YÜKSEK BOYUTLU, STATİK, SİLİNDİRSEL SİMETRİK UZAY-ZAMANLARDA EINSTEIN-MAXWELL ÇÖZÜMLERİ

Pınar KİREZLİ

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Dilek Kazıcı

Eş Danışman: Doç. Dr. Özgür Delice

Haziran 2011

T.C.
NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK BOYUTLU, STATİK, SİLİNDİRSEL SİMETRİK UZAY-ZAMANLARDA EINSTEIN-MAXWELL ÇÖZÜMLERİ

Pınar KİREZLİ
FİZİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. DİLEK KAZICI
EŞ DANIŞMAN: Doç. Dr. ÖZGÜR DELİCE

TEKİRDAĞ-2011

Doç. Dr. Özgür DELİCE ve Yrd. Doç. Dr. Dilek KAZICI danışmanlığında, Pınar KİREZLİ tarafından hazırlanan bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından. Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Juri Başkanı	: Yrd. Doç. Dr. Dilek KAZICI	*İmza*:
Üye	: Doç. Dr. Özgür DELİCE	*İmza*:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Vedat Nefer ŞENOĞUZ	*İmza*:
Üye	: Doç. Dr. Serbülent YILDIRIM	*İmza*:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Beyhan TATAR	*İmza*:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun _____ tarih ve _____ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fatih KONUKÇU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
YÜKSEK BOYUTLU, STATİK, SİLİNDİRSEL SİMETRİK
UZAY-ZAMANLARDA EINSTEIN-MAXWELL ÇÖZÜMLERİ

Pınar KİREZLİ
Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. DİLEK KAZICI
Eş Danışman: Doç. Dr. ÖZGÜR DELİCE

Bu tezde, N boyutlu, statik, silindirsel simetrik uzay-zaman için bazı yeni Einstein-Maxwell çözümleri bulundu. Bulunan çözümler, bu uzay-zamanda radyal yöndeki bir elektrik alanı tanımlayan genel bir çizgi-elemanı ile Maxwell alanını tanımlamaktadır. Bu çözümlere ait çeşitli skaler değişmezler incelenerek tekillik yapısı tartışıldı. Ayrıca, bu uzay-zaman için nötr ve yüklü test parçacıklarının hareket denklemleri ve bu denklemlerin ilk integralleri hesaplandı. Bazı özel yörüngeler için elektrik alanın parçacığın hareketini nasıl etkilediği tartışıldı. Özellikle vakum çözümünün aksine, elektrik alan mevcut iken yüklü ve yüksüz parçacıklarının dairesel yörüngeler izleyemediği bulundu. Aynı zamanda, elektrik alanın varlığının test parçacığı üzerine etkiyen radyal yöndeki kuvvetin karakterini değiştirdiği belirlendi.

Anahtar Kelimeler: Einstein alan denklemleri, silindirsel simetri, N-boyutlu uzay-zaman, jeodezik denklemleri

2011, 55 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

EINSTEIN-MAXWELL SOLUTIONS IN HIGHER DIMENSIONAL, STATIC, CYLINDRICALLY SYMMETRIC SPACE-TIMES

Pınar KİREZLİ

Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Physics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. DİLEK KAZICI

Supervisor: Assist. Prof. Dr. ÖZGÜR DELİCE

In this thesis, we found some new Einstein-Maxwell solutions for N-dimensional, static, cylindrically symmetric space-time. These solutions describe a general line element and Maxwell field for radially oriented electrical field. Some scalar invariants are investigated to determine the singularity structure of this space-time. Moreover, the geodesic equations and their first integrals for charged and uncharged test particles are calculated. The effect of the electrical field on the motion of test particles for some special trajectories are discussed. Especially, it is found that, in contrast to vacuum solution, in the presence of the electrical field, the particles cannot follow circular geodesics. Furthermore, it is determined that, the existence of the electrical field changes the behavior of radial force acting on the test particle.

Keywords: Einstein field equations, cylindrical symmetry, N-dimensional spacetime, geodesic equations

2011, 55 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım ve tez hazırlama sırasında bilgi ve tecrübeleriyle bana her konuda yardımcı olan ve beni cesaretlendiren danışmanım Yrd. Doç. Dr. Dilek KAZICI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eş danışmanım Doç. Dr. Özgür DELİCE'ye sabırla, bu tezi bitirebilmemi sağladığı, bilgi ve birikimiyle her zaman yanımda olduğu için minettarım.

Ayrıca çalışmalarımda beni destekleyen aileme de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

g	Metrik Tensörünün Determinantı
g_{ab}	Metrik Tensörünün Kovaryant Bileşenleri
g^{ab}	Metrik Tensörünün Kontravaryant Bileşenleri
$\eta_{\mu\nu}$	Ortonormal/null Tabana Göre Minkowski Metrik Tensörü Bileşenleri
$\eta^{\mu\nu}$	Ortonormal/null Tabana Göre Minkowski Metrik Tensörü Bileşenleri
θ^{μ}	Ortonormal/Null Taban 1-Form Vektörleri
e_{μ}	Ortonormal/Null Taban Kontravaryant Vektörleri
x^{μ}	Koordinat
dx^{μ}	Koordinat Taban 1-Form Vektörleri
$\otimes$	Tensör Çarpımı
$\wedge$	Anti-simetrik Tensör Çarpımı
${\omega^{\mu}}_{\nu}$	Ortonormal/Null Tabana Göre Bağıntı 1-Formu
${\omega^{\mu}}_{\nu\lambda}$	Bağıntı 1-Form Katsayıları
${\Omega^{\mu}}_{\nu}$	Ortonormal/Null Tabana Göre Eğrilik 2-Formu
$G_{\mu\nu}$	Einstein Tensörü Bileşenleri
$*$	Hodge Dual
$T_{\mu\nu}$	Madde Enerji-Momentum Tensörü Bileşenleri
R	Ricci Skaleri
$R_{\mu\nu}$	Ricci Tensörü Bileşenleri
${R^{\mu}}_{\nu\lambda\kappa}$	Riemann Tensörü Bileşenleri
${\Gamma^{a}}_{bc}$	Koordinat Taban Chrisstoffel Sembolleri Bileşenleri
K	Kretcshmann Skaleri

$F_{\mu\nu}$	Faraday Tensörü Bileşenleri
A^{μ}	Eletromanyetik 1-formu
G	Newton Kütle Çekimi Sabiti
d	Dış Türev
D	Kovaryant Dış Türev
N	Uzay-zaman Boyutu
LC	Levi-Civita
ADD	Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos and Georgi Dvali modeli
RS	Lisa Randall and Raman Sundrum modeli

I

GİRİŞ

Doğadaki dört temel kuvvetten birisi olan kütle-çekim etkileşmesi Einstein'ın genel görelilik kuramı ile açıklanmaktadır. Bu kuram uzay-zamandaki madde ve enerji dağılımını, uzay-zamanın geometrisiyle ilişkilendirmektedir. Genel göreliliğin düşük hız, zayıf alan, durgun uzay-zaman limiti bize Newton kütle-çekimi denklemlerini vermektedir. Bu kuramın öngörüleri Güneş sisteminde Newton kütle-çekiminin açıklayamadığı, Merkür'ün yörüngesindeki yalpalanması, ışığın Güneş tarafından saptırılması ve küresel konumlama uydu (GPS) verilerindeki düzeltmeler gibi bir takım astrofiziksel olayları başarı ile açıklayabilmektedir. Ayrıca kuvvetli kütle-çekim alanları için verdiği sonuçlar yıldızların evrimi ve karadelikler ile evrenin dinamiğini anlamamıza ışık tutmuştur.

Genel görelilik kuramının temellerini oluşturan Einstein alan denklemleri 4-boyutlu uzay-zamanda lineer olmayan 10 denklemden oluşmaktadır (Einstein 1915). Birbirine bağlı ve karmaşık olan bu denklemlerin özellikle simetri özellikleri kullanılarak birçok çözümü elde edilmiştir (Stephani ve ark. 2003). Einstein denklemlerinin ilk çözümü Karl Schwarzchild tarafından küresel simetri için elde edilmiştir (Schwarzchild 1916). Bu çözüm Newton mekaniğinin açıklayamadığı, Merkür'ün yörüngesindeki yalpalanması ve Güneş'in ışığı bükmesi gibi durumlara ışık tutmuştur. Bunun yanında biraz daha karmaşık olan statik, silindirsel simetrik vakum çözüm Levi-Civita tarafından yayınlanmıştır (Levi-Civita 1919). Ancak küresel simetrik vakum çözümünden farklı olarak silindirsel simetrik metrik için durağan ve statik olmayan çözümlerde mevcuttur. İlk önce Beck (Beck 1925) ve daha sonra Einstein ve Rosen tarafından silindirsel simetriye sahip, gerçek kütle-çekim dalga çözümlerinin mevcut olduğu (Einstein-Rosen dalgaları) gösterilmiştir (Einstein ve ark. 1937). Ayrıca, son yıllarda silindirsel simetrik uzay-zamanlar, evrenin erken dönemlerindeki faz geçişleri sırasında meydana gelmiş olabilecekleri düşünülen kozmik sicimlerin geometrisi (Vilenkin ve ark. 1994) ve kütle-çekimsel çöküşler (Pereira ve ark. 2000) gibi konulara açıklık getirdiği için çok çalışılan alanlardan biri olmuştur. Bu tezde statik, silindirsel simetrik uzay-zamanlarda radyal yönde elektrik alan için çözümler ele alınacaktır.

Einstein denklemlerinde ifade edilen madde ve enerji dağılımına kaynak olarak bir elektromanyetik alan gözönüne alındığında elde edilen denklemlere Einstein-Maxwell denklemleri denir. Örneğin, yüklü, küresel simetrik bir madde dağılımının elektromanyetik ve kütle-çekim alanı, Einstein-Maxwell denklemlerin çözülmesi sonucu Reissner-Nordström tarafından verilmiştir (Reissner 1916, Nordström 1918). Benzer şekilde silindirsel simetriye sahip elektrik ve manyetik alan dağılımlarının Einstein-Maxwell çözümleri 1950'lerden sonra elde edilmiştir. İlk olarak Bonnor (Bonnor 1953) simetri ekseni boyunca uzanan bir manyetik alan dağılımını tanımlayan genel çözümü daha sonra da Raychaudhuri (Raychaudhuri 1960) radyal bir elektrik alana ait genel çözümü vermişlerdir. Ayrıca bu çözümlere ait çeşitli özellikler Witten (Witten 1960), Miguelote ve arkadaşlarının (Miguelote ve ark. 2001) çalışmalarında ve Brans-Dicke kuramındaki çözümler (Baykal ve ark. 2009) çalışmasında incelenmiştir. Silindirsel simetrik vakum ve elektromanyetik alan çözümleri özellikle yük veya akım taşıyan kozmik sicimlerin (Witten 1985) dış elektromanyetik ve kütle-çekim alanını (Moss ve ark. 1987, Linet 1989, Peter 1993) tanımladıklarından dolayı dikkat çekmişlerdir. Kozmik sicimlerin evrendeki galaksi oluşumunda önemli rol oynadıkları 1980'lerden sonra düşünülmekteydi (Vilenkin ve ark. 1994). Ancak son yıllarda kozmik arka alan ışımasını inceleyen gözlemler, kozmik sicimlerin evrendeki yapı oluşumundaki katkısının %10'dan daha fazla olamayacağını göstermiştir (Pogosian ve ark. 2003, Bevis ve ark. 2004). Bu durum, bu konudaki ilgiyi azaltmasına rağmen kozmik sicimler, gözlemlerle uyumlu olan tek topolojik kirlilik cinsidirler. Bu bakımdan Einstein-Maxwell denklemlerinin silindirsel simetrik çözümlerini incelemek önemlidir.

Diğer taraftan yüksek boyutlu uzay-zamanlar son yıllarda en çok ilgi çeken ve çalışılan konulardan biridir. Yüksek boyutlu uzay-zaman fikri doğada bulunan temel kuvvetleri birleştirmek amacıyla doğmuştur. İlk olarak 1914 yılında Gunnar Nordström dördüncü bir boyut kullanarak elektromagnetizmayı ve kütle-çekimini birleştirilebileceğini göstermiştir (Nordström, 1914). Ancak bu çalışmanın öngörüleri genel görelilik kuramı ile çelişmektedir. Theodor Kaluza ve Oscar Klein yapmış oldukları çalışmalarda 4 boyutlu uzay-zamana çok küçük, kapalı (kompakt) bir uzaysal boyut daha ekleyerek, 5 boyutlu uzay-zamanda vakum çözümünün 4 boyutlu uzay-zamanın Einstein-Maxwell denklemlerini verdiğini ve dolayısıyla bu iki kuramın sadece bir boyut ekleyerek birleştirilebileceğini göstermişlerdir (Kaluza 1921, Klein 1926). Fakat kısa bir süre sonra bu teorinin geçerliliği kanıtlanmış teorilerle birleştirilemediği farkedilmiş ve bu nedenle yüksek boyutlu kuramlara ilgi azalmıştır.

Ancak bu durum 1960'lardan sonra değişmiştir. Temel etkileşmeleri birleştirmek ve dolayısıyla kütle-çekimi kuramını elde edebilmek ümidiyle ortaya atılan sicim kuramının tutarlı çözümleri, uzay-zaman boyut sayısının dörtten fazla olmasını gerektirmektedir. Örneğin, bozonik sicim kuramı $N = 26$ boyuta, süpersicim kuramı ise $N = 10$ boyuta ihtiyaç duymaktadır. Petr Horáva and Edward Witten'ın ortaya attığı M-teorisine göre ise evren 11 boyutlu olmalıdır (Horáva ve ark. 1996).

Yüksek boyutlu kuramların öneminin artmasında önemli rol oynayan ve son yıllarda Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos and Georgi Dvali tarafından ortaya atılan ADD modeli (Arkani-Hamed ve ark. 1998) ve Lisa Randall and Raman Sundrum'un RS modelleri (Randall ve ark. 1999-a, 1999-b) gibi yeni fikirler fazla boyutların küçük olamayabileceğini öngörmektedirler. Örneğin, ADD modeli, Kaluza-Klein fazla boyutunun büyüklüğünün Planck uzunluğuna göre çok büyük ($\sim$ 1mm) olabileceğini ve içinde yaşadığımız evrenin bu uzay-zaman içerisine gömülmüş $(3+1)$ boyutlu bir zar olabileceğini iddia etmektedir. Daha sonra ortaya atılan RS modeli ise benzer fakat sonsuz büyüklükte fazla boyuta sahip iki farklı model ortaya atmıştır. Ayrıca Einstein'ın kütle-çekim kuramının matematiksel yapısını daha iyi anlamak için de yüksek boyutlu çözümler incelenmiştir. Bu bağlamda yüksek boyutlu, silindirsel vakum çözümü 2009'da Ponce de Leon tarafından bulunmuştur (Ponce de Leon 2009).

Tüm bunlardan hareketle, bu tezde 4-boyutlu çözümleri N-boyuta genelleyen silindirsel simetrik, statik Einstein-Maxwell çözümleri elde edilecek ve bunların çeşitli özellikleri incelenecektir. Bu tezde elde edilecek sonuçların yukarıda bahsettiğimiz konulara katkı saylayabileceğine inanıyoruz.

Tezin içeriği ise şu şekildedir:

Bölüm 2'de, bu tezde kullanıcak olan Einstein alan denklemleri, Einstein-Maxwell denklemleri ve uzay-zamanlarda parçacık hareketleri ile Cartan denklemleri hakkında bilgiler verilmiş ve kullanılacak olan notasyondan da bahsedilmiştir. Bölüm 3'te, silindirsel simetri, 4-boyutlu uzay-zamanda statik, silindirsel simetrik vakum ve radyal bir elektrik alana karşılık gelen bilinen genel ve özel Einstein-Maxwell denklem çözümleri yeniden ele alınarak incelenmiştir. Bu çözümlerde bulunan parametrelerin fiziksel anlamları irdelenmiş ve bu metriklerin tekillik yapısı tartışılmıştır. Bölüm 4 tezin orijinal çözümlerinin elde edildiği bölümüdür. Bu bölümde ilk olarak 5-boyutlu statik, silindirsel simetrik uzay-zamanda radyal doğrultuda bir elektrik alan için Einstein-Maxwell çözümleri genel ve özel durumlar için bulunmuş, genel çözümün vakum çözümü ile olan ilişkisi incelenmiş ve tekillik yapısı tartışılmıştır. Daha sonra, elde edilen bu çözümler göz önünde bulundurularak N-boyutlu statik, silindirsel simetrik uzay-zaman için genelleştirme yapılmıştır. Bu bölümde ayrıca tezde tartışılan 4 ve N-boyutlu uzay zaman geometrileri için genel hareket denklemleri ve bu denklemlerin ilk integralleri elde edilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak test parçacıklarının bazı özel yörüngelerdeki hareketleri incelenmiştir.

II

KURAMSAL TEMELLER

2.1 Einstein Alan Denklemleri

Bu tezde N-boyutlu ($N \geq 4$) ve $(-,+,+,\ldots,+)$ işaretine sahip Pseudo-Riemann tipi bir manifold göz önüne alınacaktır. Bu manifold üzerinde

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b \tag{2.1}$$

şeklinde bir çizgi elemanı ve bu metrik tensörü ile uyumlu bir bağlantı

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{bd,c} + g_{dc,b} - g_{cb,d}) \tag{2.2}$$

(Levi-Civita bağlantısı) göz önüne alalım. Burada $\Gamma^a{}_{bc}$ katsayılarına Christoffel sembolleri denir. Bu manifold için Riemann tensörü ,

$$R^a{}_{bcd} = \partial_b\Gamma^a{}_{cd} - \partial_c\Gamma^a{}_{bd} + \Gamma^a{}_{be}\Gamma^e{}_{cd} - \Gamma^a{}_{ce}\Gamma^e{}_{bd} \tag{2.3}$$

ifadesi ile tanımlanır. Bu tensör kullanılarak Ricci tensörü

$$R^a{}_b = R^c{}_{acb} \tag{2.4}$$

ve Ricci skaleri

$$R = R^a{}_a \tag{2.5}$$

ile

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \tag{2.6}$$

Einstein tensörünü elde etmek mümkündür.

Einstein'ın çekim kuramını tanımlayan alan denklemlerini;

$$S = S_G + S_{\text{madde}} = \int L\sqrt{-g}d^4x \tag{2.7}$$

Einstein-Hilbert eyleminden elde etmek mümkündür. Burada L Lagrange yoğunluğu

$$L = L_G + L_{\text{madde}} \tag{2.8}$$

şeklinde kütle-çekim Lagrange yoğunluğu ve uzay-zamandaki diğer alanların Lagrange yoğunluklarının toplamı olarak yazabiliriz. Burada $L_G = \frac{1}{\kappa}R$ ve $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ ile verilir. Bu Lagrange yoğunluğunun bu eylemin bir maksimumu olma şartı, eylemin varyasyonunun sıfır olmasıdır. Bu eylemin metriğe göre varyasyonu sonucu Einstein denklemleri elde edilmekte, eylemin diğer alanlara göre varyasyonu da o alanların (örneğin Maxwell alanı) sağlaması gereken alan denklemlerini (örneğin Maxwell denklemlerini) vermektedir. Einstein çekim kuramının temel varsayımları, 3 + 1 boyutlu bir karşıt-Riemann (Pseudo-Riemann) uzay-zamanında yaşadığımız ve bu uzay-zamandaki toplam madde ve enerji ile uzay-zamanın geometrisinin Einstein denklemleri;

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{2.9}$$

aracılığıyla belirlendiğidir. Bu kuramın diğer bir sonucu da bir dış alanın mevcut olmadığı durumlarda test parçacıklarının herhangi bir kuvvet hissetmeyecekleri ve kendi doğal yolları olan

$$\dot{u}^a + \Gamma^a{}_{bc} u^b u^c = 0 \tag{2.10}$$

ile tanımlanan jeodezikler boyunca hareket edeceklerdir. Burada

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau} \tag{2.11}$$

parçacığın dörtlü hızıdır. Yukarıdaki ifadede nokta mutlak zaman τ'ya göre türevi ifade etmektedir ve $d\tau^2 = -ds^2$'dir. Eğer bir dış alan mevcut ise, bu test parçacıkları bu dış alandan kaynaklanan kuvvetlerden dolayı jeodeziklerden sapacaklardır. Örneğin bir elektromanyetik alan mevcut ise e yüküne ve m kütlesine sahip test parçacıkları

$$\dot{u}^a + \Gamma^a{}_{bc} u^b u^c = \frac{e}{m} F^a{}_b u^b \tag{2.12}$$

denklemlerinin sağlayacağı yörüngelerde hareket edeceklerdir. Bu denklem klasik elektromagnetizmadaki Lorentz kuvvetinin eğri uzaylara genelleştirilmesidir. Bu tezde uzay-zamanda kaynak olarak elektromanyetik alan yani Maxwell alanı gözönüne alacağız. Bu alana ait Lagrange yoğunluğu

$$L_{\text{madde}} = -\frac{1}{4\sqrt{\kappa}} F_{ab} F^{ab} \tag{2.13}$$

ve bu alana ait enerji momentum tensörü

$$T_{ab} = \frac{1}{\kappa}\left(F^c{}_a F^c{}_b - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \tag{2.14}$$

ile verilmektedir. Bu alandaki yüklü test parçacıkları ise (2.12) denklemi ile tanımlanan hareket denklemlerinin belirleyeceği yörüngeleri izleyeceklerdir.

2.1.1 Ortonormal Taban

Bu tezde özellikle eğrilikle ilgili tensörlerin hesaplanmasında geleneksel koordinat yöntemleri yerine modern differansiyel geometrik yöntemler kullanacağız. Koordinat tabanda indisler için kullanılan Latin harfler $(a, b, c, ...)$ yerine, ortonormal tabanda Yunan harfleri $(\mu, \nu, \lambda, ...)$ ve koordinat tabanda $(t,\ r,\ z,\ \phi,\ x_i)$ olarak kullanılan koordinatlar yerine ortonormal tabanda sırasıyla $(0, 1, 2, 3, ...)$ sayıları kullanılacaktır. $\theta^\mu,\ (\mu = 0, 1, 2, 3, ..., d-1)$ ortonormal taban bir-formlarını temsil etsin. Buna dual olan ortonormal vektör alanını ise e_μ ile verilsin. Bu büyüklükler için iç çarpım,

$$< \theta^\mu, e_\nu >= \delta^\mu_\nu \tag{2.15}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Ortonormal taban vektörleri ile koordinat taban vektörleri arasında

$$\theta^\mu = \theta^\mu{}_a dx^a \tag{2.16}$$

ve

$$e_\mu = e_\mu{}^a \frac{\partial}{\partial x_a} \tag{2.17}$$

ilişkisi vardır. Ortonormal tabanda uzay-zaman metriği

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \theta^\mu \otimes \theta^\nu \tag{2.18}$$

ile verilir. Bu taban bir-formlarının metrik ile uyumlu olduklarını yani $D = d+\omega$ dış kovaryant türev operatörü olmak üzere

$$D\theta^\mu = d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = 0 \tag{2.19}$$

olduğunu göz önüne alalım. Bu koşul bize Cartan'ın birinci yapı denklemi olan;

$$d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = 0 \tag{2.20}$$

eşitliğini vermektedir. Burada bağlantı bir-formları $\omega^\mu{}_\nu$ antisimetriktir, yani

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0. \tag{2.21}$$

Bu bağlantı bir formlarını ortonormal tabanda

$$\omega^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_{\nu\lambda} \theta^\lambda \tag{2.22}$$

şeklinde açmak mümkündür.

Cartan'ın ikinci yapı denklemi ise

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = d\omega^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\lambda} \wedge \omega^{\lambda}{}_{\nu} \tag{2.23}$$

şeklindedir. Burada $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ eğrilik iki-formları olup bunlarla Riemann tensörü arasında

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} \theta^{\lambda} \wedge \theta^{\kappa} \tag{2.24}$$

bağıntısı mevcuttur. Bu bağıntı yardımıyla (ortonormal tabanda) Riemann tensörünün bileşenleri, Ricci tensörü ve Ricci skaleri ile

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \tag{2.25}$$

Einstein tensörünü ortonormal tabanda elde edebiliriz (Carroll 2004).

2.1.2 Einstein-Maxwell Denklemleri

Elektromanyetik alana sahip bir madde dağılımını tanımlayan Einstein-Maxwell denklemleri;

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu}, \\ d\mathbf{F} &= 0, \\ d{*}\mathbf{F} &= {*}\mathbf{J} \end{aligned} \tag{2.26}$$

olarak ifade edilir. Burada $\mathbf{F}$ Faraday iki-formu, $*\mathbf{F}$ Faraday iki-formunun Hodge duali ve $*\mathbf{J}$ ise yük-akım bir-formu $\mathbf{J}$'nin Hodge duali olarak tanımlanır. n-boyutlu uzay-zamanda, Hodge dual operatörü ($*$), p-formunu (n-p)-forma götüren lineer bir operatördür ve α p-formunun Hodge duali;

$$*\alpha = \frac{1}{p!(n-p)!} \epsilon_{\nu_1 \ldots \nu_p \ \mu_1 \ldots \mu_{n-p}} \alpha^{\nu_1 \ldots \nu_p} \theta^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\mu_{n-p}} \tag{2.27}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada ϵ hacim formudur ve metrik tensörünün determinantının karekökü ve Levi-civita sembolü ile;

$$\epsilon = \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} \theta^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{\mu_n} \tag{2.28}$$

şeklinde gösterilmektedir (Grøn ve ark. 2007).

Yük yoğunluğu ρ ve akım yoğunlukları j^i (i=1,2,3) olmak üzere dörtlü akım vektörü $J = j^{\mu}\partial_{\mu}$'nün bileşenleri $\mathbf{J} = (\rho, j^1, j^2, j^3)$ şeklindedir. Faraday iki-formu ortonormal tabanda

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \theta^{\mu} \wedge \theta^{\nu} \tag{2.29}$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada Faraday 2-formunun bileşenleri olan $F_{\mu\nu}$'ye Faraday tensörü denir. Bu tensörün bileşenleri, içinde bulunulan elektromanyetik alanı tanımlamaktadır. Düz Minkowski uzayı için Faraday tensörünün bileşenleri

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki E_i ve B_i büyüklükleri i yönündeki elektrik ve manyetik alanları temsil etmektedir. Aynı zamanda, Faraday 2-formunun dış türevi ($d\mathbf{F} = 0$) sıfır olduğundan, bu tensör kapalıdır. Bu durumda Poincaré lemmasına göre Faraday iki-formu $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{A}$ elektromanyetik bir-formudur. ϕ skaler elektrik alan potansiyeli, A^i vektörel manyetik alan potansiyeli olmak üzere, lokal tabanda $\mathbf{A} = A_i dx^i$ ve $\mathbf{A} = (\phi, A^1, A^2, A^3)$ şeklinde ifade edilir.

Uzay-zamanda verilen herhangi bir elektromanyetik alanlara ait enerji-momentum tensörü ortonormal tabanda

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa}\left(F^{\alpha}{}_{\mu}F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{2.31}$$

olarak ifade edilir. Bu tezde radyal yönde elektrik alan içeren silindirsel simetriye sahip uzay-zaman için (2.31)'de verilen enerji-momentum tensörü elde edilerek, Einstein-Maxwell denklemleri çözülecektir.

III

MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 4 Boyutlu Silindirsel Simetrik Uzay-Zaman

Einstein denklemlerinin silindirsel simetriye sahip uzay-zaman çözümleri genel görelilik alanında çok yaygın olarak çalışılmaktadır. Bu çözümler, kütle-çekim dalgaları, kozmolojik modeller, küresel kütle dağılımına sahip olmayan cisimlerin kütle-çekimsel çöküşü gibi bazı fiziksel olayların açıklanmasında rol oynamaktadır. Statik, silindirsel simetrik vakum çözümleri Levi-Civita (LC) tarafından (Levi-Civita 1919), durağan çözüm ise Lewis tarafından bulunmuştur (Lewis 1932). Bu metriğin statik olmayan çözümleri ise Einstein-Rosen tipi dalga çözümlerine karşılık gelmektedir (Beck 1925, Einstein ve ark. 1937). Einstein denklemlerinin silindirsel simetrik çözümleri için, öncelikle silindirsel simetriye sahip yeterince genel bir uzay-zaman metriği belirlenmelidir. Silindirsel simetri, bir tanesi ($\zeta = \partial_z$) eksen boyunca öteleme simetrisine, diğeri de ($\eta = \partial_\phi$) eksen etrafındaki dönme simetrisine karşılık gelen iki Killing vektörü ile tanımlanabilir. Bu durumda en genel silindirsel simetrik çizgi elemanı;

$$ds^2 = e^{-2U}(\gamma_{MN}dx^M dx^N + W^2 d\phi^2) + e^{2U}(dz + Ad\phi)^2 \tag{3.1}$$

olarak yazılabilir (Stephani ve ark. 2003). Burada U, W, A, γ_{MN} metrik fonksiyonları, ihmal edilebilir koordinatlar olan z ve ϕ dışındaki koordinatların birer fonksiyonlarıdır. γ_{MN} metriği 2 boyutta ;

$$\gamma_{MN}dx^M dx^N = e^{2K}(dr^2 - dt^2) \tag{3.2}$$

şeklinde seçilebilir (Kompaneets 1958, Stephani ve ark. 2003). Aynı zamanda, düzenli bir eksene sahip, silindirsel simetrik uzay-zamanı tanımlayan metrik, eksen boyunca $\eta^a\eta_a = e^{-2U}W^2 + e^{2U}A^2 = 0$ şartını sağlamalıdır.

En genel durumda silindirsel simetrik çizgi elemanı radyal koordinat r ve zaman koordinatı t'ye bağlıdır. Eğer üçüncü bir Killing vektör olarak $\xi = \partial_t$ alınırsa, durağan silindirsel simetrik uzay zaman elde edilir. Bu durumda çizgi elemanı;

$$ds^2 = e^{-2U}[e^{2K}(dr^2 - dt^2) + W^2 d\phi^2] + e^{2U}(dz + Ad\phi)^2, \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir ve metrik sadece radyal koordinata bağlıdır. Silindirsel simetrik vakum çözümünü $t \to iz, \quad z \to it, \quad A \to iA$ kompleks dönüşümleriyle;

$$ds^2 = e^{-2U}[e^{2K}(dr^2 + dz^2) + W^2 d\phi^2] - e^{2U}(dt + Ad\phi)^2 \tag{3.4}$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Statik, silindirsel simetrik metrik $A=0$ durumuna karşılık gelmektedir ve bu durumda çizgi elemanı

$$ds^2 = e^{-2U}[e^{2K}(dr^2+dz^2)+W^2d\phi^2]-e^{2U}dt^2 \tag{3.5}$$

olarak köşegen hale gelir. Tezimizde, ilk olarak 4 boyutlu uzay-zamanda bu metriğin vakum ve Einstein-Maxwell çözümlerini elde ederek daha sonraki bölümlerde bu çözümleri N boyutlara genelleyeceğiz.

3.1.1 Vakum Çözümleri

Levi-Civita Çözümü

Silindirsel simetrik, statik, vakum çözümü 1919 yılında Levi-Civita tarafından bulunmuştur. Küresel simetriden farklı olarak, silindirsel simetri için Birkhoff teoremi bulunmadığından, durağan ve zamana bağlı vakum çözümleri de mevcuttur (Lewis 1932, Einstein ve ark. 1937). Öte yandan, LC metriği silindirsel simetrik, statik tek vakum çözümüdür.

Denklem (3.5)'teki statik, silindirsel simetrik çizgi elemanında (t,r,z,ϕ) silindirik koordinatları $-\infty<t<\infty$, $-\infty<z<\infty$, $r\geq 0$, $0\leq\phi\leq 2\pi$ aralıklarında tanımlıdırlar. Ortonormal tabanda çizgi elemanı $ds^2=\eta_{\mu\nu}\theta^\mu\otimes\theta^\nu$ ve $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$'dir. Yukarıdaki (3.5) metriği için Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri;

$$\begin{aligned}
G_{00} &= -e^{2(U(r)-K(r))}\left[U'(r)^2-2\frac{U'(r)W'(r)}{W(r)}+K''(r)-2U''(r)+\frac{W''(r)}{W(r)}\right],\\
G_{11} &= -e^{2(U(r)-K(r))}\left[U'(r)^2-\frac{K'(r)W'(r)}{W(r)}\right],\\
G_{22} &= e^{2(U(r)-K(r))}\left[U'(r)^2-\frac{K'(r)W'(r)}{W(r)}+\frac{W''(r)}{W(r)}\right],\\
G_{33} &= e^{2(U(r)-K(r))}\left[U'(r)^2+K''(r)\right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklindedir. Burada kesme işareti ($'$) r'ye göre türevi ifade etmektedir.
Vakum Einstein denklemi $G_{\mu\nu}=0$'dan

$$W''(r)=0, \tag{3.7}$$

$$rK''(r)+K'(r)=2[rU'(r)+U''(r)], \tag{3.8}$$

$$U''(r)+\frac{U'(r)}{r}=0 \tag{3.9}$$

differensiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse, integrasyon sabitleri uygun şekilde seçilerek, metrik fonksiyonları

$$\begin{aligned} W(r) &= W_0 r, \\ K(r) &= 4\sigma^2 \ln r, \\ U(r) &= 2\sigma \ln r \end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda statik, silindirsel simetrik vakum LC çözümü ,

$$ds^2 = -r^{4\sigma} dt^2 + r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + W_0^2 r^{2-4\sigma} d\phi^2 \tag{3.11}$$

şeklinde yazılır (Levi-Civita 1919, Bonnor 1979).

Parametrelerin Fiziksel Anlamı

Elde edilen bir vakum çözümünün fiziksel anlamlarını belirlemenin bir yolu bu çözümü fiziksel olarak anlamlı iç çözümler ile eşleştirmektir. Bu yöntem sayesinde iç çözümün fiziksel parametreleri (kütle, yük, vs.) yardımı ile dış çözümün parametrelerini yorumlamak mümkündür. Bu amaçla çeşitli mükemmel akışkan (Gautreau ve ark. 1969, Bonnor 1992, Philbin 1996) ve ince kabuk tipi (Wang ve ark. 1997, Bıçak ve ark. 2002, Arık ve ark. 2003, 2005) çözümler gözönüne alınmıştır. Marder, statik, silindirsel simetrik vakum çözümünün iki bağımsız parametreye sahip olduğunu göstermiştir (Marder 1958). Bu parametrelerden birincisi olan σ, uzunluk başına kütle miktarıyla ilgili iken, ikincisi olan W_0 koniklik parametresi olarak tanımlanır ve uzay-zamanın global topolojisi ile ilgilidir (Bonnor 1979). σ'nın hangi değerlerde LC için anlamlı bir çözüm olacağı tartışılagelen bir konudur. Gautreau ve Hoffman mükemmel akışkan şeklindeki bir iç çözümü LC vakum çözümüyle düzgünce eşleştirerek, σ parametresinin $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{4}$ aralığında, birim uzunluk başına düşen kütle olarak yorumlanabileceğini göstermişlerdir (Gautreau ve ark. 1969). Aynı yöntem ile Bonnor ve Philbin çalışmaları σ'nın $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ aralığı için genişletilebileceğini göstermiştir (Bonnor ve ark. 1992, Philbin 1996). Wang ve arkadaşları σ'yı kütle parametresi olarak tanımlamışlar, değerinin $0 \leq \sigma \leq 1$ aralığında olabileceğini ve $\sigma = 1/2$'de birim uzunluk başına düşen kütle miktarının maximum olacağını göstermişlerdir (Wang ve ark. 1997).

Bazı özel σ değerleri için LC metriğine bakılırsa;

- $\sigma = 0$ olduğu durumda (3.11) metriği;

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + W_0^2 r^2 d\phi^2 \tag{3.12}$$

düz uzay-zamana karşılık gelmektedir. Eğer $W_0 = 1$ olursa metrik silindirik koordinatlarda Minkowski uzay zamanına indirgenir, $W_0 \neq 1$ için düz sonsuz uzun kozmik sicim metriğidir (Vilenkin ve ark 1994).

- $\sigma = 1/2$ olduğu durumda LC metriği;

$$ds^2 = -r^2dt^2 + dr^2 + dz^2 + W_0^2 d\phi^2 \tag{3.13}$$

Rindler metriğine dönüşmektedir (Rindler 1977). $\bar{t} = r \sinh t$, $\bar{x} = r \cosh t$, $\bar{y} = W_0\phi$, $\bar{z} = z$ dönüşümleri yapılarak, bu metrik

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 \tag{3.14}$$

şeklinde Minkowski koordinatlarında yazılabilir. Gautreau, Hoffman ve Bonnor, bu düz uzayın, $\bar{y}$, $-\infty, \infty$ aralığında kabul edildiğinde, pozitif kütle yoğunluklu, sonsuz düzlemsel bir tabakanın, kütleçekimsel alanının metriği olduğunu ifade etmişlerdir (Gautreau ve ark. 1969, Bonnor ve ark. 1992, Philbin 1996).

Tekillikler

Einstein denklemlerinin herhangi çözümüne karşılık gelen uzay-zaman metriğinin tekilliklerini bulabilmek için, metriğin eğrilik bileşenlerinden oluşan bazı skaler büyüklüklere bakılmalıdır. Bu skalerlerden bazıları, Ricci Skaleri (R), Ricci tensörünün kendisiyle kontraksiyonu ($R_{\mu\nu}$ $R^{\mu\nu}$) ve Riemann tensörünün kendisiyle kontraksiyonudur ($R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ $R^{\mu\nu\lambda\kappa}$). Ele aldığımız çözüm bir vakum çözümü olduğu için, bunların ilk ikisi sıfırdır. Bu durumda Kretcshmann skaleri yani Riemann tensörünün kendisiyle kontraksiyonu hesaplanırsa

$$K = R_{\mu\nu\lambda\kappa}R^{\mu\nu\lambda\kappa} = 64\sigma^2(4\sigma^2 - 2\sigma + 1)(2\sigma - 1)^2 r^{-16\sigma^2+8\sigma-4} \tag{3.15}$$

elde edilir (Richterek ve ark. 2000). Kretcshmann skalerinden açıkça görüldüğü gibi metriğin $r = 0$'da bir uzay-zaman tekilliği vardır. Ancak σ'nın 0 ve 1/2 değerlerinde Kretcshmann skaleri sıfır olmakta, yani bu değerlerde metrikte herhangi bir tekillik bulunmamaktadır. Bu özel değerlerin düz uzaya karşılık geldiği önceki bölümde belirtilmişti.

3.1.2 Einstein-Maxwell Çözümleri

Bir yük ve akım yoğunluğunun çevresinde oluşturduğu elektromanyetik alan için Maxwell denklemleri $dF = 0$ ve $d * F = 0$ olmaktadır. Elektromanyetik alan, yüklü bir statik, silindirsel kaynak tarafından üretiliyorsa, elektromanyetik bir-formu $A = f(r)dt = f(r)e^{-U(r)}\theta^0$ olarak yazılabilir ve bu durumda elektromanyetik alan tensörünün ve enerji-momentum tensörünün ortonormal tabanda sıfırdan farklı bileşenleri

$$F_{01} = -F_{10} = -e^{-K(r)} f'(r),$$
$$T_{00} = -T_{11} = T_{22} = T_{33} = \frac{1}{2} e^{-2K(r)} f'^2(r) \tag{3.16}$$

olarak elde edilir. Bu elektromanyetik alana sahip uzay-zaman metriğini ve dolayısıyla A'yı belirlemek için Einstein ve Maxwell denklemleri ($G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$) çözülmelidir. Einstein tensörü bileşenleri (3.6) ve enerji-momentum tensörü bileşenleri (3.16) denklemlerinden $W(r)'' = 0$ olması gerektiği görülür. W(r)'nin radyal yönde lineer olarak arttığı ve sabit kaldığı durumlar için iki farklı çözüm elde edilir.

- Birinci durum için $W(r) = w_0 r$ yazılır ve uygun integrasyon sabitleri seçilerek, metrik fonksiyonları

$$U(r) = \ln\left(\frac{r^{2\sigma}}{a + br^{4\sigma}}\right),$$
$$K(r) = 4\sigma^2 \ln r \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Böylece (3.5)'teki çizgi elemanı

$$ds^2 = -\frac{r^{4\sigma}}{(a + br^{4\sigma})^2} dt^2 + (a + br^{4\sigma})^2 \left[r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + w_0^2 r^{2(1-2\sigma)} d\phi^2\right], \tag{3.18}$$

ve

$$f(r) = \sqrt{\frac{-a}{b}} \frac{\sqrt{2}}{(a + br^{4\sigma})} \tag{3.19}$$

şeklinde elde edilir. Enerji yoğunluğu T_{00}'ın pozitif olması gerekliliği sonucu

$$ab < 0 \tag{3.20}$$

olmalıdır. Bu durumu daha iyi görebilmek için koordinatlar $\frac{dt}{a} = d\tilde{t}$, $adr = d\tilde{r}$, $adz = d\tilde{z}$, şeklinde yeniden ölçeklendirilip $\frac{b}{a} = -C^2$ ve $aw_0 = \tilde{w_0}$ seçildiğinde çizgi elemanı;

$$ds^2 = -\frac{r^{4\sigma}}{(1 - C^2 r^{4\sigma})^2} d\tilde{t}^2 + (1 - C^2 r^{4\sigma})^2 \left[r^{4\sigma(2\sigma-1)}(d\tilde{r}^2 + d\tilde{z}^2) + \tilde{w_0}^2 r^{2(1-2\sigma)} d\phi^2\right], \tag{3.21}$$

olarak elde edilmektedir. Bu durumda;

$$A = \frac{\sqrt{2}}{C(1 - C^2 r^{4\sigma})} dt, \tag{3.22}$$

$$F_{01} = -F_{10} = -\frac{4\sqrt{2} C r^{-(1-2\sigma)^2} \sigma}{(1 - C^2 r^{4\sigma})^2} \tag{3.23}$$

sonuçları elde edilir.

- İkinci durum daha özel bir çözüm içermektedir ve $W(r) = w_0$ (sabit) seçilerek metrik fonksiyonları;

$$U(r) = -\ln(r - u_0),$$
$$K(r) = k_0 r \tag{3.24}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak, çizgi elemanı

$$ds^2 = -dt^2 \frac{1}{(r-u_0)^2} + (r-u_0)^2[e^{2k_0 r}(dr+dz)^2 + w_0^2 d\phi^2] \tag{3.25}$$

elektromanyetik potansiyel

$$A = \frac{\sqrt{2}}{r-u_0} dt \tag{3.26}$$

olarak elde edilir.

Tekillikler

Göz önüne aldığımız genel çözümün (3.21) metriğinin elektromanyetik alan tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri eşitlik (3.23) şeklindedir. Bunları kullanarak elektromanyetik değişmez olarak adlandırılan elektromanyetik alan tensörünün kendisi ile kontraksiyonlarını hesaplayabiliriz:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{64C^2\sigma^2 r^{2(-1+4\sigma-4\sigma^2)}}{(1-C^2r^{4\sigma})^4} \leq 0, \tag{3.27}$$
$$F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = 0. \tag{3.28}$$

(3.27) eşitliğinin beklenildiği gibi sıfırdan küçük olması elektromanyetik alanının elektriksel tipte olduğunu gösterir.
(3.21) metriğinin tekillikleri için bakılması gereken skaler büyüklüklerden birisi Ricci tensörünün kendisiyle kontraksiyonudur ve

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{1024C^4\sigma^4}{r^{4(1-2\sigma)^2}(1-C^2r^{4\sigma})^8} \tag{3.29}$$

olarak elde edilir. Öte yandan tekilliklerin belirlenmesi için önemli bir büyüklük olan Kreschtman skaleri;

$$\begin{aligned} K &= \frac{64\sigma^2}{r^{4-8\sigma+16\sigma^2}(1-C^2r^{4\sigma})^8} \\ & \Big[(1-2\sigma)^2(1-2\sigma+4\sigma^2) - 12\sigma C^2 r^{4\sigma}(1-2\sigma)^2 - 2C^4 r^{8\sigma}(1-48\sigma^2+16\sigma^4) \\ &+ 12\sigma C^6 r^{12\sigma}(1+2\sigma)^2 + C^8 r^{16\sigma}(1+2\sigma)^2(1+2\sigma+4\sigma^2)\Big] \end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak bulunur. Bu üç skalerden de görüldüğü gibi $r = 0$ ve $r = \frac{1}{C^{1/2\sigma}} = r_s$'de olmak üzere iki tekillik mevcuttur. Bu tekillikler fiziksel olup koordinat dönüşümleri ile yok edilemezler. Ancak, $\sigma = 0$ ve $\sigma = \frac{1}{2}$ değerlerinde $r = 0$'daki tekillik yok olmaktadır. $r > r_s$ için uzay-zaman ve elektromanyetik alan düzgün davranmaktadır. Bu durum, söz konusu elektromanyetik alanın $r = r_s$ yarıçaplı, silindirsel yük dağılımından kaynaklandığı şeklinde yorumlanabilir.

Önceki bölümde daha özel durum olan (3.24) metrik fonksiyonları kullanılarak;

$$f(r) = \frac{\sqrt{2}}{r - u_0}, \tag{3.31}$$

$$F_{01} = -F_{10} = \frac{\sqrt{2}e^{-k_0 r}}{(r - u_0)^2} \tag{3.32}$$

olarak bulunur. Bu durum için elektromanyetik değişmez skaleri;

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{4e^{-2k_0 r}}{(r - u_0)^4} \tag{3.33}$$

olarak elde edilirken, Kreschtmann skaleri ve Ricci tensörünün kendisiyle kontraksiyonu;

$$K = \frac{8e^{-4k_0 r}}{(r - u_0)^8} \left\{7 + 2k_0(r - u_0)\left[3 + k_0(r - u_0)\right]\right\}, \tag{3.34}$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{4e^{-4k_0 r}}{(r - u_0)^8} \tag{3.35}$$

olur. Bu skalerlerden, (3.25) metriğinin $r = u_0$'da bir tekilliğe sahip olduğu görülür. Bu durum genel çözüme benzer olarak $r = u_0$ yarıçaplı bir silindirsel yük dağılımının elektromanyetik alan kaynağı olduğu şeklinde düşünülebilir.

IV

ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1 5 Boyutlu Statik Silindirsel Simetrik Uzay-Zaman

Bölüm 3'de 4-boyutlu uzay-zamanda simetri ekseni (z) boyunca öteleme simetrisine ve bu eksen etrafında dönme simetrisi ile zaman içerisinde durağanlık simetrisine sahip olan, statik, silindirsel simetrik çeşitli bilinen çözümleri incelemiştik. Bu kısımda, Bölüm 3'te göz önüne alınan (3.5) metriğine bir ekstra uzaysal boyut daha ekleyerek ve metriğin bu yönde bir simetriye sahip yani bu fazla boyuttan bağımsız olduğunu düşünerek, 5-boyutlu uzay-zamanda statik, silindirsel simetrik uzay-zaman metriğini

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{2K-2U}(dr^2 + dz^2) + e^{-2U}W^2 d\phi^2 + X^2 dx^2 \tag{4.1}$$

şeklinde yazabileceğimizi varsayıyoruz. Kısaca burada metrik fonksiyonları U, K, W, X sadece radyal koordinat r'ye bağlıdır.

4.1.1 Alan Denklemleri

Einstein alan denklemleri $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ olarak verilmektedir. (4.1) metriği için Einstein tensörünü Bölüm 2'de verilen Cartan'ın yapı denklemleri kullanarak hesaplayayacağız. Bu metriğin ortonormal taban bir-formları

$$\theta^0 = e^{U(r)}dt, \quad \theta^1 = e^{K(r)-U(r)}dr, \quad \theta^2 = e^{K(r)-U(r)}dz, \quad \theta^3 = W(r)e^{-U(r)}d\phi, \quad \theta^4 = X(r)dx,$$

şeklinde seçilerek ve (2.20)'de verilen Cartan'ın 1. yapı denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\omega^0{}_1 &= U'(r)e^{U(r)-K(r)}\theta^0, && (4.2)\\
\omega^1{}_2 &= \left[U'(r) - K'(r)\right] e^{U(r)-K(r)}\theta^2, && (4.3)\\
\omega^1{}_3 &= \left[U'(r) - \frac{W'(r)}{W(r)}\right] e^{U(r)-K(r)}\theta^3, && (4.4)\\
\omega^1{}_4 &= -\frac{X'(r)}{X(r)}e^{U(r)-K(r)}\theta^4 && (4.5)
\end{aligned}$$

şeklinde bağlantı bir-formlarının sıfırdan farklı bileşenleri elde edilir. (2.23)'de verilen Cartan'ın 2. yapı denklemi kullanılarak eğrilik 2-formlarının sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\Omega^0{}_1 &= \big[U''(r)+2U'(r)^2-U'(r)K'(r)\big]\, e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^1\wedge\theta^0, && (4.6)\\
\Omega^0{}_2 &= \big[U'(r)^2-U'(r)K'(r)\big]\, e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^0\wedge\theta^2, && (4.7)\\
\Omega^0{}_3 &= \left[U'(r)^2-\frac{U'(r)W'(r)}{W(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^0\wedge\theta^3, && (4.8)\\
\Omega^0{}_4 &= -\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^0\wedge\theta^4, && (4.9)\\
\Omega^1{}_2 &= [U''(r)-K''(r)]\, e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^1\wedge\theta^2, && (4.10)\\
\Omega^1{}_3 &= \Big[U''(r)-U'(r)K'(r)+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}-\frac{W''(r)}{W(r)} && \\
&+ \frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}\Big]e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^1\wedge\theta^3, && (4.11)\\
\Omega^1{}_4 &= \left[-\frac{X''(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^1\wedge\theta^4, && (4.12)\\
\Omega^2{}_3 &= \left[U'(r)K'(r)-\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}-U'(r)^2+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^2\wedge\theta^3, && (4.13)\\
\Omega^2{}_4 &= \left[\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^2\wedge\theta^4, && (4.14)\\
\Omega^3{}_4 &= \left[\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}-\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}\quad \theta^3\wedge\theta^4. && (4.15)
\end{aligned}
$$

Ayrıca (2.24) denkleminden yararlanarak Riemann tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$
\begin{aligned}
R^0{}_{101} &= \big[-U''(r)-2U'(r)^2+U'(r)K'(r)\big]\, e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.16)\\
R^0{}_{202} &= \big[U'(r)^2-U'(r)K'(r)\big]\, e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.17)\\
R^0{}_{303} &= \left[U'(r)^2-\frac{U'(r)W'(r)}{W(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.18)\\
R^0{}_{404} &= -\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.19)\\
R^1{}_{212} &= [U''(r)-K''(r)]\, e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.20)\\
R^1{}_{313} &= \left[U''(r)-U'(r)K'(r)+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}-\frac{W''(r)}{W(r)}+\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.21)\\
R^1{}_{414} &= \left[-\frac{X''(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.22)\\
R^2{}_{323} &= \left[U'(r)K'(r)-\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}-U'(r)^2+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.23)\\
R^2{}_{424} &= \left[\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]}, && (4.24)\\
R^3{}_{434} &= \left[\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}-\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right] e^{2[U(r)-K(r)]} && (4.25)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri $R_{\mu\nu}=R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ eşitliği kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= \left[U''(r)+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}+\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]}, & (4.26)\\
R_{11} &= \left[U''(r)-2U''(r)^2-K''(r)+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}-\frac{W''(r)}{W(r)}\right.\\
&+ \left.\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}-\frac{X''(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]}, & (4.27)\\
R_{22} &= \left[U''(r)-K''(r)+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}-\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}+\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}\right.\\
&- \left.\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]}, & (4.28)\\
R_{33} &= \left[U''(r)+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}-\frac{W''(r)}{W(r)}+\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}+\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]}, & (4.29)\\
R_{44} &= \left[-\frac{X''(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)W'(r)}{X(r)W(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]} & (4.30)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Ricci skaleri ise

$$
\begin{aligned}
R &= 2\left[U''(r)-U'(r)^2-K''(r)-\frac{W''(r)}{W(r)}-\frac{X''(r)}{X(r)}+\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}\right.\\
&\left.-\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]} & (4.31)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak (4.1) metriği için sıfırdan farklı Einstein tensörü bileşenleri;

$$
\begin{aligned}
G_{00} &= -\left[\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}-\frac{2W'(r)U'(r)}{W(r)}+\frac{W''(r)}{W(r)}-\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+U'(r)^2+K''(r)\right.\\
&\left.-2U''(r)+\frac{X''(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]},\\
G_{11} &= \left[-U'(r)^2+\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}+\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}-\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]},\\
G_{22} &= \left[U'(r)^2-\frac{W'(r)K'(r)}{W(r)}+\frac{W''(r)}{W(r)}-\frac{X'(r)K'(r)}{X(r)}+\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right.\\
&\left.+\frac{X''(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]},\\
G_{33} &= \left[U'(r)^2+K''(r)+\frac{X'(r)U'(r)}{X(r)}+\frac{X''(r)}{X(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]},\\
G_{44} &= \left[U'(r)^2+K''(r)-\frac{W'(r)U'(r)}{W(r)}-U''(r)+\frac{W''(r)}{W(r)}\right]e^{2[U(r)-K(r)]} & (4.32)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

4.1.2 Einstein-Maxwell Çözümleri

Bölüm 3'de 4-boyutlu uzay-zamanda bir yük ve akım dağılımının çevresinde oluşan elektromanyetik alan için Maxwell denklemleri $dF = 0$ ve $d * F = 0$ olarak verilmişti. Elektromanyetik alan bir-formunu 5-boyutlu uzay zaman için $A = f(r)dt = f(r)e^{-U(r)}\theta^0$ olarak seçiyoruz. Bu durumda elektromanyetik alan ve enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$
\begin{aligned}
F_{01} &= F_{10} = -e^{-K(r)} f'(r) && (4.33)\\
T_{00} &= -T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{44} = \frac{1}{2} e^{-2K(r)} f'(r)^2 && (4.34)
\end{aligned}
$$

olmaktadır. Aynı zamanda ilk Maxwell denklemi;

$$
dF = d[f'(r)dr \wedge dt] \;=\; 0 \tag{4.35}
$$

doğrudan sağlanmaktadır. Diğer Maxwell denklemi $d * F = 0$;

$$
d\left[f'(r)W(r)X(r)e^{-2U(r)}\right] = 0 \tag{4.36}
$$

differansiyel denklemini vermektedir. Einstein alan denklemleri işlem kolaylığı açısından $G_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = 0$ olarak ifade edilirse

$$
\begin{aligned}
&-e^{2U(r)-2K(r)}\left[\frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)} - \frac{2U'(r)W'(r)}{W(r)} + \frac{W''(r)}{W(r)} - \frac{U'(r)X'(r)}{X(r)} + U'(r)^2 + K''(r)\right.\\
&\left.-2U''(r) + \frac{X''(r)}{X(r)}\right] - \frac{1}{2}e^{-2K(r)} f'(r)^2 = 0, && (4.37)\\
&e^{2U(r)-2K(r)}\left[-U'(r)^2 + \frac{K'(r)W'(r)}{W(r)} + \frac{K'(r)X'(r)}{X(r)} - \frac{U'(r)X'(r)}{X(r)} + \frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right]\\
&+\frac{1}{2}e^{-2K(r)} f'(r)^2 = 0, && (4.38)\\
&e^{2U(r)-2K(r)}\left[U'(r)^2 - \frac{K'(r)W'(r)}{W(r)} + \frac{W''(r)}{W(r)} - \frac{K'(r)X'(r)}{X(r)} + \frac{U'(r)X'(r)}{X(r)} + \frac{W'(r)X'(r)}{W(r)X(r)}\right.\\
&\left.+\frac{X''(r)}{X(r)}\right] - \frac{1}{2}e^{-2K(r)} f'(r)^2 = 0, && (4.39)\\
&e^{2U(r)-2K(r)}\left[U'(r)^2 + K''(r) + \frac{U'(r)X'(r)}{X(r)} + \frac{X''(r)}{X(r)}\right] - \frac{1}{2}e^{-2K(r)} f'(r)^2 = 0, && (4.40)\\
&e^{2U(r)-2K(r)}\left[U'(r)^2 + K''(r) - \frac{U'(r)W'(r)}{W(r)} - U''(r) + \frac{W''(r)}{W(r)}\right] - \frac{1}{2}e^{-2K(r)} f'(r)^2 = 0 && (4.41)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden yararlanarak (4.38) ve (4.39) eşitliklerinin toplamından

$$
e^{-2K(r)+U(r)} \frac{2W'(r)X'(r) + X(r)W''(r) + W(r)X''(r)}{X(r)W(r)} = 0 \tag{4.42}
$$

bulunur ve bu sonuçtan $[W(r)X(r)]'' = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Bu differansiyel denklem için üç farklı çözüm önerilebilir.

1. En genel halde çözüm

$$
W(r) = \frac{w_0 r + w_1}{X(r)} \quad \text{dir.} \tag{4.43}
$$

2. (4.43) denkleminin özel bir durumu olarak $w_0 = 0$ durumunda genel çözümden farklı bir özel çözüm elde ediyoruz
$$W(r) = \frac{w_1}{X(r)}. \tag{4.44}$$

3. Ayrıca $W(r) = w_0$ (sabit), $X(r) = x_0$ (sabit) durumunda da bu denklem sağlanmaktadır.

Bu 3 farklı sonuç için Einstein-Maxwell denklemlerinin çözümleri ve bu çözümlerin fiziksel olarak ifade ettikleri sırasıyla tartışılacaktır.

- **$W(r)X(r) = w_0 r + w_1$ durumu**

  Bu durumda, genelliği bozmadan $w_1 = 0$ seçebiliriz. Einstein alan denklemlerini (4.37-4.41) kullanılarak metrik fonksiyonlarını belirleyeceğiz. (4.40) ve (4.41) eşitliklerinin farkı;
$$e^{-2K(r)+2U(r)}\left\{\frac{-2rX'(r)^2 + X(r)^2\left[U'(r) + rU''(r)\right] + 2X(r)\left[X'(r) + rX''(r)\right]}{rX(r)^2}\right\} = 0 \tag{4.45}$$
  eşitliğini ve dolayısıyla $[rU'(r)]' = -2[r\frac{X'(r)}{X(r)}]'$ sonucunu verir. Bu sonuç 2 kez integre edilerek metrik fonksiyonu $X(r)$'ı
$$X(r) = e^{\frac{-U(r)}{2}} r^{x_0} \tag{4.46}$$
  olarak buluruz. (4.38) ve (4.40) eşitliklerini toplarsak
$$\frac{1}{2r}e^{-2K(r)+2U(r)}\left[2K'(r) - U'(r) + 2rK''(r) - rU''(r)\right] = 0, \tag{4.47}$$
  yani $2[rK'(r)]' = [rU'(r)]'$ elde edilir ve bu eşitlikten
$$K(r) = \frac{U(r)}{2} + k_0 \ln r \tag{4.48}$$
  olarak bulunur. (4.37) ve (4.38) eşitlikleri toplanarak
$$U(r) = \ln \frac{r^{2\sigma}}{a + br^{4\sigma}} \tag{4.49}$$
  sonucuna ulaşılır. Burada $2\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{k_0 + x_0 - x_0^2}$ olarak seçilmiştir. Bu eşitlikten $k_0 = 3\sigma^2 + x_0 - x_0^2$ değeri bulunur. Ayrıca $p_1 = x_0 - \sigma$ seçerek metrik fonksiyonlarını
$$\begin{aligned} X(r) &= r^{p_1}\sqrt{a + br^{4\sigma}}, \\ W(r) &= w_0\frac{r^{1-p_1}}{\sqrt{a + br^{4\sigma}}}, \\ K(r) &= \ln\frac{r^{4\sigma^2 - p_1(1-2\sigma-p_1)}}{\sqrt{a + br^{4\sigma}}}, \\ U(r) &= \ln\frac{r^{2\sigma}}{a + br^{4\sigma}} \end{aligned} \tag{4.50}$$

olarak elde etmek mümkündür. Bu metrik fonksiyonları için çizgi elemanı

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{r^{4\sigma}}{(a+br^{4\sigma})^2}dt^2 + (a+br^{4\sigma})\Big[r^{2[2\sigma(2\sigma-1)-p_1(1-2\sigma-p_1)]}(dr^2+dz^2) \\ &\quad + w_0^2 r^{2(1-p_1-2\sigma)}d\phi^2 + r^{2p_1}dx^2\Big] \end{aligned} \tag{4.51}$$

şeklinde yazılır. (4.37-4.41) eşitliklerinde metrik fonksiyonlarını yazarak;

$$-24r^{8\sigma}ab\sigma^2 - r^2(a+br^{4\sigma})^4 f'(r)^2 = 0 \tag{4.52}$$

denklemi elde edilir ve buradan

$$f(r) = \frac{\sqrt{\frac{-3a}{2b}}}{(a+br^{4\sigma})} \tag{4.53}$$

ve elektromanyetik potansiyel bir formu

$$A = \frac{\sqrt{\frac{-3a}{2b}}}{(a+br^{4\sigma})}dt \tag{4.54}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda elektromanyetik alan ve enerji-momentum tensörlerinin sıfırdan farklı bileşenleri

$$F_{01} = -F_{10} = \frac{2\sigma\sqrt{-6\ a\ b}\ r^{-1-4\sigma(\sigma-1)+p_1(1-2\sigma-p_1)}}{(a+br^{4\sigma})^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.55}$$

$$T_{00} = -T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{44} = -\frac{12\sigma^2\ a\ b\ r^{2[-1-4\sigma(\sigma-1)+p_1(1-2\sigma-p_1)]}}{(a+br^{4\sigma})^3} \tag{4.56}$$

olur. Enerji yoğunluğunun pozitif olması

$$a\ b < 0 \tag{4.57}$$

şartını getirmektedir.

Tekillikler

5-boyutlu uzay-zamanda statik, silindirsel simetrik, elektromanyetik yük dağılımınının çevresinde metrik fonksiyonu $W(r) = \frac{w_0 r}{X(r)}$ olarak seçildiğinde çizgi elemanı eşitlik (4.51) şeklinde elde edilir. Bu durumda elektromanyetik değişmez skaleri ve Ricci tensörünün kendisiyle kontraksiyonu;

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 48\frac{a\ b\ r^{-2[1+4\sigma(\sigma-1)-p_1(1-2\sigma-p_1)]}\sigma^2}{(a+br^{4\sigma})^3}, & (4.58)\\ F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} &= 0, & (4.59)\\ R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= 704\frac{r^{-4[1+4\sigma(\sigma-1)-p_1(1-2\sigma-p_1)]}\sigma^4\ a^2\ b^2}{(a+br^{4\sigma})^6}, & (4.60) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Öte yandan, Kretschman skaleri ;

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{16}{(a+br^{4\sigma})^6 r^{4[1+2\sigma(2\sigma-1)-p_1(1-2\sigma-p_1)]}}\Big\{(a+br^{4\sigma})^4 p_1^2 (a+br^{4\sigma})(p_1-1)^2(1-p_1+p_1^2) \\
&+ \sigma\ x_1 (a+br^{4\sigma})^4 (2-9p_1+16p_1^2-15p_1^3+6p_1^4) \\
&+ 2\sigma^2 (a+br^{4\sigma})^2 \Big[a^2(2-9p_1+21p_1^2-24p_1^3+12p_1^4) \\
&+ 2\ a\ b\ r^{4\sigma}(-1-3p_1+12p_1^2-18p_1^3+9p_1^4)+b^2\ r^{8\sigma}(2-9p_1+21p_1^2-24p_1^3+12p_1^4)\Big] \\
&+ 4\sigma^3(a+br^{4\sigma})\Big[2a^3(-3+8p_1-12p_1^2+7p_1^3)+3a^2br^{4\sigma}(3+3p_1-11p_1^2+10p_1^3) \\
&+ 3\ a\ b^2\ r^{8\sigma}(-5+11p_1-19p_1^2+10p_1^3)+2b^3\ r^{12\sigma}p_1(5-9p_1+7p_1^2)\Big] \\
&+ 4\sigma^4\Big[2a^4(8-15p_1+12p_1^2)+2a^3\ b\ r^{4\sigma}(-10-21p_1+30p_1^2) \\
&+ a^2\ b^2\ r^{8\sigma}(79-72p_1+72p_1^2)+2\ a\ b^3\ r^{12\sigma}(-1-39p_1+30p_1^2) \\
&+ 2\ b^4\ r^{16\sigma}(5-9p_1+12p_1^2)\Big] \\
&+ 48\sigma^5(a+br^{4\sigma})\Big[2a^3(p_1-1)+a^2\ b\ r^{4\sigma}(3+2p_1)+a\ b^2\ r^{8\sigma}(2p_1-5)+2b^3r^{12\sigma}p_1\Big] \\
&+ 64\sigma^6(a+br^{4\sigma})^2(a^2-a\ b\ r^{4\sigma}+b^2r^{8\sigma})\Big\} \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

olmaktadır. (4.58), (4.60) ve (4.61) skalerlerine bakılarak (4.51) metriğinin $r=0$ ve $r=(-\frac{a}{b})^{\frac{1}{4\sigma}}$'te tekilliklere sahip olduğu görülmektedir. Ancak, $p_1=0$ olduğunda $\sigma=0$ ve $\sigma=\frac{1}{2}$ değerlerinde $r=0$'daki tekillik yok olmaktadır. Daha önce belirtildiği gibi $a\ b<0$ olmalıdır. Eğer $a<0$, $b>0$ ise 5-boyutta (4.51) uzay-zamanı, 4-boyutlu uzay-zamandaki duruma benzer olarak, $r=(-\frac{a}{b})^{\frac{1}{4\sigma}}$ yarıçaplı silindirsel yük kaynağının sadece dışında düzgün davranır. Ancak $a>0$, $b<0$ olduğu durumda (4.51) çizgi elemanının uzay-zamanında $r=(-\frac{a}{b})^{\frac{1}{4\sigma}}$ yarıçaplı silindirin sadece iç kısmında düzgün davranır.

- $\mathbf{W(r)X(r) = w_1}$ **durumu**

Bu durum için diğer integral sabitlerine göre 2 farklı sonuç elde edilir.

i. Metrik fonksiyonlarını;

$$
\begin{aligned}
U(r) &= -2\ln X(r)+u_0 r, \\
K(r) &= -\ln X(r)+k_0 r \qquad (4.62)
\end{aligned}
$$

olarak seçildiği durumda

$$X(r)=e^{\frac{u_0 r}{2}}\sqrt{\cos\left[\frac{u_0(2r-3x_0)}{2\sqrt{3}}\right]} \qquad (4.63)$$

şeklinde elde edilir ve çizgi elemanı;

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\sec\left[\frac{u_0(2r-3x_0)}{2\sqrt{3}}\right]^2 dt^2 \\ &+ \cos\left[\frac{u_0(2r-3x_0)}{2\sqrt{3}}\right]\left[e^{r(2k_0-u_0)}(dr^2+dz^2)+w_1^2e^{-ru_0}d\phi^2+e^{ru_0}dx^2\right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

olarak elde edilir. Bu durumda elektromanyetik alan bir formu

$$A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin\left[\frac{u_0(2r-3x_0)}{2\sqrt{3}}\right]dt \quad (4.65)$$

olur. Ancak bu tezde bu şekildeki özel çözüm daha fazla incelenmeyecektir.

ii. Metrik fonksiyonları ,

$$\begin{aligned} U(r) &= -2\ln X(r)+u_0, \\ K(r) &= -\ln X(r)+k_0, \end{aligned} \quad (4.66)$$

olarak belirlendiğinde ise

$$X(r)=\sqrt{r-x_0} \quad (4.67)$$

olmaktadır. Bu durumda çizgi elemanı;

$$ds^2 = -\frac{e^{2u_0}}{(r-x_0)^2}dt^2+(r-x_0)\left[e^{2(k_0-u_0)}(dr^2+dz^2)+e^{-2u_0}w_1^2d\phi^2+dx^2\right] \quad (4.68)$$

olarak elde edilir. Buradan elektromanyetik alan bir formu;

$$A=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{e^{u_0}}{r-x_0}dt \quad (4.69)$$

olmaktadır. Aynı zamanda Kretschman skaleri ise;

$$K=508\frac{e^{-4(k_0-u_0)}}{(r-x_0)^6} \quad (4.70)$$

değerine sahip olur ve metriğin $r=x_0$'da bir tekilliğe sahip olduğu görülmektedir.

- **$\mathbf{W(r) = w_0/x_0}$ durumu**

Eşitlik (4.42)'ten elde edilen ifade de metrik fonksiyonlarından $W(r)$ ve $X(r)$ sabit olarak seçildiğinde, diğer metrik fonksiyonları;

$$U(r) = u_0, \quad (4.71)$$

$$K(r) = k_0+k_1r, \quad (4.72)$$

olarak elde edilmektedir. Bu durum için, çizgi elemanı;

$$-e^{2u_1}dt^2+e^{2(k_1+k_0r-u_1)}(dr^2+dz^2)+e^{-2u_1}w_0^2d\phi^2+x_0^2dx^2, \quad (4.73)$$

şeklinde olur. Bu metrik için Riemann tensörünün tüm bileşenleri sıfır olmakta ve dolayısıyla bu metrik 5-boyutlu Minkowski uzayını vermektedir.

4.1.3 Vakum Çözümleri

Elde edilen (4.32) Einstein tensörünün bileşenleri kullanılarak vakum Einstein alan denklemleri çözüldüğünde, metrik fonksiyonları uygun integrasyon sabitleri seçilerek;

$$
\begin{aligned}
U(r) &= \ln r^{2\sigma} && (4.74)\\
K(r) &= \ln r^{p_1(p_1-1)+2\sigma(p_1+2\sigma)} && (4.75)\\
W(r) &= w_0 r^{1-p_1} && (4.76)\\
X(r) &= r^{p_1} && (4.77)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu durumda çizgi elemanı;

$$
ds^2 = -r^{4\sigma}dt^2 + r^{2[2\sigma(2\sigma-1)-p_1(1-2\sigma-p_1)]}(dr^2+dz^2) + w_0^2 r^{2(1-p_1-2\sigma)}d\phi^2 + r^{2p_1}dx^2 \qquad (4.78)
$$

olur. Elde edilen çizgi elemanının zaman kısmını $\frac{1}{(a+br^{4\sigma})^2}$ ile, uzaysal kısmını ise $(a+br^{4\sigma})$ ile çarpılarak, elektromanyetik alan çizgi elemanı (4.51) elde edilebileceği görülmektedir. Bu metriğin sahip olduğu tekillikleri belirlemek için bakılması gereken Kretschman skaleri

$$
\begin{aligned}
K = \; & \frac{16}{r^{4[2\sigma(2\sigma-1)-p_1(1-2\sigma-p_1)]}}\Big[p_1^2(p_1-1)^2(1-p_1+p_1^2) + \sigma p_1(2-9p_1+16p_1^2-15p_1^3)\\
& +2\sigma^2(2-9p_1+21p_1^2-24p_1^3+12p_1^4) + 8\sigma^3(-3+8p_1-12p_1^2+7p_1^3)\\
& +8\sigma^4(8-15p_1+12p_1^2) + 96\sigma^5(p_1-1) + 64\sigma^6\Big] \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Bu durumda $r=0$'da uzay-zamanın gerçek tekilliğe sahiptir. Ancak, $p_1=0$ olduğunda $\sigma=0$ ve $\sigma=\frac{1}{2}$ değerlerinde bu tekillik yok olmaktadır.

4.2 N Boyutlu Statik Silindirsel Simetrik Uzay-Zaman

Önceki kısımda statik, silindirsel simetrik 5-boyutlu uzay-zaman için çizgi elemanını eşitlik (4.1) olarak varsaymıştık. Bu bölümde, N-boyutlu uzay-zaman için, 4-boyutlu uzay-zaman metriği (3.5)'e ekstra uzaysal boyutlar eklenerek ve metriğin bu koordinatlardan bağımsız olduğu varsayılarak, çizgi elemanı;

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{2K-2U}(dr^2 + dz^2) + e^{-2U}W^2 d\phi^2 + \sum_i^n X_i^2 dx_i^2 \tag{4.80}$$

şeklinde seçilmiştir. Böylece U, K, W, X_i metrik fonksiyonları radyal koordinat r dışındaki tüm koordinatlardan bağımsızdır. Burada $N = n + 4$ ve n ekstra boyut olmak üzere, Cartan'ın yapı denklemleri ve Einstein alan denklemleri kullanılarak ortonormal tabanda Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri;

$$\begin{aligned}
G_{00} &= G_{00}^{(4)} + e^{2[U(r)-K(r)]} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^n \left[\frac{U'(r)X_i'(r)}{X_i(r)} - \frac{W'(r)X_i'(r)}{W(r)X_i(r)} - \frac{1}{2}\frac{X_i'(r)X_j'(r)}{X_i(r)X_j(r)} \right. \\
&- \left. \frac{X_i''(r)}{X_i(r)} \right], && (4.81) \\
G_{11} &= G_{11}^{(4)} + e^{2[U(r)-K(r)]} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^n \left[-\frac{U'(r)X_i'(r)}{X_i(r)} + \frac{W'(r)X_i'(r)}{W(r)X_i(r)} - \frac{1}{2}\frac{X_i'(r)X_j'(r)}{X_i(r)X_j(r)} \right. \\
&+ \left. \frac{K'(r)X_i'(r)}{X_i(r)} \right], && (4.82) \\
G_{22} &= G_{22}^{(4)} + e^{2[U(r)-K(r)]} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^n \left[\frac{U'(r)X_i'(r)}{X_i(r)} + \frac{W'(r)X_i'(r)}{W(r)X_i(r)} + \frac{1}{2}\frac{X_i'(r)X_j'(r)}{X_i(r)X_j(r)} \right. \\
&- \left. \frac{K'(r)X_i'(r)}{X_i(r)} + \frac{X_i''(r)}{X_i(r)} \right], && (4.83) \\
G_{33} &= G_{33}^{(4)} + e^{2[U(r)-K(r)]} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j\neq i}}^n \left[\frac{U'(r)X_i'(r)}{X_i(r)} + \frac{1}{2}\frac{X_i'(r)X_j'(r)}{X_i(r)X_j(r)} + \frac{X_i''(r)}{X_i(r)} \right], && (4.84) \\
G_{ii} &= e^{2[U(r)-K(r)]} \left[U'(r)^2 - \frac{U'(r)W'(r)}{W(r)} + K''(r) - U''(r) + \frac{W''(r)}{W(r)} \right. \\
&+ \left. \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^n \left(\frac{W'(r)X_j'(r)}{W(r)X_j(r)} + \frac{1}{2}\frac{X_k'(r)X_j'(r)}{X_k(r)X_j(r)} + \frac{X_j''(r)}{X_j(r)} \right) \right] && (4.85)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada küçük latin harfleri $i, j, k = \{1, 2, 3, ...n\}$ ekstra uzaysal boyutları tanımlamaktadır ve $G_{\mu\nu}^{(4)}$ ise 4-boyutlu uzay zamanda elde edilen (3.6) eşitlikleridir.

4.2.1 Vakum Çözümleri

N-boyutlu uzay-zaman için en genel haliyle (4.81-4.85) denklemlerinde ifade edilen Einstein tensör bileşenleri vakum için çözüldüğünde metrik fonksiyonları;

$$\begin{aligned} W(r) &= w_0 r^{1-p}, && (4.86)\\ K(r) &= \big(4\sigma^2 - p + p' + p^2 + 2\sigma p\big)\ln r, && (4.87)\\ U(r) &= 2\sigma \ln r, && (4.88)\\ X_i(r) &= r^{p_i} && (4.89)\end{aligned}$$

olmaktadır. Burada; $p = \sum_i^n p_i$, $p' = \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^n \frac{1}{2}p_i p_j$ ve $p^2 = \sum_i^n p_i^2$ olarak kısaltılmıştır. Bu durumda vakum N-boyutlu uzay-zaman metriği;

$$\begin{aligned} ds^2 &= -r^{4\sigma}dt^2 + r^{2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(dr^2+dz^2)\\ &\quad + w_0^2 r^{2(1-2\sigma-p)}d\phi^2 + \sum_i^n r^{p_i}dx_i^2 \qquad (4.90)\end{aligned}$$

haline gelir. Burada σ, w_0 ve p_i metriğin $N-2$ tane bağımsız parametresidir.

4.2.2 Einstein-Maxwell Çözümleri

N-boyutlu uzay-zamanda radyal doğrultuda bir elektrik alan için elektromanyetik bir formu $A = f(r)dt = f(r)e^{-U(r)}\theta^0$ olarak seçildiğinde, elektromanyetik alan ve enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri;

$$\begin{aligned} F_{01} &= F_{10} = -e^{-K(r)}f'(r), && (4.91)\\ T_{00} &= -T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{ii} = \frac{1}{2}e^{-2K(r)}f'(r)^2, && (4.92)\end{aligned}$$

olmaktadır. Maxwell denklemi $dF = 0$ için

$$d[f'(r)e^{-K(r)}] = 0, \qquad (4.93)$$

olurken diğer Maxwell denklemi $d*F = 0$ için ise

$$d\big[f'(r)e^{-U(r)}W(r)\prod_i^n X_i(r)\big] = 0, \qquad (4.94)$$

eşitliği elde edilir. Einstein alan denklemleri (4.81-4.85) ve (4.92) eşitlikleri kullanılarak çözüldüğünde uygun integral sabitleri seçilerek metrik fonksiyonları;

$$
\begin{aligned}
W(r) &= w_0 r^{1-p}(a+br^{4\sigma})^{\frac{4-N}{N-3}}, &(4.95)\\
K(r) &= \left(4\sigma^2 - p + p' + p^2 + 2\sigma p\right)\ln r - \ln\left(a+br^{4\sigma}\right)^{\frac{N-4}{N-3}}, &(4.96)\\
U(r) &= 2\sigma\ln r - \ln(a+br^{4\sigma}), &(4.97)\\
X(r) &= r^{p_i}(a+br^{4\sigma})^{\frac{1}{N-3}} &(4.98)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu durumda (4.80) metriği aşağıdaki gibi yazılır;

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\frac{r^{4\sigma}}{(a+br^{4\sigma})^2}dt^2 \\
&\quad +(a+br^{4\sigma})^{\frac{2}{N-3}}\Bigg[r^{2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(dr^2+dz^2) \\
&\quad +w_0^2 r^{2(1-2\sigma-p)}d\phi^2 + \sum_i^n r^{2p_i}dx_i^2\Bigg]. \qquad (4.99)
\end{aligned}
$$

Aynı zamanda;

$$
f(r) = \sqrt{\frac{N-2}{N-3}}\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}(a+br^{4\sigma})} \qquad (4.100)
$$

ve elektromanyetik alan bir formu

$$
A = \sqrt{\frac{N-2}{N-3}}\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}(a+br^{4\sigma})}dt \qquad (4.101)
$$

olarak Einstein-Maxwell denklemlerinden elde edilir. N-boyutlu uzay-zamanda (4.91) ve (4.92) elektromanyetik alan ve enerji momentum tensörleri en genel olarak

$$
\begin{aligned}
F_{01} = -F_{10} &= \sqrt{\frac{N-2}{N-3}}\frac{4\sigma\sqrt{-a\ b}}{(a+br^{4\sigma})^{\frac{N-2}{N-3}}}r^{-\left(1-4\sigma+4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} &(4.102)\\
T_{00} = -T_{11} = T_{22} &= T_{33} = T_{ii} = -\left(\frac{N-2}{N-3}\right)\frac{8\ \sigma^2\ a\ b}{(a+br^{4\sigma})^{2\frac{N-2}{N-3}}} \\
&\quad r^{-2\left(1-4\sigma+4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} &(4.103)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Burada yine, enerji yoğunluğu $\rho = T_{00}$'ın pozitif olması gerekliliği $a\ b < 0$ olması gerektiğini gösterir. Aynı zamanda (4.99) çizgi elemanı

Dış çözüm;	$\sigma > 0$	ise	$a < 0,\ b > 0,$
	$\sigma < 0$	ise	$a > 0,\ b < 0,$
İç çözüm;	$\sigma > 0$	ise	$a > 0,\ b < 0,$
	$\sigma < 0$	ise	$a < 0,\ b > 0,$

durumlarında düzgün davranmaktadır. Bu tezde dış çözümler üzerinde durulmaktadır. Bununla birlikte N-boyutlu uzay-zamanda Ricci skaleri;

$$R = \left(\frac{N-4}{N-3}\right) \frac{16\ \sigma^2\ a\ b}{(a+br^{4\sigma})^{2\frac{N-2}{N-3}}} r^{-2(1-4\sigma+4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p)} \tag{4.104}$$

olarak ve elektromanyetik değişmez skaleri ise;

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \left(\frac{N-2}{N-3}\right) \frac{32\ \sigma^2\ a\ b}{(a+br^{4\sigma})^{2\frac{N-2}{N-3}}} r^{-2(1-4\sigma+4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p)} \tag{4.105}$$

şeklinde genelleştirilebilir. Bu skalerlerden (4.99) metriği, 4 ve 5-boyutlu uzay-zamanlara benzer şekilde $r = 0$ ve $r = r_s = \left(-\frac{a}{b}\right)^{1/(4\sigma)}$'da uzay-zaman tekilliklerine sahiptir. Ancak σ'nın 0 ve $\frac{1}{2}$ olduğu durumlarda $r = 0$'daki tekillik yok olmaktadır.

Birim Uzunluk Başına Yük ve Kütle Yoğunluğu

N-boyutlu statik, silindirsel simetrik uzay-zamanın çizgi elemanı (4.99) uzay-zamanında sabit yarıçapta birim koordinat uzunluğundan geçen elektrik akısını veren Gauss Yasası;

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 F^{tr} \sqrt{-g}\ dz d\phi = 4\pi\lambda \tag{4.106}$$

şeklindedir. Burada g metrik tensörünün determinantı ve λ birim uzunluk başına yük yoğunluğudur. Metrik tensörünün determinantı

$$g = -w_0^2 (a+br^{4\sigma})^{\frac{4}{N-3}} r^{2+16\sigma^2-8\sigma-4p+4p'+4p^2+8\sigma\ p} \tag{4.107}$$

olarak elde edilir. Elektromanyetik alan tensörünün bileşeni ise;

$$F^{tr} = -\frac{4\sigma\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3}}}{(a+br^{4\sigma})^{\frac{2}{N-3}}} r^{-1-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} \tag{4.108}$$

olmaktadır. Bu eşitlikler kullanılarak birim uzunluk başına düşen yük yoğunluğu

$$\lambda = -2w_o\sigma\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}} \tag{4.109}$$

olarak N-boyutlu uzay-zamanda elde edilir. 4-boyutlu uzay-zamanda ise birim uzunluk başına düşen yük yoğunluğu

$$\lambda^{(4)} = -2\sqrt{2}C\sigma w_0 \tag{4.110}$$

olmaktadır.

Bu uzay-zamanda kütle-çekimsel akıyı veren Gauss yasası;

$$-\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d^2r}{d\tau^2} \sqrt{-g}\ dz d\phi = 4\pi\mu(r) \tag{4.111}$$

ile ifade edilir. Burada $\frac{d^2r}{d\tau^2}$ bu uzay-zamana sabit bir yarıçapta serbest halde bırakılan yüksüz bir test parçacığına etkiyen radyal kuvvettir ve

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -2\sigma \frac{(a - br^{4\sigma})}{(a + br^{4\sigma})^{\frac{N-1}{N-3}}} r^{-1-8\sigma^2+4\sigma+2p-2p'-2p^2-4\sigma p} \tag{4.112}$$

olmaktadır. (Bir sonraki bölümde daha ayrıntılı olarak gösterilecektir.) Bu durumda N-boyutlu uzay-zamanda birim uzunluk başına kütle miktarı;

$$\mu(r) = \frac{w_0\sigma(a - br^{4\sigma})}{a + br^{4\sigma}} \tag{4.113}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu sonuçlar Bonnor'un $N = 4$ için bulduğu sonuçlar ile de uyuşmaktadır (Bonnor 2007).

4.3 Yüklü-Yüksüz Parçacık Hareketleri

4.3.1 4-Boyutlu Uzay-Zamanda Parçacık Hareketleri

Herhangi bir uzay-zamanda hareket eden parçacıklar için jeodezik denklemleri (2.12) eşitliğinden elde edilir. Bu denklemleri elde etmek için gerekli olan Christoffel sembollerinin 4-boyutlu uzay-zamanda statik, silindirsel simetrik çizgi elemanı için, sıfırdan farklı bileşenleri

$$\Gamma^t_{rt} = U'(r), \tag{4.114}$$

$$\Gamma^r_{tt} = e^{-2K(r)+4U(r)}U'(r), \tag{4.115}$$

$$\Gamma^r_{rr} = K'(r) - U'(r), \tag{4.116}$$

$$\Gamma^r_{zz} = -K'(r) + U'(r), \tag{4.117}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = e^{-2K(r)}W(r)\left(W(r)U'(r) - W'(r)\right), \tag{4.118}$$

$$\Gamma^z_{rz} = K'(r) - U'(r), \tag{4.119}$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = -U'(r) + \frac{W'(r)}{W(r)} \tag{4.120}$$

şeklindedir. Yüksüz parçacıklar için jeodezik denklemleri;

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + 2\Gamma^t_{rt}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} = 0, \tag{4.121}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{tt}(\frac{dt}{d\tau})^2 + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{zz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0, \tag{4.122}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + 2\Gamma^z_{rz}\frac{dr}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} = 0, \tag{4.123}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \tag{4.124}$$

olurken (4.114-4.120) Christoffel sembolleri kullanılarak (4.121-4.122) denklemlerinin ilk integralleri;

$$\frac{dt}{d\tau} = Ee^{-2U(r)}, \tag{4.125}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z_0 e^{2[U(r)-K(r)]}, \tag{4.126}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_0}{W(r)^2}e^{2U(r)} \tag{4.127}$$

şeklinde elde edilir. Burada E, z_0, ϕ_0 integral sabitleridir. Ancak (4.122) eşitliği karmaşık olduğundan onun yerine (3.5) çizgi elemanından

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \epsilon e^{2[U(r)-K(r)]} + E^2 e^{-2K(r)} - z_0^2 e^{4[U(r)-K(r)]} - \frac{\phi_0^2}{W(r)^2}e^{4U(r)-2K(r)} \tag{4.128}$$

ifadesini kullanabiliriz. Burada $\epsilon = (\frac{ds}{d\tau})^2$ büyüklüğünü ifade eder ve $-1, 0, 1$ değerlerini alır ve bu değerler uzay-zamanın sırasıyla uzay-tipi, ışık-tipi ve zaman-tipi olduğunu gösterir.

Elektromanyetik alan içinde e elektrik yükü ve m kütlesine sahip parçacıkların jeodezik denklemi (2.12)'den

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + 2\Gamma^t_{rt}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} = \frac{e}{m}F^t{}_r\frac{dr}{d\tau} \tag{4.129}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{zz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{e}{m}F^r{}_t\frac{dt}{d\tau} \tag{4.130}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + 2\Gamma^z_{rz}\frac{dr}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} = 0 \tag{4.131}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \tag{4.132}$$

olarak yazılır. Burada elektromanyetik alan tensörünün bileşenleri;

$$F^t{}_r = e^{2U(r)}f'(r), \tag{4.133}$$

$$F^r{}_t = e^{2U(r)-2K(r)}f'(r) \tag{4.134}$$

şeklindedir. Jeodezik denklemlerin ilk integrallerinden,

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{m}f(r)e^{-2U(r)} - Ee^{-2U(r)} = \tilde{E}(r), \tag{4.135}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = Z_0e^{-2[K(r)-U(r)]}, \tag{4.136}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_0}{W^2(r)}e^{2U(r)} \tag{4.137}$$

olarak elde edilir. Burada $E,\ \phi_0,\ z_0$ integral sabitleri olarak seçilmiştir. Ancak (4.130) eşitliğinin integralini karmaşık olduğundan (3.5) çizgi elemanından

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^{-2K(r)}\left(\frac{e}{m}f(r) - E\right)^2 - e^{-4[K(r)-U(r)]}Z_0^2 - e^{-2K(r)+4U(r)}\frac{\phi_0^2}{W^2(r)}$$
$$\epsilon e^{-2[K(r)-U(r)]} \tag{4.138}$$

ifadesini kullanabiliriz.

Elde edilen bu jeodezik denklemlerden dairesel, radyal ve simetri ekseni boyunca hareket eden yüklü ve yüksüz test parçacığının davranışını ayrıntılı olarak inceleyelim.

Dairesel Jeodezikler

A. Vakumda Yüksüz Parçacık

Bölüm 3'de vakum alanlar için elde edilen çizgi elemanı (3.11)'in uzay-zamanında hareket eden nötr bir test parçacığının jeodezik denklemlerini elde etmek için (3.10) metrik fonksiyonları (4.125-4.128) eşitliklerinde yerine koyularak;

$$\frac{dt}{d\tau} = Er^{-4\sigma}, \tag{4.139}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z_0 r^{4\sigma(1-2\sigma)}, \tag{4.140}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_0}{w_0^2} r^{-2+4\sigma}, \tag{4.141}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \epsilon r^{-4\sigma(2\sigma-1)} + E^2 r^{-8\sigma^2} - z_0^2 r^{8\sigma-16\sigma^2} - \frac{\phi_0^2}{w_0^2} r^{-2+8\sigma-8\sigma^2}. \tag{4.142}$$

elde edilir. Test parçacığının simetri ekseni boyunca sabit bir noktada (z=sabit) ve sabit bir yarıçapta (r=sabit) dairesel hareket ettiğini varsayarsak, $\frac{dr}{d\tau} = 0, \frac{d^2r}{d\tau^2} = 0, \frac{dz}{d\tau} = 0$ durumları göz önünde bulundurmalıdır. Bu durumda,

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}\frac{E^2}{w_0^2} r^{-2} \tag{4.143}$$

denklemi (4.122) eşitliğinden elde edilir ve (3.11) çizgi elemanı;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = r^{4\sigma}(W^2 - 1) \tag{4.144}$$

olur. Burada $W^2 = \frac{2\sigma}{1-2\sigma}$'dır. Böylece nötr test parçacığının dairesel jeodezikleri

W	< 1	$(0 \leq \sigma < \frac{1}{4})$	zaman-tipi
W	> 1	$(\sigma > \frac{1}{4})$	uzay-tipi
W	$= 1$	$(\sigma = \frac{1}{4})$	ışık-tipi

olurlar (da Silva 1995). Yani kütleli parçacıklar $0 \leq \sigma < \frac{1}{4}$ dairesel jeodeziklerde hareket edibilir iken fotonlar sadece $\sigma = \frac{1}{4}$ durumunda hareket edebilirler. $\sigma > \frac{1}{4}$ değerlerinde dairesel jeodezik hareketi mevcut değildir.

B. Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığı radyal yönde elektrik alanın olduğu durumda elde edilen (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanında hareket ettiği durumda (4.125-4.128) denklemlerinden;

$$\frac{dt}{d\tau} = Er^{-4\sigma}(1-C^2r^{4\sigma})^2, \tag{4.145}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z_0\frac{r^{4\sigma(1-2\sigma)}}{(1-C^2r^{4\sigma})^2}, \tag{4.146}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_0}{w_0^2(1-C^2r^{4\sigma})^2}r^{-2+4\sigma}, \tag{4.147}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \epsilon\frac{r^{4\sigma(1-2\sigma)}}{(1-C^2r^{4\sigma})^2} + E^2r^{-8\sigma^2} - z_0^2\frac{r^{8\sigma(1-2\sigma)}}{(1-C^2r^{4\sigma})^4} - \frac{\phi_o^2 r^{-2(1-2\sigma)^2}}{w_0^2(1-C^2r^{4\sigma})^4} \tag{4.148}$$

elde edilir. Nötr test parçacığın (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanındaki dairesel jeodeziklerini elde etmek için $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}=0$, $\frac{dz}{d\tau}=0$ olarak seçilmelidir. Bu durumda (4.122) eşitliğinden;

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\sigma r^{-2+8\sigma}(1+C^2r^{4\sigma})}{(1-C^2r^{4\sigma})^4\left[1-2\sigma-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)\right]w_0^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{4.149}$$

elde edilerek (3.21) çizgi elemanında kullanıldığında,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(1-C^2r^{4\sigma})^2}\left\{-1+\frac{2\sigma(1+C^2r^{4\sigma})}{[1-2\sigma-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)]}\right\} \tag{4.150}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlikten parçacığın dairesel jeodeziklerinin

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_s} &> \left(\frac{1-4\sigma}{1+4\sigma}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{için uzay-tipi,} \\ \frac{r}{r_s} &= \left(\frac{1-4\sigma}{1+4\sigma}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{için ışık-tipi,} \\ \frac{r}{r_s} &< \left(\frac{1-4\sigma}{1+4\sigma}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{için zaman-tipi} \end{aligned}$$

olduğu söylenir. Burada $r_s = frac1C^{\frac{1}{2\sigma}}$ silindirsel yük kaynağının yarıçapıdır. $\frac{r}{r_s}$ değeri pozitif olacağından $0<\sigma<\frac{1}{4}$ olması gerekir. Aynı zamanda, burada dış çözümler incelendiğinden $\frac{r}{r_s}>1$ olmalıdır. Fakat parçacık hareketlerinde herzaman $\frac{1-4\sigma}{1+4\sigma}<1$ olacağından elektromanyetik alanda yüksüz parçacık hareketi mevcut değildir.

C. Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık

Yüklü bir test parçacığı (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanında hareket ettiği düşünülürse jeodezik denklemler

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{m}\frac{\sqrt{2}r^{-4\sigma}(1-C^2r^{4\sigma})}{C} - Er^{-4\sigma}(1-C^2r^{4\sigma})^2 = \tilde{E}(r), \tag{4.151}$$

$$\tag{4.152}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}+\frac{2\sigma r^{-1+8\sigma-8\sigma^2}(1+C^2r^{4\sigma})}{(1-C^2r^{4\sigma})^5}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\frac{2\sigma\left[1-2\sigma+C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)\right]}{r(1-C^2r^{4\sigma})}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$
$$+\frac{2\sigma\left[1-2\sigma+C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)\right]}{r(1-C^2r^{4\sigma})}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2$$
$$+r^{1-8\sigma^2}w_0^2\frac{\left[-1+2\sigma+C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)\right]}{(1-C^2r^{4\sigma})}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=\frac{e}{m}\frac{4C\sigma\sqrt{2}}{(1-C^2r^{4\sigma})^4}r^{-1+8\sigma-8\sigma^2}\frac{dt}{d\tau}, \quad (4.153)$$
$$\frac{dz}{d\tau}=\frac{Z_0}{(1-C^2r^{4\sigma})^2}r^{4\sigma(1-2\sigma)}, \quad (4.154)$$
$$\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{\phi_0}{w_0^2(1-C^2r^{4\sigma})^2}r^{-2+4\sigma} \quad (4.155)$$

olmaktadır. e elektrik yüküne ve m kütlesine sahip parçacığın (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanında dairesel hareket edebilmesi için, $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}=0$, $\frac{dz}{d\tau}=0$ olmalıdır. (4.153) eşitliğinden;

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=\frac{2\sigma\tilde{E}(r)^2}{w_0^2(1-C^2r^{4\sigma})^4}\left[\frac{1+C^2r^{4\sigma}-2\sqrt{2}\frac{e}{\tilde{E}(r)m}C(1-C^2r^{4\sigma})}{1-2\sigma-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)}\right]r^{-2+8\sigma} \quad (4.156)$$

elde edilerek ve (3.21) çizgi elemanı kullanılarak

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{r^{4\sigma}}{(1-C^2r^{4\sigma})^2}\left\{-1+2\sigma\left[\frac{1+C^2r^{4\sigma}-2C\sqrt{2}\frac{e}{E(r)m}(1-C^2r^{4\sigma})}{1-2\sigma-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)}\right]\right\} \quad (4.157)$$

olarak bulunur. Bu durumda parçacığın dairesel jeodezikleri;

$$\frac{r}{r_s}>\left[\frac{1-4\sigma(1+C\sqrt{2}\frac{e}{E(r)m})}{1+4\sigma(1-C\sqrt{2}\frac{e}{\tilde{E}(r)m})}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{için uzay-tipi,}$$
$$\frac{r}{r_s}=\left[\frac{1-4\sigma(1+C\sqrt{2}\frac{e}{E(r)m})}{1+4\sigma(1-C\sqrt{2}\frac{e}{\tilde{E}(r)m})}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{için ışık-tipi,}$$
$$\frac{r}{r_s}<\left[\frac{1-4\sigma(1+C\sqrt{2}\frac{e}{E(r)m})}{1+4\sigma(1-C\sqrt{2}\frac{e}{\tilde{E}(r)m})}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{için zaman-tipi,}$$

olmaktadır. Yüksüz parçacık hareketlerine benzer şekilde $\frac{r}{r_s}$ oranının herzaman birden büyük olması gerektiği için parçacığın zaman-tipi hareketi söz konusu olamaz bu nedenle dairesel jeodezikler mevcut değildir. Ayrıca doğruluğunun test edilmesi açısından $e=0$ sıfır seçildiğinde bu denklemlerin yüksüz parçacık hareket denklemlerine indirgendiği kolayca görülür.

Simetri Ekseni Boyunca Jeodezikler

A. Vakumda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının (3.11) çizgi elemanının uzay-zamanında, sabit bir açı ve yarıçapta, simetri ekseni boyunca hareket edebilmesi için $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ve $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ olmalıdır. Bu durumda (4.122) ve (4.139) eşitliklerinden ;

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = -E^2\frac{r^{-8\sigma^2}}{1-2\sigma} \tag{4.158}$$

elde edilmektedir. Buna göre (3.11) çizgi elemanı;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = r^{4\sigma}\left(-1+\frac{1}{2\sigma-1}\right) \tag{4.159}$$

haline gelmektedir. Böylece, nötr test parçacığının simetri ekseni boyunca jeodezik denklemleri;

$$\begin{array}{lcll} \dfrac{1}{2\sigma-1} & > & 1 & \text{ise uzay-tipi,} \\ \dfrac{1}{2\sigma-1} & = & 1 & \text{ise ışık-tipi,} \\ \dfrac{1}{2\sigma-1} & < & 1 & \text{ise zaman-tipidir.} \end{array}$$

Zaman-tipi jeodezikler ancak kütle parametresi σ'nın 1'den büyük olduğu durumlarda gerçekleşir. Ancak, σ parametresinin yapılan çalışmalar ile $0 \leq \sigma \leq 1$ aralığında değerler alabileceği gösterilmiş olduğundan (Wang ve ark. 1997), nötr test parçacığının bu uzay-zamanda simetri ekseni boyunca zaman-tipi hareketinin mevcut olmadığı sonucu elde edilir. Işık-tipi parçacıklar için ise $\sigma = 1$ değerinde bu tip hareket mümkündür.

B. Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanında simetri ekseni boyunca jeodezikleri için $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ve $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ olarak yazılabilir. Bu durumda (4.122) eşitliğinden;

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = E^2r^{-8\sigma^2}\frac{1+C^2r^{4\sigma}}{2\sigma-1-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)} \tag{4.160}$$

yazılır. (3.21) çizgi elemanından ise;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(1-C^2r^{4\sigma})}\left[-1+\frac{1+C^2r^{4\sigma}}{-1+2\sigma-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)}\right] \tag{4.161}$$

eşitliği elde edilir. Buradan test parçacığının simetri ekseni boyunca jeodeziklerinin

$$\begin{aligned}
\frac{r}{r_s} &> \left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{ise uzay-tipi,}\\
\frac{r}{r_s} &= \left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{ise ışık-tipi,}\\
\frac{r}{r_s} &< \left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{ise zaman-tipi,}
\end{aligned}$$

olduğu söylenir. Buna göre; ele aldığımız çözüm dış çözüm olduğundan $\frac{r}{r_s} > 1$ olmalıdır. Ancak eşitliğin sağ tarafı her zaman 1'den küçüktür. Bu nedenle nötr bir test parçacığı için simetri ekseni boyunca zaman-tipi jeodezik mevcut değildir.

C. Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık

Elektrik yüküne ve kütleye sahip bir test parçacığının (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanında, simetri ekseni boyunca hareket edebilmesi için $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ve $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ olmalıdır. Buna göre (4.153) eşitliğinden;

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \frac{\tilde{E}(r)^2 r^{-8\sigma(\sigma-1)}}{(1-C^2r^{4\sigma})^4}\left[\frac{\frac{-2\sqrt{2}eC}{m\tilde{E}(r)}(1-C^2r^{4\sigma})+1+C^2r^{4\sigma}}{2\sigma-1-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)}\right] \tag{4.162}$$

elde edilirken (3.21)çizgi elemanından;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(1-C^2r^{4\sigma})^2}\left[-1+\frac{\frac{-2\sqrt{2}eC}{m\tilde{E}(r)}(1-C^2r^{4\sigma})+1+C^2r^{4\sigma}}{2\sigma-1-C^2r^{4\sigma}(1+2\sigma)}\right] \tag{4.163}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda, test parçacığının simetri ekseni boyunca jeodezikleri

$$\begin{aligned}
\frac{r}{r_s} &> \left(\frac{\sigma-1+\frac{eC\sqrt{2}}{m\tilde{E}(r)}}{\sigma+1+\frac{eC\sqrt{2}}{m\tilde{E}(r)}}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{ise uzay-tipi,}\\
\frac{r}{r_s} &= \left(\frac{\sigma-1+\frac{eC\sqrt{2}}{m\tilde{E}(r)}}{\sigma+1+\frac{eC\sqrt{2}}{m\tilde{E}(r)}}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{ise ışık-tipi,}\\
\frac{r}{r_s} &< \left(\frac{\sigma-1+\frac{eC\sqrt{2}}{m\tilde{E}(r)}}{\sigma+1+\frac{eC\sqrt{2}}{m\tilde{E}(r)}}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} && \text{ise zaman-tipi,}
\end{aligned}$$

olmaktadır. Bu durumda da dış çözümler için, yüklü test parçacığının zaman-tipi jeodezikleri mevcut değildir.

Radyal Kuvvet

A. Vakumda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının durgun halde (3.11) çizgi elemanının uzay-zamanına bırakıldığını varsayalım. Bu durumda başlangıç koşulları $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$ ve $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ olmaktadır. Buna göre (4.122) eşitliği

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -E^2U'(r)e^{-2K(r)} \tag{4.164}$$

olur. Bununla birlikte çizgi elemanından $ds^2 = -d\tau^2$ eşitliği yazılarak $E = e^{U(r)}$ olması gerektiği görülür. (3.10) metrik fonksiyonları kullanılarak;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -2\sigma r^{-1+4\sigma-8\sigma^2} \tag{4.165}$$

elde edilir. Bu eşitliğe göre r'nin tüm değerleri için;

$$\begin{aligned} \sigma &> 0 \quad \text{için parçacık kütle-çekimsel kuvvet tarafından çekilir,} \\ \sigma &< 0 \quad \text{için parçacık kütle-çekimsel kuvvet tarafından itilir.} \end{aligned}$$

B. Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık

(3.21) çizgi elemanının uzay-zamanına herhangi bir t anında durgun halde bırakılan nötr test parçacığı için başlangıç koşulları $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$ ve $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ şeklindedir. Bu parçacığın üzerine etki eden radyal kuvveti belirlemek için, (4.122) eşitliğinden;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\Gamma^r{}_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -E^2U'(r)e^{-2K(r)} \tag{4.166}$$

elde edilir. Aynı zamanda $ds^2 = -d\tau^2$ olduğundan $E = e^{U(r)}$ olması gerekir. Metrik fonksiyonları kullanılarak eşitlik;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{2\sigma(1+C^2r^{4\sigma})}{(1-C^2r^{4\sigma})^3}r^{-1+4\sigma-8\sigma^2} \tag{4.167}$$

olmaktadır. Aynı zamanda bu ifade;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{2\sigma\left[1+\left(\frac{r}{r_s}\right)^{4\sigma}\right]}{\left[1-\left(\frac{r}{r_s}\right)^{4\sigma}\right]^3}r^{-1+4\sigma-8\sigma^2} \tag{4.168}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \sigma > 0 \quad \text{ise} \quad \frac{r}{r_s} &< 1 \quad \text{olduğunda kütle-çekimsel kuvvet parçacığı çeker,} \\ \frac{r}{r_s} &> 1 \quad \text{olduğunda kütle-çekimsel kuvvet parçacığı iter,} \\ \sigma < 0 \quad \text{ise} \quad \frac{r}{r_s} &< 1 \quad \text{olduğunda kütle-çekimsel kuvvet parçacığı çeker,} \\ \frac{r}{r_s} &> 1 \quad \text{olduğunda kütle-çekimsel kuvvet parçacığı iter.} \end{aligned}$$

Yapılan elektromanyetik çözümde elde edilen sonuç $r > r_s$ içindir. Bu nedenle her zaman $\frac{r}{r_s} > 1$ durumuna bakıyoruz. Buna göre elektromanyetik alanda, yüksüz parçacık silindirsel yük dağılımının dışında kütle çekimsel kuvvet tarafından her zaman itilir (Bonnor 2007).

C. Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık

Elektrik yükü e ve kütlesi m olan bir test parçacığının (3.21) çizgi elemanının uzay-zamanına durgun halde bırakıldığını varsayarsak, $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$ ve $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ şeklinde alabiliriz. Bu durumda (4.130) eşitliği

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{e}{m} f'(r) e^{-2K(r)+2U(r)} \frac{dt}{d\tau} - U'(r) e^{-2K(r)+4U(r)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{4.169}$$

olmaktadır. (3.21) çizgi elemanı için $ds^2 = -d\tau^2$ yazıldığında $(\frac{dt}{d\tau})^2 = e^{-2U(r)}$ olarak elde edilir. Böylece;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{2\sigma}{(1 - C^2 r^{4\sigma})^3} \left[\frac{2\sqrt{2}\; C\; e\; r^{2\sigma}}{m} - (1 + C^2 r^{4\sigma})\right] r^{-1+4\sigma-8\sigma^2} \tag{4.170}$$

olur. Aynı zamanda (4.110) eşitliğinde 4-boyutlu uzay-zaman için elde edilen birim uzunluk başına yük yoğunlu kullanılarak

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{2}{(1 - C^2 r^{4\sigma})^3} \left[\frac{\lambda^{(4)}\; e\; r^{2\sigma}}{m\; w_0} + \sigma(1 + C^2 r^{4\sigma})\right] r^{-1+4\sigma-8\sigma^2} \tag{4.171}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim nötr test parçacığının elektromanyetik alandaki radyal kuvveti için bulunan sonucu vermektedir. Bu kuvvetin herzaman itici olacağını bir önceki bölümde elde etmiştik. Buradaki birinci terim ise yüklü parçacık ile elektromanyetik alan etkileşmesidir ve parçacığın elektrik yükü e ile elektromanyetik alanın birim uzunluk başına yük yoğunluğu $\lambda^{(4)}$'ün çarpımlarının işaretine göre farklı davranış göstermektedir. Eğer $e\lambda^{(4)}$ çarpımı pozitif ise parçacığa etkiyen kuvvet itici, bu çarpım negatif olduğunda ise etki eden kuvvet çekici olur. Parçacığa elektromanyetik alandan dolayı etkiyen kuvvetin çekici olduğu yani $e\lambda^{(4)}$ çarpımının negatif olduğu durum için, parçacığa etki eden net kuvvetin sıfıra eşit olacağı özel değerleri mevcuttur. Bu noktalarda $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ olduğunda parçacık nötr denge durumundadır. Bu durum ancak (4.170) denkleminde;

$$\frac{2\sqrt{2}|e\; C| r^{2\sigma}}{m} = 1 + C^2 r^{4\sigma} \tag{4.172}$$

eşitliği sağlandığı zaman gerçekleşir. Buna göre

$$r = r_s \left(\frac{\sqrt{2}|e|}{m} \pm \sqrt{-1 + \frac{2e^2}{m^2}}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \tag{4.173}$$

olduğu durumda parçacık üzerine etki eden kuvvetler dengededir. Bu ifadenin fiziksel anlamının olması için kök içindeki ifadelerin pozitif olması gerekmektedir. Bu durumda $\sqrt{2}|e| > m$ olmalıdır (Bonnor 2007).

Bu bölümde bahsedilen 4-boyutlu uzay-zamanda test parçacığının dairesel ve simetri ekseni boyunca hareketlerini ve radyal yöndeki kuvvetin davranışını kısaca aşağıdaki tablodaki gibi ifade edebiliriz.

Jeodezikler	Vakumda Yüksüz Parçacık	Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık	Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık
Dairesel	Var ($0 < \sigma < \frac{1}{4}$)	Yok	Yok
Simetri Ekseni Boyunca	Yok	Yok	Yok
Radyal Kuvvet	Çekici	İtici	Çekici veya itici

Çizelge 4.1: 4-boyutlu uzay-zamanda test parçacığının zaman-tipi jeodezikleri ve radyal kuvvet

4.3.2 N-boyutlu uzay-zamanda parçacık hareketleri

N-boyutlu uzay-zamanda yüklü ve yüksüz parçacık hareketlerini belirlemek için (2.12) kullanılarak;

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + 2\Gamma^t_{rt}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} = \frac{e}{m}F^t{}_r\frac{dr}{d\tau}, \tag{4.174}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{tt}(\frac{dt}{d\tau})^2 + \Gamma^r_{rr}(\frac{dr}{d\tau})^2 + \Gamma^r_{zz}(\frac{dz}{d\tau})^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}(\frac{d\phi}{d\tau})^2 + \sum_i^n \Gamma^r_{x_ix_i}(\frac{dx_i}{d\tau})^2 = \frac{e}{m}F^r{}_t\frac{dt}{d\tau}, \tag{4.175}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + 2\Gamma^z_{rz}\frac{dr}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} = 0, \tag{4.176}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + 2\Gamma^\phi_{r\phi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} = 0, \tag{4.177}$$

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} + 2\Gamma^{x_i}_{rx_i}\frac{dr}{d\tau}\frac{dx_i}{d\tau} = 0 \tag{4.178}$$

elde edilir. Bu jeodezik denklem çözümleri için gerekli N-boyutlu uzay-zamanda statik silindirsel simetrik çizgi elemanı için Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri;

$$\Gamma^t_{rt} = U'(r), \tag{4.179}$$

$$\Gamma^r_{tt} = e^{-2K(r)+4U(r)}U'(r), \tag{4.180}$$

$$\Gamma^r_{rr} = K'(r) - U'(r), \tag{4.181}$$

$$\Gamma^r_{zz} = -K'(r) + U'(r), \tag{4.182}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = e^{-2K(r)}W(r)\left[W(r)U'(r) - W'(r)\right], \tag{4.183}$$

$$\Gamma^z_{rz} = K'(r) - U'(r), \tag{4.184}$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = -U'(r) + \frac{W'(r)}{W(r)} \tag{4.185}$$

$$\Gamma^{x_i}_{rx_i} = \frac{X_i'(r)}{X_i(r)} \tag{4.186}$$

$$\Gamma^r_{x_ix_i} = -e^{-2K(r)+2U(r)}X_i'(r)X_i(r) \tag{4.187}$$

şeklindedir. Elektromanyetik alan tensörünün bileşenleri;

$$F^t{}_r = e^{2U(r)}f'(r), \tag{4.188}$$

$$F^r{}_t = e^{2U(r)-2K(r)}f'(r) \tag{4.189}$$

olmaktadır.

Eğer parçacık elektrik yüküne sahip değilse ($e=0$);

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= Ee^{-2U(r)}, & (4.190)\\
\frac{dz}{d\tau} &= z_0 e^{2[U(r)-K(r)]}, & (4.191)\\
\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\phi_0}{W(r)^2}e^{2U(r)} & (4.192)\\
\frac{dx_i}{d\tau} &= \frac{q_i}{X_i(r)^2} & (4.193)
\end{aligned}$$

olarak (4.179-4.187) Christoffel sembolleri kullanılarak jeodezik denklemlerinin ilk integralleri elde edilir. Burada $E,\ z_0,\ \phi_0,\ q_i$ integrasyon sabitleridir. Ancak radyal yönde değişimi ifade eden (4.175) eşitliği yerine, statik, silindirsel simetrik N-boyutlu uzay-zaman çizgi elemanı (4.80) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \epsilon e^{2U(r)-2K(r)} + E^2 e^{-2K(r)} - z_0^2 e^{4U(r)-4K(r)} - \frac{\phi_0^2}{W(r)^2}e^{4U(r)-2K(r)}\\
&\quad - \sum_i^n \frac{q_i^2}{X_i(r)^2}e^{2U(r)-2K(r)} \qquad (4.194)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\epsilon = \frac{ds^2}{d\tau^2}$'dir.

Öte taraftan eğer parçacık bir elektrik yüküne sahip ise ($e \neq 0$) jeodezik denklemlerinin ilk integralleri şu şekilde olur;

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= \frac{e}{m}f(r)e^{-2U(r)} - Ee^{-2U(r)} = \tilde{E}(r), & (4.195)\\
\frac{dz}{d\tau} &= z_0 e^{2U(r)-2K(r)}, & (4.196)\\
\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\phi_0}{W(r)^2}e^{2U(r)}, & (4.197)\\
\frac{dx_i}{d\tau} &= \frac{q_i}{X_i(r)^2}. & (4.198)
\end{aligned}$$

Ancak (4.175) eşitliğinin çözümü karmaşık olduğundan (4.99) çizgi elemanından;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \epsilon e^{2U(r)-2K(r)} + \left(\frac{e}{m}f(r) - E\right)^2 e^{-2K(r)}\\
&\quad -z_0^2 e^{4U(r)-2K(r)} - \frac{\phi_0^2}{W(r)^2}e^{4U(r)-2K(r)} - \sum_i^n \frac{q_i}{X_i(r)^2}e^{2U(r)-2K(r)} \qquad (4.199)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu denklemlerde $E,\ z_0,\ \phi_0,\ q_i$ integral sabitleri ve $\epsilon = \frac{ds^2}{d\tau^2}$ olarak seçilmiştir. Bu jeodezik denklemlere göz önünde bulundurularak parçacığın bazı özel hareketlerini inceleyelim.

Dairesel Hareket

A. Vakumda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının (4.90) çizgi elemanının uzay-zamanında hareket ettiğini varsayılırsa (4.86-4.89) metrik fonksiyonları kullanılarak jeodezik denklemleri;

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= Er^{-4\sigma}, && (4.200)\\
\frac{dz}{d\tau} &= z_0 r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}, && (4.201)\\
\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\phi_0}{w_0^2} r^{4\sigma-2+p}, && (4.202)\\
\frac{dx_i}{d\tau} &= q_i r^{-2p_i}, && (4.203)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \epsilon r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} + E^2 r^{-2\left(4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}\\
&- z_0^2 r^{-4\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} - \frac{\phi_0^2}{w_0^2} r^{-2\left(1+4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}\\
&- q_i^2 r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} \qquad (4.204)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Parçacığın simetri ekseni etrafında dairesel hareket ettiği düşünüldüğünde $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau} = 0$ olmaktadır. Böylece eşitlik (4.175)'dan

$$
\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\sigma}{w_0^2(1-2\sigma-p)} r^{8\sigma-2+2p} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \qquad (4.205)
$$

elde edilmektedir. (4.99) metriği;

$$
\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = r^{4\sigma}\left(\frac{2\sigma}{1-2\sigma-p} - 1\right) \qquad (4.206)
$$

haline gelir. Bu durumda nötr test parçacığının dairesel jeodezikleri

$$
\begin{aligned}
0 < \sigma + \frac{p}{4} &< \frac{1}{4} && \text{için zaman-tipi,}\\
\sigma + \frac{p}{4} &> \frac{1}{4} && \text{için uzay-tipi,}\\
\sigma + \frac{p}{4} &= \frac{1}{4} && \text{için ışık-tipi}
\end{aligned}
$$

olmaktadır. Bu sonuçların 4-boyutlu vakum çözümünden farkı, ekstra boyutlara ait parametrelerin (p_i) de bu jeodeziklerin davranışlarını etkilemesidir.

B. Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının elektromanyetik alan çizgi elemanı (4.99)'in uzay-zamanında hareket ettiği düşünüldüğünde (4.190-4.194) jeodezik denklemleri;

$$\frac{dt}{d\tau} = Er^{-4\sigma}(a+br^{4\sigma})^2, \tag{4.207}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z_0 r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}}, \tag{4.208}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_0}{w_0^2} r^{-2(1-2\sigma-p)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}}, \tag{4.209}$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = q_i r^{-2p_i}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}}, \tag{4.210}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \epsilon r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma+-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}} \\ &+ E^2 r^{-2\left(4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{2(N-4)}{N-3}} \\ &- z_0^2 r^{-4\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-4}{N-3}} \\ &- \frac{\phi_0^2}{w_0^2} r^{-2\left(1+4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-4}{N-3}} \\ &- \sum_i^n q_i^2 r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-6}{N-3}}\end{aligned} \tag{4.211}$$

olarak elde edilmektedir. Bu parçacığın simetri ekseni etrafında dairesel hareket ettiği durumda, $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}=0$, $\frac{dz}{d\tau}=0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau}=0$ olmaktadır. Bu eşitlikler göz önünde tutularak (4.175) jeodezik denklemi tekrar incelendiğinde;

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -\frac{2\sigma(a-br^{4\sigma})(a+br^{4\sigma})^{-4+2\frac{N-4}{N-3}}}{w_0^2\left\{a\left(-1+2\sigma+p\right)+br^{4\sigma}\left[-1+p-2\sigma(1-2\frac{N-4}{N-3})\right]\right\}} r^{2(-1+4\sigma+p)}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{4.212}$$

elde edilir. Bu eşitlik kullanılarak (4.99) çizgi elemanı tekrar düzenlendiğinde;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(a+br^{4\sigma})^2}\left\{-1+\frac{2\sigma(br^{4\sigma}-a)}{a(-1+2\sigma+p)+br^{4\sigma}[-1+p-2\sigma(1-2\frac{N-4}{N-3})]}\right\} \tag{4.213}$$

olmaktadır. Buradan yüksüz test parçacığının dairesel jeodezikleri

$$\frac{r}{r_s} > \left(\frac{1-4\sigma-p}{1+4\sigma(1-\frac{N-4}{N-3})-p}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} \qquad \text{için uzay-tipidir,}$$

$$\frac{r}{r_s} = \left(\frac{1-4\sigma-p}{1+4\sigma(1-\frac{N-4}{N-3})-p}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} \qquad \text{için ışık-tipidir,}$$

$$\frac{r}{r_s} < \left(\frac{1-4\sigma-p}{1+4\sigma(1-\frac{N-4}{N-3})-p}\right)^{\frac{1}{4\sigma}} \qquad \text{için zaman-tipidir.}$$

Burada $r = r_s$ yarıçaplı silindirsel yük kaynağının dışındaki çözümleri ele aldığımızdan $\frac{r}{r_s} > 1$ olmalıdır. Bu durum için yukarıda elde edilen sonuçlara göre elektromanyetik alanda yüksüz parçacıklar için dairesel jeodezikler mevcut değildir.

C. Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık

Yüklü bir test parçacığın N-boyutlu elektromanyetik alan çizgi elemanı (4.99)'in uzay-zamanında hareket ettiği varsayıldığında (4.86-4.89) metrik fonksiyonları kullanılarak jeodezik denklemler;

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{N-2}{N-3}\right)\frac{e}{m}\sqrt{-\frac{a}{b}}(a+br^{4\sigma})r^{-4\sigma} - E(a+br^{4\sigma})r^{-4\sigma} = \tilde{E}(r), \quad (4.214)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = z_0 r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}}, \quad (4.215)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\phi_0}{w_0^2} r^{-2(1-2\sigma-p)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}}, \quad (4.216)$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = q_i r^{-2p_i}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}} \quad (4.217)$$

şeklinde elde edilmektedir. Ancak (4.175) eşitliği yerine (4.99) çizgi elemanından;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \epsilon r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-2}{N-3}} \\
&+ \tilde{E}(r)^2 r^{-2\left(4\sigma^2-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{2(N-4)}{N-3}} \\
&- z_0^2 r^{-4\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-4}{N-3}} \\
&- \frac{\phi_0^2}{w_0^2} r^{-2\left(1+4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-4}{N-3}} \\
&- \sum_i^n q_i^2 r^{-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}(a+br^{4\sigma})^{\frac{-6}{N-3}}
\end{aligned} \quad (4.218)$$

ifadesi kullanılabilir. Bu denklemlerde E, z_0, ϕ_0, q_i integral sabitleri ve $\epsilon = \frac{ds^2}{d\tau^2}$ olarak seçilmiştir. Bu uzay-zamanda dairesel hareket yapan e yükü m kütlesine sahip test parçacığı için, $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}$, $\frac{dx_i}{d\tau} = 0$ olur. Bu durumda (4.175) jeodezik denkleminden;

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{-2\sigma\tilde{E}(r)^2 r^{-2+8\sigma+2p}}{w_0^2(a+br^{4\sigma})^{2\frac{N-2}{N-3}}}\left\{\frac{\frac{e}{\tilde{E}(r)m}2\sqrt{(-a\ b)(\frac{N-2}{N-3})}(a+br^{4\sigma})+(a-br^{4\sigma})}{a(-1+2\sigma+p)+br^{4\sigma}\left[-1-2\sigma(1-\frac{2}{N-3})+p\right]}\right\} \quad (4.219)$$

elde edilerek (4.99) çizgi elemanında yerine koyulursa;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(a+br^{4\sigma})^2}\left\{-1-2\sigma\left(\frac{\frac{e}{\tilde{E}(r)m}2\sqrt{(-a\ b)(\frac{N-2}{N-3})}(a+br^{4\sigma})+(a-br^{4\sigma})}{a(-1+2\sigma+p)+br^{4\sigma}\left[-1-2\sigma(1-\frac{2}{N-3})+p\right]}\right)\right\} \quad (4.220)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikten N-boyutlu uzay-zamanda elektromangetik alan çizgi elemanı

(4.99)'in uzay-zamanında yüklü parçacığın dairesel jeodezikleri;

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{r}{r_s} > \left[\dfrac{1-4\sigma\left(1-\frac{e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}}\right)-p}{1+4\sigma\left(1-\frac{N-4}{N-3}+\frac{e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}}\right)-p}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} & \text{ise uzay-tipi,} \\
\dfrac{r}{r_s} = \left[\dfrac{1-4\sigma\left(1-\frac{e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}}\right)-p}{1+4\sigma\left(1-\frac{N-4}{N-3}+\frac{e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}}\right)-p}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} & \text{ise ışık-tipi,} \\
\dfrac{r}{r_s} < \left[\dfrac{1-4\sigma\left(1-\frac{e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}}\right)-p}{1+4\sigma\left(1-\frac{N-4}{N-3}+\frac{e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-ab)\frac{N-2}{N-3}}\right)-p}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} & \text{ise zaman-tipidir.}
\end{array}$$

Bu eşitlikler daha önceki elde ettiğimiz sonuçları doğrulamakta ve parçacığın dairesel hareketinin N-boyutlu uzay-zamanda da mevcut olmadığını desteklemektedir.

Simetri Ekseni Boyunca Jeodezikler

A. Vakumda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının (4.90) çizgi elemanının uzay-zamanında simetri ekseni boyunca hareket etmesi için $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}=0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau}=0$ olmalıdır. Bu durumda (4.175) eşitliğinden;

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2=\frac{2\sigma}{4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p}r^{-2\left(4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \tag{4.221}$$

elde edilir. (4.90) çizgi elemanından ise

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=r^{4\sigma}\left(-1+\frac{2\sigma}{4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p}\right) \tag{4.222}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu denklemden test parçacığının simetri ekseni boyunca jeodeziklerinin

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{2\sigma}{4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p} > 1 & \text{ise uzay-tipi,} \\
\dfrac{2\sigma}{4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p} = 1 & \text{ise ışık-tipi,} \\
\dfrac{2\sigma}{4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p} < 1 & \text{ise zaman-tipi,}
\end{array}$$

oldukları söylenir. Bu eşitliklerden yüksüz parçacığın vakum, N-boyutlu uzay-zamanda zaman-tipi jeodeziklerinin

$$2\sigma\left(2\sigma-2+p\right)-p+p'+p^2>0 \tag{4.223}$$

değerini sağladığında olacağı görülmektedir.

B. Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık

Nötr test parçacığının elektromanyetik alan çizgi elemanı (4.99)'in uzay-zamanında hareket ettiğinde simetri ekseni boyunca sabit bir yarıçap ve açıdaki jeodezikleri için $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}=0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau}=0$ olmalıdır. (4.175) eşitliğinden;

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = r^{-2\left(4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}$$
$$\frac{2\sigma(a-br^{4\sigma})(a+br^{4\sigma})^{-2-\frac{2}{N-3}}}{a\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)+br^{4\sigma}\left(4\sigma^2-\frac{2\sigma(N-5)}{N-3}-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (4.224)$$

elde edilir. (4.99) çizgi elemanı ise;

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(a+br^{4\sigma})^2}\left[-1\right.$$
$$\left.+\frac{2\sigma(a+br^{4\sigma})}{a\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)+br^{4\sigma}\left(4\sigma^2-\frac{2\sigma(N-5)}{N-3}-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}\right] \quad (4.225)$$

haline gelir. Bu durumda nötr test parçacığının simetri ekseni boyunca jeodezikleri;

$$\frac{r}{r_s} > \left[\frac{4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p}{4\sigma^2+2\sigma\left(1-\frac{N-5}{N-3}\right)-p+p'+p^2+2\sigma p}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{ise uzay-tipi,}$$
$$\frac{r}{r_s} = \left[\frac{4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p}{4\sigma^2+2\sigma\left(1-\frac{N-5}{N-3}\right)-p+p'+p^2+2\sigma p}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{ise ışık-tipi,}$$
$$\frac{r}{r_s} < \left[\frac{4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p}{4\sigma^2+2\sigma\left(1-\frac{N-5}{N-3}\right)-p+p'+p^2+2\sigma p}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{ise zaman-tipidir}$$

Bu eşitlikler radyal yönde elektrik alana sahip N-boyutlu uzay-zamanda yüksüz test parçacığının simetri ekseni boyunca zaman-tipi jeodeziklere sahip olmadığını göstermektedir.

C. Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık

Yüklü bir test parçacığının (4.99) çizgi elemanının uzay-zamanında simetri ekseni boyunca sabit açı ve yarıçapta jeodezikleri için $\frac{dr}{d\tau}=0$, $\frac{d\phi}{d\tau}=0$, $\frac{d^2r}{d\tau^2}=0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau}=0$ olmalıdır. (4.175) eşitliğinden;

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\sigma\tilde{E}(r)^2 r^{-2\left(4\sigma^2-4\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}}{(a+br^{4\sigma})^{2+\frac{2}{N-3}}}$$
$$\left[\frac{\frac{2e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3}}(a+br^{4\sigma})+(a-br^{4\sigma})}{a\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)+br^{4\sigma}\left(4\sigma^2-2\sigma\frac{N-5}{N-3}-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}\right] \quad (4.226)$$

elde edilirken çizgi elemanında yerine konduğunda

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{r^{4\sigma}}{(a+br^{4\sigma})^2}\left[-1\right.$$
$$+\frac{\frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3}}(a+br^{4\sigma})+2\sigma(a-br^{4\sigma})}{a\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)+br^{4\sigma}\left(4\sigma^2-2\sigma\frac{N-5}{N-3}-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} \quad (4.227)$$

denklemine ulaşılır. Yüklü test parçacığının simetri ekseni boyunca olan jeodeziklerinin

$$\frac{r}{r_s} > \left[\frac{4\sigma^2 - 4\sigma - \frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3} - p + p' + p^2 + 2\sigma p}}{4\sigma^2 + 2\sigma\left(1 - \frac{N-5}{N-3}\right) - \frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3} - p + p' + p^2 + 2\sigma p}}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{ise uzay-tipi}$$

$$\frac{r}{r_s} = \left[\frac{4\sigma^2 - 4\sigma - \frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3} - p + p' + p^2 + 2\sigma p}}{4\sigma^2 + 2\sigma\left(1 - \frac{N-5}{N-3}\right) - \frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3} - p + p' + p^2 + 2\sigma p}}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{ise ışık-tipi,}$$

$$\frac{r}{r_s} < \left[\frac{4\sigma^2 - 4\sigma - \frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3} - p + p' + p^2 + 2\sigma p}}{4\sigma^2 + 2\sigma\left(1 - \frac{N-5}{N-3}\right) - \frac{4\sigma e}{m\tilde{E}(r)}\sqrt{(-a\ b)\frac{N-2}{N-3} - p + p' + p^2 + 2\sigma p}}\right]^{\frac{1}{4\sigma}} \quad \text{ise zaman-tipi}$$

olduğu söylenir. Bu eşitlikler test parçacığının N-boyutlu, radyal yönde elektrik alana sahip uzay-zamanda simetri ekseni boyunca zaman-tipi jeodeziklerinin olmadığını göstermektedir.

Radyal Kuvvet

A. Vakumda Yüksüz Parçacık

N-boyutlu uzay-zamanda (4.90) çizgi elemanının uzay-zamanına durgun halde nötr bir test parçacığı bırakıldığında, başlangıç koşullarından $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$, $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau} = 0$ olmaktadır. Bu durumda (4.175) eşitliği kullanarak;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\Gamma^r_{tt}E^2e^{-4U(r)} = -U'(r)E^2e^{-2K(r)} \tag{4.228}$$

yazılır. $ds^2 = -d\tau^2$ denkleminden $E = e^{U(r)}$ olarak elde edilir. Bu durumda (4.86-4.89) metrik fonksiyonları kullanılarak;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -2\sigma r^{-1-2\left(4\sigma^2 - 2\sigma - p + p' + p^2 + 2\sigma p\right)} \tag{4.229}$$

haline gelir. Bu eşitliğe göre r'nin tüm değerleri için

$$\begin{array}{lll} \sigma > 0 & \text{ise kütle-çekimsel kuvvet parçacığı çeker,} \\ \sigma < 0 & \text{ise kütle-çekimsel kuvvet parçacığı iter.} \end{array}$$

B. Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık

Nötr bir test parçacığı (4.99) uzay-zamanına durgun halde bırakıldığında başlangıç koşullarına göre $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$,$\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau} = 0$ olur. Bu durum için (4.175) jeodezik denkleminden;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = -E^2U'(r)e^{-2K(r)} \tag{4.230}$$

ve (4.99) çizgi elemanından $E = e^{U(r)}$ elde edilir. Bu durumda metrik fonksiyonları kullanılarak eşitlik;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{-2\sigma(a - br^{4\sigma})}{(a + br^{4\sigma})^{\frac{N-1}{N-3}}} r^{-1-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} \tag{4.231}$$

haline gelir. Bu ifadeyi ;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -2\sigma\ a \left\{ \frac{1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^{4\sigma}}{(-a)^{\frac{N-1}{N-3}} \left[-1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^{4\sigma}\right]^{\frac{N-1}{N-3}}} \right\} r^{-1-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} \tag{4.232}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu durumda;

$$\begin{array}{llll}
\sigma > 0, & \dfrac{r}{r_s} > 1 & \text{(dış çözüm)} & \text{radyal kuvvet parçacığı iter,} \\
 & \dfrac{r}{r_s} < 1 & \text{(iç çözüm)} & \text{radyal kuvvet parçacığı çeker,} \\
\sigma < 0, & \dfrac{r}{r_s} > 1 & \text{(dış çözüm)} & \text{radyal kuvvet parçacığı iter,} \\
 & \dfrac{r}{r_s} < 1 & \text{(iç çözüm)} & \text{radyal kuvvet parçacığı çeker.}
\end{array}$$

Elde edilen bu sonuca göre, silindirsel yük kaynağının dış kısmı için $\frac{r}{r_s} > 1$ olan çözümlerde tüm σ değerleri için parçacık radyal kuvvet tarafından itilir. Bu durum (4.113) eşitliğinde elde edilen birim uzunluk başına kütle miktarıyla da uyuşmaktadır. Elektromanyetik alana sahip uzay-zamanda kütle negatif değer almaktadır.

C. Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık

N boyutlu elektromanyetik alan çizgi elemanı (4.99)'in uzay-zamanına durgun halde bırakılan yüklü test parçacığı için başlangıç koşulları $\frac{dr}{d\tau} = 0$, $\frac{dz}{d\tau} = 0$, $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ ve $\frac{dx_i}{d\tau} = 0$ olduğundan;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{e}{m} F^r{}_t \frac{dt}{d\tau} - \Gamma^r_{tt} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{e}{m} f'(r) e^{2U(r)-K(r)} E(r) - E(r)^2 U'(r) e^{4U(r)-2K(r)} \tag{4.233}$$

olur. (4.99) çizgi elemanı için $ds^2 = -d\tau^2$ yazıldığında $E(r)^2 = e^{-2U(r)}$ olarak elde edilir. Bu durumda metrik fonksiyonları kullanılarak eşitlik;

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{-2\sigma}{(a + br^{4\sigma})^{\frac{N-1}{N-3}}} \left[\frac{er^{2\sigma}}{m} 2\sqrt{\frac{N-2}{N-3}(-a\ b)} + (a - br^{4\sigma})\right] r^{-1-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)} \tag{4.234}$$

haline gelir. Bu eşitliği (4.109) birim uzunluk başına yük yoğunluğu ile

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{2r^{-1-2\left(4\sigma^2-2\sigma-p+p'+p^2+2\sigma p\right)}}{\left\{-a\left[-1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^{4\sigma}\right]\right\}^{\frac{N-1}{N-3}}} \left\{\frac{e\lambda r^{2\sigma}}{m w_0} - \sigma a \left[1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^{4\sigma}\right]\right\} \tag{4.235}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu eşitlik için parantez içindeki ikinci terim bir önceki kısımda elde edilen yüksüz parçacığa etki eden kuvveti ifade etmektedir ve bu nedenle bu terim itici kuvvettir. Bununla birlikte ilk terimin itici ve çekici olması e yükü ve λ birim uzunluk başına yük yoğunluğunun çarpımına bağlı olarak değişir. Eğer λe çarpımı pozitif ise test parçacığı radyal kuvvet tarafından itilir. Ancak λe çarpımı negatif ise parçacık radyal kuvvet tarafından çekilir. λe çarpımının negatif olduğu durumda parçacığa etki eden kütle-çekimsel ve elektromanyetik kuvvetlerin toplamının sıfır olması durumu oluşabilir. Bu durumda $\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0$ olur ve (4.234) eşitliğinden,

$$r = r_s \left[\frac{|e|}{m} \sqrt{\frac{N-2}{N-3}} \pm \sqrt{\frac{e^2}{m^2} \frac{N-2}{N-3} - 1} \right]^{\frac{1}{2\sigma}} \tag{4.236}$$

elde edilir. Buna göre parçacığın konumunun (4.236) olduğu durumda üzerine etkiyen net kuvvet sıfırdır. Yani bu konumda bu elektromanyetik alana durgun bırakılan cisim kütle-çekimsel ve elektromanyetik kuvvetler birbirini yok ettiği için hareketsiz kalır. Aynı zamanda, (4.236) eşitliğinde karaköklü ifadenin sıfırdan büyük olması gerektiğinden $\sqrt{\frac{N-2}{N-3}}|e| \geq m$ olmalıdır.

N-boyutlu uzay-zamanda parçacığın hareketinin mümkün olan ve olmayan yörüngelerini ve radyal kuvvetin davranışını kısaca aşağıdaki tablodaki gibi gösterebiliriz.

Jeodezikler	Vakumda Yüksüz Parçacık	Elektromanyetik Alanda Yüksüz Parçacık	Elektromanyetik Alanda Yüklü Parçacık
Dairesel	Var $(0 < \sigma + \frac{p}{4} < \frac{1}{4})$	Yok	Yok
Simetri Ekseni Boyunca	Var $\left[2\sigma(2\sigma - 2 + p) - p + p' + p^2 > 0\right]$	Yok	Yok
Radyal Kuvvet	Çekici $\sigma > 0$	İtici	Çekici veya itici

Çizelge 4.2: N-boyutlu uzay-zamanda test parçacığının zaman-tipi jeodezikleri ve radyal kuvvet

V

SONUÇ

Bu tezde, N-boyutlu, statik, silindirsel simetriye sahip, radyal bir elektrik alana karşılık gelen Einstein-Maxwell denklemleri elde edilip genel ve özel çözümleri bulunmuştur. Bulunan bu çözümler, 4-boyutta bilinen bu çözümlerin yüksek boyutlara genelleştirilmesine olanak sağlamıştır. Ayrıca, elde edilen bu çözümler için test parçacıklarının hareketleri de dahil olmak üzere çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Tezin giriş bölümünde literatür özeti ve bu çalışmanın öneminden bahsedildikten sonra ikinci bölümde tezin üzerine oturduğu kuramsal temeller ele alınmıştır. Tezin üçüncü bölümü bu konuda daha önce ilk olarak Bonnor (Bonnor 1953) tarafından bulunmuş olan 3+1 boyutta silindirsel simetrik durgun bir yük ve madde dağılımını tanımlayan ve radyal yönde elektrik alana sahip genel ve özel uzay-zaman çözümleri kullandığımız notasyona uygun şekilde yeniden elde edilmiş, çözüm parametrelerinin fiziksel anlamları ve uzay-zaman çizgi elemanı ile elektromanyetik alanın tekillik yapısı tartışılmıştır. Bu çözümleri incelemek, daha sonraki bölümde elde edilecek olan çözümlerin özelliklerini anlamak açısından önemlidir.

Tezde yüksek boyutlu yeni çözümleri elde ettiğimiz kısım olan dördüncü bölümde ilk olarak $N = 5$ için Einstein-Maxwell denklemlerini elde etmek için gerekli olan eğrilik bileşenleri ortonormal tabanda Cartan yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Daha sonra bu denklemlerin genel ve özel çözümleri bulunmuştur. Elde edilen 5-boyutlu genel çözüm için eğrilik ve Faraday tensörlerinden elde edilen skaler büyüklüklerin incelenmesi sonucu, birisi simetri ekseni üzerinde diğeri de $r = r_s = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4\sigma}}$ olmak üzere iki adet tekilliğin mevcut olduğu görülmüştür. $r > r_s$ için uzay-zaman düzgün davranmaktadır. Bu çözümler $b = 0$ limitinde vakum çözümünü vermektedir.

Tezin Einstein-Maxwell çözümlerinin elde edildiği son bölümde N-boyutlu statik, silindirsel simetriye sahip çözümü ele alınmıştır. Bu çözümlerin bulunabilmesi için gerekli olan eğrilik tensör bileşenleri ve enerji-momentum tensörü ortonormal tabanda hesaplanıp Einstein-Maxwell denklemleri elde edilerek genel çözüm bulunmuştur. Metriğin ve elektromanyetik alanın boyut sayısı N ile olan ilişkileri belirlenmiştir. Bu çözümler σ, p_i, w_0, ve a, b'den birisi olmak üzere $N - 1$ parametreye sahiptir. Burada w_0 koniklik parametresi, σ ve p_i silindirsel simetrik çözüme ait parametre ve a, b de yük dağılımı ile ilgili parametredir. $\sigma = 0$ olduğunda elektromanyetik alan da sıfır olmaktadır. N-boyutlu çözüm, 4 ve 5 boyutlu çözümler ile aynı tekillik özelliğine sahiptir.

Yeni çözümler elde edilip özellikleri tartışıldıktan sonra son olarak elde edilen 4 ve N boyutlu uzay-zaman geometrileri için test parçacıklarının hareketleri incelenmiştir. Bu durumlar için genel hareket denklemleri elde edilerek ilk integralleri bulunmuştur. 4-boyutlu statik, silindirsel simetrik vakum uzay-zamanında hareket eden nötr test parçacığının $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{4}$ aralığında dairesel jeodeziklerinin olduğu bilinmektedir. Elektromanyetik alanda nötr ve yüklü test parçacıkları için ise dairesel jeodeziklerin mevcut olmadığı gösterilmiştir. Bununla birlikte, yüklü ve yüksüz test parçacıklarının vakumda ve elektromanyetik alanda simetri ekseni boyunca jeodeziklerinin olmadığı bulunmuştur. Test parçacıklarının üzerine etki eden radyal kuvvetin ise, nötr test parçacığı için sadece kütle-çekimsel kuvvet olduğunda çekici, hem kütle-çekimsel hem de elektromanyetik kuvvet olduğunda itici olduğu daha önceki çalışmalarda elde edilmiştir. Yüklü parçacığa etkiyen radyal kuvvetin ise yüklü parçacık ile elektromanyetik alanın etkileşmesi sonucu oluşan bir kuvvet ve kütle-çekimsel kuvvet olarak iki kuvvetten oluştuğu gösterilmiştir.

N-boyutlu uzay-zaman için elde edilen jeodezik denklemler biraz karmaşık ve bir çok parametreye bağlı olduğundan, sadece jeodeziklerin hangi durumlarda uzay-tipi, ışık-tipi ve zaman-tipi oldukları belirtilmiştir. Bununla birlikte 4-boyutlu uzay-zamandaki dairesel ve simetri ekseni boyunca jeodezikler ile benzer sonuçlar elde edilmiştir. N-boyutlu uzay-zamanda da nötr test parçacığının vakumda $0 < \sigma + \frac{p}{4} < \frac{1}{4}$ aralığında dairesel jeodeziklerin olduğu, elektromanyetik alanda yüksüz ve yüklü parçacıklar için ise dairesel jeodeziklerin olmadığı bulunmuştur. Vakumda yüksüz test parçacığının simetri ekseni boyunca hareket edebilmesi için, $2\sigma(2\sigma-2+p)-p+p_0+p^2 > 0$ olmalı iken, elektormanyetik alanda yüksüz ve yüklü parçacıklar için simetri ekseni boyunca hareketin mümkün olmadığı gösterilmiştir. N-boyutlu uzay-zamanda test parçacıkları üzerine etki eden radyal kuvvet ise, yüksüz parçacık için vakumda çekici, elektromanyetik alanda iticidir. Elektromanyetik alanda bulunan yüklü test parçacığı üzerine etki eden radyal kuvvet kütle-çekimsel ve parçacık ile elektromanyetik alan etkileşme kuvvetlerinden oluşmaktadır. Elektromanyetik alan etkileşmesiyle oluşan kuvvetin parçacık ve elektromanyetik alanın yüklerinin işaretlerinin aynı ya da zıt olmasına göre çekici veya itici davranış gösterdiği belirlenmiştir.

Bu tezde, N-boyutlu, statik, silindirsel simetrik radyal doğrultuda elektrik alana sahip bir uzay-zamanın dış kısmı için çözümler elde edilmiştir. Diğer taraftan, ele alınan elektromanyetik alanın, çeşitli yönlerdeki manyetik alanlar içerdiği veya elektrik alanın simetri ekseni boyunca olduğu gibi değişik durumlarda göz önüne alınabilir. Ayrıca, çalışılan uzay-zamanın durağan ve statik olmayan çözümleri ya da bu dış alana kaynak olabilecek yüklü akışkanlar gibi iç çözümler araştırılabilir. Bu konulardaki çalışmalarımız devam etmektedir. Yüksek boyutlu silindirsel simetrik Einstein-Maxwell çözümleri ile ilgili bildiğimiz tek çalışma Gibbons ve arkadaşları tarafından yapılmıştır (Gibbons ve ark. 1987). Burada $N-2$ boyutlu bir düz alt uzay-zamanın N boyutlu bir Melvin evrenine gömülebileceği gösterilmiştir. Melvin manyetik evreni, silindirsel, statik ve simetri ekseni boyunca bir manyetik alana sahip genel çözümün, bu çözüm parametrelerinin özel bir değerine karşılık gelmektedir. Bu çözüm, bu tip çözümler arasında herhangi bir tekillik içermeyen tek çözümdür. Bizim tezimizde elde ettiğimiz çözümlerin bir uygulaması olarak, herhangi bir Minkowski alt uzayının bu N-boyutlu evrene gömülüp gömülemeyeceği ve bu durumun fiziksel etkileri incelenilmeye devam edilmektedir. Bulunan sonuçlar ayrıca, yük taşıyan kozmik sicimlerin yüksek boyutlu çeşitli kuramlar kapsamında genelleştirilmeleri konusunda yararlı olabileceğine inanıyoruz.

KAYNAKÇA

Arik, M. and Delice, Ö. (2003). Trapping photons by a line singularity. Int. J. Mod. Phys. D12: 1095-1112

Arik, M. and Delice, Ö. (2005). Static cylindrical matter shells. Gen. Rel. Grav., 37: 1395-1403.

Arkani-Hamed N., Dimopoulos S. and Dvali G., (1998). The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeters. Phys. Lett. B, 429: 263-272.

Baykal A. and Delice Ö. (2009). Cylindrically Symmetric Brans-Dicke-Maxwell Solutions, Gen. Rel. Grav., 41: 267-285.

Beck, G., (1925). Zur Theorie Binärer Gravitationsfelder.Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 33: 713-728.

Bevis N., Hindmarsh M. and Kunz M., (2004). WMAP constraints on Inflationary Models with Global Defects. Phys. Rev. D, 70: Issue 4.

Bicak, J. and M. Zofka, (2002). Notes on Static Cylindrical Shells Classical. Quan. Grav., 19:3653-3664.

Bonnor W. B. (1953). Certain Exact Solutions of the Equations of General Relativity with an Electrostatic Field. Proc. Physc. Soc. A, 66: 145.

Bonnor W. B. (1979). Solution of Einstein's Equations for a Line-mass of Perfect Fluid. Journal of Physiscs A: Math. and Gen. Rel., 12: 847-851.

Bonnor W. B. (1992). Physical interpretation of vacuum solutions of Einstein's equations. Part I. Time-independent solutions. Gen. Rel. Grav., 24: 551-573.

Bonnor W. B. (2007). The charged line-mass in general relativity. Gen. Rel. Grav. , 39:257–265.

Bonnor W. B. and Davidson W. (1992). Interpreting the Levi-Civita Vacuum Metric. Class. and Quan. Grav., 9: 2065-2068.

Carroll S. M. (2004). An Intoruction to General Relativity Spacetime and Geometry. University of Chicago Addison Wesley, 513, San Francisco, USA.

da Silva, M. F. A., Herrera L., Paiva F. M., ve Santos N. O. , (1995). The Levi-Civita Space-time. Jour. of Math. Phys., 36: 3625-3631.

Einstein A., (1915). The Field Equations of Gravitation. König. Preuss. Akad. Wiss., 844.

Einstein, A. ve Rosen N. J., (1937). On Gravitational Waves. Journal of the Franklin Institute Vol. 223: 43-54.

Gautreau R and Hoffman R B (1969). Nuovo Cimento B 61: 411.

Gibbons G.W. and Wiltshire D. L. (1987). Spacetime a Membrane in Higher Dimensions. Nucl. Phys., B287: 717-742.

Grøn Ø. and Hervik S. (2007). Einstein's General Theory of Relativity. Springer Science Business Media, LLC.

Horáva P. and Witten E.(1996). Heterotic and Type I string Dynamics from Eleven Dimensions. Nucl. Phys., B 460: 506-524.

Kaluza, T. (1921). Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.): 966-972.

Klein, O.(1926). Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei, 37 (12): 895-906.

Kompaneets, A. S., (1958). Strong Gravitational Waves in Vacuum. Zhurnal Eksperi- mental'noi i Teoreticheskoi Fiziki, 34: 953.

Levi-Civita, (1919) T. Rend. Acc. Lincei, 28, 101.

Lewis, T. (1932) Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravi- tational Fields. Proceedings of the Royal Society of London Series A- Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 136: 176-192 .

Linet B. (1989). Weak gravitational field of an infinite straight superconducting cosmic string, Clas. Quan. Grav., 6:435.

Marder, L., (1958) Gravitational Waves in General Relativity. 1. Cylindrical Waves, Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences, 244: 524-537.

Miguelote A. Y. , da Silva M. F. A. ,Wang A. Z. and Santos N. O. (2001). Levi-Civita Solutions Coupled with Electromagnetic Fields, Class. Quan. Grav., 18: 4569-4588.

Moss I. Poletti S. (1987). The gravitational field of a superconducting cosmic string. Phys. Let. B, 199: 34-36.

Nordström G. (1914). Uber die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen (On the possibility of a unification of the electromagnetic and gravitational fields). Physik. Zeitschr., 15: 504-506.

Nordström, G. (1918). On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam, 26: 1201-1208.

Pereira P. R. C. T. ve Wang A. Z. (2000). Gravitational Collapse of Cylindrical Shells Made of Counter-Rotating Dust Particles. Phys. Rev. D 62: 124001.

Peter P. and Puy D. (1993). Gravitational field around space-like and time-like current-carrying cosmic strings. Phys.Rev. D, 48:5546-5561.

Philbin, T. G. (1996). Perfect-Fluid Cylinders and Walls Sources for the Levi-Civita Spacetime. Class. and Quan. Grav., 13: 1217-1232.

Pogosian L. , Henry Tye S.H., Wasserman I. and Wyman M.,(2003). Observational Constraints on Cosmic String Production during Brane Inflation. Phys. Rev. D, 68, Issue 2.

Ponce de Leon J. (2009). Levi-Civita Spacetimes in Multidimensional Theories. Mod. Phys. Let. A, 24: 1659-1667.

Randall L. and Sundrum R. (1999-a). A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension. Phys. Rev. Lett., 83: 3370-3373.

Randall L. and Sundrum R. (1999-b). An Alternative to Compactification. Phys. Rev. Lett., 83: 4690-4693.

Raychaudhuri, A. K. (1960). Static Electromagnetic Fields in General Relativity, Ann. Phys.(USA), Vol. 11: pp. 501.

Reissner, H (1916). Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. Annalen der Physik 50: 106-120.

Richterek L. , Novotný J., Horský J., (2000). Czech. J. Phys., 50: 925-948.

Rindler, W. (1977). Essential Relativity. Springer, Berlin.

Schwarzschild, K., (1916). Über das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.Math. Klasse pp. 189-196. (Reprinted in: On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory. General Relativity and Gravitation, (2003), 35: 951-959).

Stephani, H., Kramer D., MacCallum M. A. H., Hoensalers C., and Hertl E. (2003). Exact Solutions of Einstein's Field Equations. Cambridge University Press, Cambridge.

Vilenkin, A. and Shellard, E. P. S. (1994). Cosmic Strings and other Topological Defects. Cambridge University Press, Cambridge.

Wang, A. Z., da Silva M. F. A. , and Santos N. O.(1997). On Parameters of the Levi- Civita solution. Class. and Quan. Grav., 14: 2417-2423.

Witten E.(1985). Superconducting strings. Nucl. Physics, B, 249:557-592.

Witten L., (1960). Gravitation: an Introduction to Current Research, pp. 49-101, Wiley, New York and London.

ÖZGEÇMİŞ

Pınar Kirezli 1986 yılında Tekirdağ'da dünyaya gelmiştir. Lise öğrenimini İstanbul Çapa Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamlayıp Boğaziçi Üniversitesi Fizik Öğretmenliği Bölümünden 2009 yılında mezun olmuştur. 2009 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde fizik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine ve yine aynı yıl Namık Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır.