frac{1}{n}\left\{\frac{t}{\pi}\cos nt\sin nx-\frac{1}{n\pi}\sin nx\sin nt+\frac{1}{2}\left(\sin n\left(x+t\right)+\sin n\left|x-t\right|\right)\right\} \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. H_n ’nin bu seçimi ile v özel çözümü her zaman

$$\int_0^{\pi}\sin nt v\left(t\right)\,dt=0 \tag{3.5}$$

ortogonallik bağıntısını sağlar. Bu sonuçla da,

$$v(x)=\int_0^{\pi}H_n(x,t)\,f\left(t\right)dt \tag{3.6}$$

ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere çözüm

$$y(x)=\alpha\sin nx+v(x) \tag{3.7}$$

formunda olur.

Genelleştirilmiş Green fonksiyonu $H_n(x,t)$ için,

$$\gamma_n=\sup_{x\in[0,\pi]}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{n}\left\{\frac{t}{\pi}\cos nt\sin nx-\frac{1}{n\pi}\sin nx\sin nt+\frac{1}{2}\left(\sin n\left(x+t\right)+\sin n\left|x-t\right|\right)\right\}\right|dt$$

değeri hesaplandığında, γ_n değeri,

$$\gamma_n=\sup_{x\in[0,\pi]}\left[\int_0^{\pi}\left|H_n\left(x,t\right)\right|\,dt\right]<\frac{2\pi}{n}$$

olduğu görülür.

(3.1) numaralı problem için elde ettiğimiz sonuçları $\lambda = n^2,\ n \in \mathbb{N}$ ve $f : [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki değişkenli fonksiyonuna uyarlayarak, bir pozitif n tamsayısı için

$$\begin{cases} y'' + n^2 y = f(x,y) & 0 < x < \pi \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

yarı-doğrusal sınır değer probleminin çözümlerinin varlığını inceleyeceğiz.

Yukarıda bulduklarımızı bu problemde uygulayalım. Çözümü (3.5) ortogonallik koşulunu gerçekleyecek şekilde seçerek, bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$y(x) = \alpha \sin nx + v(x)$

şeklinde yazarsak (3.2) ve (3.6) ‘dan

$$G(\alpha, v) = \int_0^\pi \sin nt f\left(t, \alpha \sin nt + v(t)\right) dt = 0 \tag{3.9}$$

$$v(x) = \int_0^\pi H_n(x,t) f\left(t, \alpha \sin nt + v(t)\right) dt \tag{3.10}$$

integral deklem çiftini elde ederiz. Bu çift (3.1) problemine denktir. Şöyle ki, $\alpha, v \in \mathbb{R} \times C([0,\pi])$ çifti (3.9) ve (3.10)’u gerçekler ancak ve ancak

$$u(x) = \alpha \sin nx + v(x)$$

probleminin bir çözümüdür.

(3.9) ve (3.10) bağıntılarını sırayla

$$G(\alpha, v) = 0 \tag{3.11}$$

$$v = \mathrm{H}(\alpha, v) \tag{3.12}$$

olarak gösterelim.

$C([0,\pi])$ üzerinde $\|v\| = \sup\limits_{x \in [0,\pi]} |v(x)|$ normunu aldığımızda, sinüs ve f fonksiyonu sürekli olduğundan, çarpımlarının integralinin de sürekli olacağını biliyoruz.

Bu nedenle $G : \mathbb{R} \times C([0,\pi]) \to \mathbb{R}$ ve $\mathrm{H} : \mathbb{R} \times C([0,\pi]) \to C([0,\pi])$ dönüşümleri de süreklidirler.

(3.8) yarı-doğrusal sınır değer probleminde non-lineer terim f üzerine bazı koşullar koyarak, problemin çözümlerin varlığını inceleyeceğiz. Bunun için f fonksiyonu üzerine koyduğumuz gerekli olan koşulları sıralayalım:

(A) **Alt Doğrusallık:** Her $(x,s)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}$ için $|f(x,s)|\le A|s|^{\delta}+B$ olacak şekilde A,B ve $0\le\delta<1$ sabitleri vardır.

(B) **Lipschitz koşulu:** Her $(x,s_i)\in[0,\pi]\times\mathbb{R},(i=1,2)$ için $|f(x,s_1)-f(x,s_2)|\le K|s_1-s_2|$ olacak şekilde bir K sabiti vardır.

(C) **Kesin monotonluk:** Her x $\in[0,\pi]$ ve $s_1<s_2$ olacak biçimdeki $s_1,s_2\in\mathbb{R}$ için $f(x,s_1)\le f(x,s_2)$ ve $f(x_0,s_1)<f(x_0,s_2)$ olan en az bir $x_0\in[0,\pi]$ vardır.

(D) **Landesman Lazer:** $\lim\limits_{s\to\infty}\inf f(x,s)=f_+(x)$ ve $\lim\limits_{s\to\infty}\sup f(x,s)=f_-(x)$ ile

$I_+=\{t\in[0,\pi]:\sin nt>0\}$ ve $I_-=\{t\in[0,\pi]:\sin nt<0\}$ olmak üzere

$$\int_{I_+}f_-(x)\sin nx\,dx+\int_{I_-}f_+(x)\sin nx\,dx<0<\int_{I_+}f_+(x)\sin nx\,dx+\int_{I_-}f_-(x)\sin nx\,dx$$

eşitsizliği sağlanır.

(D) koşulundaki $f_\pm$ fonksiyonları ve integraller genişletilmiş reel sayılar kümesinde değer alabilirler. Belirsizlik durumunu önlemek için hemen hemen her $x\in[0,\pi]$ için $f_+(x)$'te sadece ∞ ve $f_-(x)$'te sadece $-\infty$ değerine izin veriyoruz. $f_\pm$ fonksiyonları ölçülebilir olduklarından integraller bu kapsamda anlamlı olur.

(D') Hemen hemen her $x\in[0,\pi]$ için $f_+(x)>0$ ve $f_-(x)<0$ dir. (C) koşulu altında $f_\pm(x)$ fonksiyonlarının $f(x,s)$' nin $s\to\pm\infty$ limitleri vardır.

Non lineer terim f üzerine koşullarımızı oluşturduktan sonra sıra teoremlerimizi ve kanıtları vereceğimiz bölüme geldi.

3.1. TEOREM : f sürekli fonksiyonu (A), (D) ve yeterince küçük bir K için (B) koşulunu da sağlarsa (3.8) probleminin en az bir çözümü vardır.

3.2. Yardımcı Teorem

(i) f Lipshitz koşulu (B)'yi sağlasın. Her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve her $v,w\in C([0,\pi])$ için

$$\|H(\alpha,v)-H(\beta,w)\|\le\ \gamma_n K(|\alpha-\beta|+\|v-w\|)$$

sağlanır.

(ii) f alt doğrusallık (A) koşulunu sağlasın. Her $(\alpha,v)\in\mathbb{R}\times C([0,\pi])$ için

$$\|H(\alpha,v)\|\le\gamma_n\left[A(|\alpha|+\|v\|)^{\delta}+B\right]$$

sağlanır.

Kanıt:

(i) $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $v,w\in C([0,\pi])$ için Lipshitz koşulu (B)'yi kullanarak

$$\begin{aligned}
|H(\alpha,v)-H(\beta,w)| &= \left|\int_0^{\pi} H_n(x,t)\left[f(t,\alpha\sin nt+v(t))-f(t,\beta\sin nt+w(t))\right]dt\right| \\
&\le K\int_0^{\pi}|H_n(x,t)|\left[(\alpha-\beta)\sin nt+v(t)-w(t))\right]dt \\
&\le K\Big(\int_0^{\pi}|H_n(x,t)|\,dt\Big)(|\alpha-\beta|+\|v-w\|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $x\in[0,\pi]$ için supremum alınıp $\gamma_n=\sup\limits_{x\in[0,\pi]}\int_0^{\pi}|H_n(x,t)|\,dt$ tanımı kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\|H(\alpha,v)-H(\beta,w)\| &= \sup_x\left(|H(\alpha,v)-H(\beta,w)|\right) \\
&\le K\sup_x\int_0^{\pi}|H_n(x,t)|\left[(\alpha-\beta)\sin nt+v(t)-w(t))\right]dt \\
&\le\ \gamma_n K(|\alpha-\beta|+\|v-w\|)
\end{aligned}$$

bulunur.

(ii) $(\alpha,v)\in\mathbb{R}\times C[0,\pi]$ alalım. f 'in alt doğrusallık koşulunu kullanarak

$$
\begin{aligned}
\left|H(\alpha,v)\right| &= \left|\int_0^\pi H_n(x,t)\, f\left(t,\alpha\sin nt+v(t)\right)dt\right| \\
&\le \int_0^\pi \left|H_n(x,t)\right|\left|f(t,\alpha\sin nt+v(t)\right|dt \\
&\le \int_0^\pi \left|H_n(x,t)\right|\left\{A\left|\alpha\sin nt+v(t)\right|^\delta+B\right\}dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yukarıda ki kanıtta olduğu gibi supremumu alındığında

$$
\sup_x\left|H(\alpha,v)\right| \le \sup_x\int_0^\pi \left|H_n(x,t)\right|\left\{A\left|\alpha\sin nt+v(t)\right|^\delta+B\right\}dt
$$

olur ve buradan da

$$
\left\|H(\alpha,v)\right\| \le \gamma_n\left[A\left(|\alpha|+\|v\|\right)^\delta+B\right]
$$

elde edilir.

3.3. Sonuç : f bir $K<\gamma_n^{-1}$ için Lipchitz koşulu (B)'yi sağlasın. $\alpha\in\mathbb{R}$ için $h_\alpha(v)=H(\alpha,v)$ olarak tanımlayalım. Yardımcı teorem 3.2(i) kullanılarak, her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $h_\alpha : C\left([0,\pi]\right)\to C\left([0,\pi]\right)$ fonksiyonunun bir daralma olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $v_\alpha=\mathrm{H}\left(\alpha,v_\alpha\right)$ olacak şekilde tek bir $v_\alpha\in C\left([0,\pi]\right)$ vardır.

3.4.Yardımcı Teorem : f alt-doğrusallık (A) ve bir K<γ_n^{-1} için Lipschitz koşulu (B)'yi sağlasın. $\mathbb{R}$ 'den $C[0,\pi]$ uzayına $\alpha\to v_\alpha$ dönüşümü süreklidir ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $\left\|v_\alpha\right\|\le C|\alpha|^\delta+D$ olacak şekilde C ve D sabitleri vardır.

Kanıt: Yardımcı Teorem 3.2.(i)' de $v=v_\alpha$ ve $w=v_\beta$ alalım. $v_i=H(i,v_i)$, $\mathrm{i}=\alpha,\beta$ olduğundan

$$
\left|v_\alpha-v_\beta\right| = \left|H\left(\alpha,v_\alpha\right)-H\left(\beta,v_\beta\right)\right|
$$

olur. Her iki tarafın x üzerinden supremum alındığında,

$$\sup_x \left| v_\alpha - v_\beta \right| = \sup_x \left| H(\alpha, v_\alpha) - H(\beta, v_\beta) \right|$$

çıkar ve yardımcı teorem 3.2(i) sonucu kullanıldığında

$$\left\| v_\alpha - v_\beta \right\| \le \gamma_n K \left(\left| \alpha - \beta \right| + \left\| v_\alpha - v_\beta \right\| \right)$$

bulunur. $\gamma_n K < 1$ kabulü kullanılarak

$$\left(1 - \gamma_n K\right) \left\| v_\alpha - v_\beta \right\| \le \gamma_n K \left| \alpha - \beta \right|$$

buradan da

$$\left\| v_\alpha - v_\beta \right\| \le \frac{\gamma_n K}{\left(1 - \gamma_n K\right)} \left| \alpha - \beta \right|$$

elde edilir.

$\left| \alpha - \beta \right| < \delta$ için $\dfrac{\gamma_n K}{\left(1 - \gamma_n K\right)} \delta \le \varepsilon$ olarak seçildiğinde $\left| v_\alpha - v_\beta \right| < \varepsilon$ olur.Buda bize $\alpha \to v_\alpha$ dönüşümünün sürekli olduğunu söyler.

Kanıtın ikinci kısmı için yine Yardımcı Teorem 3.2(i)'de $\alpha = \beta$, $v = v_\alpha$ ve $w = 0$ alalım. $v_\alpha = H(\alpha, v_\alpha)$ olduğundan,

$$\left| v_\alpha \right| = \left| v_\alpha - H(\alpha, 0) + H(\alpha, 0) \right|$$

$$\left| v_\alpha \right| \le \left| v_\alpha - H(\alpha, 0) \right| + \left| H(\alpha, 0) \right|$$

olur. x üzerinden supremum alındığında

$$\left\| v_\alpha \right\| \le \left\| v_\alpha - H(\alpha, 0) \right\| + \left\| H(\alpha, 0) \right\| \le \gamma_n K \left\| v_\alpha \right\| + \left\| H(\alpha, 0) \right\|$$

sağlanır ve Yardımcı Teorem 3.2(ii)'yi ve $\gamma_n K < 1$ kabulünü kullanarak

$$\left\| v_\alpha \right\| \le (1 - \gamma_n K)^{-1} \gamma_n (A \left| \alpha \right|^\delta + B)$$

sonucu bulunur.

Teorem 3.1'in kanıtı:

$K < \gamma_n^{-1}$ olarak seçildiğinde, Sonuç 3.3'den her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $v_\alpha = H(\alpha, v_\alpha)$ şeklinde tanımlamış (3.9) integral denklemini sağlayan tek bir $v_\alpha \in C[0,\pi]$ olduğunu biliyoruz.

İkinci bölümde elde ettiğimiz denkliğe göre $u(x) = \alpha \sin nx + v_\alpha(x)$ fonksiyonunun (3.8) sınır değer probleminin çözümü olması için $G(\alpha, v_\alpha) = 0$, yani (3.4) integral denkleminin sağlanması gerekir.

$g(\alpha) = G(\alpha, v_\alpha)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Yardımcı Teorem 3.4'den $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ süreklidir. $\alpha > 0$ ve $t \in I_+$ alındığında $\sin nt > 0$ olduğundan, yine Yardımcı Teorem 3.4'ü kullanarak

$$\begin{aligned}
\alpha \sin nt + v_\alpha(x) &\geq \alpha \sin nt - \|v_\alpha\| \\
&\geq \alpha \sin nt - C\alpha^\delta - D \\
&= \alpha(\sin nt - C\alpha^{\delta-1} - D\alpha^{-1})
\end{aligned}$$

eşitsiliği elde edilir. $\delta < 1$ verisini kullanarak

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \sin nt + v_\alpha(t) = +\infty$$

bulunur. Benzer yolla $t \in I_+$ için

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha \sin nt + v_\alpha(t) = -\infty$$

ve $t \in I_-$ için

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha \sin nt + v_\alpha(t) = -\infty$$

ve

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \alpha \sin nt + v_\alpha(t) = \infty$$

elde edilir. Buradan da $t \in I_+$ için

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\alpha \to \infty} f\left(t, \alpha \sin nt + v_\alpha(t)\right) \geq f_+(t) \\
&\limsup_{\alpha \to \infty} f\left(t, \alpha \sin nt + v_\alpha(t)\right) \leq f_-(t)
\end{aligned}$$

olur. $t \in I_-$ için

$$\limsup_{\alpha \to \infty} f\left(t, \alpha \sin nt + v_\alpha(t)\right) \le f_-(t)$$
$$\liminf_{\alpha \to -\infty} f\left(t, \alpha \sin nt + v_\alpha(t)\right) \ge f_+(t)$$

elde edilir.

Bu sonuçla da (D) koşulunu kullanarak, yeterince büyük α için $g(\alpha) = G(\alpha, v_\alpha) > 0$ ve yeterince küçük α için $g(\alpha) = G(\alpha, v_\alpha) < 0$ olacak şekilde en az bir α_v var olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda problem (3.8)' in $y(x) = \alpha_v \sin nx + v_{\alpha_v}(x)$ şeklinde en az bir çözümünün var olduğu ortaya çıkar.

3.5. Yardımcı Teorem :

f kesin monotonluk (C) ve (D) Landesman Lazer koşullarını sağlasın. Sabit bir $v \in C([0,\pi])$ için $g_v(\alpha) = G(\alpha, v)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin artandır.

ii) $\lim_{\alpha \to -\infty} g_v(\alpha) < 0 < \lim_{\alpha \to \infty} g_v(\alpha)$

Kanıt :

(i) f fonksiyonu sürekli olduğundan, sabit bir $v \in C([0,\pi])$ için $g_v(\alpha) = \int_0^\pi \sin nt f\left(t, \alpha \sin nt + v(t)\right) dt$ olarak tanımlanan g_v fonksiyonu süreklidir. (C) koşulu ve $f\left(t, \alpha \sin nt + v(t)\right)$ fonksiyonunun sürekli oluşu da, g_v'nin kesin artan olmasını gerektirir.

(ii) Teorem 3.1'in kanıtında gösterildiği gibi $t \in I_\pm$ için

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\alpha \sin nt + v(t)\right) = \pm\infty$$

ve

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \left(\alpha \sin nt + v(t)\right) = \mp\infty$$

olacaktır.

$f\left(t, \alpha \sin nt + v(t)\right)$ fonksiyonunun I_+ ve I_-'de monotonluğu ve monoton yakınsaklık teoreminden genelleştirilmiş anlamda kullanıldığında,

$$\lim_{\alpha\to\infty} g_v(\alpha) = \int_{I_+} f_+(t)\sin ntdt + \int_{I_-} f_-(t)\sin ntdt$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty} g_v(\alpha) = \int_{I_-} f_+(t)\sin ntdt + \int_{I_+} f_-(t)\sin ntdt$$

olur. Bununla birlikte (D) koşulu kullanıldığında ise

$$\lim_{\alpha\to-\infty} g_v(\alpha) = \int_{I_+} f_-(x)\sin nxdx + \int_{I_-} f_+(x)\sin nxdx < 0 < \int_{I_+} f_+(x)\sin nxdx + \int_{I_-} f_-(x)\sin nxdx = \lim_{\alpha\to\infty} g_v(\alpha)$$

bulunur.

3.6.Sonuç : f fonksiyonu için (C) ve (D) koşulları sağlansın. Her $v \in C([0,\pi])$ için $g_v(\alpha)$ fonksiyonu sürekli, monoton olduğundan, ara değer teoremi kullanılarak $g_v(\alpha)=0$, yani $G(\alpha_v, v)=0$ olacak şekilde tek bir $\alpha_v \in \mathbb{R}$ var olduğunu söyleyebiliriz.

3.7. Teorem: f sürekli fonksiyonu (C) kesin monotonluk koşullarını sağlasın (3.8) probleminin en az bir çözümü varsa (D) Landesman Lazer koşulu sağlanır.

Kanıt : (3.8) probleminin çözümü varsa ikinci bölümden dolayı $G(\alpha, v)=0$ olacak şekilde bir (α, v) çifti vardır. Bu ise $g_v(\alpha)=0$ olduğunu söyler. g_v kesin artan olduğundan $\pm\infty$ için limitleri genelleştirilmiş reel sayılarda vardır ve

$$\lim_{\alpha\to-\infty} g_v(\alpha) < 0 < \lim_{\alpha\to\infty} g_v(\alpha)$$

olur. Bu da (D) koşuluna denktir.

3.8. Teorem: f sürekli fonksiyonu (A) Alt Doğrusallık, (C) Kesin monotonluk ve (D) Landesman Lazer koşulunu sağlarsa (3.8) probleminin en az bir çözümü vardır.

3.9. Yardımcı Teorem: f fonksiyonu (C) Kesin monotonluk ve (D) Landesman Lazer koşullarını sağlansın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $v \in C([0,\pi])$ için $|\alpha_v| \le M(\|v\|+1)$ olacak şekilde bir M sabiti vardır.

(ii) $v \to \alpha_v$ dönüşümü $C([0,\pi])$ uzayından $\mathbb{R}$ 'ye süreklidir.

Kanıt :

Kanıtımızı olmayana ergi yöntemi kullanarak yapacağız. (i)'nin doğru olmadığını kabul edelim. O halde, her $k \in Z^+$ için $\left|\alpha_{v_k}\right| > k(\|v_k\|+1)$ olacak şekilde bir (v_k) dizisi bulabiliriz. $\alpha_{v_k} = \alpha_k$ diyelim. Gerekirse bir alt diziye gerçek tüm α_k'ların aynı işaretli olduğunu kabul edelim.

$\alpha_k > 0$ ve $t \in I_+$ ise

$$\begin{aligned}\alpha_{v_k} \sin nt + v_k(t) &\geq k(\|v_k\|+1)\sin nt - \|v_k\| \\ &= (k \sin nt - 1)\|v_k\| + k\end{aligned}$$

olacağından,

$$\lim_{k\to-\infty} \alpha_k \sin nt + v_k(t) = \infty$$

çıkar. Benzer yolla $t \in I_-$ için

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k \sin nt + v_k(t) = -\infty$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 3.8(ii)'nin kanıtına benzer yolla, $f(t, \alpha \sin nt + v(t))$ fonksiyonunun I_+ ve I_-'de monotonluğu ve monoton yakınsama teoreminden genelleştirilmiş anlamda kullanıldığında

$$\lim_{k\to\infty} g_{v_k}(\alpha_v) = \int_{I_+} f_+(t)\sin ntdt + \int_{I_-} f_-(t)\sin ntdt$$

eşitliğini elde edilir. Tanımdan $g_{v_k}(\alpha_k) = 0$'dır. Halbuki (D)'den sağ taraf pozitiftir. Tüm α_k'lar negatif ise kanıt bunun benzeridir.

(ii)'nin kanıtı için $C([0,\pi])$'de v'ye yakınsayan bir (v_k) dizisi alalım. Kanıttaki ilk şıktan dolayı $\alpha_{v_k}\ (= \alpha_k)$ dizisi sınırlıdır. Bolzano-Weierstrass teoreminden, her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi var olacağından, $\lim\limits_{k\to-\infty} \alpha_{k_0} = \alpha$ olacak şekilde bir (α_{k_s}) alt dizisi vardır. g'nin sürekliliğinden $(G(\alpha_{k_s}, v_{k_s}))$ dizisi $G(\alpha, v)$'ye yakınsar. Tanımdan dolayı

$G(\alpha_{k_s}, v_{k_s}) = 0$ olduğundan $G(\alpha, v) = 0$ olur. Sonuç 2'ye göre ise $\alpha_v = \alpha$ 'dir. Bu (α_k) dizisinin her yakınsak alt dizisi için doğru olacağından $\lim \alpha_k = \alpha$ bulunur. Yani $v \to \alpha_v$ dönüşümü süreklidir.

3.10. Yardımcı Teorem:

f fonksiyonu, (A) Alt Doğrusallık ve (D) Landesman Lazer koşullarını sağlasın. $v \in C[0,\pi]$ için Sonuç 2 ve (10) daki gösterimde $h(v) = H(\alpha_v, v)$ alalım. $R > 0$ için

$$B_R = \left\{ v \in C([0,\pi]) : \|v\| \le R \right\}$$

olmak üzere yeterince büyük bir R için

(i) h: $B_R \to B_R$ süreklidir.

(ii) h: $B_R \to B_R$ kompaktır.

Kanıt: $v \in B_R$ için yardımcı teorem 3.1(ii)'den ötürü her $(\alpha, v) \in \mathbb{R} \times C([0,\pi])$ için

$$\|H(\alpha, v)\| \le \gamma_n \left[A\left(|\alpha| + \|v\|\right)^{\delta} + B \right]$$

olur ve yardımcı teorem 3.9(i)'den dolayı her $v \in C([0,\pi])$ için $|\alpha_v| \le M(\|v\| + 1)$ olacak şekilde bir M sabiti olduğundan

$$\begin{aligned} \|h(v)\| = \|H(\alpha_v, v)\| &\le \gamma_n \left\{ A(|\alpha_v| + \|v\|)^{\delta} + B \right\} \\ &\le \gamma_n \left\{ A((M+1)R + M)^{\delta} + B \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve $\delta < 1$ olduğunu kullanarak yeterince büyük R değeri için

$$\gamma_n \left\{ A((M+1)R + M)^{\delta} + B \right\} \le R$$

sağlanır. Bu koşulu sağlayan R değeri için de $h : B_R \to B_R$ olur.

$v \to \alpha_v$ dönüşümünün sürekliliğini kullanarak h 'ın sürekli olduğu elde edilir.

(ii)'nin kanıtı için, B_R'de bir (v_n) dizisi alalım. (i)'den $h(v_n) \in B_R$ olduğundan $h(v_n)$ fonksiyonları düzgün sınırlıdırlar. Öte yandan, (3.4), (3.10) ve f fonksiyonunun alt doğrusallığı kullanılarak

$$h'(v_n)(x) = \int_0^\pi \frac{\partial H_n}{\partial x}(x,t)\, f(t, \alpha_{v_n} \sin nt + v_n(t))dt$$

elde edilir ve buradan da

$$\begin{aligned}
|h'(v_n)(x)| &\leq \int_0^\pi \left|\frac{\partial H_n}{\partial x}(x,t)\right| \left| f(t, \alpha_{v_n} \sin nt + v_n(t))\right| dt \\
&\leq \pi \sup_{(x,t)} \left|\frac{\partial H_n}{\partial x}(x,t)\right| \left\{ A(|\alpha_{v_n}| + \|v_n\|)^\delta + B \right\} \\
&\leq C < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $h(v_n)$ fonksiyonları eş-süreklidirler. Arzela–Ascoli Teoremi $\overline{\{h(v_n)\}}$ kümesinin kompakt, yani h dönüşümünün kompakt olduğunu söyler.

Teorem 3.8'in kanıtı: Sonuç 3.6'dan sonra (3.8) problemi

$$v = H(\alpha_v, v) = h(v)$$

olacak şekilde bir v bulmaya indirgenmişti. $h: B_R \to B_R$ sürekli ve kompakt, B_R konveks olduğundan Shauder Sabit Nokta Teoremi, h'in en az bir sabit noktası olduğunu söyler.

4. KAYNAKLAR

Aguinaldo L. And Schmitt K(1978). On the boundary value problem. American mathematical society. Vol 68. Number January : 64-68.

Ambrosetti A. and Prodi G(1972). On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. Ann. Math. Pure Appl. 93: 213-246.

Dancer E. N(1978). On the range of certain weakly nonlinear partial differential equations. Math. Pures Appl. 57: 351-366.

Edelstein M (1962). On Fixed and Periodic Points Under Contractive Mappings. J. London Math. Soc. 37.

Erkip A.K (1997). Introduction to Theoretical Aspects of Ordinary Differential Equations. Matematik Vakfı, 25, İstanbul.

Hart D.C ,Lazer A.C , Mckenna P.J (1985). Multiple Solutions of Two Point Boundary Value Problems with Jumping Nonlinearities. Journal of Differential Equation 59: 266-281.

Iannacci and Nkashama N (1989). Nonlinear Two Point Boundary Value Problems At Resonance Without Landesman Lazer Condition. Proceedings of the American Mathematical Society Vol106, Number4: 943-951.

Juan J. Neieto(1986). Nonuniqueneses of Solutions for Semilinear Elliptic Equations at Resonance. Bollettino U.M.I.(6) 5-A: 205-210.

Kannan And Otega R (1986). Existence of Solutions. Proceedings of the American Mathematical Society Vol.96: 67-71.

Kazdan J. and Warner F(1975). Remarks on some quasilinear elliğtic equations. Comm. Pure Appl. Math. 28: 567-597.

Kesavan S (1989) Funtional Analysis and Applications 151, India

Kreyszıng E (1989) Introductory Functional Analysis with Applications, 7,180,454,Florida

Landesman E.M. & Lazer A.C (1970).Nonlinear Perturbations of Linear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance.Journal of Mathematics and Mechanics,Vol.19, No.7: 609-623.

Landesman E.M. and Lazer A.C (1970).Linear Eigenvalues and a Nonlinear Boundary value Problem.Journal of Mathematics and Mechanics.Vol.33,No.7: 311-328.

Lazer A.C and McKenna P (1983). On a Conjecture Related to the Number of Solations of a Nonlinear Dirichet problem. Proc.Roy.Soc.Edinburg.Sect.A 95: 275-283.

Lazer A.C. and McKenna P (1981). On the Number of Solutions of Nonlinear Dirichlet Problem.Journal of Mathematical Analysis and Applications 84: 282-294.

Lazer A.C.& Leach D.E (1969). On a Nonlinear Two –point Boundary Value Problem. Jurnal of Mathematical Analysis and applications, 26: 20-27.

Nieto J (1987). Hukuhara Kneser Property for a Nonlinear Dirichlet Problem. Journal of Mathematical Analysis and Aplications 128: 57-63

Nieto J (1990). Remarks on Some Nonlinear Dirichlet Problems with unbounded nonliearsties. Comment Math.Univ.Carolinac 31: 511-515.

Ross S.L (1984).Differential Equations, Willey India Edition, 30, New Delhi

Ruf B (1985).Remarks and Generalizations Related to a Recent Multiplicity Result of A.Lazer and P. McKenna. Nonlinear Analysis Theory &Applications. Vol.9.No.12.pp: 1331-1335.

Smart D.R (1974). Fixed Point Theorems. Cambridge University, 2: New York

Stakgold I (1979) Greens Functions and Boundary Value Problems 43,194,Wiley

Weiguo L. , Ziting W. , Zuhe S (1999). A Note on a Nonlinear Boundary Value Problem. Ann of Dif. Eqs.15 3 : 281-288.

5.TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği geçen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Nurettin Çalışkan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nihan DEMİRKOL

6. ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Tekirdağ'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Tekirdağ'da tamamladı. 2006 yılında Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2009 yılında Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisansını bitirdi. 2011 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümünde Yüksek Lisansa başladı.