

**ÇİFT YÖNLÜ FONKSİYONEL  
DERECELENDİRİLMİŞ PLAKLARIN  
ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM  
ANALİZİ**  
**Caner PİREN**  
**Yüksek Lisans Tezi**  
**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı**  
**Danışman: Yrd. Doç. Dr. Bahar UYMAZ**

**2012**

**T.C.**

**NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÇİFT YÖNLÜ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKLARIN  
ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

**Caner PİREN**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN: YRD. DOÇ. DR. Bahar UYMAZ**

**TEKİRDAĞ-2012**

**Her hakkı saklıdır**

Yrd. Doç. Dr. Bahar UYMAZ danışmanlığında, Caner PİREN tarafından hazırlanan bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından. Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Juri Başkanı : Yrd. Doç. Dr. Bahar UYMAZ

*İmza :*

Üye : Prof. Dr. Ayşen HAKSEVER

*İmza :*

Üye : Yrd. Doç. Güler GAYGUSUZOĞLU

*İmza :*

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU  
**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### ÇİFT YÖNLÜ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ PLAKLARIN ÜÇ BOYUTLU SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Caner PİREN

Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doc. Dr Bahar UYMAZ

Bu çalışmada, malzeme elastik özellikleri düzlem içi bir doğrultu ve kalınlık doğrultusunda fonksiyonel olarak değişen farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen plakların serbest titreşimi üç boyutlu lineer elastisite teorisi kullanılarak incelenmiştir.

Ritz yönteminde yer değiştirme bileşenleri olarak Chebyshev polinomları kullanılmıştır. Farklı malzeme bileşimlerinin ve plak geometrisinin (kenar-kenar, kenar-kalınlık oranları), serbest titreşim frekansı üzerindeki etkileri parametrik olarak incelenmiştir.

Ritz yöntemiyle 3-boyutlu teoriye göre elde edilen ilk 4 frekansa ait mod şekilleri farklı malzeme bileşimlerinde ele alınan tüm sınır koşulları için verilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Üç Boyutlu Elastisite Teorisi, Serbest Titreşim, Çift Yönlü Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plak, Ritz Yöntemi, Chebyshev Polinomları, Mod Şekli.

2012, 69 sayfa

## **ABSTRACT**

MSc. Thesis

### **THREE DIMENSIONAL VIBRATION ANALYSIS OF BIDIRECTIONAL FUNCTIONALLY GRADED PLATE**

Caner PIREN

Namık Kemal University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mechanical Engineering

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Bahar UYMAZ

In this study, the free vibration of rectangular plate which the elastic properties of material varying functionally through the thickness and an in-plane direction under different boundary conditions are investigated based on three-dimensional linear elasticity theory.

In the Ritz method the displacement components are chosen in the form of the Chebyshev polynomials. Effect of the different material composition and the plate geometry (side-to-side ratios, side-to-thickness ratios) on the free vibration frequencies are investigated as parametrically.

Using the three dimensional Ritz formulation, sets of first four mode shapes are generated for different material compositions with considered boundary conditions.

**Keywords :** Three Dimensional Free Vibration, Functionally Graded Plate, Ritz Method, Chebyshev Polynomials, Mod Shapes.

**2012, 69 pages**

## ÖNSÖZ

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) (Functionally Graded Materials (FGM)), farklı malzemelerin üstün özelliklerini birleştirme düşüncesiyle malzeme teknolojisinde doğmuş bir fikirdir ve bu alandaki hızlı gelişmeler ve uygulanabilirliği son derece heyecan vericidir. İlk olarak uzay araçları için tasarlanan FDM'ler iyi ısı iletkenlik ve iyi ısı direnç gibi iki zıt özelliğin bir malzemede bulunabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Bu özellikler sayesinde hafiflik, güçlülük ve sağlamlık mümkün olmaktadır.

Başta ideal malzeme kombinasyonları olan seramik ve metal olmak üzere iki farklı malzemedan oluşan derecelendirilmiş yapı malzeme özelliklerinin konuma bağlı olarak sürekli değişimiyle elde edilmektedir. Malzeme özelliklerindeki değişimin sürekli olmasından dolayı malzeme içerisinde gerilme yığılımları meydana gelmemektedir. Bu nedenle Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin mekanik davranışlarının belirlenmesi çeşitli mühendislik yapılarının tasarlanmasında ayrı bir önem teşkil etmektedir. Bu çalışmada plakların serbest titreşim analizi gerçeğe en yakın sonuçlar elde edebilmek amacıyla üç boyutlu olarak yapılmaktadır.

Yüksek lisans eğitimimin başlangıç aşamasından bugüne kadar birçok kişi ve kuruluştan destek aldım hepsine birer birer teşekkürü borç biliyorum.

Ancak öncelikle yüksek lisans tezi danışmanlığımı üstlenerek gerek konu seçimi, gerekse çalışmalarımın yürütülmesi sırasında desteğini ve bilgisini esirgemeyen ve her zaman teşvik edici olan hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Bahar UYMAZ'a teşekkür ederim.

Özellikle seminer dönemimde her türlü bilgi ve birikimiyle yol gösterici fikirler sunan pratik çözümler öneren Mak.Müh Gökay UYMAZ (Hema Endüstri A.Ş) beye,

Göçmenler Oto Çerçeve Alüminyum San ve Tic. A.Ş 'de beraber çalıştığımız eski mesai arkadaşlarıma,

Halen çalışmakta olduğum Koleksiyon Mobilya A.Ş çalışanlarına ve özellikle tez süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Harun KULA (Ürün Müh. Müd. Yrd.) ve meslek hayatım boyunca bana destek verip tecrübelerini paylaştığı için Sayın K.Cem TUĞCU (Ürün Müh. Grup. Müd) bey,

Hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
1.1 Problem ve Önemi.....	1
1.2 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Genel Tanımı.....	1
1.3 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kullanım Alanları.....	2
1.4 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Dezavantajları.....	4
1.5 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	4
<b>2. KAYNAK ÖZETLERİ.....</b>	<b>7</b>
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>11</b>
3.1 FDM Plakta Malzeme Özelliklerinin Değişimi.....	11
3.2 Plak Gerilme-Genleme İlişkileri.....	13
3.3 Üç Boyutlu Lineer Elastisite Teorisi.....	19
3.4 Hareket Denklemlerinin Enerji Formülasyonu.....	20
3.5 Sınır Şartları.....	23
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>25</b>
4.1 Ritz Yönteminin Plakların Titreşim Problemine Uygulanması.....	25
4.2 Cebyshev Polinomları.....	27
4.3 Serbest Titreşim Probleminin Ritz Yöntemi İle Çözümü.....	31
4.4 2D-FDM Plaklarda Mod Şekilleri.....	44
<b>5. SONUÇ.....</b>	<b>60</b>
<b>6. KAYNAKLAR.....</b>	<b>62</b>
EKLER.....	67
EK-A Genel Sınır Şartları İçin Üç Boyutlu Teoriye Göre Ritz Yöntemindeki Matris Elemanları.....	67
EK-B Ritz Yönteminde Kullanılan Bilgisayar Programı Akış Diyagramı.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	x

## SİMGELER DİZİNİ

$a$	Plak kenar uzunluğu
$b$	Plak kenar uzunluğu
$B$	Bulk modülü
$C_{ij}$	Elastik sabitler matrisi
$E$	Elastisite modülü
$F_{\delta}(X,Y)$	Sınır fonksiyonu ( $\delta=u, v, w$ )
$G$	Kayma modülü
$h$	Plak kalınlığı
$[K]$	Katılık matrisi
$[M]$	Kütle matrisi
$M_{0ij}$	Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç momentler ( $i,j=x,y$ )
$N_{0ij}$	Düzlem içi birim uzunluğa düşen iç kuvvetler ( $i,j=x,y$ )
$p$	Hacim oranı üsteli
$P(\zeta)$	Efektif malzeme özelliği ( $\zeta=X, Y, Z$ )
$Ps(\zeta)$	s.ci Chebyshev polinomu
$Q_x, Q_y$	Kesme kuvveti
$Q_{ij}$	Elastik sabitler
$S_{ij}$	Esneklik matrisi
$t$	Zaman
$T$	Plak kinetik enerjisi
$u, v, w$	Plak orta düzlemindeki bir noktanın $x, y$ ve $z$ eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
$U, V, W$	Plaktaki herhangi bir noktanın $x, y$ ve $z$ eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri
$U_G$	Plak genleme enerjisi
$V_p$	Hacim oranı
$V_D$	Düzlem içi dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi
$W_D$	Düşey kuvvetlerin potansiyel enerjisi
$\delta$	Varyasyon sembolü
$\Delta$	Boyutsuz frekans parametresi
$\varepsilon_{ij}$	Genleme tansörü
$\varepsilon_{ij}'$	Çökme sebebiyle oluşan genlemeler
$\varphi_1, \varphi_2$	Şekil fonksiyonları
$\lambda$	Lame' sabiti
$\nu$	Poisson oranı
$\omega$	Dairesel frekans (rad/sn)
$\Omega$	Boyusuz serbest titreşim frekansı
$\sigma_{ij}$	Gerilme tansörü



## Kısaltmalar

A	Ankastre destekli
B	Basit destekli
BKDT	Birleştirilmiş Kayma Deformasyon Teorisi
BMKDT	Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi
EKDT	Eksponansiyel Kayma Deformasyon Teorisi
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
HKDT	Hiperbolik Kayma Deformasyon Teorisi
KPT	Klasik Plak Teorisi
PKDT	Parabolik Kayma Deformasyon Teorisi
S	Serbest kenar
TKDT	Trigonometrik Kayma Deformasyon Teorisi
UKDT	Uniform Kayma Deformasyon Teorisi
ÜMKDT	Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi
2D-FDM	İki boyutlu veya çift yönlü FDM

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	Üniform kalınlıktaki dikdörtgen bir plağın geometrisi ve koordinatlar.....	11
Şekil 3.2.	2D-FDM plakta seramik malzemenin hacim oranının kalınlık doğrultusunda p değerleri ile değişimi.....	13
Şekil 3.3.	2D-FDM plakta seramik malzemenin hacim oranının düzlem içi doğrultu (x eksenı doğrultusu) boyunca p değerleri ile değişimi.....	13
Şekil 3.4.	Üç boyutlu gerilme hali.....	13
Şekil 3.5.	İncelenen 2D-FDM plakta sınır şartları.....	24
Şekil 4.1.	Chebyshev polinomlarının değişimi.....	30
Şekil 4.2.	Frekans parametresinin farklı sınır şartları için p ile değişimi ( $a/b=1$ , $a/h=10$ ).....	38
Şekil 4.3.	Frekans parametresinin farklı sınır şartları için q ile değişimi ( $a/b=1$ , $a/h=10$ ).....	39
Şekil 4.4.	Frekans parametresinin farklı p değerleri için q ile değişimi ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	39
Şekil 4.5.	Frekans parametresinin farklı q değerleri için p ile değişimi ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	40
Şekil 4.6.	Frekans parametresinin farklı a/b değerleri için q ile değişimi ( $a/h=10$ ).....	40
Şekil 4.7.	Frekans parametresinin farklı a/b değerleri için p ile değişimi ( $a/h=10$ ).....	41
Şekil 4.8.	Frekans parametresinin farklı q değerleri için a/h ile değişimi ( $a/b=1$ ).....	42
Şekil 4.9.	Şekil 4.9.Yüksek frekansların (a) $p=0$ iken hacim oranı üsteli q ile (b) $q=0$ iken hacim oranı üsteli p ile değişimi ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	43
Şekil 4.10.	BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ , $p=0$ ).....	45
Şekil 4.11.	ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ , $p=0$ ).....	46

Şekil 4.12.	AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ , $p=0$ ).....	47
Şekil4.13(a)	BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	48
Şekil4.13(b)	BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ , $p=1$ , $q=1$ ).....	49
Şekil4.13(c)	BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	50
Şekil4.13(d)	BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	51
Şekil4.14(a)	ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	52
Şekil4.14(b)	ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	53
Şekil4.14(c)	ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	54
Şekil4.14(d)	ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	55
Şekil4.15(a)	AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	56
Şekil4.15(b)	AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	57
Şekil4.15(c)	AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	58
Şekil4.15(d)	AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ , $a/h=20$ ).....	59

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1.	2D-FDM plak sınır şartları.....	23
Çizelge 3.2.	x=sabit ve y=sabit kenarlar için sınır şartları.....	23
Çizelge 4.1.	Klasik sınır koşulları için sınır fonksiyonları.....	32
Çizelge 4.2.	Seramik ve Metal malzemelerin elastik özellikleri (Elastisite modülü E (GPa), Poisson oranı $\nu$ , kütle yoğunluğu $\rho(\text{kg/m}^3)$ ).....	34
Çizelge 4.3.	Geleneksel FDM kare plaklarda $a/h=5$ ve $p=10$ için farklı sınır koşullarında boyutsuz frekans parametresinin yakınsaması.....	35
Çizelge 4.4.	İzotropik kare plaklarda farklı sınır koşulu için boyutsuz frekans parametresinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması.....	35
Çizelge 4.5.	Basit destekli izotropik plakta farklı a/b oranları ve mod dizilişleri için temel frekans sonuçlarının karşılaştırılması.....	36
Çizelge 4.6.	FDM kare plaklarda BBBB sınır koşulu için boyutsuz frekans parametresinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması ( $\Delta^2 = \Omega^2$ ).....	36

## 1.GİRİŞ

Bu bölümde ilk olarak Kısım 1’de incelenen problem ve önemi açıklanmakta, Kısım 2’de Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin genel açıklaması yapılmakta, Kısım 3’de FDM’lerin kullanım alanlarına değinilmekte, Kısım 4’ te FDM’lerde karşılaşılan sorunlar belirtilmekte ve Kısım 5’te bu çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durulmaktadır.

### 1.1. Problem ve Önemi

Mühendislik uygulamalarında kullanılan taşıyıcı sistemler çubuk, kiriş, mil, levha, plak, kafes sistem veya kabuk şeklindedir. Bu sistemlerin farklı zorlamalar altında statik ve dinamik davranışlarının belirlenmesi, güvenli endüstriyel tasarım açısından çok önemlidir. Bu çalışmada ele alınan yapı plaklardır. Plaklar, kalınlıkları diğer iki boyutunun yanında oldukça küçük değerler alan elemanlardır. Bu elemanlar, düzlemlerine dik doğrultudaki yükleri taşırlar.

Tüm elastik cisimler bir dış uyarı etkisinde denge konumu etrafında salınım hareketine başlar ve bu uyarı kaldırıldığında salınım hareketini sürdürürler. Bu salınıma serbest titreşim hareketi denir. Cismin 1 sn’deki toplam salınım sayısına doğal frekans denir. Sürekli bir ortam olan plaklar için bu frekansların sayısı sonsuzdur. Bu frekansların en küçüğüne temel frekans denir. Bu frekans değerlerinden herhangi birine eşit frekanstaki bir dış zorlama durumunda plağın denge konumundan uzaklığı olan genlik değeri, artarak sonsuza gider. Tahrip edici özelliğe sahip olan bu olaya rezonans denir. Dolayısıyla rezonans titreşimleri ve istenmeyen dinamik performansla karşılaşmamak için dizayn safhasında genel titreşim analizi yapılmalıdır. Titreşim problemiyle ilgili diğer temel kavramlar ve geniş bilgi bu konuda yazılmış kitaplarda bulunabilir (Meirovitch 1975).

### 1.2 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Genel Tanımı

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) (Functionally Graded Materials (FGM)), farklı malzemelerin üstün özelliklerini birleştirme düşüncesiyle malzeme teknolojisinde doğmuş bir fikirdir ve bu alandaki hızlı gelişmeler ve uygulanabilirliği son derece heyecan vericidir.

Japonyada 1984 yılında bir uzay mekiği projesi sırasında, 10 mm'den ince bir kesit için, 2000 °K seviyesinde bir yüzey sıcaklığına ve 1000 °K'lık bir sıcaklık aralığına dayanabilecek bir ısı bariyer malzemesi önerisi ile Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler konsepti ortaya çıkmıştır. FDM'ler birbirinden farklı özelliklere sahip homojen iki malzemedен oluşan ve malzeme özellikleri bir yüzeyden diğerine bir konum fonksiyonuna bağlı olarak sürekli veya kademeli bir değişim gösteren yüksek ısı direnç kapasitesine sahip ileri teknoloji malzemeleridir (Uymaz 2008).

FDM çalışmaları sonucunda birçok özelliği bir arada bulunduran ideal malzeme kombinasyonları, metal ve seramikler önem kazanmıştır. FDM'ler sıcaklığın yüksek olduğu yüzeyi düşük yoğunluk, yüksek mukavemet, katılık ve ısı dirence sahip olan seramik ve sıcaklığın düşük olduğu yüzeyi tokluk, elektrik geçirgenliği ve işlenebilirliğe sahip olan metal olacak ve seramikten metale doğru kademeli veya devamlı derecelendirilmiş bir geçişe sahip olacak şekilde tasarlanmış malzemelerdir. Bu tasarım sayesinde, iki malzeme arasında farklı ısı genleşme katsayılarından dolayı oluşan ısı gerilmelerle birlikte, fiziksel ve kimyasal özelliklerdeki ani değişimlerden dolayı meydana gelebilecek olan diğer olumsuzluklarda minimuma indirilmiş olur. Ayrıca, bu malzemelerin bileşen, mikroyapı ve bazı mekanik özelliklerinin yapı boyunca yumuşak bir değişiminin tasarımcıya istenen mekanik ve ısı özellikte bir malzeme üretimi konusunda büyük yararlar sağladığı görülmüştür. Bu durum FDM'lerin birçok uygulamada tercih edilme sebebi olmaktadır. (Uymaz 2008).

### **1.3 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Kullanım Alanları**

İlk olarak uzay araçları için tasarlanan FDM'ler iyi ısı iletkenlik ve iyi ısı direnç gibi iki zıt özelliğin bir malzemedē bulunabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Bu özellikler sayesinde hafiflik, güçlülük ve sağlamlık mümkün olmaktadır. Japonya'daki uzay istasyonu Kiba'da test olarak FDM, bir fişek ve geri kullanılabilir bir roket motoru olarak kullanılmıştır. Roketlerin çoğunun kullanıldıktan sonra atılması ve bununla ülkelere pahalıya mal olması, ülkeleri maliyeti azaltmaya yani geri kullanımlı roketler üzerinde çalışmaya yönlendirmiştir. Yapılan çalışmalar gelecekte uzay mekiklerinin geri kullanımlı roketler şeklinde üretilebileceklerini göstermiştir. Şu anda yalnızca, Japonlara ait Obita mekiği geri kullanımlıdır. Böylece FDM yapısal malzeme ve enerji değişme malzemesi olarak roket yapımında ve motorları dış duvarlarında halen uygulanmaktadır (Alagöz 2004)

FDM'lerin endüstriyel malzemelerdeki uygulamalarının geliştirilmesi de yine araştırmaların ana hedeflerinden biri olmuştur. Örneğin, derecelendirilmiş kesici kalemlerin geliştirilmesinin sebebi mukavemet ve ısıl direnç bakımından daha iyi malzemelere ihtiyaç duyulmasıdır. Bu alanda, umulan aşınma direnci ve sertlik elde edilmiştir. Kendi kendini yağlama fonksiyonu ve yüksek ısıl dirençlerin kesici kalemlerde elde edilmesinin yanında, bazı derecelendirilmiş kalemler sayesinde yağ kullanılmadan uygulanan kuru kesimler de gerçeleştirilmiştir. Bu şekilde geliştirilen bir kalem, iç kısmında çelik yoğunlukta, dış kısmına doğru elmas yoğunlukta. Yüksek hızlı kesici kalemlerde de diğer FDM'lerde olduğu gibi üretim tekniğinden kaynaklanan şekil ve boyutta sınırlamalar bulunmaktadır. Ayrıca yüksek sıcaklık uygulamalarının yanında FDM'lerin triboloji alanında kullanımları mevcuttur. Sürtünme veya normal gerilmelerden kaynaklanan yüzey çatlamasını geciktirmek için kullanılan FDM seramikler bu alandaki kullanıma örnek verilebilir (Alagöz 2004).

Güç iletim ve dağıtım sistemlerinde, FDM teknolojisi devir frenleyici, bağlantı kesici ve yıldırım durdurucu içeren kompleks bir anahtar olan Gaz Yalıtım Anahtarı (GIS- Gas Insulated Switchgear) olarak kullanılmaktadır. Güç ve Endüstriyel Sistem Araştırma ve Geliştirme Merkezi, Toshiba Corp., kristal yapıya sahip dereceli bir elementten yıldırım durdurucu üretmiştir. Bu elementte dışarıdan içeriye ısıl gerilme kontrolü ve enerji emme kabiliyetinde önemli gelişmeler kaydedilmiştir (Alagöz 2004).

İletişim alanında da birçok çeşit FDM bulunmaktadır. Görsel iletişimin, sesli iletişim düzeyine erişebilmesi için daha fazla geliştirilmeye ihtiyaç vardır. FDM'lerin plastik optik tellerdeki uygulaması sonucunda zararlı olan çok hızlı iletim önlenemekte ve böylece dünyadaki görsel iletişimi çok daha kaliteli hale getirebilmek mümkün olmaktadır. Japonya'da Asahi Cam Firması, Haziran 2000'den beri izotrop içerikli derecelendirilmiş optik telleri kullanmaktadır. Plastik optik teller, esnekliğini kaybetmeyecek şekilde kolaylıkla telin boyutu büyütülebilecek şekilde plastikten imal edilmektedirler. Böylelikle üretim maliyeti önemli ölçüde azaltılabilmektedir. Bu tip malzeme kullanımı ile yüksek hızda bilgi aktarımı mümkündür. şimdilerde Lucina TM adındaki derecelendirilmiş optik teller ile 10 Gbps'i aşan yüksek hızda bilgi iletimi mümkün olmaktadır. Bu boyut 200000 telefon bağlantısına ve birkaç yüz metre iletim uzaklığına eşittir (Alagöz 2004).

## 1.4 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Dezavantajları

Teoride istenildiği gibi şekillendirilebilen ve mükemmel görünen FDM'lerin deneysel çalışmalarda bazı sorunları da beraberinde getirdiği görülmüştür. FDM kaplamaların homojen seramik kaplamalara oranla daha dayanıklı olmasına rağmen yüksek sıcaklığa maruz kalan ortamdaki (örneğin türbinlerin iç kısımları) oksijen, kaplamayı geçip alt tabakaya yaklaştıkça (türbinlerde ısıya dayanıklılığı bakımından alüminyum üzerine FDM kaplama yapılır) alüminyum ile reaksiyona girmektedir. Sonuç olarak  $Al_2O_3$  yani alumina denen çok sert ve gevrek bir tabaka oluşturmaktadır. Bu tabaka özellikle alt tabaka (homojen metal) ile FDM arasında oluşur ve FDM avantajlarını kötü etkilemektedir. Çünkü alt tabaka ile kaplama arasındaki devamlılık ortadan kalkmıştır. Bunun sonucunda oluşan tabakada çatlaklar oluşur ve kaplamanın dökülmesi kaçınılmaz olur (Alagöz 2004).

Ayrıca birçok üretim tekniğinde oluşturulan kaplamaların kolonlar (columnar) şeklinde olmasından dolayı kaplamanın izotropikliği bozulur ve kaplama ortotropik olur. Çoğu zaman istenmeyen bu durum uyumsuzluklara yol açmaktadır. Fakat tank zırhlarında olduğu gibi ortotropik FDM'lerin kullanıldığı alanlar da mevcuttur (Alagöz 2004).

FDM'lerde karşılaşılan diğer bir sorun ise üretim tekniklerinden kaynaklanan parça büyüklüğünün kısıtlanmasıdır. Yapılan çalışmalarda üretilen FDM parçaları  $200\text{ cm}^2$ 'den küçük parçalardır. Seçilen üretim tekniğine ve derecelendirme boyut sayısına göre maksimum FDM parça boyutları değişiklikler göstermektedir (Alagöz 2004).

## 1.5 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Plak problemlerinin analitik çözümü sınır şartlarının kullanımı açısından kısıtlıdır ve bu da çeşitli yaklaşık çözümlerin geliştirilme sebeplerinden biridir. Bu çalışmada da kullanılan ve yaklaşık çözüm yöntemi olan Ritz yöntemi, büyük oranda koordinat fonksiyonlarının uygun seçilmesine bağlı olarak doğru sonuçlar vermektedir. Literatürde Ritz yönteminde trigonometrik fonksiyonların (Young, 1950, Warburton, 1954), kiriş fonksiyonlarının (Leissa, 1973), kuvvet serilerinin (Narita, 1985) kullanıldığı çalışmalar mevcuttur. Çoğunlukla ince plaklar için olmak üzere iyi sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, Ritz yönteminde değişik ince plak problemlerinde polinom fonksiyonları önerilmiş ve



kullanılmıştır (Bhat, 1985; Liew ve diğerleri, 1990). Bu polinomların avantajı, sayısal uygulamalarda kullanmanın daha kolay olması ve Ritz yönteminin hesaplama verimliliğini arttırmasıdır, (Uymaz, 2008).

3-boyutlu analizin karmaşık olması sebebiyle plak teorilerinin geliştirilmesi yoluna gidilmiştir. Bu teoriler, problemin boyutunu indirgemeyi dolayısıyla özdeğer denkleminin determinant boyutunu küçültmeyi amaçlamaktadır. Ancak bu teorilerle birlikte yapılan kabuller doğal olarak gerçek yapılara göre hatalı sonuçlar vermektedir. Plak kalınlığının, plağın diğer boyutlarına göre artmasıyla bu çelişkiler de artmaktadır. Mühendislik uygulamalarında çoğunlukla orta kalınlıkta ve kalın plaklar yer almaktadır. Pratikteki önemi sebebiyle bu plakların dinamik karakteristiklerinin en iyi şekilde anlaşılabilmesi için çözüm yöntemlerinin güvenilir ve doğru sonuçlar vermesi gereklidir. Ayrıca üç boyutlu sonuçlar direkt karşılaştırılabildiğinde düzlemsel plak teorilerinin de doğruluk derecesini belirleyebilmektedir.

Günümüzde imal edilen makineler veya yapılar için yüksek hız ve elastik yapıları dolayısıyla doğal frekanslar ve mod şekilleri önemli parametrelerdir. Bir makine elemanı veya bir yapının tasarlanırken doğal frekansları ve mod şekillerinin ve dolayısıyla titreşimin genliğinin bilinmesiyle bu karakteristikler istenen sınırların dışında ise makine elemanının tasarımı değiştirilerek karakteristiklerin istenen sınırların içinde kalması sağlanabilir. Bu bakımdan serbest titreşim yapmaya müsait dinamik sistemlerin tasarımında doğal frekans ve mod şekillerinin bulunması büyük bir öneme sahiptir.

Bu çalışmanın amacı malzeme özellikleri bir düzlem boyunca (xz-düzlemi) değişen çift yönlü FDM (2D-FDM) plaklarla malzeme özellikleri tek bir doğrultuda (x veya z doğrultusu) değişen geleneksel FDM plakları serbest titreşim davranışları açısından karşılaştırmaktır.

Literatürde geleneksel FDM plaklarla ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. Ancak malzeme özelliklerinin bir düzlem boyunca değişiminin ele alındığı 2D-FDM plaklarla ilgili 3-boyutlu serbest titreşim analizini içeren yeterli sayıda çalışma olmadığı anlaşılacak bu konuda bilgi eksikliğinin giderilmesine katkıda bulunmak bu çalışmanın içerdiği yenilik olarak düşünülmektedir.

Çalışmanın bundan sonra gelen 2. Bölümünde, konu ile ilgili daha önceki yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmekte 3. Bölümde çalışmada kullanılan materyal ve yöntemler tanıtılmakta, malzeme özelliklerinin düzlem içi ve kalınlık doğrultusunda değişim şekilleri incelenmekte ve plak gerilme-genleme ilişkileri ve üç boyutlu elastisite teorisi ele alınmaktadır. Daha sonra 3-boyutlu elastisite teorisi çerçevesinde Hamilton prensibinden faydalanarak 2D-FDM plakların titreşim davranışını yöneten denklemler ve sınır şartlarının farklı bileşimleri elde edilmektedir. 4. Bölümde Ritz yöntemi ve bu yöntemde kullanılacak olan Chebyshev polinomları açıklanmakta ve çözüm yöntemi farklı sınır koşulları için üç boyutlu titreşim problemine uygulanmaktadır. Ritz yöntemiyle 3-boyutlu elastisite teorisine göre elde edilen sonuçlar literatürden alınan referans sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. Elde edilen yeni sonuçlar çizelge ve grafikler halinde verilmektedir. Son olarak izotropik plak ve 2D-FDM plaklarda farklı malzeme bileşimlerinde temel frekans ve yüksek frekanslara ait mod şekilleri düşey doğrultudaki yer değiştirme alanı bileşeni  $w$  için verilmektedir. Son bölüm olan 5. Bölümde elde edilen sonuçlar genel olarak değerlendirilmektedir.

## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu çalışmada ele alınan 2D-FDM plak, malzeme özelliklerinin bir düzlem boyunca değişiminin ele alındığı biri seramik diğeri metal iki malzemenin karışımından oluşmaktadır. Malzemedeki seramik bileşen düşük ısı iletkenlik katsayısından dolayı yüksek ısıl direnç sağlamaktadır (Hasselman ve Youngblood, 1978). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler malzeme özelliklerinin dereceli değişimi sayesinde farklı uygulamalarda ve yüksek sıcaklıklı ortamlarda kullanılabilir, (Hasselman ve Youngblood 1978, Yamanouchi vd 1990, Fukui ve Yamanaka 1992, Koizumi, 1993). Bu durum FDM'lerin birçok uygulamada tercih edilme sebebi olmaktadır. Literatürde serbest titreşim problemini mevcut teoriler ve çözüm yöntemleriyle izotropik plaklar ve malzeme özelliklerinin farklı değişim şekilleriyle FDM plaklar üzerine ele alan birçok çalışma mevcuttur.

FDM yapıların statik ve dinamik davranışlarını lineer ve non-lineer olarak analiz eden çeşitli çalışmalar mevcuttur. Bunlar arasında, Praveen ve Reddy (1997)'de, FDM plakların termoelastik analizini Von Karman kriterine göre non-lineer olarak yapmıştır. Pradhan vd (1999)'da FDM silindirik kabukların çeşitli sınır koşulları altında titreşim karakteristiklerini incelemiştir. Reddy (2000)'de, malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı olarak değişen FDM plakların analizini çeşitli kayma deformasyon teorilerine dayanarak analitik ve sonlu elemanlar yöntemiyle yapmıştır. Shabana ve Noda (2000)'de, üretim sürecinde oluşmuş artık gerilmeleri göz önüne alarak ısıl yüklemeye maruz kalmış FDM plaklardaki ısıl gerilmeleri sonlu elemanlar yöntemiyle analiz ederek FDM'lerde ısıl gerilmelerin bileşimsel ve mikro-yapı dağılımını kontrol ederek en aza indirilebileceğini göstermek istemiştir. Woo ve Meguid, (2000)'de, FDM plakların ve sığ kabukların çökme analizini non-lineer olarak analitik yöntemle ve Chen (2004)'de FDM plakların titreşim analizini non-lineer olarak Galerkin yöntemiyle ve lineer olarak Runge-Kutta yöntemiyle yapmıştır. Vel ve Batra (2002)'de, FDM plaklarda ısıl gerilme analizini malzeme özelliklerinin mikro-model yaklaşımlara göre değişimini göz önüne alarak üç boyutlu kuvvet serileri yöntemiyle analiz etmiştir. Na ve Kim (2003)'de, ince plak ve kabuklarda ısıl burkulma analizini üç boyutlu olarak sonlu elemanlar yöntemiyle yapmıştır. Zenkour (2005)'de, titreşim ve burkulma analizinde FDM sandviç yapıları ele almıştır. Aydoğdu ve Taşkın (2006)'da, serbest titreşim analizini çeşitli kayma deformasyon teorilerine göre FDM kirişler için yapmıştır. Aydoğdu (2006)'da, düzlem içi yüklere maruz kalmış FDM plakların analizini KPT'ne göre yapmıştır. Abrate (2006)'da,

FDM plaklarda serbest titreşim, burkulma ve statik çökme üzerine yapılmış olan çalışmalar arasında bir karşılaştırma yapmıştır.

Isıl gerilmelerin maksimum olduğu veya olabileceği yerlerde ısıl gerilmelere daha dayanıklı yeni bir malzeme ilave etmek gereklidir. Geleneksel FDM'lerde cismin dış yüzeyinin tamamı aynı bileşen dağılımına sahip olacağından, cismin dış yüzeyinin de çok yüksek sıcaklık değişimine maruz kaldığı tasarım problemlerinde çok etkili olmayabilir. Bu da malzemenin iki veya üç doğrultuda değişen bağımsız malzeme özelliklerine sahip olmasıyla yenilebilir. Malzeme özelliklerinin iki doğrultuda değiştiği FDM'ler iki boyutlu veya çift yönlü FDM (2D-FDM) olarak adlandırılmaktadır. Literatürde bazı 2D-FDM çalışmaları mevcuttur. Dhaliwal ve Singh (1978)'de dikdörtgen kartezyen koordinatlarda ve silindirik polar koordinatlarda, kayma kuvveti etkisinde homojen olmayan izotropik elastik bir katı için denge denklemini çözmüşlerdir. Elastisite modülünü düzlem içi ve kalınlık doğrultusunda eksponansiyel olarak değişen bir fonksiyon olarak tanımlamışlardır. Nemat-Alla (2003)'de 2D-FDM'yi temsil eden hacim oranları ve karışımlar kanunu bağıntılarını elde etmiştir. Bunları plakta ısıl gerilmeleri hesaplamak için kullanmıştır. Elde ettiği sonuçlara göre 2D-FDM plaklar ısıl gerilmeler konusunda geleneksel FDM'ye göre daha yüksek yeteneğe sahiptir. Ayrıca, 2D-FDM'de maksimum gerilme bölgesi, geleneksel FDM'nin kinden daha küçüktür.

Yang ve Shen (2001)'de, malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı FDM plaklarda serbest titreşim analizini KPT'ne göre DQ ( Differential Quadrature ) yaklaşımını ve Galerkin yöntemini kullanarak yapmıştır.

Serbest titreşim analizinin Ritz yöntemiyle yapıldığı çalışmalarda, yer değiştirme alanı bileşenlerinde uygun fonksiyonlar seçilmesinin Ritz yöntemine olan etkinliğini incelemek bu çalışmaların amaçlarından biri olmuştur. Leissa (1973)'de, izotropik plaklarda basit, ankastre ve serbest sınır koşullarından oluşan 21 tip sınır koşulunun tamamını ele almış, 6 sınır koşulu için analitik çözüm ve 15 sınır koşulu için koordinat fonksiyonlarını giriş fonksiyonu olarak aldığı Ritz yöntemi ile çözüm elde etmiştir. Bhat (1984), Dickinson ve Di Blasio (1985), Liew vd (1993), izotropik plakların serbest titreşim analizi üzerine yaptıkları çalışmalarında Ritz yönteminde ortogonal polinomlar kullanmışlardır. Aydoğdu ve Tımarcı (2001)'de, kompozit plakların burkulma ve titreşim analizinde yer değiştirme alanı bileşenleri olarak trigonometrik

fonksiyonları ve Aydoğdu ve Tımarcı (2001), (2003), Aydoğdu (2005)'de kompozit plakların titreşim analizinde basit polinomları kullanmışlardır.

Literatürde Ritz yönteminde Chebyshev polinomlarının kullanıldığı çalışmalar mevcuttur. Zhou vd (2002)'de izotropik dikdörtgen plakların 3-boyutlu serbest titreşim analizinde, Zhou vd (2003)'de silindirlerin 3-boyutlu serbest titreşim analizinde ve Zhou, (2006)'da açılı plakların 3-boyutlu serbest titreşim analizinde, yer değiştirme fonksiyonu olarak Chebyshev polinomlarını kullanmışlardır.

Yang vd (2003)'de malzeme özellikleri konuma, sıcaklığa ve maruz kaldıkları elektrik alana bağlı olarak değişen, iki yüzeyinde de piezo-elektrik katmanlar bulunan ön gerilmeli FDM plakların büyük genlikli titreşim analizini yüksek mertebe kayma deformasyonlarını kullanarak Galerkin yöntemiyle ele almıştır.

Kim (2004), 'de FDM plakların serbest titreşim analizini üçüncü mertebe teoriye dayanarak yapmıştır. Ritz yöntemiyle çözümde yer değiştirme alanı fonksiyonunu çift katlı Fourier serileri olarak almış ve malzeme özelliklerini sıcaklığa bağlı olarak incelemiştir. Vel ve Batra (2004)'de, FDM plaklarda serbest titreşim analizinde 3-boyutlu elastisite teorisini kullanarak analitik çözüm elde etmiştir. Malzeme özelliklerinin değişimini mikro-model yaklaşımlar açısından ele almıştır. Ferreira vd (2006)'da BMKDT ve ÜMKDT teorilerine dayanarak FDM plaklarda Mori-Tanaka mikro-mekanik yaklaşımı ile doğal frekansları elde etmiştir.

Uymaz ve Aydoğdu (2007)'de malzeme özellikleri kalınlık doğrultusunda bir kuvvet kanununa göre değişen FDM plağa ait doğal frekansları Ritz yönteminde KPT'ne göre Chebyshev polinomlarını kullanarak elde etmiştir. Uymaz ve Aydoğdu (2007)'de farklı sınır koşulları için FDM plaklarda titreşimi Ritz yönteminde 3-boyutlu elastisite teorisine göre Chebyshev polinomlarını kullanarak incelemiştir.

Talha (2010)'da FDM plakların serbest titreşim ve statik analizini sonlu elemanlar modeli ile birlikte yüksek mertebeli kayma deformasyon teorisini kullanacak incelemiştir. Abrate (2006)'da FDM plaklarının çökme ve burkulmasını ve serbest titreşimlerinde ortaya çıkan problemleri analiz etmiştir. Bu problemlerin analizini ÜMKDT, BMKDT ve KPT modeli kullanarak yapmıştır. Batra ve Jin (2004)'te FDM plakların serbest titreşimlerini

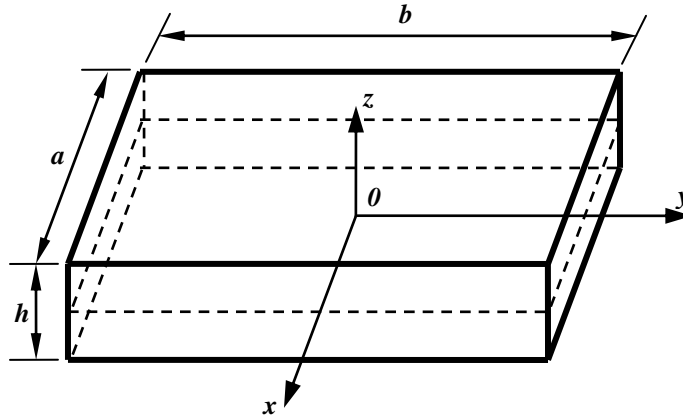
incelemek amacıyla sonlu eleman metoduyla eşleşen birinci derece kayma şekil değiştirme teorisini kullanmışlardır. Zhao vd (2008)'de Ritz metodunu kullanarak fonksiyonel olarak derecelenmiş metal ve seramik plakların serbest titreşim analizini yapmışlardır. Liew ve Teo (1998)'de DQ metodu kullanarak üç boyutlu elastik plak modelindeki formülasyonu ve sayısal analizini yapmışlardır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Kısım 3.1’de çalışmamızın konusu olan 2D-FDM plakta malzeme özelliklerinin bir kuvvet kanununa göre  $xz$ -düzlemi boyunca değişimi ele alınmakta, Kısım 3.2’de plak gerilme-genleme ilişkileri üzerinde durulmakta, Kısım 3.3’te 3-Boyutlu Lineer Elastisite teorisi kinematiği verilmektedir. Kısım 3.4’te FDM plaklara enerji prensiplerinin uygulanması incelenmektedir. Son olarak Kısım 3.5’te sınır şartları tanımlanmaktadır.

#### 3.1. FDM Plakta Malzeme Özelliklerinin Değişimi

Ele alınan plağın geometrik konfigürasyonu Şekil 3.1 ile verilmektedir. Plak; uzunluğu  $a$ , genişliği  $b$  ve üniform kalınlığı  $h$  olan seramik ve metal karışımından oluşan fonksiyonel derecelendirilmiş plaktır. Plak geometrisi ve boyutları  $(x,y,z)$  kartezyen koordinat sistemine göre tanımlanmış olup orijin plağın geometrik merkezindedir ve eksenler plak kenarlarına paraleldir.



Şekil 3.1. Üniform kalınlıktaki dikdörtgen bir plağın geometrisi ve koordinatlar

Malzeme bileşiminin  $xz$ -düzlemi boyunca değiştiği kabul edilmektedir ve plakta  $(x=-a/2)$  ön yüzeyinin ve  $(z=-h/2)$  alt yüzeyinin metal zengini ve  $(x=a/2)$  arka yüzeyinin ve  $(z=h/2)$  üst yüzeyinin seramik zengini olduğu kabul edilmektedir.

Seramik malzemenin hacim oranı  $xz$ -düzleminde aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$V_2 = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \left( \frac{x}{a} \right)^q \quad (3.1)$$

Burada, hacim oranı üsteli  $p$ , plak kalınlığı boyunca malzeme değişim profilini ve hacim oranı üsteli  $q$ , plak uzunluğu boyunca malzeme değişim profilini göstermektedir ve bileşim malzemelerinin optimum dağılımını elde etmek amacıyla değiştirilebilir,  $0 \leq p \leq \infty$ ,  $0 \leq q \leq \infty$ .

Efektif malzeme özellikleri seramik malzemenin hacim oranı üzerinden elde edilmektedir.

$$P(z) = P_{12}V_2 + P_1 \quad (3.2)$$

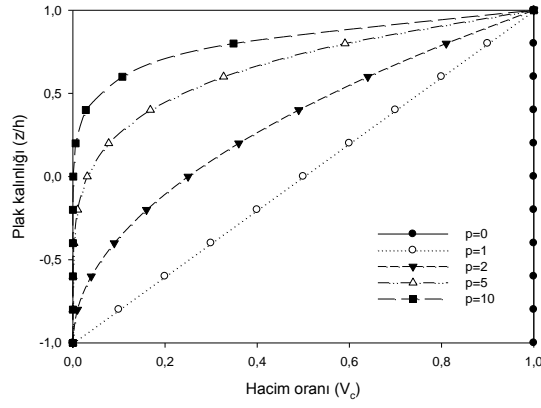
$$P_{12} = P_2 - P_1 \quad (3.3)$$

$$P(z) = (P_2 - P_1) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \left( \frac{x}{a} \right)^q + P_1 \quad (3.4)$$

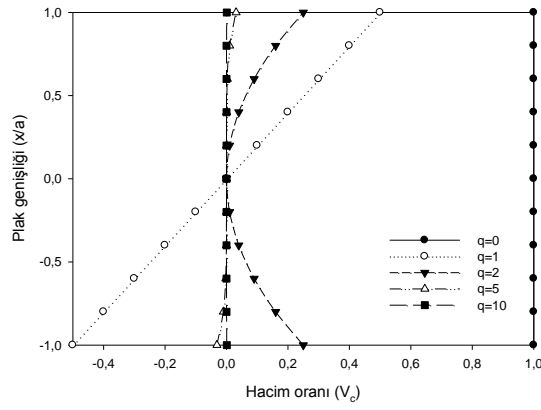
Burada  $P$ , efektif malzeme özelliğini göstermektedir ve elastisite modülü  $E$ , ve birim hacim yoğunluğu  $\rho$ 'dur.  $P_1$  ve  $P_2$  sırasıyla metal ve seramik malzemenin özelliğidir. Bu çalışmada elastisite modülü ve yoğunluğun  $xz$  düzleminde denklem (3.4) ile verilen kuvvet kanununa göre değiştii ve poisson oranının sabit olduğu kabul edilmektedir. Bu çalışmada alınan kuvvet kanununa göre hacim oranı üsteli  $q$  değeri  $q=0$  alınarak  $p$  üstelinin değişimi dikkate alındığında incelenen plak malzeme özellikleri yalnızca kalınlık doğrultusunda değişen geleneksel FDM plaklara ve hacim oranı üsteli  $p$  değeri  $p=0$  alınarak  $q$  üstelinin değişimi dikkate alındığında incelenen plak malzeme özellikleri yalnızca düzlem içi bir doğrultu boyunca değişen geleneksel FDM plaklara karşılık gelmektedir.

Seramik malzemenin hacim oranının kalınlık doğrultusu ve düzlem içi doğrultu boyunca değişimi Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 ile verilmektedir. Şekillerden anlaşılacağı gibi hacim oranı üstellerinin  $p=0$  ve  $q=0$  değeri plağın tamamen seramikten yapıldığını göstermektedir ve  $p=1$  ve  $q=1$  değeri için seramik ve metal bileşimin değişimi doğrusaldır. Şekil 3.2,  $p > 1$  için seramik hacim oranının  $z=h/2$  yüzeyine doğru azalarak arttığını göstermektedir. Şekil 3.3, aynı  $q$  değerinde uzunluk boyunca seramik hacim oranının  $x=0$  noktasına göre simetrik olarak değiştiiğini ancak  $q$  arttıkça seramik hacim oranının azaldığını göstermektedir.





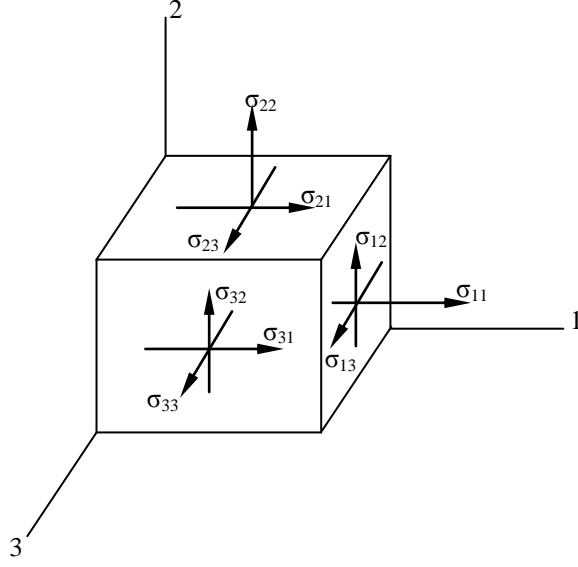
Şekil 3.2. 2D-FDM plakta seramik malzemenin hacim oranının kalınlık doğrultusunda p değerleri ile değişimi



Şekil 3.3. 2D-FDM plakta seramik malzemenin hacim oranının düzlem içi doğrultu (x eksen) doğrultusunda q değerleri ile değişimi

### 3.2. Plak Gerilme-Genleme İlişkileri

Bu kısımda genel olarak Gibson, 1994'dan yararlanılmıştır. Elastik sınırlar içinde bir cisimde bir noktadaki 3-boyutlu en genel gerilme durumu, Şekil 3.4'de gösterildiği gibi 9 gerilme bileşeni  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) ile verilir. Literatürde kullanıldığı şekliyle  $i=j$  olduğunda  $\sigma_{ij}$  normal gerilme ve  $i \neq j$  olduğunda ise  $\sigma_{ij}$  kayma gerilmesi olarak adlandırılır.



Şekil 3.4. Üç boyutlu gerilme hali

Her bir gerilme bileşenine karşılık bir genleme bileşeni mevcuttur ve  $\epsilon_{ij}$  ile gösterilir.  $i=j$  ve  $i \neq j$  olması durumunda sırasıyla normal genleme ve kayma genlemesi adı verilir. Mühendislik ve tensör genlemeleri normal genleme durumunda aynı olmalarına karşılık, kayma genlemesi durumunda; mühendislik kayma genlemesi ( $\gamma_{ij}$ ), tensörel kayma genlemesinin ( $\epsilon_{ij}$ ) iki katıdır, ( $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ ).

En genel durumda elastik bir cisimde bir noktadaki gerilme ve genleme bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33}) \quad (3.5)$$

Burada  $f_{ij}$  fonksiyonu lineer veya non-lineer olabilir. Burada lineer durum göz önüne alınmaktadır.

Lineer elastisite teorisi temelinde bir noktadaki gerilme-genleme ilişkileri en genel anizotropik durum için genelleştirilmiş Hooke yasasına dönüşür ve matris formunda şu şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Burada [C] matrisi (9x9)=81 bileşene sahip rijitlik veya elastik sabitler matrisidir. Dördüncü mertebeden bir tansördür. Elastik sabitlerdeki ilk iki indis gerilmeye, son iki indis genlemeye aittir.

Genelleştirilmiş Hooke kanunu, indis notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad k, l = 1, 2, 3) \quad (3.7)$$

Elastik sabitlerin sayısı bir takım simetri koşullarının kullanılması ile birlikte azalır. 81 olan elastik sabitlerin sayısı, statik denge ve moment dengesinden gerilmelerin ve cismin dönme yapmadığı kabulünden genlemelerin simetrik olması ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ) sebebiyle önce 54'e sonra 36'ya düşer. Böylece gerilme ve genleme bileşenleri için kullanılan indisler tekrar düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılır.

#### Gerilmeler

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma_1 \\
\sigma_{22} &= \sigma_2 \\
\sigma_{33} &= \sigma_3 \\
\sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 \\
\sigma_{13} &= \sigma_{31} = \sigma_5 \\
\sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6
\end{aligned}$$

#### Genlemeler

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 \\
\varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \\
\varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 \\
2\varepsilon_{23} &= 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_4 \\
2\varepsilon_{13} &= 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \varepsilon_5 \\
2\varepsilon_{12} &= 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_6
\end{aligned}$$

Bu durumda genelleştirilmiş Hooke kanunu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.8)$$

Bu ifadede tekrarlanan indis toplamı göstermektedir. Bu eşitlik,

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.9)$$

şeklinde matris formuna dönüştürülür. Burada  $[C]$  matrisi,  $(6 \times 6) = 36$  elemanlı bir matris ve  $\{\sigma\}$  ve  $\{\varepsilon\}$ , altışar elemanlı sütun vektörleridir.

Alternatif olarak genlemeleri gerilmeler cinsinden veren genelleştirilmiş Hooke yasası,

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.10)$$

ve matris formunda,

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (3.11)$$

olarak yazılır. Burada  $[S]$  matrisi rijitlik matrisinin tersidir ve ‘esneklik matrisi’ adını alır,  $[S] = [C]^{-1}$ .

Termodinamiğin 1. yasasına göre, elastik cisimdeki şekil değiştirmelerin izotermal ve tersinir olduğu kabul edilerek, cisim içerisinde ortaya çıkan  $W_G$  şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunun, birim şekil değiştirme bileşenlerinin homojen ve ikinci mertebeden bir fonksiyonu olduğu kabul edilir.

Genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonunun ( $W_G$ ) kullanılmasıyla elastik sabitlerin sayısı 21’e düşer. Genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonunun her bir genlemeye göre türetilmesiyle bu genlemeye karşılık gelen gerilme bileşeni bulunur.

$$\sigma_i = \frac{\partial W_G}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij}\varepsilon_j \quad (3.12)$$

Bu ifadede genleme enerjisi yoğunluk fonksiyonu,

$$W_G = \frac{1}{2} C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlıdır.  $W_G$ ’nin ikinci türevi alınırsa,

$$\frac{\partial^2 W_G}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \quad (3.14)$$

bulunur. Türevlerin sırası değiştirilirse,

$$\frac{\partial^2 W_G}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \quad (3.15)$$

bulunur. Sonuç türevden bağımsız olacağından  $C_{ij} = C_{ji}$  elde edilir ki buradan elastik sabitlerin de simetrik olduğu ortaya çıkar.

Bu simetri koşullarından sonra genelleştirilmiş Hooke yasasını tekrar şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sim} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Rijitlik matrisinin bundan sonra yapılabilecek basitleştirmesi ancak malzemenin kendisinin bir takım simetri düzlemlerine sahip olması ile mümkündür.

Gerilme ve genleme bileşenleri, koordinat sistemlerinin seçimi ile değiştiğinden rijitlik matrisinin elemanları da seçilen koordinat takımı ile değişir. Bazı durumlarda  $C_{ij}$  katsayıları, verilen bir koordinat dönüşümünde göz önüne alınan ortamın simetrisine bağlı olarak değişmez (invariant) kalabilir. Eğer bir noktadaki elastik sabitler, belirli bir düzleme göre, birbirlerinin tamamen aynadaki yansımaları şeklinde olan iki koordinat takımı için eşitse, bu düzleme bu noktanın ‘elastik simetri düzlemi’ adı verilir. Malzemeler sahip oldukları bu elastik simetri düzlemine göre isimlendirilir.

İzotropik bir malzemede sonsuz sayıda simetri düzlemi vardır. Ayrıca sıfırdan farklı eleman sayısı 12 ve bağımsız eleman sayısı 2’dir.

FDM malzemelerin karakteristikleri izotrop malzemelerinkine benzemektedir. Bu yüzden FDM plağın gerilme-genleme ilişkileri olarak izotrop bir malzemenin gerilme-genleme ilişkileri ele alınmaktadır.

İzotrop bir malzemenin üç boyutlu halde gerilme-genleme ilişkileri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Burada  $C_{ij}$ , elastik sabitlerdir ve izotropik bir malzeme için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada  $G$ , kayma modülü olarak tanımlıdır.

Düzlem gerilme halini ele alırsak,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Burada  $Q_{ij}$ , indirgenmiş elastik sabitlerdir ve izotropik bir malzeme için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \\
Q_{12} &= \frac{\nu E}{(1-\nu^2)} \\
Q_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G
\end{aligned} \tag{3.20}$$

### 3.3. Üç Boyutlu Lineer Elastisite Teorisi

Yapı analiz alanında çalışan araştırmacıların temel amaçlarından birisi çözülmek istenen fiziksel problemin matematik modelindeki kabulleri mümkün olduğunca en aza indirerek gerçeğe en yakın davranışı bulmaktır. Bu amaçla üç boyutlu bir analiz yapılar hakkında daha güvenilir ve daha fazla bilgi vermektedir.

Üç boyutlu durumda yer değiştirme alanı bileşenleri,

$$\begin{aligned}
U(x, y, z; t) &= U(x, y, z; t) \\
V(x, y, z; t) &= V(x, y, z; t) \\
W(x, y, z; t) &= W(x, y, z; t)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklindedir ve 3-boyutlu durumda lineer elastisitenin genleme-yer değiştirme ilişkileri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Bu eşitlikteki  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ve  $\varepsilon_z$  sırasıyla x,y ve z yönlerindeki normal genlemeleri,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  ve  $\gamma_{yz}$  ise kayma genlemelerini, U, V ve W sırasıyla x,y ve z yönlerindeki yer değiştirmeleri göstermektedir.

Üç boyutlu teoriye göre gerilme-genleme ilişkileri (3.17) ile ve uzaysal elastik sabitler olan  $C_{ij}$ 'ler (3.18) ile verilmektedir.

### 3.4. Hareket Denklemlerinin Enerji Formülasyonu

Bu kısımda malzeme özellikleri xz-düzleminde değişen FDM plaklara enerji prensiplerinin uygulanması incelenmekte ve bu prensipler varyasyon hesabı ile FDM plakların statik ve dinamik denklemlerinin çıkartılması için kullanılmaktadır. Bu amaçla ilk olarak cismin potansiyel ve kinetik enerjileri tanımlanmaktadır.

Elastik bir cismin genleme potansiyel enerjisi x, y, z koordinatları cinsinden aşağıdaki şekilde verilir (Whitney 1987).

$$U_G = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy}) dV \quad (3.23)$$

Üç katlı integral tüm cisim hacmi üzerinden alınmaktadır.

Elastik bir cismin x, y, z koordinatları cinsinden kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazılır (Whitney 1987).

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho ((u_{,t})^2 + (v_{,t})^2 + (w_{,t})^2) dV \quad (3.24)$$

Burada  $\rho$ , cismin öz kütleleridir ve integral hacim üzerinden alınmaktadır.

Düzlem içi ve düşey kuvvetlerin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılır (Whitney 1987). Düşey kuvvetlerin potansiyel enerjisi, plak alt ve üst yüzeyine etkiyen normal kuvvetler alınarak,

$$W_D = -\frac{1}{2} \iint (\sigma_z(h/2) - \sigma_z(-h/2)) w dx dy \quad (3.25)$$

$$W_D = -\frac{1}{2} \iint q w dx dy \quad (3.26)$$



olarak tanımlanır. Burada  $q$ , birim uzunluğa etkiyen net dış kuvvettir. Düzlem içi kuvvetlerin  $w$  yer değiştirmesi sebebiyle oluşan potansiyel enerjisi, başlangıçta düzlem içine etkiyen kuvvetler göz önüne alınarak yazılır.

$$V_D = \iint (N_x^d \varepsilon'_x + N_y^d \varepsilon'_y + N_{xy}^d \gamma'_{xy}) dx dy \quad (3.27)$$

Burada  $N_x^d$ ,  $N_y^d$  ve  $N_{xy}^d$  burkulmadan önce plağa uygulanan kuvvetleri ve  $\varepsilon'_x$ ,  $\varepsilon'_y$  ve  $\gamma'_{xy}$  çökme sebebiyle oluşan genlemeleri göstermektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= U_{,x} + \varepsilon'_x \\ \varepsilon_x &= U_{,x} + \frac{1}{2} \left( (u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2 \right) \end{aligned} \quad \text{"Green Genleme Tansörü (non - linear)} \quad (3.28)$$

Bu çalışma lineer olduğu için  $\varepsilon'_x$ ,  $\varepsilon'_y$  ve  $\gamma'_{xy}$  genlemeleri aşağıdaki gibi alınmaktadır.

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \\ \varepsilon'_y &= \frac{1}{2} (w_{,y})^2 \\ \gamma'_{xy} &= w_{,x} w_{,y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Böylece düzlem içi kuvvetlerin potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_D = \frac{1}{2} \iint (N_x^d (w_{,x})^2 + N_y^d (w_{,y})^2 + 2N_{xy}^d (w_{,xy})) dx dy \quad (3.30)$$

Hamilton prensibinden keyfi bir zaman aralığında hareket denklemleri ve uygun sınır şartları belirlenebilir (Whitney 1987).

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U_G + \delta V_D + \delta W_D - \delta T) dt = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (3.31)$$

Burada,  $\delta$  varyasyonel semboldür ve  $V_D=0$  ve  $W_D=0$  alınırsa sadece serbest titreşim problemini yöneten denklemler elde edilir. Bu kısımda en genel hal için plak denklemleri elde edilmektedir.

Örnek olarak genleme potansiyel enerjisindeki ilk terimin varyasyonel analizi verilmektedir.

$$\delta U_G = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \quad (3.32)$$

Burada ilk terim olan  $\varepsilon_x$  genlemesi (3.22) ve (3.23) ifadeleri ile verilen yer değiştirme bileşenlerinin türevleri cinsinden yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV &= \iiint_V \sigma_x \delta u_{,x} dx dy dz \\ \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV &= \iiint_V (\sigma_x \delta u - \int \delta u \sigma_{x,x} dx) dy dz \\ \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV &= \iiint_V \sigma_x \delta u dy dz - \iiint_V \sigma_{x,x} \delta u dx dy dz \end{aligned} \quad (3.33)$$

Benzer işlemler diğer genleme bileşenleri için yapılır ve genleme enerjisinin varyasyonu aşağıdaki forma getirilir.

$$\begin{aligned} \delta U_G = \frac{1}{2} \left( \iiint_V (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w) dy dz + \iiint_V (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w) dy dz + \iiint_V (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w) dy dz - \right. \\ \left. \iiint_V ((\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z}) \delta u + (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z}) \delta v + (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z}) \delta w) dx dy dz \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Kinetik enerjinin varyasyonu aşağıdaki gibidir. Zaman bağlı alınmadığı için

$$\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = \delta v(t_0) = \delta v(t_1) = \delta w(t_0) = \delta w(t_1) = 0$$

olur. Böylece,

$$\delta T = -\frac{1}{2} \iiint_V \rho (u_{,tt} \delta u + v_{,tt} \delta v + w_{,tt} \delta w) dx dy dz \quad (3.35)$$

elde edilir.

Benzer şekilde dış kuvvetlerin potansiyel enerjisinin varyasyonel analizi yapılır.

$$\delta W_D = -\frac{1}{2} \iint q \delta w dx dy \quad (3.36)$$

$$\delta V_D = -\frac{1}{2} \left( \iint (N_x^d w_{,xx} + 2N_{xy}^d w_{,xy} + N_y^d w_{,yy}) \delta w dx dy - \int (N_{xy}^d w_{,x} + N_y^d w_{,y}) \delta w dx - \int (N_x^d w_{,x} - N_{xy}^d w_{,y}) \delta w dy \right) \quad (3.37)$$

Bulunan bu varyasyon ifadeleri genel denklemde yerine yazılır.

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left\{ \iint (N_y^d w_{,y} + N_{xy}^d w_{,x}) \delta w dx + \int (N_x^d w_{,x} + N_{xy}^d w_{,y}) \delta w dy + \iiint (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w) dy dz + \right. \\ & \iint (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) dx dz + \iint (\tau_{xz} \delta u + \tau_{yz} \delta v + (\sigma_z - N_x^d w_{,xx} - N_y^d w_{,yy} - 2N_{xy}^d w_{,xy} - q) \delta w) dx dy - \\ & \left. \iiint ((\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} - \rho u_{,tt}) \delta u + (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} - \rho v_{,tt}) \delta v + (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} - \rho w_{,tt}) \delta w) \right. \\ & \left. dx dy dz \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Bu eşitlikteki hacim integrali ancak aşağıdaki hareket denklemlerinin varlığı ile sağlanabilir.

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= \rho u_{,tt} \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= \rho v_{,tt} \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + N_x^d w_{,xx} + 2N_{xy}^d w_{,xy} + N_y^d w_{,yy} + q &= \rho w_{,tt} \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.5. Sınır Şartları

(3.39) eşitliğindeki yüzeysel integrallerin çözümü Çizelge 3.1'deki sınır şartlarını verir. Bu sınır şartlarından yer değiştirme bileşenleri (çökme ve dönme) ile ilgili olanlar geometrik sınır şartları, kuvvet ve moment bileşenleri ise doğal sınır şartları adını alır.

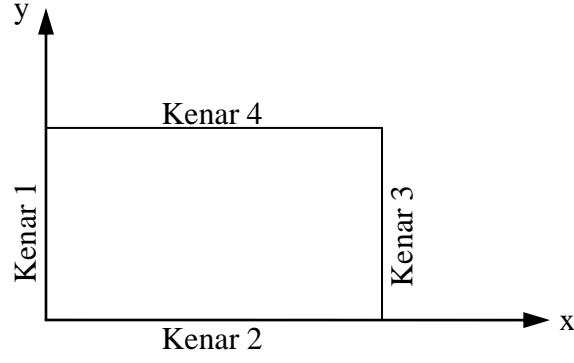
Çizelge 3.1. 2D-FDM plak sınır şartları

x=0,a	y=0,b	z=0,h
U yada $\sigma_x$	u yada $\tau_{xy}$	u yada $\tau_{xz}$
v yada $\tau_{xy}$	v yada $\sigma_y$	v yada $\tau_{yz}$
W yada $\tau_{xz}$	w yada $\tau_{yz}$	w yada $\sigma_z - N_x^d w_{,xx} - N_y^d w_{,yy} - 2N_{xy}^d w_{,xy} - q$

Çizelge 3.2. x=sabit ve y=sabit kenarlar için sınır şartları

x=sabit	y=sabit
Basit destekli (B) $\sigma_x = v = w = 0$	Basit destekli (B) $\sigma_y = u = w = 0$
Ankastre destekli (A) $u = v = w = 0$	Ankastre destekli (A) $u = v = w = 0$
Serbest kenarlı (S) $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$	Serbest kenarlı (S) $\tau_{xy} = \sigma_y = \tau_{yz} = 0$

2D-FDM plakların sınır şartlarının isimlendirilmesi Şekil 3.5'te gösterildiği sırayla yapılmaktadır. Buna göre  $x$ =sabit kenarları basit desteklenmiş,  $y=0$  kenarı ankastre ve  $y=b$  kenarı serbest olan plak BABS şeklinde isimlendirilmektedir.



Şekil 3.5. İncelenen 2D-FDM plakta sınır şartları

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde BBBB, ASAS, AAAA sınır koşullarına sahip 2D-FDM plakların serbest titreşim analizi Ritz yöntemi ile 3-boyutlu lineer elastisite teorisi için yapılmaktadır. Geleneksel FDM plaklarla 2D-FDM plakların serbest titreşim davranışı titreşim karakteristikleri ve mod şekillerine bağlı olarak incelenmiş ve karşılaştırılmaktadır. Kısım 1’de Ritz yönteminin plakların titreşim problemine uygulanması açıklanmakta ve Kısım 2’de Ritz yönteminde koordinat fonksiyonu olarak kullanılan Chebyshev polinomlarından bahsedilmektedir. Kısım 3’te 3-boyutlu elastisite teorisi ile Ritz yönteminde Chebyshev polinomlarını kullanarak genel sınır şartlarındaki 2D-FDM plaklar için elde edilen temel frekanslar verilmektedir. Kısım 4’de farklı bileşime sahip 2D-FDM plaklarda Ritz yöntemiyle 3-boyutlu teoriye göre elde edilen mod şekilleri düşey doğrultudaki yer değiştirme alanı bileşeni  $w$  için verilmektedir.

##### 4.1. Ritz Yönteminin Plakların Titreşim Problemine Uygulanması

Enerji yöntemi titreşim hareketinin diferansiyel denklemini çözmeden doğal frekansı doğrudan doğruya hesap etmeye olanak veren bir yöntemdir ve bir serbestlik dereceli basit sistemlerde doğal frekans için tam doğru sonucu vermektedir. Daha karışık, serbestlik derecesi yüksek olan sistemlerin doğal frekanslarının hesabında bu yöntemin geliştirilmiş bir biçimi olan Rayleigh yöntemi kullanılır ve yaklaşık sonuçlar elde edilir. Ritz yöntemi ise serbestlik derecesi sayısını indirgeyerek doğal frekansa yakın frekanslar ve modlar bulan genel bir tekniktir. 1909 yılında Ritz tarafından Rayleigh yönteminin genişletilmiş olarak önerilmiştir.

Minimum enerji prensibine dayanan Ritz yöntemiyle yer değiştirme alanları, hareket denklemlerini elde etmeksizin yaklaşık olarak bulunabilir. Toplam enerji fonksiyoneli tanımlamak için 3 serbestlik dereceli KPT çerçevesinde aşağıda verildiği gibi yaklaşık bir yer değiştirme alanı önerilir (Langhaar 1962, Leissa 1969).

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=0}^I A_i f_i(x, y, z) \\
v &= \sum_{l=0}^L B_l f_l(x, y, z) \\
w &= \sum_{p=0}^P C_p f_p(x, y, z)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Bu eşitliklerde  $u$ ,  $v$  ve  $w$  sırasıyla  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerindeki yer değiştirme bileşenlerinin yaklaşık ifadeleri,  $A_i$ ,  $B_l$  ve  $C_p$ , bilinmeyen katsayılar ve  $f_i$ ,  $f_l$  ve  $f_p$ , en azından kenarlarda verilen geometrik sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen sürekli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar matematik olarak tam ise, varsayılan yer değiştirme bileşenleri, serilerin üst sınırları sonsuza giderken gerçek değerlerine yakınsarlar. Titreşim probleminde plağın toplam enerji fonksiyoneli, plak genleme potansiyel enerjisi  $U_G$  ve plak kinetik enerjisi  $T$  olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Pi = U_{G \max} - T_{\max} \tag{4.2}$$

Tanımlanan bu enerji fonksiyoneli, (4.1) ile verilen yer değiştirme alanı bileşenleri cinsinden elde edilerek bilinmeyen katsayılara göre aşağıdaki gibi minimize edilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_l} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_p} = 0 \\
(i = 0, 1, 2, \dots, I; \quad l = 0, 1, 2, \dots, L; \quad p = 0, 1, 2, \dots, P)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

bu katsayılar cinsinden bir homojen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemindeki katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapacak özdeğerler, gerçek değerlere üst sınır oluşturur. Matris boyutu (4.1) eşitliğindeki serilerde alınacak terim sayısına bağlıdır. Bu özdeğerlerin en küçüğü temel serbest titreşim frekans parametresine karşılık gelir.

Plak titreşim problemlerinde seçilecek yer değiştirme alanı, en azından yer değiştirme ve eğimlerden oluşan geometrik sınır şartlarını sağlamalıdır. Kuvvet ve momentlerden oluşan doğal sınır şartlarının sağlanması zorunlu değildir. Verilen sınır şartlarını sağlamanın değişik yolları vardır. Olası yöntemlerden birisi aşağıda verildiği gibi bir fonksiyon seçmektir.

$$u_i = \sum_{i=0}^I A_i f_i = A_0 f_0 + \sum_{i=1}^I A_i f_i \quad (4.4)$$

Bu ifadede  $f_0$  sınır şartlarını sağlayan,  $f_i$  ise sınırdaki sıfır olan bir fonksiyondur. Ancak bu tip bir yaklaşım plak problemlerinde pek kullanılmaz. Sıkça kullanılan diğer bir yaklaşımda aşağıda verilen ifade kullanılır.

$$u_i = \sum_{i=0}^I A_i f_i \quad (4.5)$$

Burada her bir  $f_i$  terimi ( $i=0,1,2, \dots,I$ ) sınır şartlarını sağlar.

Ritz yönteminde yakınsamanın hızlı olması ve sayısal kararlılık sağlanması açısından seçilecek  $f_i$  sisteminin uygunluğu önemlidir. Yeterli terim sayısının da alınmasıyla analitik çözüme yaklaşmak mümkündür. İncelenen çalışmalar arasında çoğunlukla trigonometrik fonksiyonlar, Aydoğdu ve Tımarcı, 2001, 2004, basit polinomlar, Aydoğdu ve Tımarcı, 2003, Aydoğdu, 2005, çift katlı Fourier serileri, Kim, 2004, ve ortogonal polinomların, Bhat, 1984, Dickinson ve Blasio, 1985, Liew vd., 1993, farklı teorilere dayanarak ele alındığı görülmektedir. Bu çalışmada koordinat fonksiyonları olarak bir sonraki kısımda daha detaylı olarak ele alınan Chebyshev polinomları, Zhou vd., 2002, kullanılmaktadır.

## 4.2. Chebyshev Polinomları

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  reel sayılar ve  $x$  bir reel değişken olmak üzere,

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (4.6)$$

$n$ .ci dereceden bir polinom olsun. Polinom fonksiyonları çok uygun özelliklere sahiptirler. Polinomlar,  $x$ 'in istenilen her değeri için türevlenebilir ve herhangi bir aralıkta integrallenebilirler. Bundan başka  $p(x)$  polinomu  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  gibi  $n+1$  tane katsayı tarafından tam olarak belirtilebilir.

$n$  negatif olmayan bir tamsayı,  $x = \cos\theta$  ve  $0 \leq \theta \leq \pi$  olmak üzere,

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad (4.7)$$

fonksiyonu tanımlansın.  $\theta$  sıfırdan  $\pi$ 'ye artarken,  $x$  -1'den -1'e azalır.  $T_n(x)$  fonksiyonu  $I=[-1,1]$  aralığında tanımlanmış olur.  $x=\cos\theta$  ise  $\theta=\arccos x$ 'dir.

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x) \quad (4.8)$$

Şimdi  $T_n(x)$ 'in  $n$  dereceli bir polinom olduğunu görelim.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (4.9)$$

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

olduğunu hatırlayalım. Binom açılımından,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos^n \theta + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta (i \sin \theta) + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta (i^2 \sin^2 \theta) + \dots + \binom{n}{n} (i \sin \theta)^n \quad (4.10)$$

(4.9) ve (4.10) eşitliklerinde reel kısımlar eşit olduğundan  $\sin^2\theta$  yerine  $1-\cos^2\theta$  yazılarak,

$$\cos n\theta = \sum_{q=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^q \binom{n}{2q} \cos^{n-2q} \theta \left( \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} \cos^{2k} \theta \right) \quad (4.11)$$

elde edilir ve bu ifadede  $\cos\theta=x$  yazılırsa  $\cos n\theta$ 'nın polinom olduğu görülür. Dolayısıyla (4.11) ile tanımlanan fonksiyon bir polinomdur. Bu polinomun katsayıları belirlensin. Eğer,

$$\begin{aligned} A_q &= (-1)^q \binom{n}{2q} \cos^{n-2q} \theta, & q &= 0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right] \\ B_{k,q} &= (-1)^k \binom{q}{k} \cos^{2k} \theta, & k &= 0,1,2,\dots,q \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak seçilirse (4.11) ifadesinin sağ tarafı bir üçgensel toplam olur. Yani,



$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= A_0 B_{0,0} \\
&+ A_1 B_{0,1} + A_1 B_{1,1} \\
&+ A_2 B_{0,2} + A_2 B_{1,2} + A_2 B_{2,2} \\
&\dots \\
&+ A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{0,\left[\frac{n}{2}\right]} + \dots + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklindedir. (4.13)'in sağ tarafındaki aynı köşegen üzerindeki elemanlar toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \left( A_0 B_{0,0} + A_1 B_{1,1} + \dots + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]} \right) \\
&+ \left( A_1 B_{0,1} + A_2 B_{1,2} + \dots + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{\left[\frac{n}{2}\right]-1,\left[\frac{n}{2}\right]} \right) \\
&\dots \\
&+ \left( A_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} B_{0,\left[\frac{n}{2}\right]-1} + A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{1,\left[\frac{n}{2}\right]} \right) \\
&+ \left( A_{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{0,\left[\frac{n}{2}\right]} \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir.  $A_q$  ve  $B_{k,q}$  değerleri  $q=0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$  ve  $k=0,1,\dots,q$  için yukarıda yerlerine yazılırsa,

$$T_n(x) = \cos n\theta = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} \cos^{n-2k} \theta \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) eşitliği  $T_n(x)$ 'in  $n$ .ci dereceden bir polinom olduğunu gösterir.  $\cos\theta=x$  olmak üzere (4.15) eşitliği,

$$T_n(x) = t_0^{(n)} + t_1^{(n)}x + t_2^{(n)}x^2 + \dots + t_n^{(n)}x^n \tag{4.16}$$

şeklinde yazılırsa,

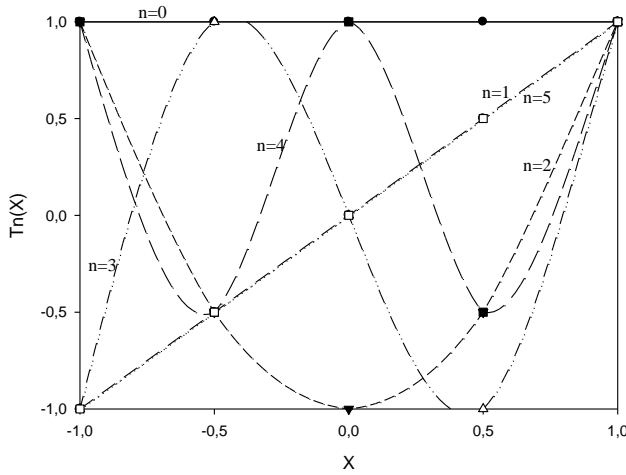
$$\begin{aligned}
t_{n-(2k+1)}^{(n)} &= 0 ; \quad k = 0,1,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right] \\
t_{n-2k}^{(n)} &= (-1)^k \sum_{j=k}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} ; \quad k = 0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olduğu görülür. Böylece (4.7) ile tanımlı ve I aralığı üzerinde değerler alan  $T_n(x)$ , n.ci dereceden bir polinoma dönüşür. Bu polinoma n.ci dereceden *Chebyshev polinomu* denir.  $T_n(x)$  polinomları, ilk defa Rus matematikçi P.L.Chebyshev (1821-1894) tarafından çalışılmış ve onun ismiyle adlandırılmıştır (Fox ve Parker 1968).

Negatif olmayan n tamsayısı için, n.ci dereceden Chebyshev polinomları (4.16) ve (4.17) formülleri ile tanımlanır. İlk altı Chebyshev polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 T_0(x) &= 1 \\
 T_1(x) &= x \\
 T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
 T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
 T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
 T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_4$  ve  $T_5$  Chebyshev polinomlarının grafikleri Şekil 4.1’de verilmektedir.



Şekil 4.1. Chebyshev polinomlarının değişimi

Chebyshev polinomları,  $[-1,1]$  aralığında aynı en büyük ve en küçük artı ve eksi değerler arasında salınım yaptıklarından, eşit salınımlı (equal ripple) polinom özelliği taşımaktadırlar ve bu özellikleri sayesinde yaklaşım fonksiyonundaki hatayı en küçük yapmaya çalışırlar. Dolayısıyla minimaks kriterine yöneliktir. En küçük kareler yöntemi karelerin toplamını, Chebyshev yaklaşımı ise en büyük hatayı en küçük yapmaya çalışır. Polinomlar ile interpolasyon yapıldığında nokta sayısı arttıkça, aralık kenarlarında fonksiyon

değerlerinde büyük sapmalar olmaktadır. Bu sapmaları Chebyshev polinomlarını kullanarak önlemek mümkündür (Bakioğlu 2004).

Burada bahsedilen minimaks kriteri kısaca şu şekilde tanımlanabilmektedir: Bir  $f(x)$  fonksiyonu ile bu fonksiyonun yaklaşım fonksiyonu olan  $g(x)$  fonksiyonu ( $f(x) \approx g(x)$ ) arasındaki farkların mutlak değerlerinin toplamının en küçük yapılmasıdır. Matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir (Bakioğlu 2004).

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \quad (4.19)$$

### 4.3. Serbest Titreşim Probleminin Ritz Yöntemi ile Çözümü

Çalışmanın bu kısmında 2D-FDM plaklarda serbest titreşim probleminin çözümü 3-boyutlu elastisite teorisine göre Ritz yöntemi ile genel sınır koşullarında ele alınmaktadır. 2D-FDM plakta Elastisite modülü ve yoğunluğun xz-düzlemi boyunca bir kuvvet kanununa göre değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu kabul edilmektedir. 3-boyutlu lineer elastisite teorisi kapsamında yer değiştirme alanı genlik fonksiyonları,

$$\begin{aligned} U(X, Y, Z) &= F_u(X, Y) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i(X) P_j(Y) P_k(Z) \sin \omega t \\ V(X, Y, Z) &= F_v(X, Y) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l(X) P_m(Y) P_n(Z) \sin \omega t \\ W(X, Y, Z) &= F_w(X, Y) \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{pqr} P_p(X) P_q(Y) P_r(Z) \sin \omega t \end{aligned} \quad (4.20)$$

ile verildiği gibi plağın geometrik sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme alanı bileşenlerinin sınır fonksiyonları ile Chebyshev polinomlarının çarpımı şeklindedir. Burada  $A_{ijk}$ ,  $B_{lmn}$  ve  $C_{pqr}$  bilinmeyen katsayılardır.  $P_s(\xi)$  ( $s=1,2,3,\dots$ ,  $\xi=X,Y,Z$ ) kosinüs fonksiyonlarına göre aşağıdaki gibi yazılabilen bir boyutlu s. Chebyshev polinomudur.

$$P_s(\xi) = \cos[(s-1)\arccos(\xi)] \quad (s=1,2,3,\dots) \quad (4.21)$$

Yer değiştirme alanı genlik fonksiyonlarına karşılık gelen sınır fonksiyonları  $F_u(X,Y)$ ,  $F_v(X,Y)$  ve  $F_w(X,Y)$ ,

$$F_{\delta}(X, Y) = f_{\delta}^1(X) f_{\delta}^2(Y) \quad (\delta = u, v, w) \quad (4.22)$$

olarak yazılabilir. Sınır koşulları  $x=sbt.$  kenar için aşağıdaki formda yazılabilir.

Serbest kenar

$$\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0 \text{ and } \tau_{xz} = 0. \quad (4.23)$$

Basit destekli kenar

$$w = 0, v = 0 \text{ and } \sigma_x = 0. \quad (4.24)$$

Ankastre kenar

$$w = 0, v = 0 \text{ and } u = 0. \quad (4.25)$$

x-ekseni için farklı sınır koşullarına karşılık gelen sınır fonksiyonu bileşenleri Çizelge 4.1 ile verilmektedir.

Çizelge 4.1. Klasik sınır koşulları için sınır fonksiyonları

S.K.	$f_u^1$	$f_v^1$	$f_w^1$
S-S	1	1	1
B-S	1	1+X	1+X
B-B	1	1-X <sup>2</sup>	1-X <sup>2</sup>
A-S	1+X	1+X	1+X
A-B	1+X	1-X <sup>2</sup>	1-X <sup>2</sup>
A-A	1-X <sup>2</sup>	1-X <sup>2</sup>	1-X <sup>2</sup>

Yer değiştirme alanı bileşenleri genleme potansiyel enerjisi ve kinetik enerji ifadelerinde yerine koyularak maksimum enerji fonksiyonelinin bilinmeyen katsayılarına göre minimizasyonu aşağıdaki gibi yapılır.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial B_{\bar{l}\bar{m}\bar{n}}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial C_{\bar{p}\bar{q}\bar{r}}} = 0 \quad (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r} = 1, 2, 3 \dots) \quad (4.26)$$

Bu işlem sonucunda aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi elde edilir.

$$\left[ \begin{array}{ccc} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ & [K_{22}] & [K_{23}] \\ \text{sim.} & & [K_{33}] \end{array} \right] - \Omega^2 \left[ \begin{array}{ccc} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] \\ & [M_{22}] & [M_{23}] \\ \text{sim.} & & [M_{33}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} [A_{ijk}] \\ [B_{lmn}] \\ [C_{pqr}] \end{array} \right\} = [0] \quad (4.27)$$

Burada  $[K_{ij}]$  ve  $[M_{ij}]$  terimleri EK-A'de verilmektedir ve sıfırdan farklı çözüm (non-trivial) elde etmek için determinantı sıfır yapan özdeğerler ( $\Omega$ ) serbest titreşim frekans parametresine karşılık gelir. Bu özdeğer problemindeki kare matrisin boyutları  $[(I+1)(J+1)(K+1)+(L+1)(M+1)(N+1)+(P+1)(Q+1)(R+1)]$  ifadesi ile bulunur.

Ritz yönteminde yapılan hesaplamalar örnek olması açısından, varsayılan yer değiştirme bileşenlerinin elastisite modülü ve yoğunluğun kalınlık doğrultusunda değiştiği FD plağa ait enerji fonksiyoneli ifadesinde (4.2) yerine yazılmasıyla elde edilen fonksiyonelin ilk terimi için yapılan işlemler aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ \left( F_{u,x} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i P_j P_k + F_u \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_{i,x} P_j P_k \right)^2 + \right. \right. \\ & \lambda^2 \left\{ \left( F_{v,y} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l P_m P_n + F_v \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{lmn} P_l P_{m,y} P_n \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left\{ \left( F_w \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{pqr} P_p P_q P_r \right)^2 + \dots \right\} \right] dXdYdZ \quad (4.28) \end{aligned}$$

Fonksiyonelin ilk teriminin  $A_{ijk}$  katsayısına göre belirli  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  ve  $\bar{k}$  için minimizasyonu ise aşağıdaki ifadeleri verir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} = & \frac{1}{2} \iiint \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ 2 \left( F_{u,x} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i P_j P_k + F_u \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_{i,x} P_j P_k \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} \left( F_{u,x} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i P_j P_k + F_u \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_{i,x} P_j P_k \right) \right\} + \dots \right] dXdYdZ \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}} = & \frac{1}{2} \iiint \left[ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ 2 \left( F_{u,x} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_i P_j P_k + F_u \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{ijk} P_{i,x} P_j P_k \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \left( F_{u,x} P_{\bar{i}} P_{\bar{j}} P_{\bar{k}} + F_u P_{\bar{i},x} P_{\bar{j}} P_{\bar{k}} \right) + \dots \right\} \right] dXdYdZ \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \iiint \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( F_{u,x}^2 P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,x} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,x} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u^2 P_{i,x} P_{i,x} P_j P_j P_k P_k \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left( F_{u,y}^2 P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,y} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,y} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u^2 P_{i,y} P_{i,y} P_j P_j P_k P_k + \frac{1}{\gamma^2} F_u^2 P_i P_i P_j P_j P_{k,z} P_{k,z} \right) \right\} dXdYdZ \right] A_{ijk} + \dots \quad (4.31)$$

Bu eşitlikte ortaya çıkan integrallerin nümerik olarak FORTRAN 77 programlama dili ile hesaplaması yapılmaktadır ve hazırlanan bilgisayar programının akış diyagramı EK-B'de verilmektedir. Tüm sonuçlar çift incelikli sayılar kullanılarak elde edilmektedir.

Plağa ait boyutsuz frekans parametresi diğer çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için aşağıdaki gibi seçilmektedir.

$$\Delta^2 = \Omega^2 \left[ \frac{b^2 D}{\pi^4} \right] \quad (4.32)$$

Burada,

$$\Omega = \omega a \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}}$$

ve

$$D = 12(1-\nu^2)/h^2$$

olarak tanımlanmaktadır.

Bu çalışmada incelenen FDM plak malzeme profilini oluşturan seramik ve metal bileşenlerin elastik özellikleri Çizelge 4.2 ile verilmektedir.

Çizelge 4.2. Seramik ve Metal malzemelerin elastik özellikleri (Elastisite modülü E (GPa), Poisson oranı  $\nu$ , kütle yoğunluğu  $\rho$ (kg/m<sup>3</sup>))

Malzeme	E	$\rho$	$\nu$
Aluminum (Al)	70	2707	0.3000
Zirconia (ZrO <sub>2</sub> )	151	3000	0.3000

Temel frekans parametrelerinin yakınsaması ele alınan üç farklı sınır koşulu için Çizelge 4.3 ile verilmektedir. Bütün doğrultulardaki terim sayıları eşittir.  $M=N=5$  terimden itibaren referans sonuçlarla oldukça uyumlu sonuçlar elde edilmektedir. Tüm durumlarda 4- ve 5- terim sonuçları arasındaki maksimum fark % 2.3'tür. Kenarlardaki sınırlandırmalar arttıkça yakınsama daha iyi olmaktadır. Çalışmadaki hassasiyeti arttırmak amacıyla bu kısımda bundan sonraki hesaplamalarda alınan terim sayısı  $I \times J \times K = 5 \times 5 \times 5$ 'tir.

Çizelge 4.3. Geleneksel FDM kare plaklarda  $a/h=5$  ve  $p=10$  için farklı sınır koşullarında boyutsuz frekans parametresinin yakınsaması

$I \times J \times K$	BBBB	ASAS	AAAA
$2 \times 2 \times 2$	1.5937	1.8049	2.6076
$3 \times 3 \times 3$	1.4662	1.4577	2.1840
$4 \times 4 \times 4$	1.3711	1.3957	2.0976
$5 \times 5 \times 5$	1.3711	1.3852	2.0880

İzotropik kare plaklarda farklı sınır koşulları için elde edilen frekans parametresi sonuçları Çizelge 4.4'te Liew vd, 1993, nin farklı  $a/h$  oranları için elde ettiği sonuçlarla karşılaştırılmaktadır. İnce plaklardan kalın plaklara sonuçların tüm sınır koşulları için oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.4. İzotropik kare plaklarda farklı sınır koşulu için boyutsuz frekans parametresinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması

a/h	Sınır Koşulu			
	Çözüm yöntemi	BBBB	ASAS	AAAA
5	Liew vd,1993	1.7758	1.7996	2.7261
	Bu çalışma	1.7748	1.8083	2.7404
10	Liew vd,1993	1.9342	2.1236	3.3215
	Bu çalışma	1.9339	2.1260	3.3481
100	Liew vd,1993	1.9993	2.2482	3.6492
	Bu çalışma	1.9974	2.2781	3.6946

Basit destekli izotropik plakta Ritz yöntemiyle elde edilen yüksek frekanslar karşı geldikleri mod dizilişleriyle birlikte farklı kenar/kenar oranları için Leissa, 1973' nın sonuçları ile Çizelge 4.5'te karşılaştırılmıştır. Buna ilaveten, basit destekli geleneksel FDM plakta Ritz yöntemiyle elde edilen yüksek frekanslar Zhao vd., 2009'nun sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.5. Basit destekli izotropik plakta farklı a/b oranları ve mod dizilişleri için temel frekans sonuçlarının karşılaştırılması

Çözüm yöntemi	a/b		
	2/3	1	3/2
<b>Mod dizilişi</b>	<b>11</b>	<b>11</b>	<b>11</b>
Leissa, 1973	14.2561	19.7392	32.0762
Bu çalışma	14.2481	19.7233	32.0625
<b>Mod dizilişi</b>	<b>12</b>	<b>21</b>	<b>21</b>
Leissa, 1973	27.4156	49.3480	61.6850
Bu çalışma	27.4592	49.4571	61.7414
<b>Mod dizilişi</b>	<b>21</b>	<b>12</b>	<b>12</b>
Leissa, 1973	43.8649	49.3480	98.6960
Bu çalışma	43.9887	49.4672	98.8939
<b>Mod dizilişi</b>	<b>22</b>	<b>22</b>	<b>22</b>
Leissa, 1973	57.0244	78.9568	128.3049
Bu çalışma	57.1402	79.0696	128.4056

Çizelge 4.6 FDM kare plaklarda BBBB sınır koşulu için boyutsuz frekans parametresinin önceki çalışmalarla karşılaştırılması ( $\Delta^2 = \Omega^2$ )

Sınır Koşulu	Mod	p=0.5		p=1		p=5	
		Bu çalışma	Zhao vd, 2009	Bu çalışma	Zhao vd, 2009	Bu çalışma	Zhao vd, 2009
BBBB	1 (11)	5.1971	5.1105	4.9507	4.8713	4.6270	4.5549
	2 (21)	12.4904	12.207	11.8999	11.633	11.0749	10.828
	3 (12)	12.4904	12.207	11.8999	11.633	11.0749	10.828
	4 (22)	17.9532	18.630	17.0944	17.748	15.1266	16.462

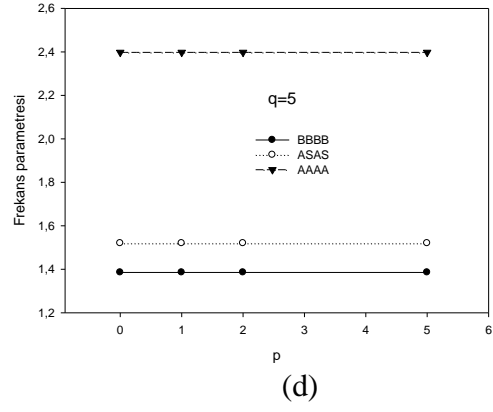
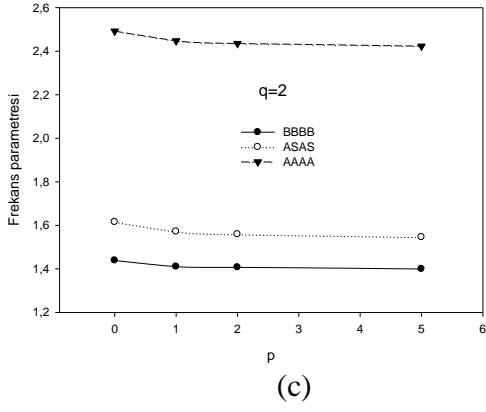
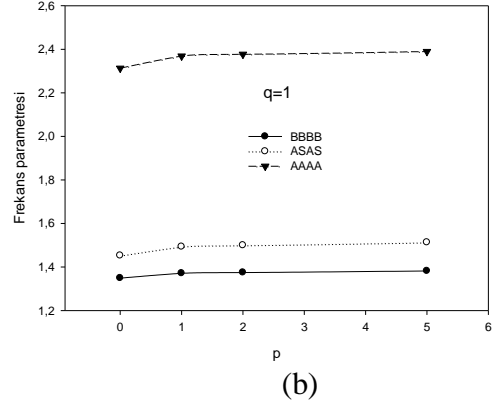
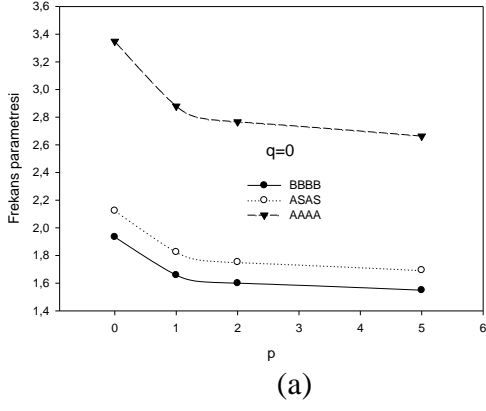


Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 ile kare plaklarda frekans parametresinin farklı sınır şartları için, sırasıyla, hacim oranı üstelleri  $p$  ve  $q$  ile değişimi verilmektedir. Böylece geleneksel FDM plaklarla 2D-FDM plaklarda aynı sınır koşulunda  $p$  ve  $q$  parametrelerinin değişiminin frekans parametresine etkisi incelenmektedir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 ile kare plaklarda frekans parametresinin farklı  $q$  değerleri için  $p$  ile ve farklı  $p$  değerleri için  $q$  ile değişimi ele alınan sınır koşulları için verilmektedir. Böylece geleneksel FDM plaklarla 2D-FDM plaklarda aynı  $p$  değerinde  $q$  üstelinin değişiminin ve aynı  $q$  değerinde  $p$  üstelinin değişiminin frekans parametresine etkisi incelenmektedir. En yüksek ve en düşük frekans parametreleri sırasıyla AAAA ve BBBB sınır koşullarında elde edilmektedir. Kenarlardaki kısıtlamalar arttıkça frekans parametresinin değeri artmaktadır. Hacim oranı üsteli  $p$ 'nin aynı değerinde  $q$  değeri arttırıldıkça frekans azalmaktadır. Bu azalma  $0 < q < 1$  aralığında daha keskindir ancak  $1 < q < 2$  aralığında frekans değerlerinde bir miktar artış gözlenmektedir ve  $q \geq 2$  değerinden itibaren frekans değerindeki azalma çok daha zayıf bir şekilde devam etmektedir ve eğri asimptotik bir hal almaktadır. Hacim oranı üsteli  $q$ 'nun aynı değerinde  $p$  değeri arttırıldıkça frekans azalmaktadır. Bu azalma  $0 < p < 1$  aralığında daha fazla gözlenmektedir. Hacim oranı üstelleri  $p$  ve değerleri birlikte düşünüldüğünde  $q \geq 5$ 'ten itibaren frekanstaki değişim  $p$  değerine karşı duyarsız hale gelmektedir.

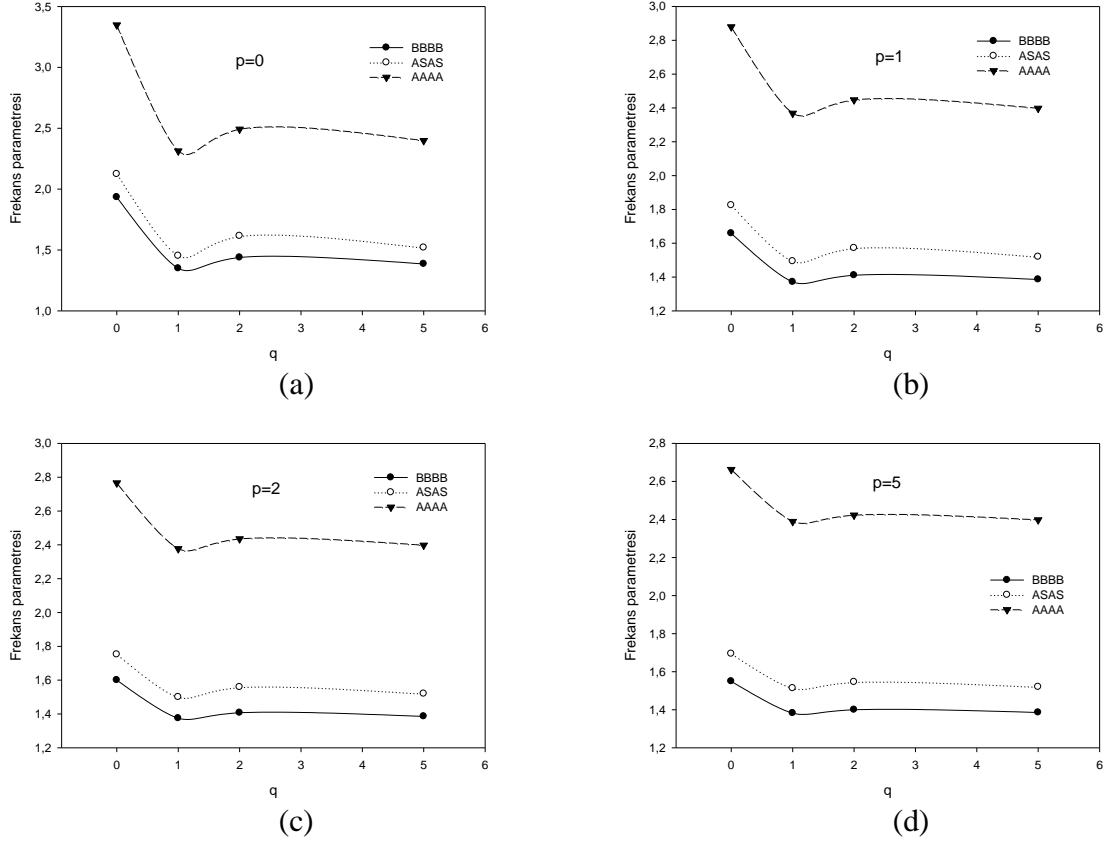
Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'te frekans parametresinin farklı  $a/b$  değerleri için, sırasıyla, hacim oranı üstelleri  $p$  ve  $q$  ile değişimi verilmektedir. Böylece 2D-FDM plaklarda aynı kenar/kenar oranında  $p$  ve  $q$  parametrelerinin değişiminin frekans parametresine etkisi incelenmektedir. Plak uzunluğu arttırıldıkça frekans değeri azalmaktadır.

Şekil 4.8'de kare plaklarda frekans parametresinin farklı  $p$  ve  $q$  değerleri için  $a/h$  ile değişimi ele alınan sınır koşulları için verilmektedir. Böylece geleneksel FDM plaklarla 2D-FDM plaklarda kenar/kalınlık oranının değişiminin farklı  $p$  ve  $q$  değerlerinde iken frekans parametresine etkisi incelenmektedir.  $a/h$  oranı arttırıldıkça frekans değeri artmaktadır.

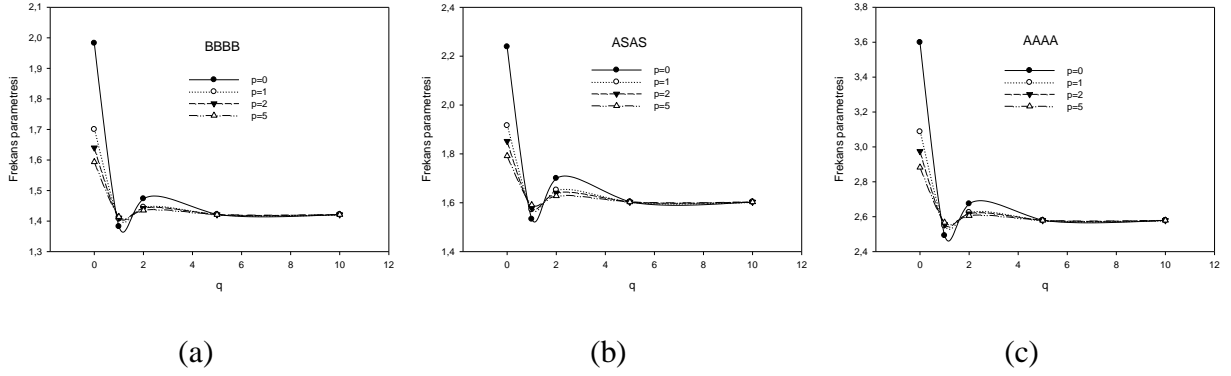
Şekil 4.9'da kare plaklarda yüksek frekans değerlerinin  $p=0$  olması halinde  $q$  üsteli ile ve  $q=0$  olması halinde  $p$  üsteli ile değişimi incelenmektedir. Yüksek frekansların  $p$  ve  $q$  değerleri ile değişimi temel frekansa benzer şekildedir. Ancak ASAS sınır koşulunda frekans değerleri BBBB ve AAAA sınır koşullarındakilere göre birbirine daha yakındır.



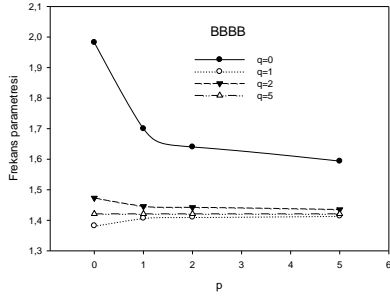
Şekil 4.2. Frekans parametresinin farklı sınır şartları için  $p$  ile değişimi ( $a/b=1$ ,  $a/h=10$ )



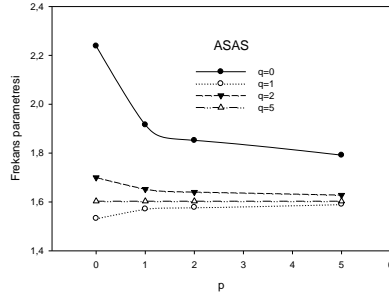
Şekil 4.3. Frekans parametresinin farklı sınır şartları için  $q$  ile değişimi ( $a/b=1$ ,  $a/h=10$ )



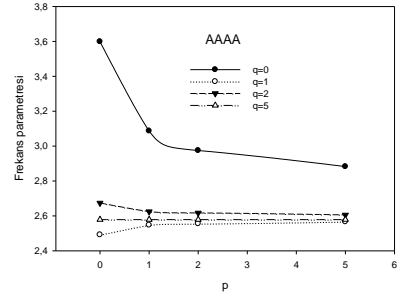
Şekil 4.4. Frekans parametresinin farklı  $p$  değerleri için  $q$  ile değişimi ( $a/b=1$ ,  $a/h=20$ )



(a)

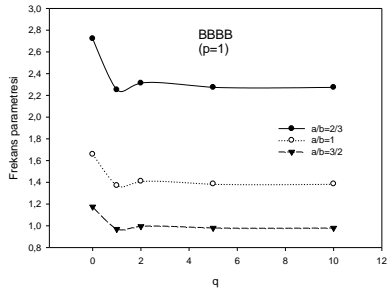


(b)

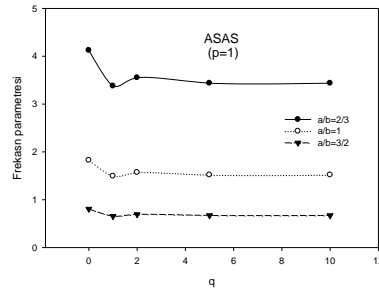


(c)

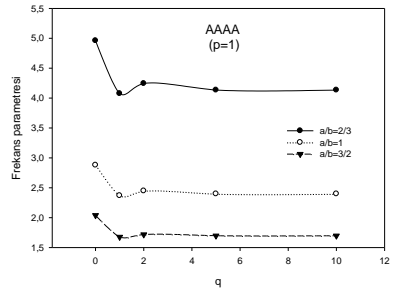
Şekil 4.5. Frekans parametresinin farklı  $q$  değerleri için  $p$  ile değişimi ( $a/b=1$ ,  $a/h=20$ )



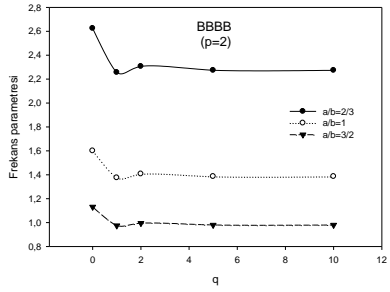
(a)



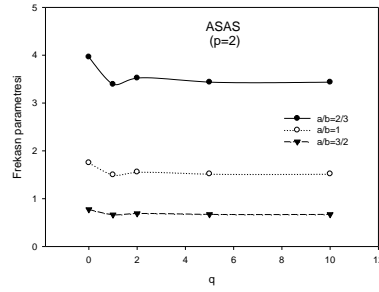
(b)



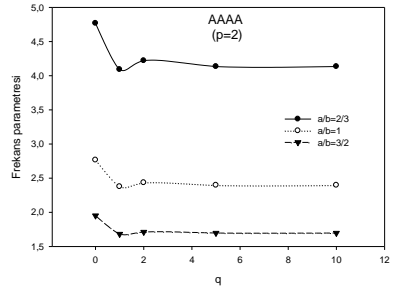
(c)



(d)

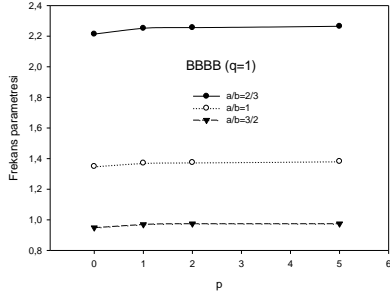


(e)

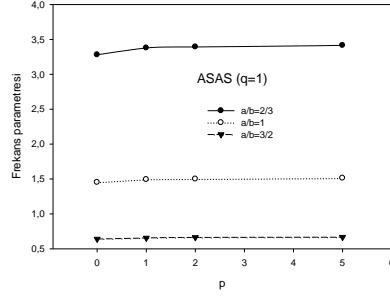


(f)

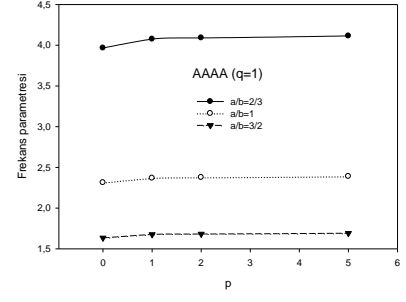
Şekil 4.6. Frekans parametresinin farklı  $a/b$  değerleri için  $q$  ile değişimi ( $a/h=10$ )



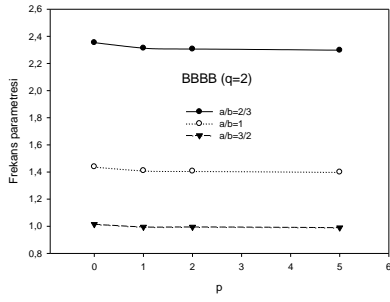
(a)



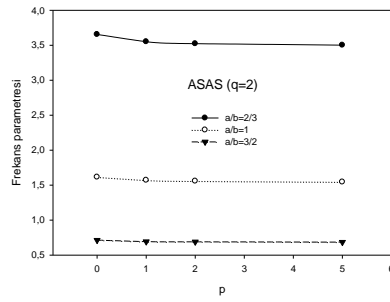
(b)



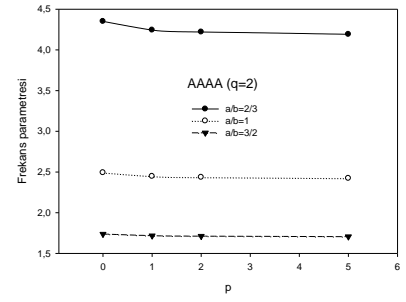
(c)



(d)

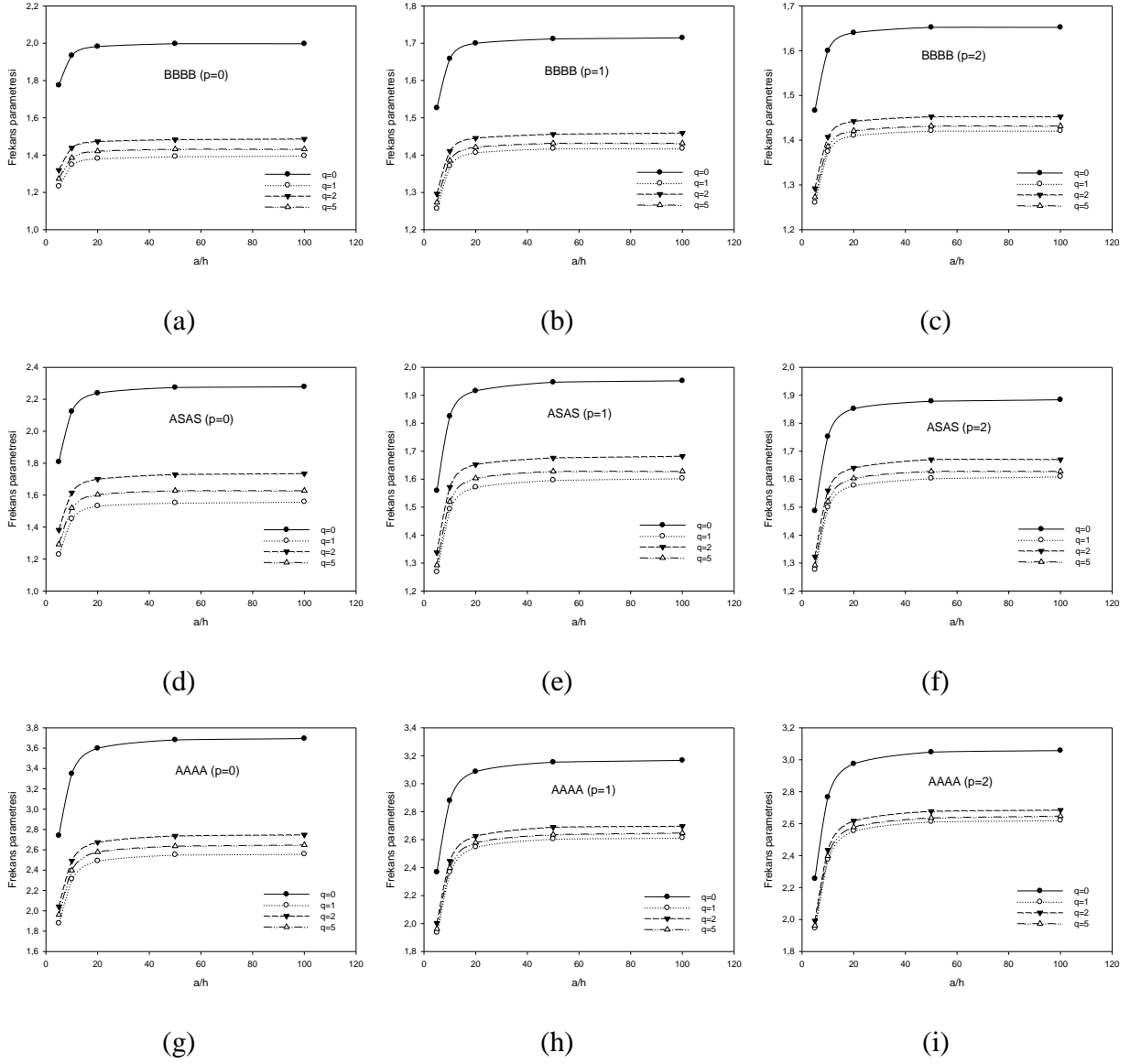


(e)

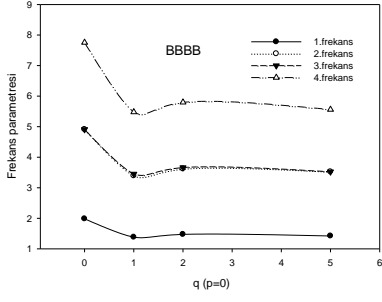


(f)

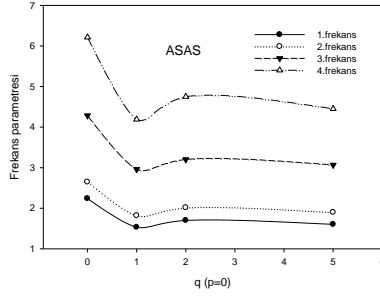
Şekil 4.7. Frekans parametresinin farklı a/b değerleri için p ile değişimi (a/h=10)



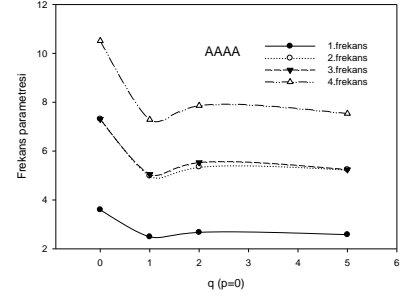
Şekil 4.8. Frekans parametresinin farklı  $q$  değerleri için  $a/h$  ile değişimi ( $a/b=1$ )



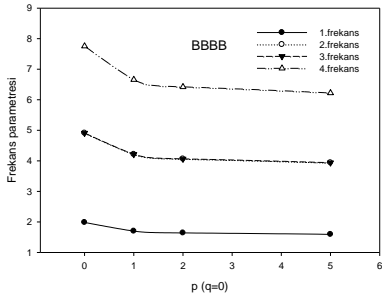
(a)



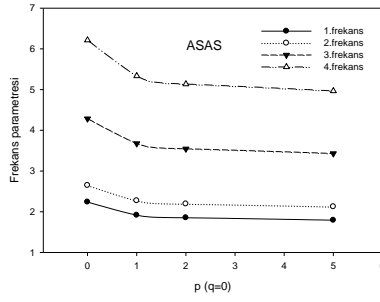
(b)



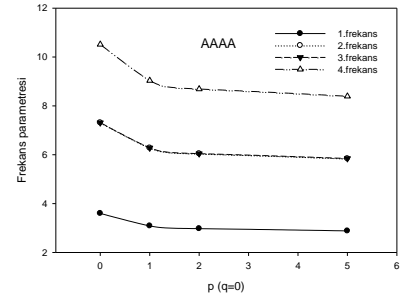
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 4.9. Yüksek frekansların (a)  $p=0$  iken hacim oranı üsteli  $q$  ile (b)  $q=0$  iken hacim oranı üsteli  $p$  ile değişimi ( $a/b=1$ ,  $a/h=20$ )

#### 4.4. 2D-FDM Plaklarda Mod Şekilleri

Bu kısımda geleneksel FDM plaklarda ve 2D-FDM plaklarda Ritz yöntemiyle 3-boyutlu teoriye göre elde edilen ilk 4 frekansa ait mod şekilleri düşey doğrultudaki yer değiştirme alanı bileşeni  $w$  için verilmektedir. Mod şekilleri (4.27) eşitliği ile verilen özdeğer probleminin ifadesinde yer alan ve özvektörlere karşılık gelen bilinmeyen katsayılarıdır. Özvektörler kısaca aşağıda verildiği gibi bulunmaktadır.

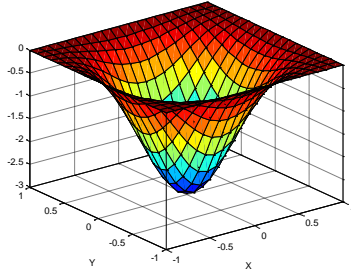
$$[[M]^{-1}[K] - \Omega^2[M][M]^{-1}][X] = [0] \quad (4.33)$$

Buradan ilk olarak özdeğerler ve dolayısıyla özdeğerlere karşılık gelen doğal frekanslar bulunmaktadır. Ele alınan doğal frekanslara karşılık gelen özvektörler ve dolayısıyla bilinmeyen katsayılar da doğal frekanslarla birlikte bulunmuş olmaktadır. Böylece bulunan katsayılar (4.20) eşitliği ile verilen yer değiştirme alanı bileşenlerinde yerine koyularak mod şekilleri çizilebilmektedir. Bu çalışmada plağın düşey doğrultudaki deformasyonlarını incelemek amacıyla düşey doğrultudaki yer değiştirme alanı bileşeni  $w$ 'nin mod şekilleri  $p$  ve  $q$  üstellerinin farklı değerlerinde ele alınan tüm sınır koşulları için çizilmektedir. Özvektörlere karşılık gelen bilinmeyen katsayıların bulunmasında ve mod şekillerinin çizilmesinde MATLAB 6.5 programından yararlanılmakta ve çizimlerde 3-boyutlu eğri çizim komutları kullanılmaktadır.

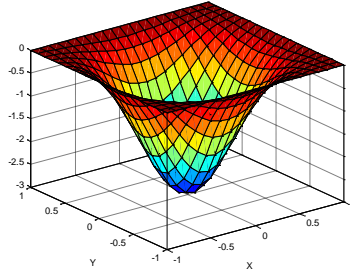
Ele alınan tüm sınır koşulları için çizilen mod şekilleri Şekil 4.10-4.15 ile verilmektedir. Şekil 4.10-4.12 ile malzeme özelliklerinin yalnızca düzlem içi doğrultu boyunca değişimi ele alınarak çizilen geleneksel FDM plakların mod şekilleri verilmektedir. 2D-FDM plakların mod şekilleri ise Şekil 4.13-4.15 ile verilmektedir. Bu çalışmada kare plaklarda Ritz yöntemiyle elde edilen ilk 4 frekans parametresi analitik çözümde sırasıyla (1,1), (2,1), (1,2), (2,2) mod dizilişlerine karşılık gelmektedir. Bu da plağın serbest titreşim esnasında meydana gelen dalga sayılarını göstermektedir. Hacim oranı üsteli  $q$  değerinin 0, 1 ve 2 değeri için çizilen bu şekillerde  $q$  değerinin artmasıyla dalga sayıları artma eğilimi göstermektedir. Ayrıca kenarlardaki kısıtlamalar arttıkça düğüm noktaları sayısı azalma eğilimi göstermekte ve kenarlardaki kısıtlamalar azaldıkça düğüm noktaları sayısı artma eğilimi göstermektedir. Geleneksel FDM plaklarda  $q$  üstelinin incelenen tüm değerlerinde



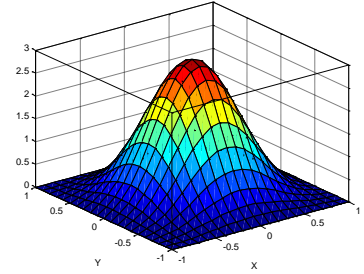
elde edilen mod şekilleri beklenildiği gibi olmaktadır. Ancak p ve q üstellerinin her ikisinin de değişimi dikkate alındığında düğüm noktaları sayısı artma eğilimi göstermektedir.



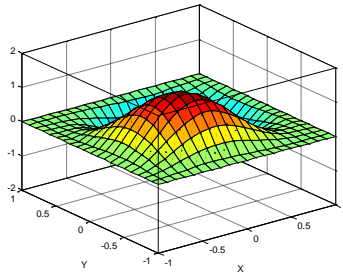
1.9824



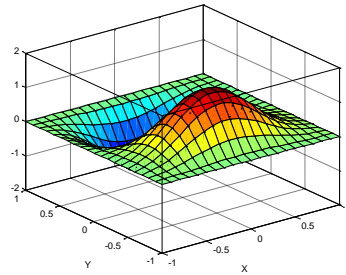
1.3820



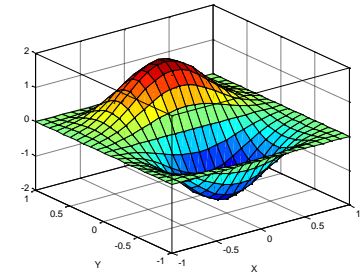
1.4730



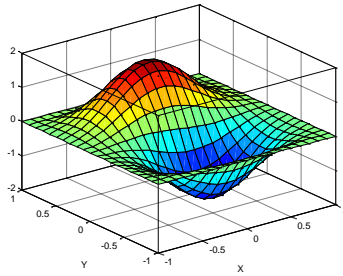
4.9091



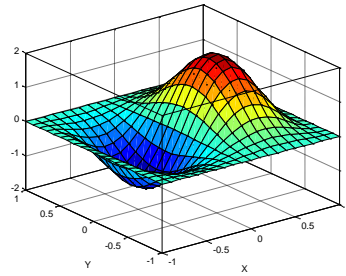
3.3926



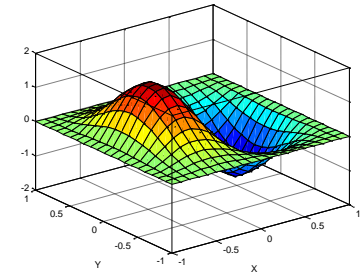
3.6207



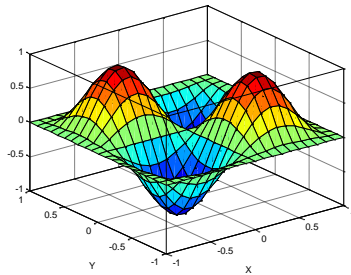
4.9091



3.4510

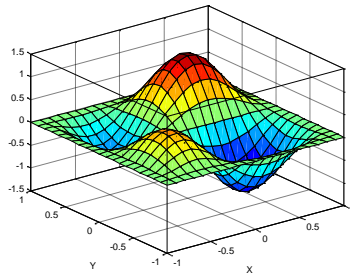


3.6619



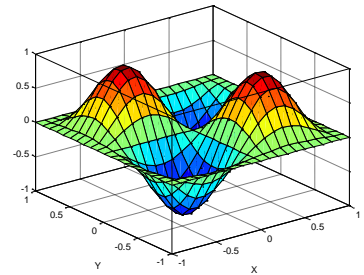
7.7556

(a)  $q=0$



5.4781

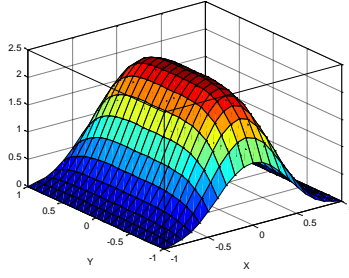
(b)  $q=1$



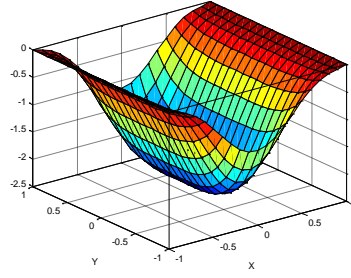
5.7974

(c)  $q=2$

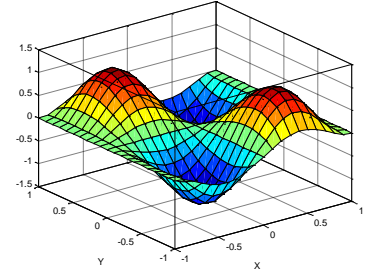
Şekil 4.10. BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ ,  $a/h=20$ ,  $p=0$ )



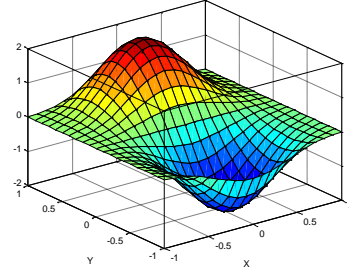
2.2383



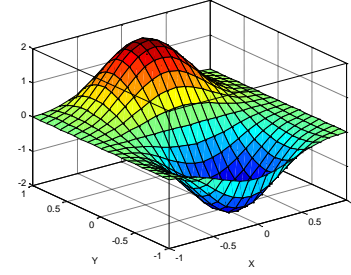
1.5329



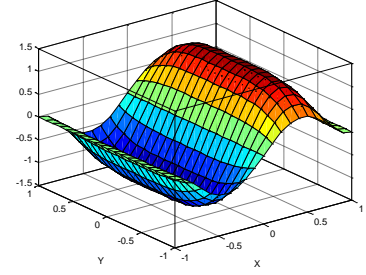
1.6999



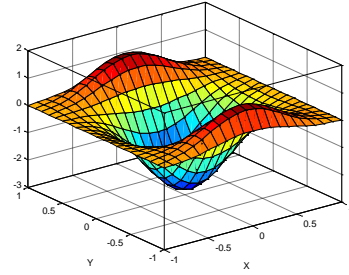
2.6476



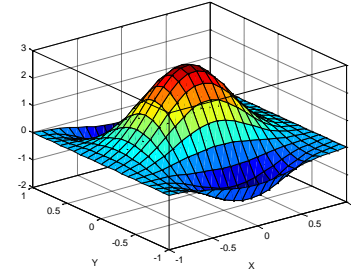
1.8193



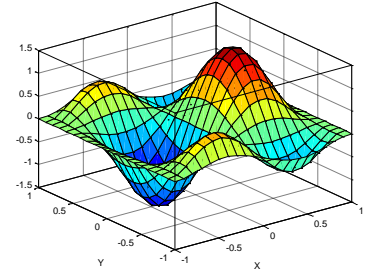
2.0149



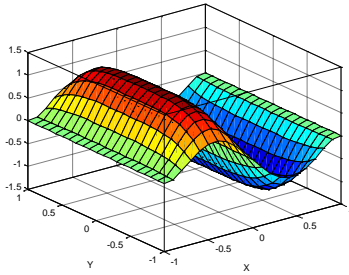
4.2848



2.9597

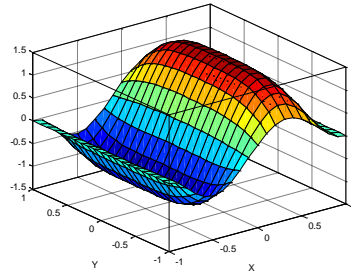


3.2031



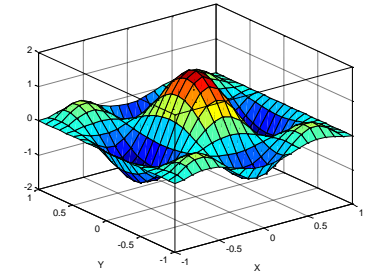
6.2136

(a)  $q=0$



4.1904

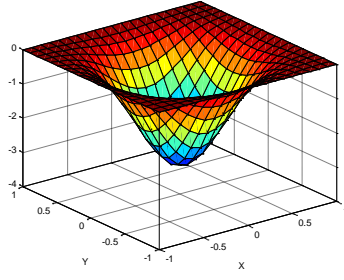
(b)  $q=1$



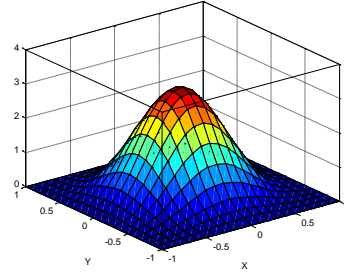
4.7497

(c)  $q=2$

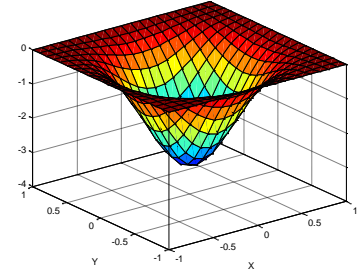
Şekil 4.11. ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ ,  $a/h=20$ ,  $p=0$ )



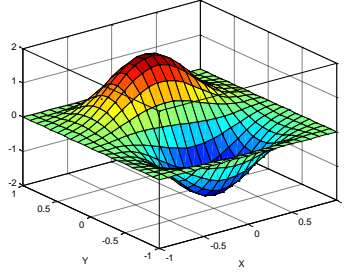
3.5986



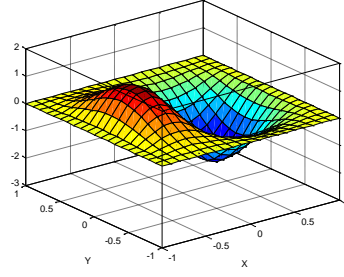
2.4919



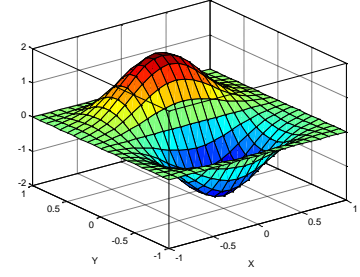
2.6739



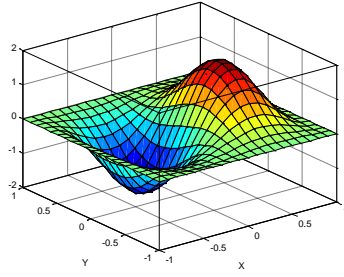
7.3115



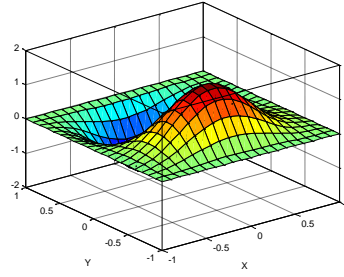
4.9809



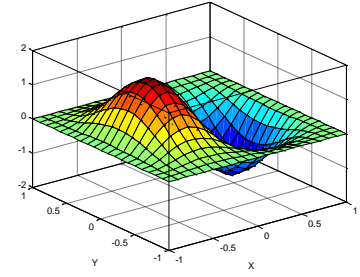
5.3534



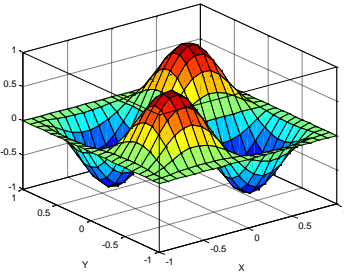
7.3115



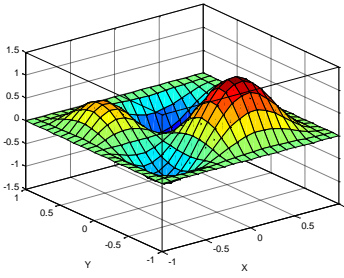
5.0507



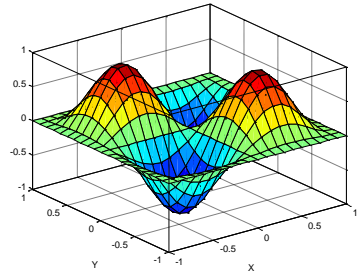
5.5326



10.5148  
(a)  $q=0$

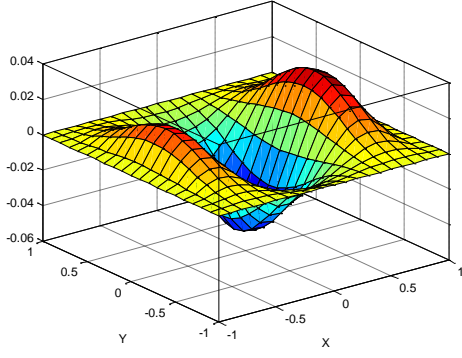


7.2876  
(b)  $q=1$

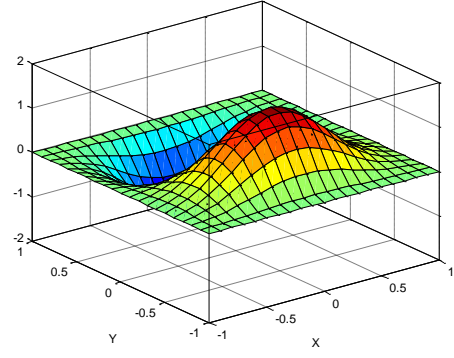


7.8618  
(c)  $q=2$

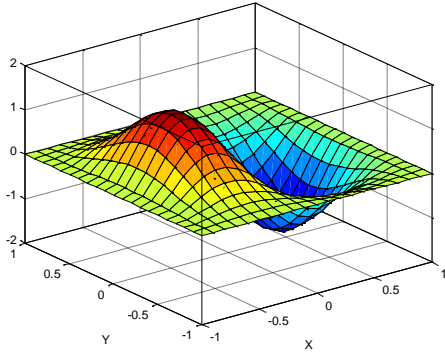
Şekil 4.12. AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1$ ,  $a/h=20$ ,  $p=0$ )



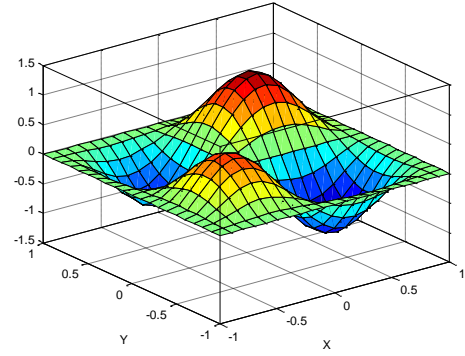
1. frekans (1.4071)



2. frekans (3.4799)



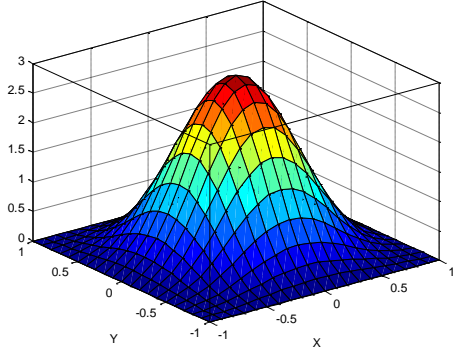
3. frekans (3.4942)



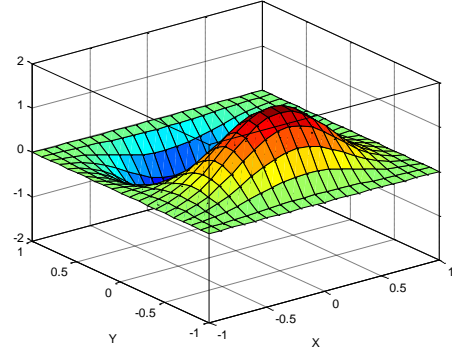
4. frekans (5.5235)

(a)  $p=1, q=1$

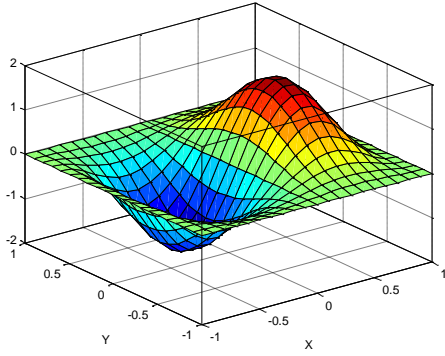
Şekil 4.13(a). BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



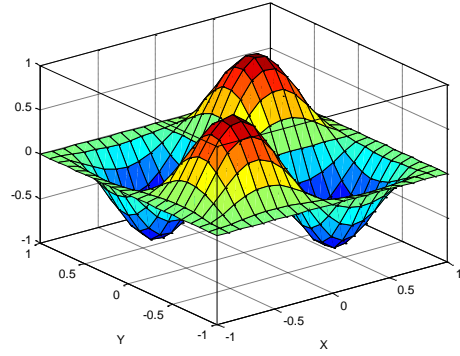
1. frekans (1.4456)



2. frekans (3.5651)



3. frekans (3.5930)

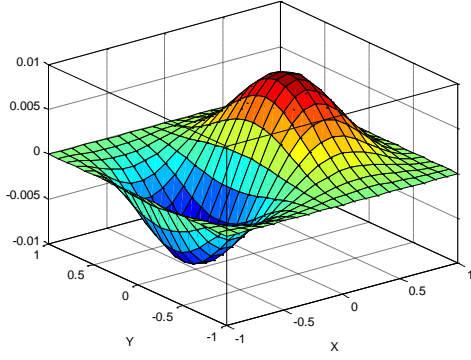


4. frekans (5.6753)

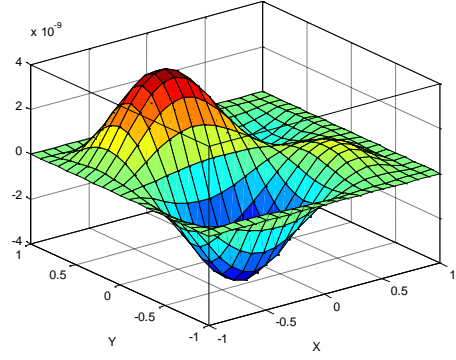
(b)  $p=1, q=2$

Şekil 4.13(b). BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20, p=1, q=1$ )

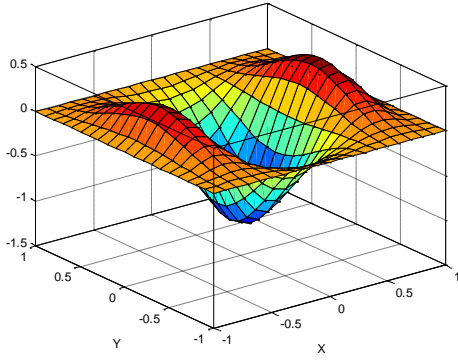




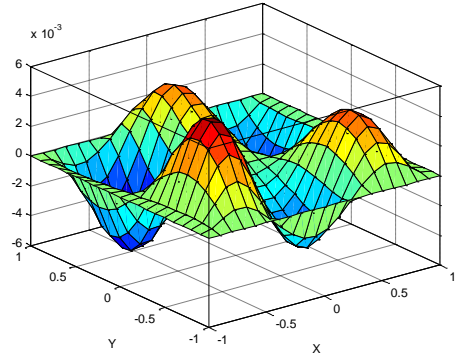
1. frekans (1.4106)



2. frekans (3.4871)



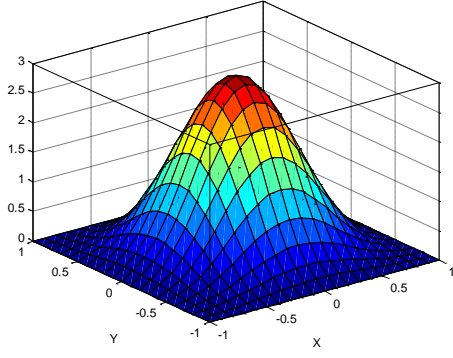
3. frekans (3.4942)



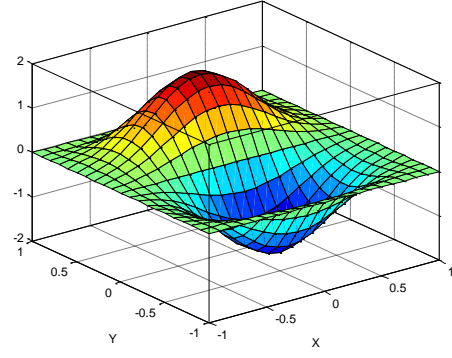
4. frekans (5.5280)

(c)  $p=2, q=1$

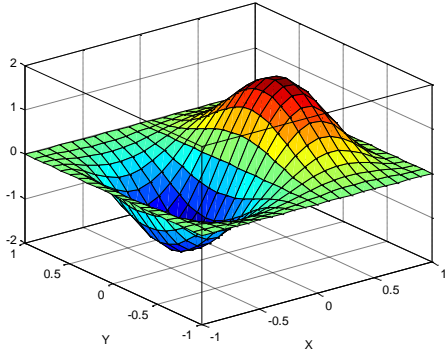
Şekil 4.13(c). BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



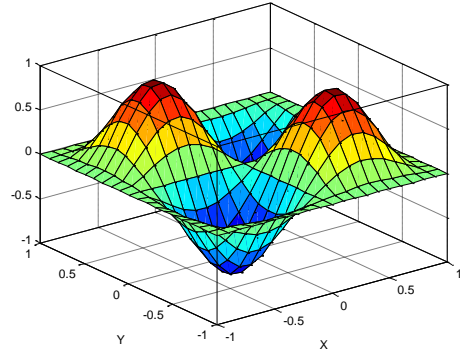
1. frekans (1.4422)



2. frekans (3.5510)



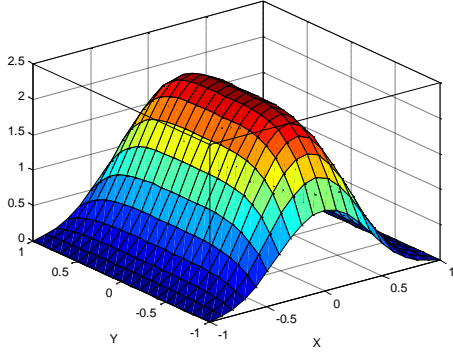
3. frekans (3.5791)



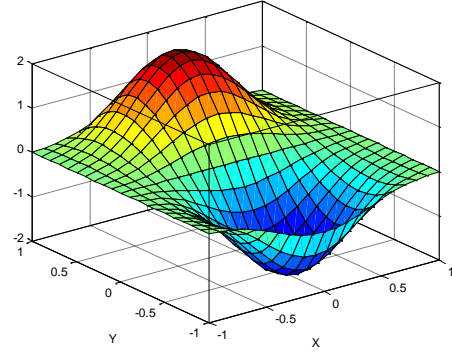
4. frekans (5.6577)

(d)  $p=2, q=2$

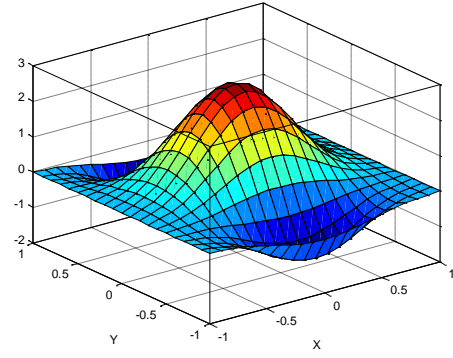
Şekil 4.13(d). BBBB sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



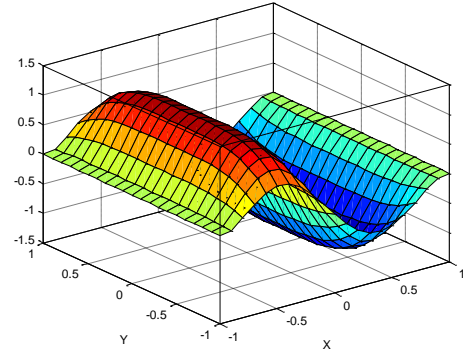
1. frekans (1.5716)



2. frekans (1.8466)



3. frekans (3.0182)

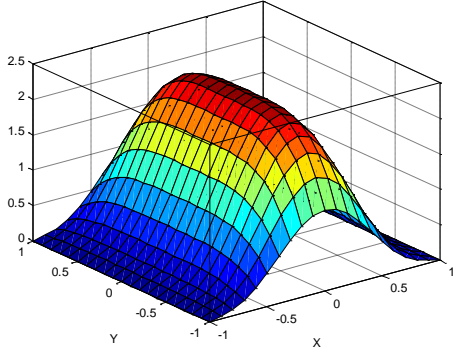


4. frekans (4.3485)

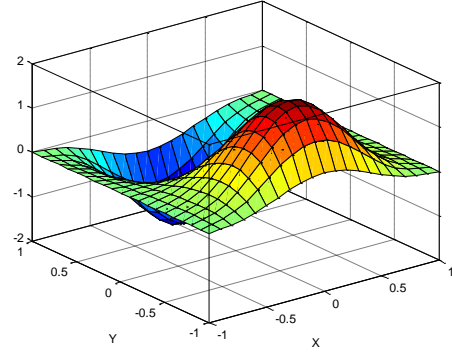
(a)  $p=1, q=1$

Şekil 4.14(a). ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )

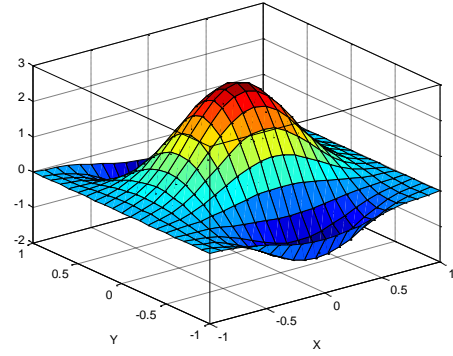




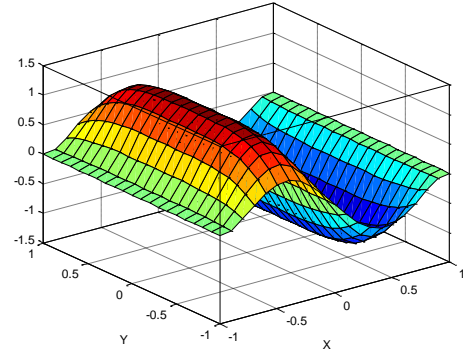
1. frekans (1.6522)



2. frekans (1.9519)



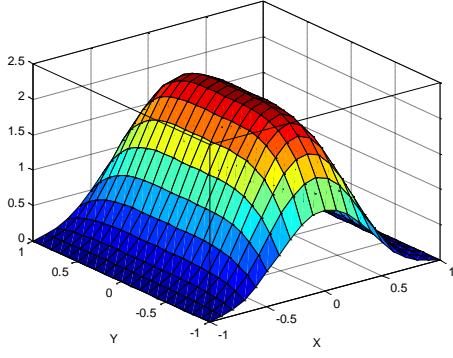
3. frekans (3.1320)



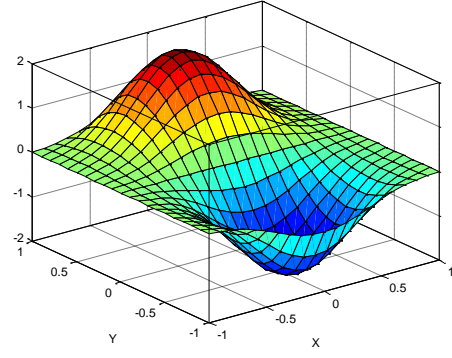
4. frekans (4.5945)

(b)  $p=1, q=2$

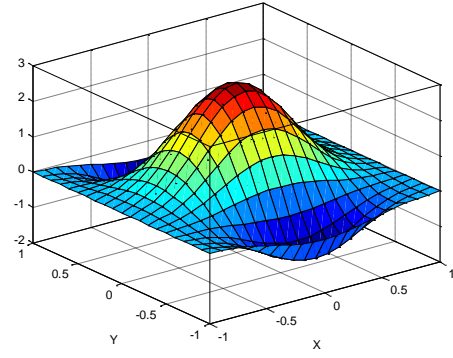
Şekil 4.14(b). ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



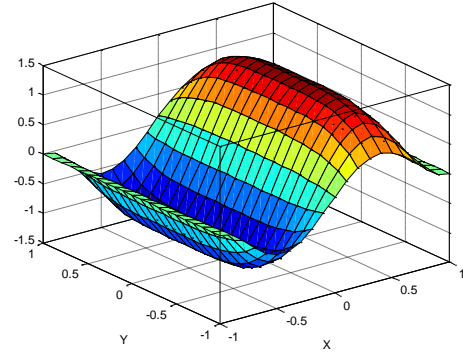
1. frekans (1.5779)



2. frekans (1.8734)



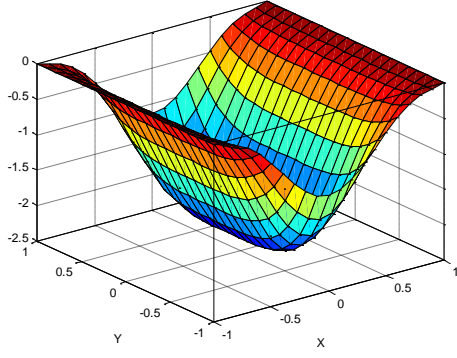
3. frekans (3.0347)



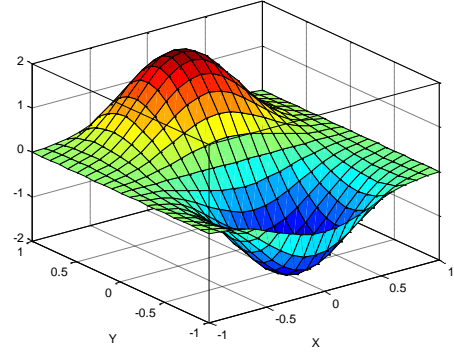
4. frekans (4.3829)

(c)  $p=2, q=1$

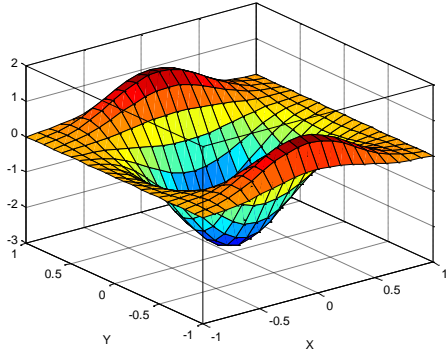
Şekil 4.14(c). ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



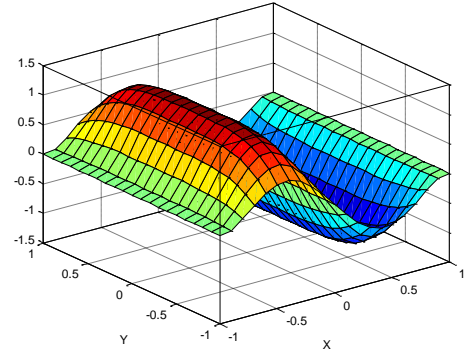
1. frekans (1.6401)



2. frekans (1.9261)



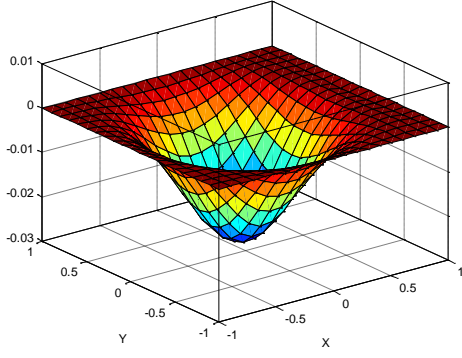
3. frekans (3.1160)



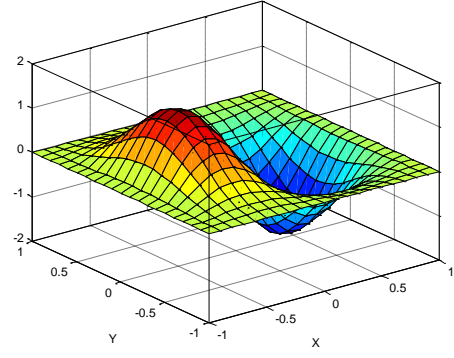
4. frekans (4.5618)

(d)  $p=2, q=2$

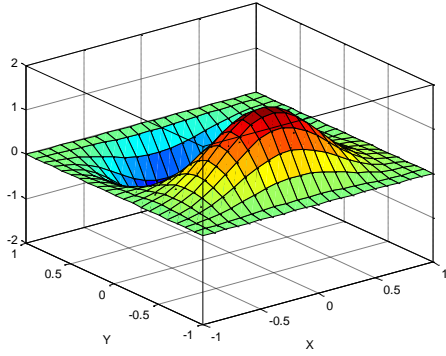
Şekil 4.14(d). ASAS sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



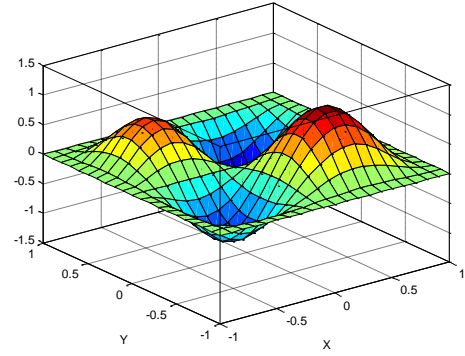
1. frekans (2.5475)



2. frekans (5.1390)



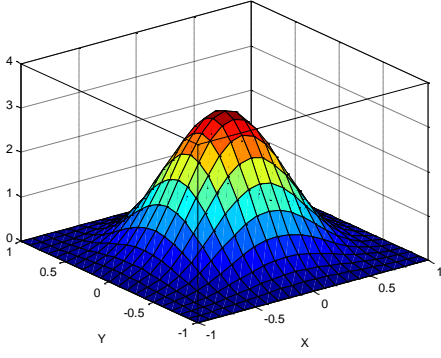
3. frekans (5.1778)



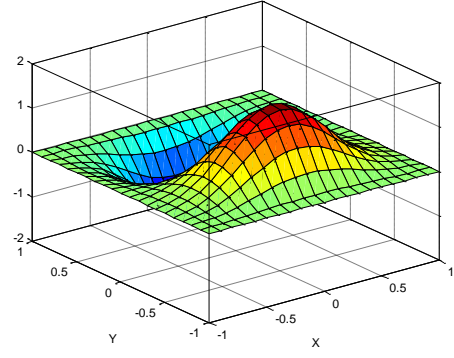
4. frekans (7.4370)

(a)  $p=1, q=1$

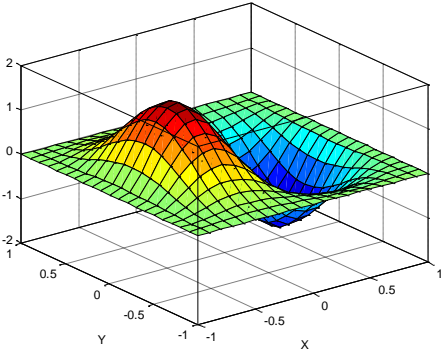
Şekil 4.15(a). AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



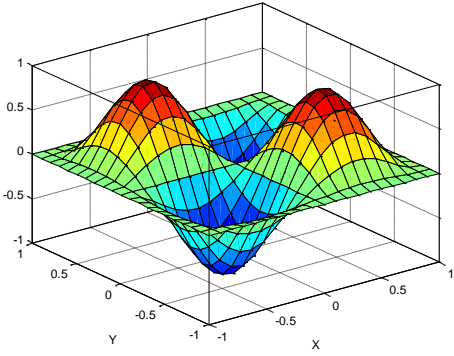
1. frekans (2.6248)



2. frekans (5.2971)



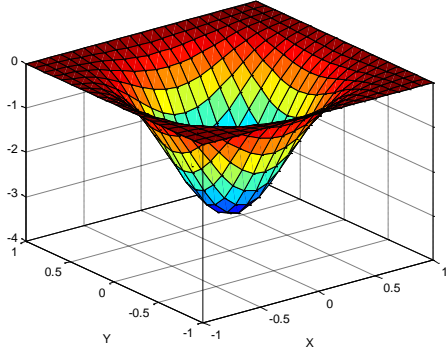
3. frekans (5.3860)



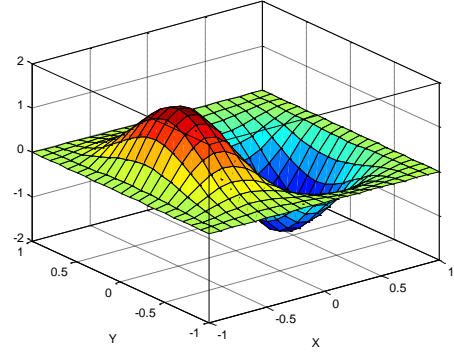
4. frekans (7.6980)

(b)  $p=1, q=2$

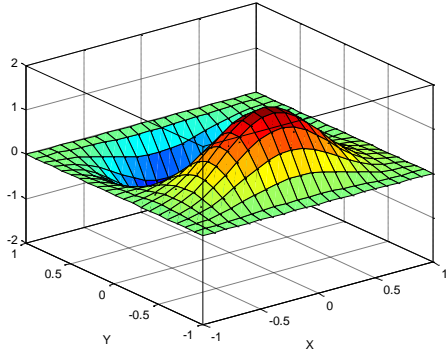
Şekil 4.15(b). AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



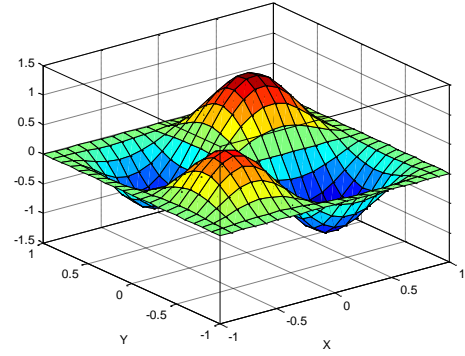
1. frekans (2.5553)



2. frekans (5.1681)



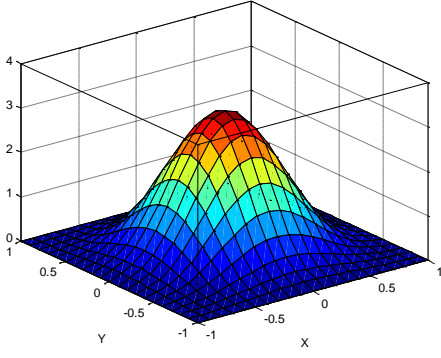
3. frekans (5.1971)



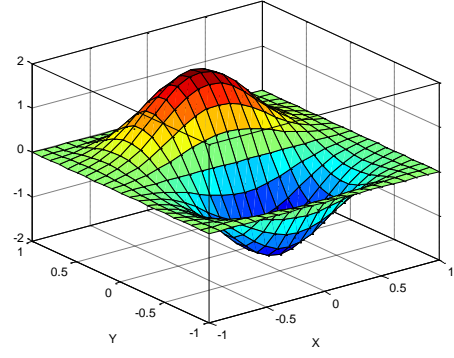
4. frekans (7.4638)

(c)  $p=2, q=1$

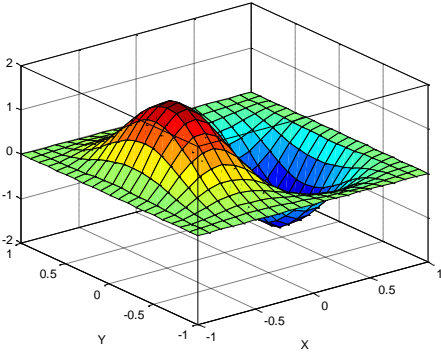
Şekil 4.15(c). AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )



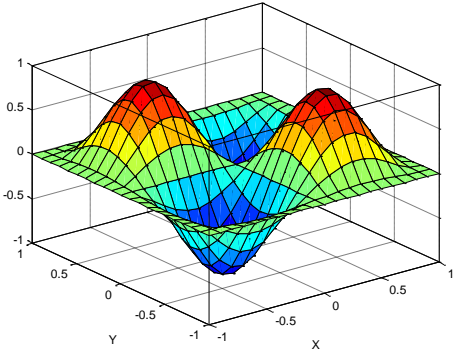
1. frekans (2.6172)



2. frekans (5.2829)



3. frekans (5.3534)



4. frekans (7.6622)

(d)  $p=2, q=2$

Şekil 4.15(d). AAAA sınır koşuluna sahip geleneksel 2D-FDM plakta yüksek frekanslar için mod şekilleri ( $a/b=1, a/h=20$ )

## 5.SONUÇ

Bu çalışmada, malzeme özellikleri xz düzlemi boyunca değişen FDM plakların serbest titreşim analizi 3-boyutlu lineer elastisite teorisi'ne göre Ritz yöntemiyle ele alınmaktadır. Ritz yönteminde kullanılan plağın geometrik sınır koşullarını sağlayan yer değiştirme alanı bileşenleri, sınır fonksiyonları ile Chebyshev polinomlarının çarpımı şeklinde alınmaktadır. Plakta BBBB, ASAS, AAAA sınır koşulları ele alınmaktadır.

Çalışmada ilk olarak malzeme özelliklerinin xz düzlemi boyunca değişimi bir kuvvet kanunuyla incelenmekte ve grafikler halinde verilmektedir. FDM plakların titreşim davranışını yöneten denklemler ve sınır şartlarının uygun bileşimleri Hamilton prensibiyle 3-boyutlu lineer elastisite teorisine dayanarak elde edilmektedir. Elde edilen sonuçlarda elastisite modülü ve yoğunluğun kalınlık doğrultusunda kuvvet kanununa göre değiştiği ve Poisson oranının sabit olduğu kabul edilmektedir.

Ritz yöntemiyle çözümde bütün doğrultulardaki terim sayıları eşit alınmaktadır ve tüm sınır koşullarında terim sayısının 4- ve 5- olması durumunda frekans sonuçları birbirine çok yakındır. Çalışmadaki hassasiyeti arttırmak amacıyla hesaplamalarda alınan terim sayısı  $I_x \times I_y \times K = 5 \times 5 \times 5$ 'tir. Kenarlardaki kısıtlamalar arttıkça yakınsama daha iyi olmaktadır. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olan izotropik plak ve geleneksel FDM sonuçlarıyla Farklı malzeme bileşimlerinin ve plak geometrisinin (kenar-kenar, kenar-kalınlık oranları), serbest titreşim frekans değerlerine etkisi incelenmektedir. Geleneksel FDM ve 2D-FDM plak sonuçları birbiriyle karşılaştırılarak değerlendirilmektedir.

Ritz yöntemiyle yapılan 2D-FDM plakların çözümünde genel olarak kenarlardaki kısıtlamalar arttıkça frekans parametrelerinin değerleri artmaktadır. En yüksek ve en düşük frekans parametreleri sırasıyla AAAA ve BBBB sınır koşullarında elde edilmektedir. Ele alınan tüm sınır koşullarında plak kalınlığı azaldıkça frekans parametreleri artmaktadır. Kenar-kalınlık oranı  $a/h=50$  değerinden itibaren frekans parametreleri daha kesin bir değere yakınsamaktadır. Plak uzunluğu arttırıldıkça frekans değeri azalmaktadır.

2D-FDM plaklarda hacim oranı üsteli  $q$  değeri arttırıldıkça genel olarak frekans azalmaktadır. Bu azalma  $0 < q < 1$  aralığında daha keskindir ve  $q \geq 2$  değerinden itibaren frekans değerindeki azalma çok daha zayıf bir şekilde devam etmektedir. Ancak  $1 < q < 2$  aralığında frekans değerlerinde bir miktar artış gözlenmektedir. Hacim oranı üsteli  $p$  değeri



arttırıldıkça frekans azalmaktadır. Bu azalma  $0 < p < 1$  aralığında daha fazla gözlenmektedir. Hacim oranı üstelleri  $p$  ve değerleri birlikte düşünülüğünde  $q \geq 5$ 'ten itibaren frekanstaki değişim  $p$  değerine karşı duyarsız hale gelmektedir.

Çalışmada yüksek frekans değerlerinin  $p=0$  olması halinde  $q$  üsteli ile ve  $q=0$  olması halinde  $p$  üsteli ile değişimi de incelenmektedir. Yüksek frekansların  $p$  ve  $q$  değerleri ile değişimi temel frekansa benzer şekildedir. Ancak ASAS sınır koşulunda frekans değerleri BBBB ve AAAA sınır koşullarındakilere göre birbirine daha yakındır.

Çalışmada son olarak Ritz yöntemiyle elde edilen ilk 4 frekansa ait mod şekilleri de verilmektedir. Düşey doğrultudaki deformasyonlar için çizilen bu mod şekilleri plağın göz önüne alınan doğal frekanstaki titreşimi sırasında düşey doğrultuda yaptığı hareketi göstermektedir.

Elde edilen sonuçlar yapılacak yeni araştırmalara kaynak olacak niteliktedir. Sonuçlar tasarımcılar tarafından kullanılabilir.

## KAYNAKLAR

- Abrate S, (2006). Free Vibration, Buckling and Static Deflections of Functionally Graded Plates. *Composites Science and Technology*, 66, 2383-2394.
- Alagöz H, Gülgeç M, Konez A, (2004). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler ve Kullanım Alanları. *Mühendis ve Makine*, Cilt: 45, Sayı: 532.
- Aydoğdu M, (1999). Kompozit Plakların Statik ve Dinamik Analizi. Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Semineri, Edirne.
- Aydoğdu M, Tımarcı T, (2001). Buckling and Vibration Analysis of Laminated Composite Plates on The Basis of a Higher Order Theory. *European Conference on Computational Mechanics*, Cracow, Poland.
- Aydoğdu M, Tımarcı T, (2001). İleri Bir Plak Teorisini Kullanarak Katmanlı Kompozit Plakların Titreşiminin İncelenmesi. 10. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Aydoğdu M, Tımarcı T, (2003). Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Square Plates with General Boundary Conditions. *Composites Science and Technology*, 63, 1061-1070.
- Aydoğdu M, (2003). Katmanlı Kompozit Dikdörtgen Plakların Burkulma ve Titreşim Analizi. Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Edirne.
- Aydoğdu M, Ayvaçiçeği B, Eruslu Ö, (2004). Basit Destekli Dik Katmanlı Kompozit Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi. Havacılıkta İleri Teknolojiler ve Uygulamaları Sempozyumu, HİTEK'04, Hava Harp Okulu, Yeşilyurt, İstanbul.
- Aydoğdu M., (2005). Katmanlı Dikdörtgen Kompozit Plakların Titreşiminin Ritz Yöntemi ile 3-Boyutlu Analizi. XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, Antakya.
- Aydoğdu M, (2006). Conditions for Functionally Graded Plates to Remain Flat Under In-Plane Loads by Classical Plate Theory. *Composite Structures*, baskıda.
- Aydoğdu M, Taşkın V, (2007). Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges. *Materials & Design*, 28, 1651-1656.
- Bakioğlu M, (2004). Sayısal Analiz. İTÜ İnşaat Fakültesi, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Batra RC, Jin J (2004). Natural frequencies of a functionally graded anisotropic rectangular plate. *J.Sound Vib*,282 (2005) 509-516
- Batra RC, Qian LF (2004). Desing of bidirectional functionally graded plate for optimal natural frequencies. *J.Sound Vib*, 280 (2005) 415-424
- Bhat RB, (1985). Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Ritz Method. *Journal of Sound and Vibration* 102, 4, 493-499.

- Bozkurt A, (2003). Chebyshev Polinomları ve Onların Yakınsaklık Özellikleri. Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Mersin.
- Chen CS, (2004). Nonlinear Vibration of a Shear Deformable Functionally Graded Plate. *Composite Structures*, 68, 295-302.
- Dickinson SM, Di Blasio A, (1986). On The Use of Orthogonal Polynomials in The Rayleigh-Ritz Method for The Study of The Flexural Vibration and Buckling of Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 108, 1, 51-62.
- Dimitoka K, Yıldırım B, (2003). Katmanlı ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden Yapılmış Termal Bariyer Kaplamalarındaki Termal Gerilimlerin Sonlu Elemanlar Metodu ile Hesaplanması. *Mühendis ve Makine*, Cilt:44, Sayı:525.
- Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Jorge RMN, (2006). Natural Frequencies of Functionally Graded Plates by a Meshless Method. *Composite Structures*, 75, 593-600.
- Fox L, Parker IB, (1968). *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. Oxford University Press, London, s.205.
- Gibson RF, (1994). *Principles of Composite Material Mechanics*. McGraw-Hill International Editions.
- Jones RM, (1975). *Mechanics of Composite Materials*. New York, Hemisphere.
- Kantorovich LV, Krylov VI, (1958). *Approximate Methods of Higher Analysis*. Noordhoff Ltd. Groningen.
- Kieback B, Neubrand A, Riedel H, (2003). Processing Technique for Functionally Graded Materials. *Materials Science and Engineering*, A362, 81-105.
- Konez A, Alagöz H, Topal S, Gülgeç M, (2005). Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Üretim Teknikleri ve Kullanım Alanları. *Mühendis ve Makine*, Cilt:46, Sayı:547.
- Koizumi M, (1996). FGM Activities in Japan. *Composites Part B*, PII, (96) 00016-9, 1359-8368. B
- Koizumi M, (1997). FGM Activities in Japan. *Composites Part B*, 286, 1-4.
- Kim YW, (2005). Temperature Dependent Vibration Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 284, 531-549.
- Langhaar HL, (1962). *Energy Methods in Applied Mechanics*. John Wiley and Sons.
- Leissa AW, (1969). *Vibration of Plates*. US Government Printing Office, Washington, DC, NASA SP-160, 331-340.

- Leissa AW, (1973). The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 31, 257-293.
- Leissa AW, Narita Y, (1989). Vibration Studies for Simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Plates. *Composite Structures*, 12, 113-132.
- Liew KM, Hung KC, Lim MK, (1994). Three-Dimensional Vibration of Rectangular Plates: Variance of Simple Support Conditions and Influence of In-Plane Inertia. *International Journal of Solids and Structures*, 31, 3233-3247.
- Liew KM, Hung KC, Lim MK, (1993). A Continuum Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Rectangular Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 30, 3357-3379.
- Liew KM, Teo TM (1998). Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method. *Journal of sound and vibration* (1999) 220(4), 577-599
- Meirovitch L, (1975). *Elements of Vibration Analysis*. New York, McGraw-Hill Book Comp.
- Mertan B, (2001). Free vibration analysis of functionally graded simply supported rectangular thin plates. *Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul.
- Na KS, Kim JW, (2003). Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Materials. *Composites: Part B*, baskıda.
- Nemat-Alla M, (2003). Reduction of Thermal Stresses by Developing Two-Dimensional Functionally Graded Materials. *International Journal of Solids and Structures*.
- Pradhan SC, Loy CT, Lam KY, Reddy JN, (2000). Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Various Boundary Conditions. *Applied Acoustics*, 61, 111-129.
- Praveen GN, Reddy JN, (1997). Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates. *International Journal of Solids and Structures*, Vol.35, No:33, 4457-4476.
- Reddy, JN, (2000). Analysis of Functionally Graded Plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 663-684.
- Shabana YM, Noda N, (2000). Thermo-Elasto-Plastic Stresses in Functionally Graded Materials Subjected to Thermal Loading Taking Residual Stresses of The Fabrication Process into Consideration. *Composites: Part B*, 32, 111-121.
- Soldatos KP, Timarci T, (1993). A Unified Formulation of Laminated Composite, Shear Deformable, Five-Degrees-of-Freedom Cylindrical Shell Theories. *Composite Structures*, 25, 165-171.

- Srinivas S, Rao CVJ, Rao AK, (1970). An Exact Analysis for Vibration of Simply Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, 12, 187-199.
- Şahin Y, (2000). *Kompozit Malzemelere Giriş*. Gazi Üniversitesi, Gazi Kitabevi, Ankara.
- Şekeroğlu B, (2003). *Chebyshev Polinomları ve Bazı Uygulamaları*. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara.
- Talha M (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling* 34 (2010) 3991-4011
- Tameroğlu S, (1991). *Elastisite Teorisi- Çözüm Yöntemleri ve Bazı Matematiksel Teknikler*. İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- Tameroğlu S, (1991). *Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler*. İTÜ Kütüphanesi Yayınları, Sayı 1463, İstanbul.
- Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S, (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, New York, 2nd Edition.
- Timoshenko SP, Gere JM, (1963). *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill Book Company.
- Uymaz B, Aydoğdu M, (2007). Three-Dimensional Vibration Analysis of Functionally Graded Plates Under Various Boundary Conditions. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 26, 1847-1863, SAGE Publications, Los Angeles, London, New Delhi and Singapore.
- Uymaz B, Aydoğdu M, (2007). Vibration Analysis of Functionally Graded Plates with Simply Supported Edge Condition. 4. Ankara International Aerospace Conference, METU, Ankara.
- Vel SS, Batra RC, (2002). Three-Dimensional Analysis of Transient Thermal Stresses in Functionally Graded Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 7181-7196.
- Vel SS, Batra RC, (2003). Three-Dimensional Exact Solution for The Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, baskıda.
- Whitney JM, (1987). *Structural Analysis of Laminated Plates*. Lancaster, Pennsylvania: Technomic.
- Woo J, Meguid SA, (2000). Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7409-7421.
- Yang J, Shen HS, (2001). Dynamic Response of Initially Stressed Functionally Graded Rectangular Thin Plates. *Composite Structures*, 54, 497-508.

- Yang J, Kitipornchai S, Liew KM, (2003). Large Amplitude Vibration of Thermo-Electro-Mechanically Stressed FGM Laminated Plates. *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*, 192, 3861-3885.
- Yıldırım B, Dımitoka K, (2003). Katmanlı ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerden Yapılmış Termal Bariyer Kaplamalardaki Termal Gerilimlerin Sonlu Elemanlar Metodu ile Hesaplanması. *Mühendis ve Makine*, 525, 34-42.
- Zenkour A, (2005). A Comprehensive Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates: Part 2- Buckling and Free Vibration. *International Journal of Solids and Structures*, 42, 5243-5258.
- Zhao X, Lee YY, Liew KM (2008). Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *Journal of Sounds and Vibration*, 319 (2009) 918-939
- Zhou D, Cheung YK, Au FTK, Lo SH, (2002). Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Rectangular Plates Using Chebyshev Polynomial and Ritz Method. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 6339-6353.
- Zhou D, Cheung YK, Lo SH, Au FTK, (2003). 3D Vibration Analysis of Solid and Hollow Circular Cylinders via Chebyshev-Ritz Method. *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*, 192, 1575-1589.
- Zhou D, Lo SH, Au FTK, Cheung YK, Liu WQ, (2006). 3D Vibration Analysis of Skew Thick Plates Using Chebyshev-Ritz Method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48, 1481-1493.

## EK-A

### GENEL SINIR ŞARTLARI İÇİN ÜÇ BOYUTLU TEORİYE GÖRE RİTZ YÖNTEMİNDEKİ MATRİS ELEMANLARI

$$[K - \Omega^2 M][X] = 0$$

$$K_{11} = \iiint E(Z) \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( F_{u,x}^2 P_i P_i P_j P_j P_k P_k P_k + F_u F_{u,x} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,x} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u^2 P_{i,x} P_{i,x} P_j P_j P_k P_k \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left( F_{u,y}^2 P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,y} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,y} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u F_{u,y} P_i P_i P_j P_j P_k P_k + F_u^2 P_{i,y} P_{i,y} P_j P_j P_k P_k + \frac{1}{\gamma^2} F_u^2 P_i P_i P_j P_j P_{k,z} P_{k,z} \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{12} = \iiint E(Z) \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \left( F_{u,x} F_{v,y} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_{u,x} F_v P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_u F_{v,y} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_u F_v P_{i,x} P_{i,x} P_m P_m P_n P_n \right) + \frac{1}{2} \left( F_{u,y} F_{v,x} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_u F_{v,x} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_{u,y} F_v P_{i,x} P_{i,x} P_m P_m P_n P_n + F_u F_v P_{i,x} P_{i,x} P_m P_m P_n P_n \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{13} = \iiint E(Z) \frac{\lambda}{\gamma} \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \left( F_{u,x} F_w P_p P_i P_q P_j P_r P_k P_k + F_u F_w P_p P_{i,x} P_q P_j P_r P_k P_k \right) + \frac{1}{2} \left( F_u F_{w,x} P_p P_i P_q P_j P_r P_k P_k + F_u F_w P_{p,x} P_{i,x} P_q P_j P_r P_k P_k \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{21} = \iiint E(Z) \left\{ \frac{\nu}{1-2\nu} \left( F_{u,x} F_{v,y} P_i P_i P_j P_j P_m P_m P_n P_n + F_{u,x} F_v P_i P_i P_j P_j P_m P_m P_n P_n + F_u F_{v,y} P_i P_i P_j P_j P_m P_m P_n P_n + F_u F_v P_{i,x} P_{i,x} P_j P_j P_m P_m P_n P_n \right) + \frac{1}{2} \left( F_{u,y} F_{v,x} P_i P_i P_j P_j P_m P_m P_n P_n + F_{u,y} F_v P_{i,x} P_{i,x} P_j P_j P_m P_m P_n P_n + F_u F_{v,x} P_i P_i P_j P_j P_m P_m P_n P_n + F_u F_v P_{i,x} P_{i,x} P_j P_j P_m P_m P_n P_n \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{22} = \iiint E(Z) \left\{ \lambda^2 \left( \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left( F_{v,y}^2 P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_v F_{v,y} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_v F_{v,y} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_v^2 P_{i,y} P_{i,y} P_m P_m P_n P_n \right) + \frac{1}{2\gamma^2} \left( F_v^2 P_i P_i P_m P_m P_{n,z} P_{n,z} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( F_{v,x}^2 P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_v F_{v,x} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_v F_{v,x} P_i P_i P_m P_m P_n P_n + F_v^2 P_{i,x} P_{i,x} P_m P_m P_n P_n \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{23} = \iiint E(Z) \left\{ \frac{\lambda^2}{\gamma} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \left( F_{v,y} F_w P_p P_i P_q P_m P_r P_n P_n + F_v F_w P_p P_i P_q P_m P_r P_n P_n \right) + \frac{1}{2} \left( F_v F_{w,y} P_p P_i P_q P_m P_r P_n P_n + F_v F_w P_{p,y} P_{i,y} P_q P_m P_r P_n P_n \right) \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{31} = \iiint E(Z) \left\{ \frac{\lambda}{\gamma} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \left( F_{u,x} F_w P_i P_{\bar{p}} P_j P_{\bar{q}} P_k P_{\bar{r},z} + F_u F_w P_{i,x} P_{\bar{p}} P_j P_{\bar{q}} P_k P_{\bar{r},z} \right) + \frac{1}{2} \left( F_u F_{w,x} P_i P_{\bar{p}} P_j P_{\bar{q}} P_{k,z} P_{\bar{r}} + F_u F_w P_i P_{\bar{p},x} P_j P_{\bar{q}} P_{k,z} P_{\bar{r}} \right) \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{32} = \iiint E(Z) \left\{ \frac{\lambda^2}{\gamma} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \left( F_{v,y} F_w P_l P_{\bar{p}} P_m P_{\bar{q}} P_n P_{\bar{r},z} + F_v F_w P_l P_{\bar{p}} P_{m,y} P_{\bar{q}} P_n P_{\bar{r},z} \right) + \frac{1}{2} \left( F_v F_{w,y} P_l P_{\bar{p}} P_m P_{\bar{q}} P_{n,z} P_{\bar{r}} + F_v F_w P_l P_{\bar{p}} P_m P_{\bar{q},y} P_n P_{\bar{r}} \right) \right) \right\} dZ dY dX$$

$$K_{33} = \iiint E(Z) \left\{ \lambda^2 \left( \frac{1-\nu}{\gamma^2(1-2\nu)} \left( F_w^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r},z} + \frac{1}{2} \left( F_{w,y}^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,y} P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q},y} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,y} P_p P_{\bar{p}} P_{q,y} P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w^2 P_p P_{\bar{p}} P_{q,y} P_{\bar{q},y} P_r P_{\bar{r}} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( F_{w,x}^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,x} P_p P_{\bar{p},x} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w F_{w,x} P_p P_{\bar{p},x} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} + F_w^2 P_{p,x} P_{\bar{p},x} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} \right) \right) \right\} dZ dY dX$$

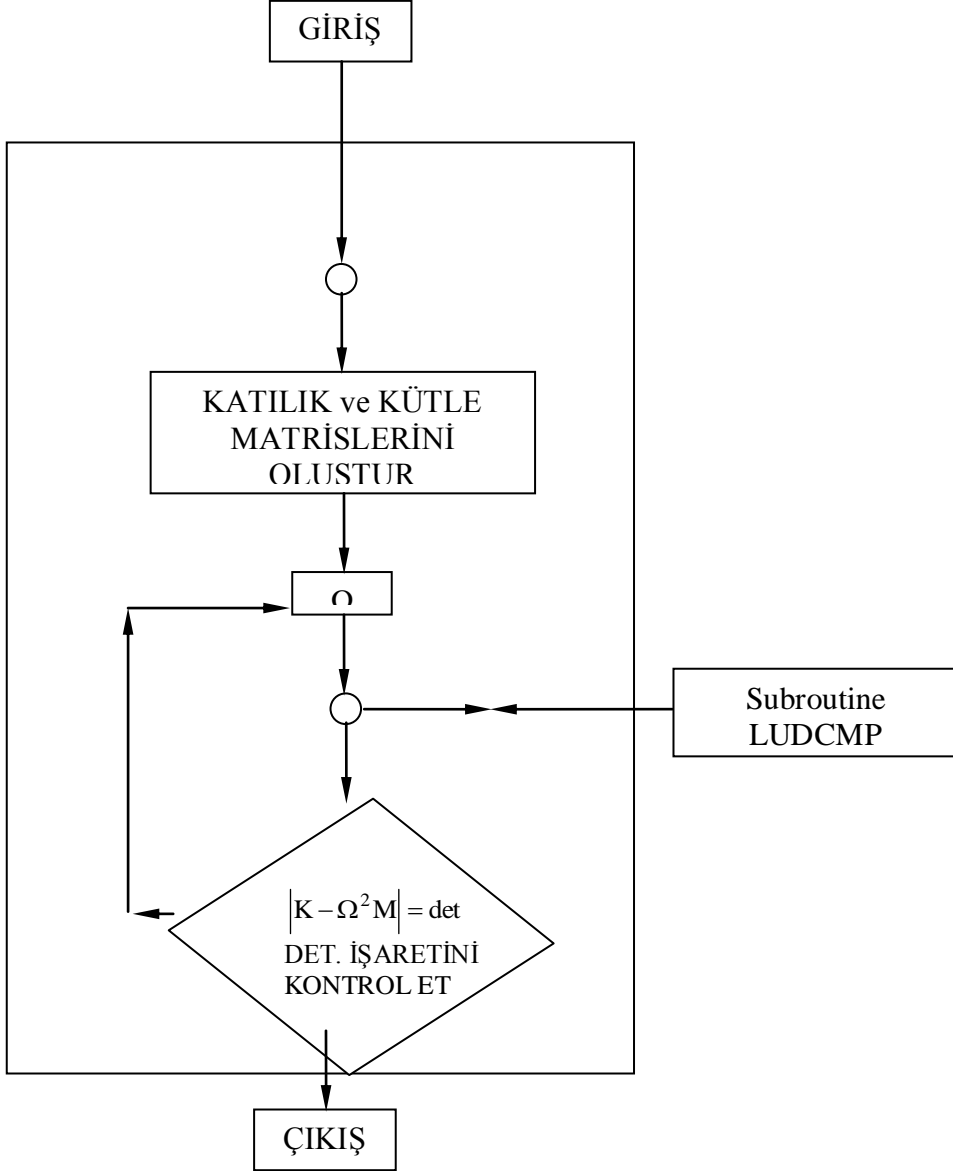
$$M_{11} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4} \left( F_u^2 P_i P_j P_k P_{\bar{k}} \right) dZ dY dX$$

$$M_{22} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4} \left( F_v^2 P_l P_m P_{\bar{m}} P_n P_{\bar{n}} \right) dZ dY dX$$

$$M_{33} = \iiint \frac{(1+\nu)}{4} \left( F_w^2 P_p P_{\bar{p}} P_q P_{\bar{q}} P_r P_{\bar{r}} \right) dZ dY dX$$



**EK-B**  
**RİTZ YÖNTEMİNDE KULLANILAN**  
**BİLGİSAYAR PROGRAMI AKIŞ DİYAGRAMI**



GİRİŞ	a/h (kenar-kalınlık )oranları p (hacim oranı üsteli) değerleri Malzeme özellikleri
Subroutine LUDCMP	Determinant hesaplar (Numerical recipes) (4.36 ve 4.42 denklemleri)
ÇIKIŞ	Determinantın işaret değiştirdiği değer serbest titreşim frekans parametresi

## ÖZGEÇMİŞ

Caner PİREN 1986 yılında Edirne-Uzunköprü’de doğdu. İlkokul ve Ortaokul eğitimini Tekirdağ’da tamamladıktan sonra Tekirdağ Anadolu Lisesini kazanarak eğitimine burada devam etti. Daha sonra 2005 Yılında Erciyes Üniversitesi Yozgat Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliğinde üniversite öğrenimine başladı. 2009 yılında Makine Mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Makine Mühendisliği anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2010-2011 yılları arası Göçmenler Oto Çerçeve Al. San Tic. A.Ş ‘de Mühendislik Birimde çalıştı. 2011 Temmuz’un dan itibaren Koleksiyon Mobilya A.Ş Ürün Mühendisliği departmanında çalışmaktadır.