GENEL QUATERNİON GRUBUNUN

SINIFLANDIRMA UZAYININ
K - HALKASI

Sevilay ÖZDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet KIRDAR

2014

T.C.

NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENEL QUATERNİON GRUBUNUN SINIFLANDIRMA UZAYININ K - HALKASI

Sevilay ÖZDEMİR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. MEHMET KIRDAR

TEKİRDAĞ-2014

Yrd. Doç. Dr. Mehmet KIRDAR'ın danışmanlığında Sevilay ÖZDEMİR tarafından hazırlanan "Genel Quaternion Grubunun Sınıflandırma Uzayının K-Halkası" isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Juri Başkanı: Yrd. Doç. Dr. Mehmet KIRDAR *İmza*:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nuray EROĞLU *İmza*:

Üye: Yrd. Doç. Dr. Dilek KAZICI *İmza*:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENEL QUATERNİON GRUBUNUNIN SINIFLANDIRMA UZAYININ

K - HALKASI

Sevilay ÖZDEMİR

Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mehmet KIRDAR

A. Grothendieck tarafından oluşturulan K- Teorisi, M. F. Atiyah ve F. E. P. Hirzebruch tarafından Topolojik K-Teori adıyla genişletilmiştir. 20. yy da cebirsel topolojinin iyi bilinen bazı uygulamaları, K-teori sayesinde klasik homoloji ve kohomoloji kullanılarak yapılan ispatlardan çok daha basit olarak ispatlanmıştır.Topolojik K-Teorinin en önemli örnekleri sınıflandırma uzaylarının K ve KO halkalarıdır. İlk olarak devirli grupların K ve KO halkaları çalışılmış, abelyan grupların K ve KO halkaları tanımlanmıştır. Daha sonra abelyan olmayan gruplar incelenmeye başlanmıştır. Bazı abelyan olmayan grupların sınıflandırma uzaylarının K ve KO halkaları tanımlanmıştır; ancak hala tanımlanmamış abelyan olmayan gruplar bulunmaktadır. Bu çalışmada amaç Genel Quaternion grubunun sınıflandırma uzayının K- halkasını en az sayıda ilişkiyle tanımlamaktır. Bunun için Atiyah-Segal Tamamlama Teoreminden ve Atiyah-Hirzebruch Spektral Dizisinden yararlanılmıştır.

Anahtar kelimeler: Topolojik K-Teorisi, K-Halkaları, Sınıflandırma Uzayı, Genel Quaternion Grubu

2014 , 53 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

K-RİNG OF THE CLASSİFYİNG SPACE OF THE GENERALİZED QUATERNİON GROUP

Sevilay ÖZDEMİR

Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Mehmet KIRDAR

K-Theory was founded by A. Grothendick , later it was extended as Topological K-Theory by M. F. Atiyah and F. E. P Hirzebruch. In 20th century, thanks to K-theory, many well-known applications of algebraic topology were proven in simpler fashion than using classical homology and cohomology approach. The most important examples of Topological K-Theory are the K and KO rings of classifying spaces. Historically, K and KO rings of cyclic groups are studied first and K and KO rings of abelian groups were described. Later, it was followed by a study of non-abelian groups. K and KO rings of the classiying spaces of some non-abelian groups were defined, but there are still some other non-abelian groups which required further study. The purpose of this study is to describe K-rings of the classifying spaces of Generalized Quaternion groups with least possible relations. To achieve this, Atiyah-Segal Completion Theorem and Atiyah-Hirzebruch Spectral Sequence are utilized.

Keywords: Topological K-Theory, K-rings, Classification Space, Generalized Quaternion Groups.

2014 , 53 pages

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE DİZİNİ

SİMGE DİZİNİ

$\otimes$	: Tensör Çarpımı
$\oplus$	: Direkt Toplam
$\mathbb{C}^n$	: n boyutlu kompleks uzay
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu reel uzay
S^n	: n boyutlu küre
$\mathbb{RP}^n$	: n boyutlu reel projektif uzay
$\times$	: Kartezyen Çarpım
$Vect_k(X)$	: k boyutlu kompleks vektör demetlerinin izomorfizma sınıfları kümesi
$S^n \wedge X$	: X in n. süspansiyonu
$K^*(X)$	: X in K- Kohomolojisi
f^*	: Geri çekme homomorfizması
$\widetilde{K}(X)$	: X in indirgenmiş K- Halkası
$\mathcal{P}_G X$	: X üzerindeki G demetlerinin izomorfizma sınıflarının kümesi
X/G	: Bölüm uzayı
BG	: G grubunun sınıflandırma uzayı
R(G)	: G grubunun temsil halkası

1. GİRİŞ

K-teorisi; A.Grothendieck tarafından 1957 yılında Grothendieck-Riemann-Roch teoreminin formüle edilmesiyle başlamıştır. Adını, Almanca sınıf anlamına gelen “Klasse”den alır. Grothendieck, vektör demetlerinin izomorfizma sınıflarını, yaratanları kabul eden bir grup tanımlamış ve K(X) ile göstermiştir. K(X) , kohomolojik özellik gösterir.

1959 yılında Atiyah ve Hirzebruch tarafından, bir topolojik X uzayı üzerindeki vektör demetleri için benzer inşa kullanılarak ve Bott periyodiklik teoremi yardımıyla Topolojik K-teorisi tanımlanmıştır. 20. yy da cebirsel topolojinin iyi bilinen bazı uygulamaları K-teori sayesinde klasik homoloji ve kohomoloji kullanılarak yapılan ispatlardan çok daha basit olarak ispatlanmıştır. Ayrıca Index Teoreminin ikinci ispatında önemli bir rol oynamıştır (1962).

1966 yılında Atiyah, yayınladığı makalesi ile Reel K-Teorisini tanımlamıştır. Bu teorideki reel vektör demetleri, bir $\mathbb{Z}_2$-uzayı üzerindeki bazı ek özelliklere sahip kompleks vektör demetleridir. Reel K-Teorisi aslında reel ve kompleks teorinin bir genelleştirmesidir.

Topolojik K-Teori, topolojide önemli bir araçtır. Adams ve Atiyah, K-Teori kullanarak H-uzayı yapısı gösteren kürelerin sadece S^0, S^1, S^3, S^7 olduğunu göstermiştir. Dahası K-teorisi ile durağan homotopi teorisinin önemli bir kısmını elde etmek mümkündür.

Topolojik K-Teorisinin en önemli örnekleri sınıflandırma uzaylarının K ve KO halkalarıdır. Bu halkaların ilk örnekleri olarak devirli grupların K ve KO halkaları çalışılmış ve birçok topolojik problemin çözümünde önemli rol oynamıştır. Örneğin Bott ve Milnor; Cayley Octanionlarından başka bölüm cebiri olmadığını K- halkaları yardımıyla bulmuşlardır. Adams herhangi boyuttaki kürelerin üzerindeki lineer bağımsız tanjant vektör alanlarının maximum sayısını projektif uzayların KO- halkaları yardımıyla çözmüştür (1962).

Bazı non-abelyan grupların sınıflandırma uzaylarının K-halkaları tanımlanmıştır; ancak hala tanımlanmamış non-abelyan gruplar bulunmaktadır. Bu çalışmada amaç Genel Quaternion grupların sınıflandırma uzaylarının K-halkalarını en az sayıda ilişkiyle tanımlamaktır.

1. Bölümde devamında kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılacaktır.

2. Bölümde Genel Quaternion grubunun temsilleri ve aralarındaki ilişkiler verilecektir.

3. Bölümde K-Teorinin temel kavramları “Grothendieck inşaası, Sınıflandırma uzayı, Atiyah-Hirzebruch Spektral Dizisi , Atiyah-Segal Tamamlama teoremi, Kohomoloji” kısaca verilecektir.

4. Bölümde Quternion grupların sınıflandırma uzaylarının K-halkaları üzerinde durulacak, Atiyah-Segal Tamamlama Teoremi yardımıyla bir teorem elde edilmeye çalışılacaktır.

5. bölümde Q_8 Quternion grubunun sınıflandırma uzayının KO- halkası üzerinde durulacak, K-halkası ile ilişkisi incelenecektir.

1. 1 VEKTÖR DEMETLERİ VE VEKTÖR DEMETİ İZOMORFİZMASI

1.1.1 Tanım: (Hatcher 2009)

X üzerinde tanımlı n boyutlu kompleks vektör demeti bir (E,p,X) üçlüsüdür öyle ki aşağıdaki şartlar sağlanır:

a) Vektör demetinin projeksiyon fonksiyonu denilen $p: E \to X$ fonksiyonu örten ve sürekli bir fonksiyondur.

b) X in bir B açık kaplaması ve $\forall\ U \epsilon\ B$ için

$$\varphi_U : p^{-1}(U) \to \mathbb{C}^n$$

sürekli fonksiyonları vardır öyle ki şu şartlar sağlanır:

i. $h_U(e) = \big(p(e), \varphi_U(e)\big)$ şeklinde tanımlanan

$$h_U : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$$

fonksiyonu homeomorfizmadır. Bu fonksiyonlar, vektör demetinin lokal trivialiti fonksiyonları olarak adlandırılır.

ii. $\forall x \epsilon U$ için, $E_x = p^{-1}(x)$ olmak üzere,

$$\varphi | E_x : E_x \to \mathbb{C}^n$$

kısıtlanmış fonksiyonları lineer vektör uzayı izomorfizmalardır; yani det $(\varphi | E_x) \neq 0$ dır.

X e taban (baz) uzayı, E ye toplam uzay ve $p^{-1}(x)$ e fiber adı verilir.

Cisim olarak $\mathbb{C}$ yerine $\mathbb{R}$ alınırsa reel vektör demeti tanımı elde edilir.

Örnek 1:

$E = X \times \mathbb{C}^n$ toplam uzay olmak üzere $p: E = X \times \mathbb{C}^n \to X$ projeksiyon fonksiyonu; X üzerindeki n boyutlu komplex trivial demet olarak adlandırılır.

Örnek 2:

$E,\ I \times \mathbb{R}$ in $(0, t) \backsim (1, -t)$ yapıştırması ile elde edilen bölüm uzayı olsun. Öyleyse $I \times \mathbb{R} \to I$ projeksiyonu 1 boyutlu vektör demeti olan $p: E \to S^1$ dönüşümünü yaratır. E , sınır çemberi silinmiş olan Mobius şeridine homeomorf olduğundan bu demete Mobius demeti denir.

Örnek 3:

$\mathbb{R}^{n+1}$ deki S^n in tanjant demetinin toplam uzayı $E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}:\ x \perp v\}$ dir. Projeksiyon fonksiyonu $p: E \to S^n$, $(x, v) \to x$ şeklindedir. Bir $x \in S^n$ seçelim ve x i içeren bir $U_x \subset S^n$ açık yarı küresini alalım öyle ki x e ortogonal olan ve orijinden geçen bir hiperdüzlem ile sınırlanmış olsun. U_x üzerindeki lokal trivialiti fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir:

$h_x: p^{-1}(U_x) \to U_x \times p^{-1}(x) \approx U_x \times \mathbb{R}^n$; $\quad h_x(y, v) = \big(y, \pi_x(v)\big)$

Burada π_x, $p^{-1}(x)$ hiperdüzlemi üzerindeki ortogonal projeksiyondur.

$\forall\, y \in U_x$ için $\pi_x: p^{-1}(y) \to p^{-1}(x)$ kısıtlaması izomorfizma olduğundan h_x lokal trivialiti koşulunu sağlar.

Örnek 4 :

$E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}: v = t.x\ ;\ \exists\, t \in \mathbb{R}$ için $\}$ ve p fonksiyonu $p: E \to S^n; p(x, v) = x$ olarak tanımlı olsun. (E, p, S^n) üçlüsü S^nin bir vektör demetidir ve ayrıca fiberleri 1 boyutlu olduğu için doğru demetidir. S^n in bu vektör demetine normal demeti denir. S^n in normal demetinin lokal trivialiti fonksiyonu şöyle tanımlıdır:

$$h_x: p^{-1}(U_x) \to U_x \times \mathbb{R}$$

$$h_x(y, v) = \big(y, \pi_x(v)\big)$$

Burada π_x, bir önceki örnekteki gibi $p^{-1}(x)$ hiperdüzlemi üzerindeki ortogonal projeksiyondur. $\forall\, y \in U_x$ için $\pi_x : p^{-1}(y) \to p^{-1}(x)$ kısıtlaması izomorfizma olduğundan h_x lokal trivialiti koşulunu sağlar.

Örnek 5 :

n boyutlu reel projektif uzay $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$ deki orijinden geçen doğruların uzayıdır. Buradaki her doğru S^n i bir çift antipodal noktada kestiğinden antipodal noktalar arasında bir bağıntı kurularak $\mathbb{RP}^n$; S^n in bir bölüm uzayı olarak ele alınabilir. $E = \{(\ell, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in \ell\}$ olsun. $p: E \to \mathbb{RP}^n$,$p(\ell, v) = \ell$ şeklinde tanımlanan doğru demetine Kanonik doğru demeti denir. Lokal trivialiti fonksiyonları, önceki örneklerdeki gibi ortogonal projeksiyon kullanılarak tanımlanabilir.

Örnek 6 :

$\mathbb{RP}^n$ üzerindeki kanonik doğru demetinin ortogonal tümleyeni $E^{\perp} = \{(\ell, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \perp \ell\}$ uzayıdır. $p: E^{\perp} \to \mathbb{RP}^n$, $p(\ell, v) = \ell$ n boyutlu $\ell^{\perp}$ ortogonal alt uzayının fiberleri ile oluşan vektör uzayıdır. Lokal trivialiti fonksiyonları, önceki örneklerdeki gibi ortogonal projeksiyon kullanılarak tanımlanabilir.

1.1.2 Tanım: (Hatcher 2009)

$p_1: E_1 \to X$ ve $p_2: E_2 \to X$ iki vektör demeti olsun. $f: E_1 \to E_2$ sürekli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa f ye vektör demeti izomorfizması denir ve $E_1 \cong E_2$ şeklinde gösterilir:

i.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.1

$\forall\, e_1 \in E_1$ için $p_2 \circ f(e_1) = p_1(e_1)$ olmalıdır.

ii. $g_1: E_1|U_1 \cong U_1 \times \mathbb{C}^n$ ve $g_2: E_2|U_2 \cong U_2 \times \mathbb{C}^n$ sırasıyla $p_1: E_1 \to X$ ve $p_2: E_2 \to X$ vektör demetlerinin lokal trivialiti homeomorfizmaları olsun.

$U = U_1 \cap U_2$ ve $h = g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki değişmeli diagram vardır

$$\begin{tikzcd} p_1^{-1}(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_1"'] & p_2^{-1}(U) \arrow[d, "g_2"] \\ U \times \mathbb{C}^n \arrow[r, "h"'] & U \times \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

Şekil 1.2

Açık olarak h fonksiyonu; $h: U \times \mathbb{C}^n \to U \times \mathbb{C}^n$; $h(x, v) = (x, A_x . v)$ olarak tanımlıdır. Bu durumda f fonksiyonu vektör demeti homomorfizmasıdır.. İzomorfizma olması için $det(A_x) \neq 0$ şartı sağlanmalıdır. Kısaca vektör demeti izomorfizması, fiberleri üzerinde vektör uzayı izomorfizması olan vektör demeti homomorfizmasıdır.

Örnek 1:

$E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v = t.x \,;\, \exists\, t \in \mathbb{R}$ için $\}$ $\mathbb{R}^{n+1}$ deki S^n in normal demetidir. $f: E \to S^n \times \mathbb{R}$, $(x, t.x) \to (x, t)$ sürekli fonksiyonu vektör demeti izomorfizması için verilen şartları sağladığından $E \cong S^n \times \mathbb{R}$ olur. Kürelerin normal demeti trivialdir.

Örnek 2:

S^1 in tanjant demeti $E = \{(x, v) \in S^1 \times \mathbb{R}^2 :\ x \perp v\}$ olmak üzere $f: E \to S^1 \times \mathbb{R}$, $\left(e^{i\theta}, ite^{i\theta}\right) \to \left(e^{i\theta}, t\right)$ sürekli fonksiyonu verilen şartları sağladığından $E \cong S^1 \times \mathbb{R}$ olur. Burada $e^{i\theta} \in S^1$ ve $t \in \mathbb{R}$ dir. S^1'in tanjant demeti trivialdir.

1.1.3 Tanım: (Hatcher 2009)

$p_1: E_1 \to B$ ve $p_2: E_2 \to B$ aynı B baz uzayı üzerinde tanımlı ; sırası ile n ve m boyutlu iki vektör demeti olsun.

E_1 ve E_2 nin direkt toplamı $n + m$ boyutlu yeni bir vektör demetidir ve şöyle tanımlıdır:

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 :\ p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$$

Bu demetin projeksiyon fonksiyonu $p: E_1 \oplus E_2 \longrightarrow B$; $(v_1, v_2) \longrightarrow p_1(v_1) = p_2(v_2)$ şeklindedir.

E_1 demetinin lokal triviailiti fonksiyonu $h_\alpha : p_1^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$

E_2 demetinin lokal triviailiti fonksiyonu $h_\beta : p_1^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^m$ olsun. Bu durumda,

$E_1 \oplus E_2$ nin lokal trivialiti fonksiyonları

$$h_{\alpha,\beta} : p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m)$$

$$(v_1, v_2) \to \Big(p_1(v_1)\,, \big(\pi_2 \circ h_\alpha(v_1), \pi_2 \circ h_\beta(v_2)\big)\Big)$$

ile tanımlıdır. Burada, π_2 ikinci çarpan üzerine projeksiyon fonksiyonudur.

1.1.4 Tanım: (Hatcher 2009)

$p_1 : E_1 \to B$ ve $p_2 : E_2 \to B$ aynı B baz uzayı üzerinde tanımlı; sırası ile n ve m boyutlu iki vektör demeti olsun.

E_1 ve E_2 nin tensör çarpımı; $n.m$ boyutlu yeni bir vektör demetidir ve şöyle tanımlıdır:

$$E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{x \in B} p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$$

$U \subset B$ olsun. $h_1 : p_1^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n_1}$ fonksiyonu E_1'in, $h_2 : p_2^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^{n_2}$ fonksiyonu E_2'nin lokal trivialiti fonksiyonu olsun.

O halde; $h_1 \otimes h_2 : p_1^{-1}(U) \otimes p_2^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2}) = U \times \mathbb{R}^{n_1.n_2}$

fonksiyonu $E_1 \otimes E_2$'nin lokal trivialiti fonksiyonu olur ve

$h_1 \otimes h_2(v_1 \otimes v_2) = (p_1(v_1)\,, \ (\pi_2 \circ h_1(v_1) \otimes \pi_2 \circ h_2(v_2)))$

şeklinde tanımlıdır. Burada, π_2 bir önceki tanımdaki gibi ikinci çarpan üzerine projeksiyon fonksiyonudur.

1.2 GRUP TEMSİLLERİ VE GRUP TEMSİL İZOMORFİZMALARI

1.2.1 Tanım: (Curtis ve Reiner 2006)

G bir sonlu grup, K bir cisim olsun.

G nin K üzerindeki n boyutlu temsili bir $\varphi : G \to GL_n(K)$ grup homomorfizmasıdır.

Homomorfizma özelliklerinden aşağıdakiler sağlanır:

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad a, b \in G$

$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

$\varphi(1) = I \quad (I, n \times n$ boyutlu birim matris)

1.2.2 Tanım:

$\varphi: G \to GL_n(K)$ ve $\varphi': G \to GL_n(K')$, G nin n boyutlu iki temsili olsun. $\forall g \in G$ için $P\varphi(g)P^{-1} = \varphi'(g)$ şartını sağlayan en az bir $P: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineer mepi varsa, φ ve φ' ye G nin izomorfik temsilleri denir. φ ve φ' izomorfik temsillerse $\varphi \cong \varphi'$ şeklinde gösterilir. φ temsilinin izomorfizma sınıfı $[\varphi]$ ile gösterilir.

Örnek 1:

G bir grup olsun. G nin 1 boyutlu komplex trivial temsili, $\varphi(g) = 1 \in GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$, $g \in G$ olarak tanımlıdır. Benzer şekilde, G nin n boyutlu komplex trivial temsili, $\varphi(g) = I \in GL_n(\mathbb{C})$, $g \in G$ olarak tanımlıdır.

Örnek 2:

$G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ olsun. $M = \mathbb{R}^2$ olsun. O halde,

$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\varphi(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı $\varphi: \mathbb{Z}_2 \to GL_2(\mathbb{R}^2)$ G nin M üzerindeki bir reel temsilidir.

1.2.3 Tanım:

$\varphi_1: G \to GL_n(\mathbb{C})$ ve $\varphi_2: G \to GL_m(\mathbb{C})$; G nin iki temsili olsun.

$\varphi_1 \oplus \varphi_2: G \to GL_{n+m}(\mathbb{C})$

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(g) = \begin{bmatrix} \varphi_1(g) & 0 \\ 0 & \varphi_2(g) \end{bmatrix}_{(n+m)\times(n+m)}, g \in G$$

Olarak tanımlı homomorfizmaya φ_1 ve φ_2 nin direkt toplamı denir.

1.2.4 Tanım:

$\varphi_1: G \to GL_n(\mathbb{C})$ ve $\varphi_2: G \to GL_m(\mathbb{C})$; G nin iki temsili olsun.

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : G \to GL_{n.m}(\mathbb{C})$$

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(g) = \varphi_1(g) \otimes \varphi_2(g) \quad , g \in G$$

Olarak tanımlı homomorfizmaya φ_1 ve φ_2 nin tensör çarpımı denir.

Direkt toplam ve tensör çarpım işlemleri altında G grubunun komplex temsillerinin izomorfizma sınıfları bir yarı halka meydana getirir. Yarı halkayı halkaya tamamlama işlemine Grothendieck inşaası denir. Bu şekilde genişletilen halkaya G grubunun temsil halkası denir ve $R(G)$ ile gösterilir. 3. Bölümde bu konu ayrıntılı olarak işlenecektir.

2. QUATERNİON GRUBU VE TEMSİLLERİ

$n \geq 3$ olmak üzere

$$Q_{2^n} = \{\ x, y\ :\ x^{2^{n-1}} = 1, \quad x^{2^{n-2}} = y^2, \quad xyx = y\ \}$$

grubuna orderı 2^n olan genelleştirilmiş quaternion grup denir. x elemanı orderı 2^{n-1} olan bir devirli grup

$$< x >= \{\ x^i : 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1\ \} = Z_{2^{n-1}}$$

y elemanı ise orderı 4 olan

$$< y >= \{\ y^i : 0 \leq i \leq 3\} = Z_4$$

bir devirli grup yaratır.

Ayrıca $x^{2^{n-2}} = y^2$ orderı 2 olan

$$< y^2 >=< x^{2^{n-2}} >= Z_2$$

devirli grubunu yaratır.

Q_{2^n} in her alt grubu ya devirli bir grup ya da quaternion grubudur.

Q_{2^n} quaternion grubunun 4 tane 1-boyutlu indirgenmez komplex temsili vardır:

$$1\begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto 1 \end{cases}, \quad \eta_2\begin{cases} x \mapsto -1 \\ y \mapsto 1 \end{cases}$$

$$\eta_1\begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}, \eta_3\begin{cases} x \mapsto -1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}$$

Q_{2^n} quaternion grubunun $2^{n-2} - 1$ tane 2-boyutlu indirgenmez komplex temsili vardır.

$2^n = 2m = 4k$ ve $k \geq 2$ kabul edelim. $z = e^{\frac{2\pi i}{2^{n-1}}} = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ olarak tanımlıdır.

$1 \leq i \leq 2^{n-2} - 1$ olmak üzere

$$d_i\begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Böylece Q_{2^n} quaternion grubunun $1, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ olmak üzere 4 tane tek boyutlu, d_i $(1 \leq i \leq 2^{n-2} - 1)$ olmak üzere $2^{n-2} - 1$ tane çift boyutlu indirgenmez komplex temsili vardır.

Toplam olarak, Q_{2^n} quaternion grubunun $2^{n-2} + 3$ tane indirgenemez komplex temsili vardır.

$R(Q_{4k})$ temsil halkasındaki ilişkiler şunlardır:

2.1 Önerme : $\eta_3 = \eta_1\eta_2$ ve $\eta_1^2 = \eta_2^2 = 1$ dir. Bu yüzden de $\eta_3^2 = 1$ olur.

İspat: η_1, η_2, η_3 temsil tanımından açık olarak görülür.

2.2 Önerme : $d_0 = 1 + \eta_1$

İspat: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ alınırsa, $P(d_0)P^{-1} = 1 + \eta_1$ olduğu görülür. Bu nedenle, $d_0 = 1 + \eta_1$ olur.

2.3 Önerme : $d_k = \eta_2 + \eta_3$

İspat: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ alınırsa $Pd_kP^{-1} = \eta_2 + \eta_3$olduğu görülür. Bu nedenle $d_k = \eta_2 + \eta_3$ dir.

2.4 Önerme : $d_i d_j = d_{i+j} + d_{i-j}$ dir.

İspat: Tanımdan;

$$d_i \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$d_j \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^j & 0 \\ 0 & z^{-j} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

O halde

$$d_i d_j = \{x \mapsto \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z^j & 0 \\ 0 & z^{-j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{i+j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{i-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-i-j} \end{bmatrix}$$

$$d_i d_j = \begin{cases} y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & (-1)^j \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+j} \\ 0 & 0 & (-1)^i & 0 \\ 0 & (-1)^j & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Olarak bulunur.

Tanımdan;

$$d_{i+j} \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{i+j} & 0 \\ 0 & z^{-i-j} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+j} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$d_{i-j} \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{i-j} & 0 \\ 0 & z^{-i+j} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i-j} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

O halde

$$d_{i+j} + d_{i-j} = \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{i+j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-i-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{i-j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-i+j} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$d_{i+j} + d_{i-j} = \begin{cases} y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+j} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{i-j} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Olarak bulunur.

$d_i d_j = d_{i+j} + d_{i-j}$ olduğunu göstermek için öyle bir P matrisi bulunmalıdır ki

$P(d_i d_j)P^{-1} = d_{i+j} + d_{i-j}$ olsun. Eşitliğin her iki tarafı P ile sağdan çarpılırsa

$P(d_i d_j) = (d_{i+j} + d_{i-j})P$ eşitliği elde edilir.

$P = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \\ r & s & t & u \end{bmatrix}$ olsun. x için;

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \\ r & s & t & u \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z^{i+j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{i-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{j-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-r-s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z^{i+j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-i-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{i-j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-i+j} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ k & l & m & n \\ r & s & t & u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a.z^{i+j} & b.z^{i-j} & c.z^{j-i} & d.z^{-i-j} \\ e.z^{i+j} & f.z^{i-j} & g.z^{j-i} & h.z^{-i-j} \\ k.z^{i+j} & l.z^{i-j} & m.z^{j-i} & n.z^{-i-j} \\ r.z^{i+j} & s.z^{i-j} & t.z^{j-i} & u.z^{-i-j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.z^{i+j} & b.z^{i+j} & c.z^{i+j} & d.z^{i+j} \\ e.z^{-i-j} & f.z^{-i-j} & g.z^{-i-j} & h.z^{-i-j} \\ k.z^{i-j} & l.z^{i-j} & m.z^{i-j} & n.z^{i-j} \\ r.z^{j-i} & s.z^{j-i} & t.z^{j-i} & u.z^{j-i} \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden ;

$a.z^{i+j} = a.z^{i+j} \Rightarrow a = a$ $\qquad$ $b.z^{i-j} = b.z^{i+j} \Rightarrow b = 0$

$c.z^{j-i} = c.z^{i+j} \Rightarrow c = 0$ $\qquad$ $d.z^{-i-j} = d.z^{i+j} \Rightarrow d = 0$

$e.z^{i+j} = e.z^{-i-j} \Rightarrow e = 0$ $\qquad$ $f.z^{i-j} = f.z^{-i-j} \Rightarrow f = 0$

$g.z^{j-i} = g.z^{-i-j} \Rightarrow g = 0$ $\qquad$ $h.z^{-i-j} = h.z^{-i-j} \Rightarrow h = h$

$k.z^{i+j} = k.z^{i-j} \Rightarrow k = 0$ $\qquad$ $l.z^{i-j} = l.z^{i-j} \Rightarrow l = l$

$m.z^{j-i} = m.z^{i-j} \Rightarrow m = 0$ $\qquad$ $n.z^{-i-j} = n.z^{i-j} \Rightarrow n = 0$

$r.z^{i+j} = r.z^{j-i} \Rightarrow r = 0$ $\qquad$ $s.z^{i-j} = s.z^{j-i} \Rightarrow s = 0$

$t.z^{j-i} = t.z^{j-i} \Rightarrow t = t$ $\qquad$ $u.z^{-i-j} = u.z^{j-i} \Rightarrow u = 0$

O halde $P = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$ dir. y için benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1)^{i+j} \\ 0 & 0 & (-1)^{i} & 0 \\ 0 & (-1)^{j} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+j} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{i-j} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a.(-1)^{i+j} \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l.(-1)^{i} & 0 \\ 0 & t.(-1)^{j} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h.(-1)^{i+j} \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t.(-1)^{i-j} & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden;

$a = h \qquad l.(-1)^{i} = t.(-1)^{i-j} \qquad t.(-1)^{j} = l$

Olur. Buna göre $a = h = 1$ seçilebilir. $t = 1$, $l = (-1)^{j}$ alınırsa aranılan P matrisi bulunmuş olur.■

2.5 Önerme: $d_i = d_{m-i}$ dir.

İspat:

$$d_i \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{i} & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$d_{m-i} \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{m-i} & 0 \\ 0 & z^{-(m-i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-i} & 0 \\ 0 & z^{i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{m-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$z = e^{\frac{2\pi i}{2^{n-1}}} = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ olarak tanımlanmıştı. O halde

$$z^{m-i} = z^{m}.z^{-i} = \left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^{m}.z^{-i} = e^{2\pi i}.z^{-i} = 1.z^{-i} = z^{-i}$$

$$z^{-(m-i)} = z^{-m}.z^{i} = \left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^{-m}.z^{i} = e^{-2\pi i}.z^{i} = 1.z^{i} = z^{i}$$

Ayrıca 2m=4k olduğundan m çift sayıdır.

$$(-1)^{m-i} = (-1)^{m}.(-1)^{-i} = (-1)^{-i}$$

$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. x için;

$$P.\begin{bmatrix} z^{i} & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix}.P^{-1} = \begin{bmatrix} z^{-i} & 0 \\ 0 & z^{i} \end{bmatrix} \Rightarrow P.\begin{bmatrix} z^{i} & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-i} & 0 \\ 0 & z^{i} \end{bmatrix}.P$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} z^{i} & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{i} & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden,

$$\begin{bmatrix} a.z^i & b.z^{-i} \\ c.z^i & d.z^{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.z^i & b.z^i \\ c.z^{-i} & d.z^{-i} \end{bmatrix}$$

$$a.z^i = a.z^i \Rightarrow a = a$$

$$b.z^{-i} = b.z^i \Rightarrow b = 0$$

$$c.z^i = c.z^{-i} \Rightarrow c = 0$$

$$d.z^{-i} = d.z^{-i} \Rightarrow d = d$$

O halde $P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ olur. y için;

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden,

$$\begin{bmatrix} 0 & a.(-1)^i \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d.(-1)^{-i} \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$a.(-1)^i = d.(-1)^{-i} \Rightarrow a = (-1)^{-i}$, $d = (-1)^i$ olur. O halde $P = \begin{bmatrix} (-1)^{-i} & 0 \\ 0 & (-1)^i \end{bmatrix}$ olur.■

2.6 Önerme : $\eta_1 . d_i = d_i$ dir.

İspat:

$$\eta_1 \begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}$$

$$d_i \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$ olarak verilmişti.

$$\eta_1 . d_i \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$ olduğuna göre eşitliği göstermek için uygun bir P matrisi bulunmalıdır.

$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. x için;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Olduğundan her P matrisi için sağlanır. y için;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -b & -a.(-1)^i \\ -d & -c.(-1)^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c.(-1)^i & d.(-1)^i \\ a & b \end{bmatrix}$$

Olduğundan $a = -1,\ b = (-1)^i, c = -1, d = 1$ alınarak eşitliği sağlayan bir

$P = \begin{bmatrix} -1 & (-1)^i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi bulunur.■

2.7 Önerme : $\eta_2 . d_i = d_{k-i}$ dir

İspat: $\eta_2 \begin{cases} x \mapsto -1 \\ y \mapsto 1 \end{cases}$

$$d_i \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^i & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_{k-i} \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{k-i} & 0 \\ 0 & z^{-(k-i)} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\eta_2 . d_i = \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} -z^i & 0 \\ 0 & -z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$ olduğuna göre eşitliği göstermek için uygun bir P matrisi bulunmalıdır. $z^k = -1$ dir. $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. x için;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z^{k-i} & 0 \\ 0 & z^{-(k-i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^i & 0 \\ 0 & -z^{-i} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a.z^{k-i} & b.z^{-k+i} \\ c.z^{k-i} & d.z^{-k+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a.z^i & -b.z^i \\ -c.z^{-i} & -d.z^{-i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a.z^{-i} & -b.z^i \\ -c.z^{-i} & -d.z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a.z^i & -b.z^i \\ -c.z^{-i} & -d.z^{-i} \end{bmatrix}$$

$$-a.z^{-i} = -a.z^{i} \Rightarrow a = 0$$

$$-b.z^{i} = -b.z^{i} \Rightarrow b = b$$

$$-c.z^{-i} = -c.z^{-i} \Rightarrow c = c$$

$$-d.z^{i} = -d.z^{-i} \Rightarrow d = 0$$

Olur. Böylece P matrisi $P = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde bulunur.

y için;

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c.(-1)^{k-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c.(-1)^{i} & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$(-1)^{k-i} = (-1)^{i}$ olduğundan $b = c.(-1)^{i}$; b=$(-1)^{i}$ ve $c = 1$ alınırsa aranılan P matrisi bulunmuş olur.■

2.8 Önerme : $\eta_3.d_i = d_{k-i}$ dir.

İspat: $\eta_3 \begin{cases} x \mapsto -1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}$

$d_i \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{i} & 0 \\ 0 & z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$ ve $d_{k-i} \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} z^{k-i} & 0 \\ 0 & z^{-(k-i)} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$

$\eta_3.d_i = \begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} -z^{i} & 0 \\ 0 & -z^{-i} \end{bmatrix} \\ y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$ olduğuna göre eşitliği göstermek için uygun bir P matrisi bulunmalıdır. $z^{k} = -1$ dir.

$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. x için;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z^{k-i} & 0 \\ 0 & z^{-(k-i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^{i} & 0 \\ 0 & -z^{-i} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a.z^{k-i} & b.z^{-k+i} \\ c.z^{k-i} & d.z^{-k+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a.z^{i} & -b.z^{i} \\ -c.z^{-i} & -d.z^{-i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a.z^{-i} & -b.z^{i} \\ -c.z^{-i} & -d.z^{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a.z^{i} & -b.z^{i} \\ -c.z^{-i} & -d.z^{-i} \end{bmatrix}$$

$$-a.z^{-i} = -a.z^{i} \Rightarrow a = 0$$

$$-b.z^{i} = -b.z^{i} \Rightarrow b = b$$

$$-c.z^{-i} = -c.z^{-i} \Rightarrow c = c$$

$$-d.z^{i} = -d.z^{-i} \Rightarrow d = 0$$

Olur. Böylece P matrisi $P = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde bulunur.

y için;

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k-i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{i+1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & c.(-1)^{k-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c.(-1)^{i+1} & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

$(-1)^{k-i} = (-1)^{i}$ olduğundan $b = -c.(-1)^{i}$; b=$(-1)^{i}$ ve $c = -1$ alınırsa aranılan P matrisi bulunmuş olur.■

3. K - HALKALARI

3.1 GROTHENDİECK İNŞAASI (Wu 2000)

X topolojik uzay olsun. Vektör demeti izomorfizması bir denklik ilişkisidir ve izomorfizma sınıfları tanımlar. $Vect_k^{\mathbb{C}}(X) = Vect_k(X)$ k-boyutlu kompleks vektör demetlerinin izomorfizma sınıflarının kümesi olsun. Tüm vektör demetlerinin izomorfizma sınıfları

$$Vect(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Vect_k(X)$$

olsun. $p: E \to X$ vektör demeti olsun. Bu durumda $[E]$, $Vect(X)$ in bir elemanı olur. $Vect(X)$ te, $[E] \oplus [F] = [E \oplus F]$ ve $[E] \otimes [F] = [E \otimes F]$ şeklinde tanımlıdır. Bu nedenle $Vect(X)$ yarı halkadır. $Vect(X)$ yarı halkasını halkaya tamamlama işlemine Grothendieck İnşaası denir.

Elemanları $[E] - [F]$ şeklinde olan bir S kümesi tanımlansın. Bu küme üzerindeki denklik ilişkisi şöyle olsun:

$$[E \oplus G] - [F \oplus G] \sim [E] - [F]$$

Bu denklik ilişkisinin yarattığı sınıfların kümesi K(X) ile gösterilir. K(X) toplama işlemi altında Abelyan gruptur ve toplamı işlemi şu şekildedir:

$$([E_1] - [F_1]) \oplus ([E_2] - [F_2]) = ([E_1] \oplus [E_2]) - ([F_1] \oplus [F_2])$$

$[E] - [F]$ nin toplamaya göre tersi $[F] - [E]$ dir.

K(X) üzerindeki tensör çarpımı

$$\begin{aligned} &([E_1] - [F_1]) \otimes ([E_2] - [F_2]) \\ &\qquad = ([E_1] \otimes [E_2] \oplus [F_1] \otimes [F_2]) - ([E_1] \otimes [F_2] \oplus [F_1] \otimes [E_2]) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece K(X) , $\oplus$ ve $\otimes$ ya göre bir halkadır.

Daha basit şekilde K(X) halkası durağan izomorfizma kavramıyla verilebilir.

3.1.1 Tanım:

$E, F \in Vect(X)$ olsun. $\exists n \in \mathbb{Z}^{+}$ için $E \oplus \varepsilon^{n} \cong F \oplus \varepsilon^{n}$ olacak şekilde ε^{n} trivial demeti varsa E ve F ye durağan izomorfiktir denir. K(X); Vect(X) yarı halkasının durağan izomorfizma denklik ilişkisi altında halkaya tamamlanmasıdır.

Dolayısıyla, E vektör demeti trivial demete durağan izomorfiktir yalnız ve ancak

$E \in Ker\left[K(X) \rightarrow \widetilde{K}(X)\right]$.

$\forall$n $\in \mathbb{Z}$ için $K^{n}(X)$ grubu şu şekilde tanımlanır:

$$K^{n}(X) = K(S^{n} \wedge X)$$

Burada $S^{n} \wedge X$ uzayı X in n. süspansiyonu olarak adlandırılır ve

$$S^{n} \wedge X = \frac{S^{n} \times X}{(\{s_0\} \times X) \cup (S^{n} \times \{x_0\})}$$

şeklinde tanımlıdır.

3.1.2 Tanım:

X in K – kohomolojisi

$$K^{*}(X) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} K^{n}(X)$$

şeklinde tanımlıdır.

3.1.3 Tanım: (Hatcher 2009)

X ve Y iki uzay, $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve $p: E \rightarrow Y$ vektör demeti olsun.

$f^{*}(E) = \{(x, e): f(x) = p(e)\}$ ile tanımlı demete geri çekme demeti denir. Burada bir $x \in X$ noktasındaki fiber ile $f(x) \in Y$ noktasındaki fiber aynıdır. f fonksiyonu , E'nin sınıfını $f^{*}(E)$'nin sınıfına götüren, bir $f^{*}: K(Y) \rightarrow K(X)$ halka homomorfizması tanımlar. Bu homomorfizmaya geri çekme homomorfizması adı verilir.

3.2 İNDİRGENMİŞ K - HALKASI

Her $x_0 \in X$ için $i: \{x_0\} \hookrightarrow X$ içerme fonksiyonu tanımlıdır. Bu fonksiyon

$i^{*}: K(X) \hookrightarrow K(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$ geri çekme homomorfizmasını yaratır.

X in indirgenmiş K - halkası

$$\widetilde{K}(X) = \ker i^*$$

şeklinde tanımlanır.Ve

$$K(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}(X)$$

şeklinde $K(X)$ halkasının bir parçalanması elde edilir.

Örnek 1:

$$\widetilde{K}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, n \text{ çift} \\ 0, n \text{ tek} \end{cases}$$

Örnek 2:

Landweber 2009'a göre

$$\widetilde{K}\left({S^7}/{Q_8}\right) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$$

3.3 SINIFLANDIRMA UZAYI

3.3.1 Tanım:

G bir topolojik grup olsun. B uzayında tanımlı temel – G demeti bir $\pi: E \to B$ fiber demeti $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ trivialite mepleriyle tanımlı olan bir fiber demetidir.

3.2.2 Önerme: (Ortiz 2012)

$\pi: E \to B$ bir temel G - demeti ise aşağıdaki koşullar sağlanır:

i. Eğer $x \in E$ ve $\pi(x) = b$ ise $\pi^{-1}(b) = xG$.
ii. G, E nin her fiberine özgürce etki eder.
iii. $B \simeq E/G$

İspat:

i. Kabul edelim ki $b \in U_\alpha$ ve (U_α, ψ_α) , π nin lokal trivialite mepi olsun. O zaman aşağıdaki değişmeli diagram vardır;

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "\phi", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times G \\
& U_\alpha \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1.3

$\pi^{-1}(b) \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha)$ olacak şekilde yukardaki diagramı kısıtlarsak ;

$$
\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(b) \arrow[rr, "\phi", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \{b\} \times G \\
& \{b\} \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 1.4

Elde edilir. Kabul edelim ki $x \in \pi^{-1}(b) \subseteq E$ olsun. Bazı $g \in G$ için $\psi_\alpha(x) = (b, g)$ olduğundan; $\phi(xG) = \phi(x)G = (b, g)G = \{b\} \times G = \phi\big(\pi^{-1}(b)\big)$ olur . Böylece

$$\pi^{-1}(b) = xG.$$

ii. Kabul edelim ki $b \in B$ ve $\pi^{-1}(b) \subseteq E$ olsun. Ayrıca $x \in \pi^{-1}(b)$ ve $xh = x$ olacak şekilde bir $h \in G$ olsun. O halde bazı $g \in G$ için;

$(b, g) = \psi_\alpha(x) = \psi_\alpha(xh) = \psi_\alpha(x)h = (b, g)h = (b, gh)$ sağlanır. Dolayısıyla $gh = g$ olur. Bu yüzden $h = e$ dir. Bu da G nin π^{-1} fiberine ve E ye özgürce etki ettiğini gösterir.

iii. $x \in E$ ve $b \in B$ için $\pi^{-1}(b) = xG \subseteq E$ dir. Dolayısıyla $\pi^{-1}: B \to E/G$ mepi iyi tanımlı, sürekli , birebir-örten ve tersi π mepi de sürekli homeomorfizmadır.

3.2.3 Teorem: (Ortiz 2012)

π: $P \to BG$ temel G-demeti ve P tek noktaya homotopik uzay olsun. $\mathcal{P}_G X$; X üzerindeki G-demetlerinin izomorfizma sınıflarının kümesi olsun. O zaman herhangibir X CW- kompleksi için öyle bir BG uzayı ve π: $P \to BG$ temel G-demeti vardır ki

$$\phi : [X, BG] \to \mathcal{P}_G X$$

$$f \to f^* P$$

fonksiyonu birebir ve örtendir. Burada BG ye G nin sınıflandırma uzayı, P ye evrensel G – demeti denir.

3.2.4 Teorem: (MİLNOR)

G bir topolojik grup ise G için bir sınıflandırma uzayı vardır.

3.2.5 Önerme: (Ortiz 2012)

G bir topolojik grup olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $\Omega\, BG \simeq G$
ii. $\pi_n(BG) \simeq \pi_{n-1}(G); n \geq 1$ için.

Örnek 3:

$G = \mathbb{Z}$ ise $B\mathbb{Z} = S^1$ dir.

$G = \mathbb{Z}_2$ ise $B\mathbb{Z}_2 = RP^\infty$ dir.

$G = \mathbb{Z}^n$ ise $B\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ dir.

$G = S^1$ ise $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$ dur.

$G = \mathbb{Z}_k$ ise $B\mathbb{Z}_k = S^\infty / \mathbb{Z}_k$ olur. Bu uzaya özel olarak Lens Uzayı adı verilir.

$G = Q_{4k}$ ise $BQ_{4k} = S^\infty / Q_{4k}$ olur. Açık olarak yazılırsa $BQ_{4k} = \lim_{N \to \infty} S^{4N+3} / Q_{4k}$ limiti ile tanımlıdır.

3.3 ATİYAH-SEGAL TAMAMLAMA TEOREMİ (ASCT)

V kompleks vektör uzayı, G grubunun bir temsili olsun.

$\dim V = n$ olmak üzere V temsili $\varphi: G \to GL(V) \cong GL(\mathbb{C}^n)$ homomorfizması ile verilsin.

V temsili kullanılarak BG sınıflandırma uzayı üzerinde bir vektör demeti inşa edilebilir.

$p_e: EG \to BG$ evrensel G-demeti, $X = EG \times V$ çarpım uzayı olsun. G grubunun X üzerine özgür bir etkisi vardır yani; $g.(e, v) = (g.e,\ \varphi(g)v),\ \forall g \in G\ ve\ \forall (e, v) \in X$ için.

Bu etkiyle ortaya çıkan $X/_G$ bölüm uzayını $EG \times_G V$ ile göstereceğiz.

$p: EG \times_G V \to BG$ projeksiyonu , $(e, v) \to p_e(e)$ şeklinde tanımlansın.

3.3.1 Önerme: $p: EG \times_G V \to BG$ bir kompleks vektör demetidir.

İspat:

$p_e: EG \to BG$ projeksiyonunun fiberi $p_e^{-1}(b) \cong G$ ye izomorfiktir. Dolayısıyla

$p: EG \times_G V \to BG$ projeksiyonunun fiberi $G \times_G V \cong V;\ \overline{(g, v)} \to (e_G, \varphi(g^{-1}).v)$

izomorfiktir. Bütün inşa sürekli olduğu için p, boyutu dimV olan bir kompleks vektör demeti

olur. ■

Sonuç olarak her kompleks temsil bir vektör demeti tanımlar. O halde şu önerme verilebilir:

3.3.2 Önerme: α_G:R(G) → K(BG); [V] → [EG $\times_G$ V] bir halka homomorfizmasıdır.

Atiyah ve Segal bu homomorfizmayı izomorfizma yapmak için R(G) nin augmente ideale göre tamamlanması gerektiğini göstermiştir.

3.3.3 Tanım: $I_G = \{[p] - \dim p:\ [p] \in R(G)\}$ idealine R(G) nin augmente ideali denir.

Kısaca $R = R(G)$ ve $I = I_G$ olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $R_n = R/_{I^n}$ bölüm halkaları tanımlanabilir.

$I \supset I^2 \supset I^3 \supset I^4 \supset \cdots \supset I^n \supset \cdots$ olduğu için

$\ldots R/_{I^n} \xrightarrow{\delta_n} R/_{I^{n-1}} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_3} R/_{I^2} \xrightarrow{\delta_2} R/_I$ dizisi elde edilir.

3.3.4 Tanım: $R(G)^{\wedge} = \mathrm{colim}_{\leftarrow} R(G)/I_G^n$ halkasına R(G) halkasının augmente idealde tamamlanması denir.

$\pi_n: R(G) \to R(G)/I_G^n$ homomorfizmasından ; $\pi: R(G) \to R(G)^{\wedge}$ homomorfizması elde edilir.

M. F. Atiyah ve G. Segal ; $R(G)^{\wedge}$ halkasının $K(BG)$ ye izomorfik olduğunu göstermiştir.

3.3.5 Teorem: (Atiyah-Segal Tamamlama Teoremi)

Aşağıdaki üçgeni değişmeli yapan bir $\alpha_G^{\wedge}: R(G)^{\wedge} \to K(BG)$ homomorfizması vardır:

$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha_G"'] & & R(G)^{\wedge} \arrow[dl, "\alpha_G^{\wedge}"] \\ & K(BG) & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.5

Burada $\alpha_G^{\wedge}$ bir halka izomorfizmasıdır.

Örnek 4:

$K(B\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}[v] / v^2 + 2v = 0$ dir.

Örnek 5:

$K(B\mathbb{Z}_k) = \mathbb{Z}[\mu] / (1+\mu)^k - 1 = 0$

3.4 KOHOMOLOJİ

3.4.1 Teorem: (Hayami ve Sanada 2002)

$k \equiv 0\ (mod\ 4)$ ise Q_{4k} nın kohomoloji halkası A , B ve C tarafından yaratılır ve

$$H^*(Q_{4k},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A,B,C] \Big/ \begin{pmatrix} 2A = 0 \\ 2B = 0 \\ 4tC = 0 \\ A^2 = 0 \\ B^2 - 2tC = 0 \\ AB - 2tC = 0 \end{pmatrix}$$

Olarak tanımlıdır.

$k \equiv 2\ (mod\ 4)$ ise Q_{4k} nın kohomoloji halkası A , B ve C tarafından yaratılır ve

$$H^*(Q_{4k},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[A,B,C] \Big/ \begin{pmatrix} 2A = 0 \\ 2B = 0 \\ 4tC = 0 \\ A^2 = 0 \\ B^2 = 0 \\ AB - 2tC = 0 \end{pmatrix}$$

Olarak tanımlıdır. Burada $dim\ A = dim\ B = 2$ ve dim $C = 4$ tür.

Burada $\alpha = A + B$,$\beta = B, \gamma = C$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

3.4.2 Teorem: (Hayami ve Sanada 2002)

$$\alpha^2 = \begin{cases} 2k\gamma\ , & k \equiv 0\ (mod 4) \\ 0\ , & k \equiv 2\ (mod\ 2) \end{cases}$$

$$\beta^2 = \begin{cases} 2k\gamma\ , & k \equiv 0\ (mod 4) \\ 0\ , & k \equiv 2\ (mod\ 2) \end{cases}$$

$$\alpha\beta = \begin{cases} 0\ , & k \equiv 0\ (mod 4) \\ 2k\gamma\ , & k \equiv 2\ (mod\ 2) \end{cases}$$

ilişkileri sağlanır , Q_{4k} nın kohomoloji halkası α, β ve γ tarafından yaratılır ve aşağıdaki şekildedir.

$$k \equiv 0 \ (mod\ 4) \ \ ise \ \ H^*(Q_{4k}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha,\beta,\gamma] \Big/ \begin{pmatrix} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 4k\gamma = 0 \\ \alpha^2 - 2k\gamma = 0 \\ \beta^2 - 2k\gamma = 0 \\ \alpha\beta = 0 \end{pmatrix}$$

$$k \equiv 2 \ (mod\ 4) \ \ ise \ \ H^*(Q_{4k}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\alpha,\beta,\gamma] \Big/ \begin{pmatrix} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ 4k\gamma = 0 \\ \alpha^2 = 0 \\ \beta^2 = 0 \\ \alpha\beta - 2k\gamma = 0 \end{pmatrix}$$

Burada $dim\alpha = dim\beta = 2$ ve $dim\gamma = 4$ tür.

Özel olarak $k = 2^{n-2}$ ve $k \geq 2$ olduğunda kohomoloji halkası yukarıdaki teoremden bulunabilir. Sonuç olarak $k \geq 2$ olduğunda Q_{4k} nın integral kohomoloji grupları aşağıdaki teorem ile verilebilir.

3.4.3 Teorem: (Hayami ve Sanada 2002)

$$H^p(BQ_{4k}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & ,p = 4s + 2 \\ \mathbb{Z}_{4k} & ,p = 4s\ ,s \geq\ 1 \\ 0 & ,p\ tek\ ise \end{cases}$$

Burada tek boyutlu kohomolojiler kaybolur. Bu yüzden $K(BQ_{4k})$ ya yakınsayan AHSS ikinci sayfada çöker ve böylece integral kohomoloji ve K halkası birbirini tamamen tanımlar.

3.5 ATİYAH- HİRZEBURGH SPEKTRAL DİZİSİ (AHSS)

3.5.1 Tanım: (Atiyah ve Hirzebrugh 1972)

X bir sonlu CW kompleks olsun. X^n, X in n boyutlu iskeleti olsun. K^n filtrasyonu şöyle tanımlıdır:

$$K_p^n(X) = ker\ [K^n(X) \to K^n(X^{p-1})]$$

3.5.2 Tanım: (Atiyah ve Hirzebrugh 1972)

$E = \left(E_r^{p,q}, E^n\right)$ ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir spektral dizi tanımlar:

i. $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ve $r \geq 1$.

ii. $d_r: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ co-sınır operatörü için $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ dır.

3.5.3 Teorem: (Atiyah ve Hirzebrugh 1972)

X bir sonlu CW kompleks olsun.

$r \geq 1, -\infty < p, q < \infty$ olmak üzere

$$E_1^{p,q} \cong C^p\big(X, K^q(x_0)\big)$$

$$E_2^{p,q} \cong H^p\big(X, K^q(x_0)\big)$$

$$E_\infty^{p,q} \cong {K_p^{p+q}(X)}\Big/{K_{p+1}^{p+q}(X)}$$

Olarak tanımlı bir $E_r^{p,q}$ spektral dizisi vardır. Burada d_1 , co-sınır operatörüdür.

$d_r: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ olarak tanımlı co-sınır operatörü q nun tüm tek değerleri için $E_r^{p,q} = 0$ olduğundan kaybolur.

Not: x_0 , bir tek noktadan oluşan uzay olsun. Bu durumda;

$K^q(x_0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, q\ çift\ ise \\ 0, q\ tek\ ise \end{cases}$ olur.

İspat:

X uzayının p-boyutlu iskeleti

$$X^{(p)} = \bigcup_{t \leq p} e_i^t \qquad e_i^t \subset X$$

Olarak tanımlı olduğundan X üzerinde $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset \cdots \subset X^{(p)} \subset \cdots$ şeklinde tanımlı bir alt uzay filtrasyonu vardır.

Her $p \geq 0$; $\big(X^{(p)}, X^{(p-1)}\big)$ ikilileri için bir K-kohomoloji uzun tam dizisi vardır, (Atiyah-Hirzeburgh bknz):

$$\ldots \to K^s\big(X^{(p)}\big) \xrightarrow{i^*} K^s\big(X^{(p-1)}\big) \xrightarrow{\partial} K^s\big(X^{(p)}, X^{(p-1)}\big) \xrightarrow{j^*} K^{s-1}\big(X^{(p)}\big) \xrightarrow{i^*} \ldots$$

$A = \bigoplus_{p\geq 0} K^*\big(X^{(p)}\big)$ ve $C = \bigoplus_{p\geq 0} K^*\big(X^{(p)}, X^{(p-1)}\big)$ derecelendirilmiş modülleri tanımlı olsun. $f = \bigoplus_{p\geq 0} i^*: A \to A$, $g = \bigoplus_{p\geq 0} \partial: A \to C$, $h = \bigoplus_{p\geq 0} j^*: C \to A$ homomorfizmaları tanımlı olsun.

Bu durumda

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & A \arrow[dl, "g"] \\ & C \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

Şekil 1.6

tam üçgeni oluşur. Böyle bir üçgen ; Cartan ve Eilenberg (1956) göre bir spektral dizi tanımlar. Bu dizinin birinci sayfası C nin filtrasyonlarından oluşur. Açık olarak,

$$E_1^{p.q} = K^{p+q}\big(X^{(p)}, X^{(p-1)}\big) = \widetilde{K}^{p+q}\left({X^{(p)}}\Big/_{X^{(p-1)}}\right) \cong \widetilde{K}^{p+q}\left(\bigvee S^p\right) \cong \widetilde{K}^{q}\left(\bigvee S^0\right)$$

$$\cong \widetilde{K}\left(\bigvee S^{-q}\right) \cong \bigoplus \widetilde{K}(S^{-q}) \cong C^p\left(X; \widetilde{K}(S^{-q})\right)$$

şeklinde olur. Dizinin 2. Sayfası 1. Sayfanın kohomolojisi olduğundan,

$$E_2^{p,q} = H^p\left(X;\ \widetilde{K}(S^q)\right)$$

şeklinde olur. Bott periyodiklik teoremine göre, $\widetilde{K}(S^q) = \begin{cases} \mathbb{Z}; & q\ çiftse \\ 0; & q\ tekse \end{cases}$ olduğundan

$E_2^{p,-p} = \begin{cases} H^p(X;\mathbb{Z}); & p\ çiftse \\ \quad 0\ ; & p\ tekse \end{cases}$ olur.

Cartan ve Eilenberg (1956) göre bu dizinin limiti $K^*(X)$ in filtrasyonunu verir.

$$\lim_{r\to\infty} E_r^{p,q} = K_p^{p+q}(X)$$

Bu spektral diziye Atiyah-Hirzeburgh Spektral Dizisi denir. (AHSS ile göstereceğiz.)

3.5.4. Lemma:

$H^*(X;\mathbb{Z})$ halkası sadece çift boyutlu kohomoloji sınıfları ile yaratılıyorsa $H^p(X;\mathbb{Z}) = E_\infty^{p,-p}$ olur. Bu durumda AHSS nin çöktüğü söylenir.

$E_\infty^{p,q}$ grupları $K^{p+q}(X)$ in filtrasyonlarıdır. Açık olarak yazılırsa;

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{Ker\left[K^{p+q}(X) \to K^{p+q}\left(X^{(p-1)}\right)\right]}{Ker[K^{p+q}(X) \to K^{p+q}(X^{(p)})]}$$

Şeklindedir. $p+q=0$ alınırsa $K^0(X)$ elde edilir. $p+q=0$ doğrusu üzerinde $K(X)$in filtrasyonları oluşur:

$$E_\infty^{p,-p} \cong \frac{Ker\left[K(X) \to K\left(X^{(p-1)}\right)\right]}{Ker\left[K(X) \to K(X^{(p)})\right]}$$

Örnek 1:

$X = BQ_{2^n}$ uzayı olsun. Bu uzayın K halkasındaki AHSS nin 2. Sayfasının ana köşegeni

$$E_2^{p,-p} = H^p\left(BQ_{2^n}, \widetilde{K}(S^p)\right) = \begin{cases} H^p(BQ_{2^n};\mathbb{Z}); p\ çiftse \\ 0\ ; p\ tekse \end{cases}$$

$H^*(BQ_{2^n};\mathbb{Z})$ kohomolojisi sadece çift boyutlarda non-trivial olduğu için

$E_2^{p,-p} = E_4^{p,-p} = E_6^{p,-p} = \cdots = E_\infty^{p,-p}$ olur. Sonuç olarak $E_\infty^{p,-p} = H^p(BQ_{2^n};\mathbb{Z})$ olur.

$$H^p(BQ_{2^n};\mathbb{Z}) = {\widetilde{K}(X^p)}\Big/{\widetilde{K}(X^{p-1})}$$

Çizelge 1.1 de $E_\infty^{p,-p}$ açıklanmıştır. Yaratanları bir sonraki bölümde açıklanacaktır.

Çizelge 1.1

p	$E_\infty^{p,-p}$	Yaratanları
2	$E_\infty^{2,-2} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	v_1, v_2
4	$E_\infty^{4,-4} = \mathbb{Z}_{2^n}$	ϕ
6	$E_\infty^{6,-6} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	v_1^2, v_2^2
8	$E_\infty^{8,-8} = \mathbb{Z}_{2^n}$	ϕ^2
10	$E_\infty^{10,-10} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	v_1^3, v_2^3

2. QUATERNİON GRUPLARIN SINIFLANDIRMA UZAYLARININ K HALKALARI

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, d_1$ temsillerine karşılık gelen BQ_{4k} sınıflandırma uzayına ait indirgenmiş vektör demetleri şöyle tanımlıdır:

$$v_1 = \eta_1 - 1$$

$$v_2 = \eta_2 - 1$$

$$\phi = d_1 - 2$$

Atiyah-Segal Tamamlama Teoremine göre (ASCT); v_1, v_2, ϕ elemanları $K(BQ_{4k})$ yı yaratır. Halkayı iyi tanımlamak için yaratanlar arasındaki minimal ilişkiler bulunmalıdır.

Önerme 4.1 $K(BQ_{4k})$ için; v_1 ve v_2 aşağıdaki ilişkileri sağlar:

$$v_1^2 + 2v_1 = 0$$

$$v_2^2 + 2v_2 = 0$$

İspat:

$\eta_1^2 = 1$ eşitliğinde $\eta_1 = v_1 + 1$ yerine konulursa $v_1^2 + 2v_1 = 0$ eşitliği elde edilir. Benzer şekilde $\eta_2^2 = 1$ eşitliğinde $\eta_2 = v_2 + 1$ yerine konulursa $v_2^2 + 2v_2 = 0$ elde edilir. ■

Örnek 1

Q_8 grubu için gereken minimal ilişkileri bulalım.

Önerme 4.1 den $v_1^2 + 2v_1 = 0$, $v_2^2 + 2v_2 = 0$ dir. 2.2 Önermeden $d_0 = \eta_1 + 1$ ve

2.3 Önermeden $d_2 = \eta_2 + \eta_3$ olur.

2.4 Önermeden $d_1^2 = d_2 + d_0 = \eta_2 + \eta_3 + \eta_1 + 1$ olduğundan

$\phi^2 + 4\phi = v_1.v_2 + 2.v_1 + 2.v_2$ bulunur.

2.6 Önermeden $\eta_1.d_1 = d_1$ olduğundan $(v_1 + 1).(\phi + 2) = \phi + 2$ olur. Düzenlenirse $v_1.\phi + 2v_1 = 0$ bulunur. Benzer şekilde 2.7 Önermeden $\eta_2.d_1 = d_1(v_2 + 1).(\phi + 2)$

Olduğundan $v_2.\phi + 2v_2 = 0$ bulunur.

Böylece Q_8 i yaratan minimal polinomlar:

$v_1^2 + 2v_1 = 0$

$v_2^2 + 2v_2 = 0$

$v_1.\phi + 2v_1 = 0$

$v_2.\phi + 2v_2 = 0$

$\phi^2 + 4\phi = v_1.v_2 + 2.v_1 + 2.v_2$ şeklinde bulunur.

Örnek 2:

Q_{16} grubu için gereken minimal ilişkileri bulalım.

Önerme 4.1 den $v_1^2 + 2v_1 = 0$, $v_2^2 + 2v_2 = 0$ dir.

2.2 Önermeden $d_0 = \eta_1 + 1$ ve 2.3 Önermeden $d_4 = \eta_2 + \eta_3$ olur. 2.4 Önermeden

$d_1^2 = d_2 + d_0$ olduğundan her iki taraf d_1 ile çarpılırsa $d_1^3 = d_3 + 3.d_1$bulunur. Bu şekilde devam edilirse $d_1^4 = d_4 + 4.d_2 + 3.d_0$ bulunur. Düzenlenirse

$d_1^4 = d_4 + 4.(d_1^2 - d_0) + 3.d_0 = d_4 + 4.d_1^2 - d_0$ olur. $\eta_1 \;\; = v_1 + 1$, $\eta_2 \;\; = v_2 + 1$ ve $\phi = d_1 + 2$ eşitlikte yerine konulursa

$(\phi + 2)^4 = \eta_2 + \eta_3 + 4.(\phi + 2)^2 - \eta_1 - 1$

$(\phi + 2)^4 = v_2 + 1 + (v_2 + 1).(v_1 + 1) + 4.(\phi + 2)^2 - v_1 - 2$ bulunur. Eşitlik düzenlendiğinde $\phi^4 + 8\phi^3 + 20\phi^2 + 16\phi = v_1.v_2 + 2.v_2$ elde edilir.

2.6 Önermeden $\eta_1.d_1 = d_1$ olduğundan $v_1.\phi + 2v_1 = 0$ bulunur. $d_3 = d_1^3 - 3.d_1$ dir.

2.7 Önermeden $\eta_2.d_1 = d_3$ olduğundan $(v_2 + 1).(\phi + 2) = (\phi + 2)^3 - 3.(\phi + 2)$dir. Eşitlik düzenlenirse $v_2.\phi + 2.v_2 = \phi^3 + 6.\phi^2 + 8.\phi$ elde edilir.

Böylece Q_{16} yı yaratan minimal polinomlar;

$v_1^2 + 2v_1 = 0$

$v_2^2 + 2v_2 = 0$

$v_1.\phi + 2v_1 = 0$

$v_2.\phi + 2.v_2 = \phi^3 + 6.\phi^2 + 8.\phi$

$\phi^4 + 8\phi^3 + 20\phi^2 + 16\phi = v_1.v_2 + 2.v_2$ şeklinde bulunur.

Örnek 3:

Q_{32} grubu için gereken minimal ilişkileri bulalım. Önerme 4.1 den

$v_1^2 + 2v_1 = 0$, $v_2^2 + 2v_2 = 0$ dir.

2.2 Önermeden $d_0 = \eta_1 + 1$ ve 2.3 Önermeden $d_8 = \eta_2 + \eta_3$ olur. 2.4 Önerme den

$d_1^2 = d_2 + d_0$ olduğundan her iki tarafı da d_1 ile çarparsak $d_1^3 = d_3 + 3.d_1$ olur. Bu şekilde devam edilirse $d_1^5 = d_5 + 5.d_3 + 10.d_1$ bulunur. $d_3.d_5 = d_8 + d_2$ olduğundan her iki taraf d_3 ile çarpılırsa,

$d_1^5.d_3 = d_5.d_3 + 5.d_3.d_3 + 10.d_1.d_3 = d_8 + d_2 + 5.(d_1^3 - 3.d_1)^2 + 10.d_1.(d_1^3 - 3.d_1)$

Eşitlik düzenlenirse $d_1^8 - 8.d_1^6 + 20.d_1^4 - 16.d_1^2 = d_8 - d_0$ bulunur. Buradan

$(\phi + 2)^8 - 8.(\phi + 2)^6 + 20.(\phi + 2)^4 - 16.(\phi + 2)^2 = \eta_2 + \eta_3 - \eta_1 - 1$ elde edilir.

$\eta_1 = v_1 + 1$, $\eta_2 = v_2 + 1$ ve $\phi = d_1 + 2$ eşitlikte yerine konulursa

$(\phi + 2)^8 - 8.(\phi + 2)^6 + 20.(\phi + 2)^4 - 16.(\phi + 2)^2 = v_2 + 1 + (v_2 + 1).(v_1 + 1) - v_1 - 2$ olur.İfade düzenlenirse

$\phi^8 + 16.\phi^7 + 104.\phi^6 + 352.\phi^5 + 660.\phi^4 + 672.\phi^3 + 336.\phi^2 + 64.\phi = v_1.v_2 + 2.v_2$ bulunur.

2.6 Önerme den $\eta_1.d_1 = d_1$ olduğundan $v_1.\phi + 2v_1 = 0$ bulunur.

2.7 Önerme den $\eta_2.d_1 = d_7$ dir.

$d_1^6 = d_6 + 6.d_4 + 15.d_2 + 10.d_0$

$d_1^7 = d_7 + 7.d_5 + 21.d_3 + 35.d_1$ olduğundan $d_7 = d_1^7 - 7.d_5 - 21.d_3 - 35.d_1$ dir. Düzenlenirse ; $d_7 = d_1^7 - 7.d_1^5 + 14d_1^3 - 7.d_1$ bulunur. $\eta_1 = v_1 + 1$, $\eta_2 = v_2 + 1$ ve $\phi = d_1 + 2$ eşitlikte yerine konulursa

$(v_2 + 1).(\phi + 2) = (\phi + 2)^7 - 7.(\phi + 2)^5 + 14.(\phi + 2)^3 - 7.\phi - 14$ elde edilir. Böylece

$v_2.\phi + 2.v_2 = \phi^7 + 14\phi^6 + 77.\phi^5 + 210\phi^4 + 294.\phi^3 + 196.\phi^2 + 48\phi$ eşitliği bulunur.

O halde Q_{32} yi yaratan minimal polinomlar:

$$v_1^2 + 2v_1 = 0$$

$$v_2^2 + 2v_2 = 0$$

$$v_1.\phi + 2v_1 = 0$$

$$v_2.\phi + 2.v_2 = \phi^7 + 14\phi^6 + 77.\phi^5 + 210\phi^4 + 294.\phi^3 + 196.\phi^2 + 48\phi$$

$$\phi^8 + 16.\phi^7 + 104.\phi^6 + 352.\phi^5 + 660.\phi^4 + 672.\phi^3 + 336.\phi^2 + 64.\phi = v_1.v_2 + 2.v_2$$

şeklindedir.

4.2 Tanım:

i. dereceden kuadratik binom polinomu $\psi^i(z + z^{-1} - 2) = z^i + z^{-i} - 2$ şeklinde tanımlanır.

4.3 Önerme:

$\psi^i(\phi)$ polinomunun seri hali

$$\psi^i(\phi) = \sum_{j=1}^{i} \frac{\binom{i}{j}\binom{i+j-1}{j}}{\binom{2j-1}{j}} \phi^j$$

Şeklindedir.

İspat:

$\phi = z + z^{-1} - 2$ olsun. Önermeyi tümevarımla ispatlayalım. Kabul edelim ki $k \leq i - 1$ için iddia doğru olsun. $k = i$ için doğru olduğu gösterilirse ispat tamamdır. 4.2 tanımdan;

$$\begin{aligned}\psi^{i-1}(\phi).\psi^1(\phi) &= \left(z^{i-1} + z^{-i+1} - 2\right).(z^1 + z^{-1} - 2)\\ &= z^i + z^{i-2} - 2.z^{i-1} + z^{2-i} + z^{-i} - 2.z^{-i+1} - 2.z^1 - 2.z^{-1} + 4\\ &= \psi^i(\phi) - 2.\psi^{i-1}(\phi) + \psi^{i-2}(\phi) - 2.\psi^1(\phi)\end{aligned}$$

Eşitliği elde edilir.

Düzenlenirse ;$\psi^i(\phi) = \psi^{i-1}(\phi).\psi^1(\phi) + 2.\psi^{i-1}(\phi) - \psi^{i-2}(\phi) + 2.\psi^1(\phi)$ elde edilir. Verilenler eşitlikte yerine konulursa

$$\psi^i(\phi) = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\binom{i-1}{j}.\binom{i+j-2}{j}}{\binom{2j-1}{j}}.\phi^j\right).\phi + 2\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\binom{i-1}{j}.\binom{i+j-2}{j}}{\binom{2j-1}{j}}.\phi^j$$

$$-\sum_{j=1}^{i-2} \frac{\binom{i-2}{j}.\binom{i+j-3}{j}}{\binom{2j-1}{j}}.\phi^j + 2\phi$$

Elde edilir. Düzenlenirse

$$\psi^i(\phi) = \sum_{j=2}^{i-2}\left[\frac{\binom{i-1}{j-1}.\binom{i+j-3}{j-1}}{\binom{2j-3}{j-1}} + 2.\frac{\binom{i-1}{j}.\binom{i+j-2}{j}}{\binom{2j-1}{j}} - \frac{\binom{i-2}{j}.\binom{i+j-3}{j}}{\binom{2j-1}{j}}\right].\phi^j$$

$$+i^2.\phi + 2i\phi^{i-1} + \phi^i$$

Eşitliği elde edilir. Yukarıdaki ifadede gerekli matematiksel işlemler yapılırsa;

$$= \sum_{j=2}^{i-2} \frac{\frac{(i+j-3)!.i.(i-j+2).(i-j+1)}{(i-j)!\,(j!)^2}}{\binom{2j-1}{j}}.\phi^j + i^2.\phi + 2i\phi^{i-1} + \phi^i$$

$$= \sum_{j=1}^{i} \frac{\binom{i}{j}.\binom{i+j-1}{j}}{\binom{2j-1}{j}}.\phi^j$$

Eşitliği elde edilir. ■

Çizelge 1.2

KUADRATİK BİNOM FORMÜLÜNÜN BAZI i DEĞERLERİ İÇİN SONUÇLARI

$i = 0$	0
$i = 1$	ϕ
$i = 2$	$4\phi + \phi^2$
$i = 3$	$9\phi + 6\phi^2 + \phi^3$
$i = 4$	$16\phi + 20\phi^2 + 8\phi^3 + \phi^4$
$i = 5$	$25\phi + 50\phi^2 + 35\phi^3 + 10\phi^4 + \phi^5$
$i = 6$	$36\phi + 105\phi^2 + 112\phi^3 + 54\phi^4 + 12\phi^5 + \phi^6$
$i = 7$	$49\phi + 196\phi^2 + 294\phi^3 + 210\phi^4 + 77\phi^5 + 14\phi^6 + \phi^7$
$i = 8$	$64\phi + 336\phi^2 + 672\phi^3 + 660\phi^4 + 352\phi^5 + 104\phi^6 + 16\phi^7 + \phi^8$
$i = 9$	$81\phi + 540\phi^2 + 1386\phi^3 + 1782\phi^4 + 1287\phi^5 + 546\phi^6 + 135\phi^7 + 18\phi^8 + \phi^9$
$i = 10$	$100\phi + 825\phi^2 + 2640\phi^3 + 4290\phi^4 + 4004\phi^5 + 2275\phi^6 + 800\phi^7 + 170\phi^8 + 20\phi^9 + \phi^{10}$

4.4 Önerme: $d_{k+1} - d_{k-1} = 0$ dir.

İspat:

2.5 Önerme den $d_i = d_{m-i}$ dir. $i = k - 1$ olsun. $m = 2k$ olduğundan yerine koyulursa;

$d_{k-1} = d_{m-(k-1)}$ ve gerekli düzenlemeler yapıldığında $d_{k+1} - d_{k-1} = 0$ olur.■

4.5 Önerme: $d_i - 2 = \psi^i(\phi)$; i tek ise.

İspat:

Kabul edelim ki $k \leq i$ için $d_k - 2 = \psi^k(\phi)$ olsun. $d_{i+2} - 2 = \psi^{i+2}(\phi)$ oluyorsa ispat tamamdır.

2.4 Önerme den $d_i . d_0 = d_i + d_i = 2d_i$ olduğundan $\left(\psi^i(\phi) + 2\right) . d_0 = 2 . \left(\psi^i(\phi) + 2\right)$ olur.

$d_i . d_2 = d_{i+2} + d_{i-2}$ dir.

$d_{i+2} = d_i . d_2 - d_{i-2} = \left(\psi^i(\phi) + 2\right) . (d_1^2 - d_0) - \psi^{i-2}(\phi) - 2$

$= \psi^i(\phi).(\phi^2+4\phi+4)+2.(\phi^2+4\phi+4)-2\psi^i-4-\psi^{i-2}-2$

$= \psi^i(\phi).\phi^2+4\psi^i\phi+2\psi^i+2\phi^2+8\phi-\psi^{i-2}$

$= \left(z^i+z^{-i}-2\right).(z+z^{-1}-2)^2+4.\left(z^i+z^{-i}-2\right).(z+z^{-1}-2)+2.(z+z^{-1}-2)^2$

$+8.(z+z^{-1}-2)-\left(z^{i-2}+z^{-i+2}-2\right)$

$= \frac{1}{z^4}.\left(z^{2-i}-2.z^4+z^{6+i}\right)=z^{-i-2}-2+z^{i+2}=\psi^{i+2}(\phi)$ ■

4.6 Önerme:

$g_{2k}(\phi)=\psi^{k+1}(\phi)-\psi^{k-1}(\phi)=4k\phi+\sum_{j=2}^{k}\frac{2k^2+j-1}{(j-1)(2j-1)}\binom{k+j-2}{2j-3}\phi^j+\phi^{k+1}$ dir.

İspat:Tanımdan;

$$\psi^{k+1}(\phi)=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\binom{k+1}{j}\binom{k+j}{j}}{\binom{2j-1}{j}}\phi^j \; ve \; \psi^{k-1}(\phi)=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\binom{k-1}{j}\binom{k+j-2}{j}}{\binom{2j-1}{j}}\phi^j$$

Olduğundan yerine koyulursa

$$\psi^{k+1}(\phi)-\psi^{k-1}(\phi)=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{\binom{k+1}{j}\binom{k+j}{j}}{\binom{2j-1}{j}}\phi^j-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\binom{k-1}{j}\binom{k+j-2}{j}}{\binom{2j-1}{j}}\phi^j$$

Bulunur. Burada gerekli matematiksel işlemler yapıldığında

$\psi^{k+1}(\phi)-\psi^{k-1}(\phi)=4k\phi+\frac{k.\left(2k^2+1\right)}{3}\phi^2+\frac{k.\left(k^4-1\right)}{18}\phi^3+......+\phi^{k+1}$ elde edilir.

Son eşitlik $g_{2k}(\phi)$ ile gösterilirse;

$$g_{2k}(\phi)=4k\phi+\sum_{j=2}^{k}\frac{2k^2+j-1}{(j-1)(2j-1)}\binom{k+j-2}{2j-3}\phi^j+\phi^{k+1}$$

Bulunur.

Çizelge 1.3

$$g_{2k}(\phi) = 4k\phi + \sum_{j=2}^{k} \frac{2k^2 + j - 1}{(j-1)(2j-1)} \binom{k+j-2}{2j-3} \phi^j + \phi^{k+1} = \psi^{k+1}(\phi) - \psi^{k-1}(\phi) = 0$$

$g_4(\phi)$	$8\phi + 6\phi^2 + \phi^3$
$g_6(\phi)$	$12\phi + 19\phi^2 + 8\phi^3 + \phi^4$
$g_8(\phi)$	$16\phi + 44\phi^2 + 34\phi^3 + 10\phi^4 + \phi^5$
$g_{10}(\phi)$	$20\phi + 85\phi^2 + 104\phi^3 + 53\phi^4 + 12\phi^5 + \phi^6$
$g_{12}(\phi)$	$24\phi + 146\phi^2 + 259\phi^3 + 200\phi^4 + 76\phi^5 + 14\phi^6 + \phi^7$
$g_{14}(\phi)$	$28\phi + 231\phi^2 + 560\phi^3 + 606\phi^4 + 340\phi^5 + 103\phi^6 + 16\phi^7 + \phi^8$
$g_{16}(\phi)$	$32\phi + 344\phi^2 + 1092\phi^3 + 1572\phi^4 + 1210\phi^5 + 532\phi^6 + 134\phi^7 + 18\phi^8 + \phi^9$
$g_{18}(\phi)$	$36\phi + 489\phi^2 + 1968\phi^3 + 3630\phi^4 + 3652\phi^5 + 8684\phi^6 + 784\phi^7 + 169\phi^8 + 20\phi^9 + \phi^{10}$
$g_{20}(\phi)$	$40\phi + 670\phi^2 + 3333\phi^3 + 7656\phi^4 + 9724\phi^5 + 7462\phi^6 + 3605\phi^7 + 1104\phi^8 + 208\phi^9 + 22\phi^{10} + \phi^{11}$

4.7 Önerme: $g_{2k}(\phi) = 0$ dır.

İspat: 4.4 Önerme ve 4.5 Önerme nin açık sonucudur.

4.8 Önerme: $v_1.\phi = -2v_1$ dir.

İspat: 2.6 Önerme den $\eta_1.d_1 = d_1$ dir. Yerine koyulursa;

$v_1.\phi = (\eta_1 - 1).(d_1 - 2) = -2(\eta_1 - 1) = -2v_1$ bulunur.■

4.9 Önerme: $v_2.\phi = \psi^{k-1}(\phi) - \phi - 2v_2$ dir.

İspat:

2.7 Önerme den $\eta_2.d_1 = d_{\ k-1}$ ve 4.3 Önerme den $d_{k-1} = \psi^{k-1}(\phi) + 2$ olduğundan;

$v_2.\phi = (\eta_2 - 1).(d_1 - 2) = d_{k-1} - d_1 - 2(\eta_2 - 1)$ dir. Eşitlik düzenlenirse

$\psi^{k-1}(\phi) + 2 - (\phi + 2) - 2v_2 = \psi^{k-1}(\phi) - \phi - 2v_2$ bulunur.■

4.10 Önerme: $v_1.v_2 = 4\phi + \phi^2 - 2v_1 - 2v_2$; $n = 3$ için ve

$v_1.v_2 = \psi^k(\phi) - 2v_2$; $n \geq 4$ için.

İspat:

n=3 olsun. 2.4 Önerme den $d_1^2 = d_2 + d_0 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + 1$ dir.

$v_1.v_2 = (\eta_1 - 1).(\eta_2 - 1) = \eta_3 - \eta_1 - \eta_2 + 1 = d_1^2 - 2.(\eta_1 + \eta_2)$ olur. Eşitlik düzenlendiğinde $(\phi + 2)^2 - 2v_1 - 2v_2 - 4 = 4\phi + \phi^2 - 2v_1 - 2v_2$ elde edilir.

$n \geq 4$ olsun. 2.1 Önerme den $\eta_3 = \eta_1\eta_2$, 2.2 Önerme den $d_0 = 1 + \eta_1$, 2.3 Önerme den $d_k = \eta_2 + \eta_3$ dir. Ayrıca $d_k - d_0 = \psi^k(\phi)$ dir. Yerine koyulursa;

$v_1.v_2 = (\eta_1 - 1).(\eta_2 - 1) = d_k - \eta_2 - \eta_1 - \eta_2 + 1 = \psi^k(\phi) + d_0 - 2\eta_2 - d_0 = \psi^k(\phi) - 2(\eta_2 - 1) = \psi^k(\phi) - 2v_2$ bulunur.■

Sonuç olarak tezin ana teoremini yazabiliriz:

4.11 Teorem: $n \geq 4$ olsun. $K(BQ_{2^n}) = \mathbb{Z}[v_1, v_2, \phi] \Big/ \begin{matrix} v_2.\phi = \psi^{k-1}(\phi) - \phi - 2v_2 \\ v_1.\phi = -2v_1 \\ v_1^2 + 2v_1 = 0 \\ v_2^2 + 2v_2 = 0 \\ v_1.v_2 = \psi^k(\phi) - 2v_2 \end{matrix}$

İSPAT:

ASCT ye göre v_1, v_2 ve ϕ; $K(BQ_{2^n})$ i yaratır. Bu yaratanlar arasındaki minimal ilişkiler bulunursa halka iyi tanımlanmış olacaktır.

Önerme 4.1 den

$2v_1 = -v_1^2$

$2v_2 = -v_2^2$ dır.

Bu ilişkiler sayesinde AHSS nin $(4s + 2)$. Filtrasyonu açıklanabilir.

Örneğin, $E_\infty^{2,-2} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ olduğunu açıklayalım.

$Q_{4k}\ nin\ \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ alt grubunu dikkate alalım.

$i: \langle x \rangle \to Q_{4k}$ içerme grup homomorfizması,

$$\pi: B\mathbb{Z}_{2^{n-1}} \to BQ_{4k}$$

Şeklinde sınıflandırma uzayları arasında bir projeksiyon tanımlar. Bu projeksiyon da

$$\pi^*: K(BQ_{4k}) \to K(B\mathbb{Z}_{2^{n-1}})$$

K-halkaları arasındaki geri çekme homomorfizmasını yaratır.

$B\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$ lens uzayının K-halkası $K(B\mathbb{Z}_{2^{n-1}}) = {\mathbb{Z}[\mu]}/{(1+\mu)^{2^{n-1}} - 1}$ dir. Burada, $\mu = \eta - 1$ lens uzayının kanonik doğru demeti η'nın indirgenmiş halidir.

$\pi^*: K(BQ_{4k}) \to K(B\mathbb{Z}_{2^{n-1}})$ homomorfizması η_1 elemanını $\eta^{2^{n-2}}$ elemanına gönderir. Dolayısıyla v_1 elemanı $2^{n-2}.\mu$ elemanı ile eşlenir. Böylece $\pi^*(v_1) = 2^{n-2}.\mu$ olduğu için

v_1 in E_∞ daki yeri $(2,-2)$ koordinatıdır.

Benzer şekilde v_2 nin E_∞ daki yerini bulalım.

$\langle y \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ grubu, Q_{4k} nın bir alt grubudur.

$i: \langle y \rangle \to Q_{4k}$ içerme grup homomorfizması;

$$\pi: B\mathbb{Z}_4 \to BQ_{4k}$$

Şeklinde sınıflandırma uzayları arasında bir projeksiyon tanımlar. Bu projeksiyon da

$$\pi^*: K(BQ_{4k}) \to K(B\mathbb{Z}_4)$$

K-halkaları arasındaki geri çekme homomorfizmasını yaratır.

$K(B\mathbb{Z}_4) = {\mathbb{Z}[\mu]}/{((1+\mu)^4 - 1)}$ olarak tanımlanmıştı.

$\pi^*: K(BQ_{4k}) \to K(B\mathbb{Z}_4)$ homomorfizması η_2 elemanını η^2 elemanına eşler. Dolayısıyla v_2 elemanı $2.\mu + \mu^2$ elemanı ile eşlenir. Böylece $\pi^*(v_2) = 2.\mu + \mu^2$ olduğu için v_2 nin

E_∞ daki yeri $(2,-2)$ koordinatıdır.

Dolayısıyla $E_\infty^{2,-2} = \mathbb{Z}_2(v_1) \oplus \mathbb{Z}_2(v_2)$ olduğundan v_1 ve v_2 , $E_\infty^{2,-2} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ grubunu yaratır. Benzer şekilde $s \geq 0$ için v_1^{s+1} ve v_2^{s+1} nin, $E_\infty^{4s+2,-4s-2}$ gruplarını yarattığı açıklanabilir.

AHSS nin 4s. filtrasyonunu açıklayalım. $x \in Q_{4k}$ olmak üzere yine $\mathbb{Z}_{2k}$=<x> < Q_{4k} alt grubunu dikkate alalım.

$i: \mathbb{Z}_{2k} \to Q_{4k}$ içerme grup homomorfizması

$$\pi: B\mathbb{Z}_{2k} \to BQ_{4k}$$

Şeklinde sınıflandırma uzayları arasında bir projeksiyon tanımlar. Bu projeksiyon da

$$\pi^*: K(BQ_{4k}) \to K(B\mathbb{Z}_{2k})$$

K-halkaları arasındaki geri çekme homomorfizmasını yaratır.

$K(B\mathbb{Z}_{2k}) = \mathbb{Z}[\eta] / \eta^{2k} - 1$ olarak tanımlıdır.

$w = \eta + \eta^{-1} - 2$ olsun. w elemanı, $K(B\mathbb{Z}_{2k})$ nın bir alt halkasını yaratır. Bu alt halka, $KO(B\mathbb{Z}_{2k})$ ile izomorfiktir. Burada $KO(B\mathbb{Z}_{2k})$, BQ_{4k} sınıflandırma uzayının reel topolojik

K-halkasıdır.

π^* geri çekme homomorfizması altında $d_i - 2$ nin, $K(B\mathbb{Z}_{2k})$ içindeki görüntüsü

$\psi^i(w) = \eta^i + \eta^{-i} - 2$ dir. Burada ψ^i ; i. dereceden Adams operasyonudur. Özel olarak

π^* geri çekme homomorfizması altında ϕ, w ile eşleşir. $\psi^i(w)$, Önerme 4.3 te açıklanılan Kuadratik Binom formülü yoluyla elde edilir.

$K(BQ_{4k})$ K-halkası içinde 4.4 Önerme den; $d_{k+1} - d_{k-1} = 0$ dir. Bu ifade sadece d_1 e ve dolayısıyla sadece ϕ ye bağlı bir ifadedir ve k+1. dereceden bir polinomdur.

Benzer şekilde 4.5 Önermede de; i tek ise $d_i - 2 = \psi^i(\phi)$ olduğunu ispatlamıştık.

$d_{k+1} - d_{k-1} = 0$ ifadesi ϕ cinsinden yazılırsa $\psi^{k+1}(\phi) - \psi^{k-1}(\phi) = 0$ elde edilir.

Bu polinom $g_{2k}(\phi)$ ile gösterilmişti. Bu polinomun seri açılımı;

$$g_{2k}(\phi) = 4k\phi + \sum_{j=2}^{k} \frac{2k^2 + j - 1}{(j-1)(2j-1)} \binom{k+j-2}{2j-3} \phi^j + \phi^{k+1}$$

Şeklinde olduğu 4.6 Önermede açıklanmıştır. $\psi^{k+1}(\phi) - \psi^{k-1}(\phi) = 0$ olduğundan $g_{2k}(\phi) = 0$ elde edilir. Eşitlikte $4k\phi$ yalnız bırakılırsa;

$$4k\phi = \phi^2 . f(\phi)$$

Elde edilir. Burada $f(\phi) \in K(BQ_{4k})$, ϕ tarafından yaratılan sanal demettir. Böylece AHSS nin ana köşegenin son sayfasındaki 4. filtrasyonu $E_\infty^{4,-4}$ ün ϕ tarafından yaratıldığı açıklanır.

Bu ilişkiyi ϕ nin kuvvetleri ile çarptığımızda AHSS nin ana köşegeni üzerindeki tüm 4s. filtrasyonlar açıklanabilir.

4.8 Önermeden $v_1 . \phi = -2v_1$ ve 4.9 Önermeden $v_2 . \phi = \psi^{k-1}(\phi) - \phi - 2v_2$ olduğundan $v_1 . \phi$ ve $v_2 . \phi$ nin bağımlı değişkenler olduğu görülür. Dolayısıyla AHSS içinde yer almazlar.

4.10 Önermeden ; $n = 3$ için $v_1 . v_2 = 4\phi + \phi^2 - 2v_1 - 2v_2$ dir. Bu, $K(BQ_8)$ için temel önermedir. Önermedeki her bir terim $\phi + 2$ ile çarpıldığında $g_{2k}(\phi)$ polinomu elde edilir. Ayrıca 4.10 Önermeden ; $n \geq 4$ için $v_1 . v_2 = \psi^k(\phi) - 2v_2$ dir ve yine önermedeki her bir terim $\phi + 2$ ile çarpıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında $g_{2k}(\phi)$ polinomu elde edilir. Dolayısıyla $g_{2k}(\phi) = 0$ eşitliğini halkayı tanımlayan minimal ilişkiler arasında yazmaya gerek yoktur.

Buradan $n \geq 4$ için $K(BQ_{2^n})$ i yaratan minimal polinomların aşağıdakiler olduğu görülür:

$$\begin{gathered} v_2 . \phi = \psi^{k-1}(\phi) - \phi - 2v_2 \\ v_1 . \phi = -2v_1 \\ v_1^2 + 2v_1 = 0 \\ v_2^2 + 2v_2 = 0 \\ v_1 . v_2 = \psi^k(\phi) - 2v_2 \end{gathered}$$

İspat tamamdır. ■

Pitt (1973) e göre $R(Q_{4k}) \big/ \phi^2 R(Q_{4k})$ bölüm halkasında ϕ nin orderı 4k dır. Benzer şekilde $R(Q_{4k}) \big/ \phi^{N+1} R(Q_{4k})$ bölüm halkasında ϕ nin orderı bulunabilir.

4.6 Önermeden ; ϕ^2 nin katsayısı $\frac{k.(2k^2+1)}{3}$ içindeki 2 nin kuvveti $k = 2^{n-2}$dir. Ayrıca ϕ nin katsayısı $4k = 2^n$ olduğundan aradaki atlama $\frac{2^n}{2^{n-2}} = 4$ olur. Bu yüzden ϕ^{N+1}e kadar $4k.4^{N-1}$ atlama olur.

O halde aşağıdaki sonuca ulaşılabilir:

Sonuç 4.12: $\mathrm{K}\left(S^{4N+3}/Q_{4k}\right)$ bölüm halkasında ϕ nin orderı 2^{n+2N-2}dir.

5 . Q_8 QUATERNİON GRUBUNUN SINIFLANDIRMA UZAYININ KO – HALKASI

Q_{2^n} quaternion grubunun 4 tane 1 boyutlu indirgenmez reel temsili vardır:

$$1\begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto 1 \end{cases}, \quad \zeta_2\begin{cases} x \mapsto -1 \\ y \mapsto 1 \end{cases}$$

$$\zeta_1\begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}, \zeta_3\begin{cases} x \mapsto -1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}$$

Q_{2^n} quaternion grubunun 2^{n-3} tane 2-boyutlu indirgenmez reel temsili vardır.

$1 \le r \le 2^{n-3}$ ve $\theta_r = \frac{\pi r}{2^{n-2}}$ olmak üzere

$$D_r\begin{cases} x \mapsto \begin{bmatrix} cos(\theta_r) & -sin(\theta_r) \\ sin(\theta_r) & cos(\theta_r) \end{bmatrix} \\ \quad y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Böylece Q_{2^n} quaternion grubunun $1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ olmak üzere 4 tane tek boyutlu, D_r $(1 \le r \le 2^{n-3})$ olmak üzere 2^{n-3} tane çift boyutlu indirgenmez reel temsili vardır.

Toplam olarak, Q_{2^n} quaternion grubunun $2^{n-3} + 4$ tane indirgenemez reel temsili vardır.

Önerme 5.1: Reel temsil halkasının yaratanları; $1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ve D_r $(1 \le r \le 2^{n-3})$dır. (Kenso 1987)

$c: RO(G) \to R(G)$ mepi altında $\zeta_i \to \eta_i$ ve $D_r \to d_{2r}$ dır. Ancak d_{2r+1} temsilleri reel değildir.

Özel olarak Q_8 quaternion grubunun $RO(Q_8)$ temsil halkasındaki ilişkiler şunlardır:

Önerme 5.2: $\zeta_3 = \zeta_1\zeta_2$ ve $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 1$ dir. Bu yüzden de $\zeta_3^2 = 1$ olur. (Kenso 1972)

İspat: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ temsil tanımından açık olarak görülür.

Önerme 5.3: $\zeta_1.\mathrm{D} = \zeta_2.\mathrm{D} = \zeta_3.\mathrm{D} = \mathrm{D}$ (Kenso 1972)

İspat:

Q_8 için $D = D_1$ kabul edilecektir. $\zeta_1.D = D$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.

$\zeta_1\begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto -1 \end{cases}$ dir.

$\zeta_1.D = D$ olduğunu göstermek için öyle bir P matrisi bulunmalıdır ki $P(\zeta_1.D\,)P^{-1} = D$ olsun. Eşitliğin her iki tarafı P ile sağdan çarpılırsa $P(\zeta_1.D\,) = D.P$ eşitliği elde edilir. $x \mapsto 1$ olduğundan her P matrisi için eşitlik sağlanır.

y için;

$\zeta_1.D = [-1].\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $D \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisini seçersek;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -b & -a \\ -d & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Bulunur. Matrislerin eşitliğinden; $b = -c,\ a = -d$ bulunur. O halde aranan P matrisi;

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ olarak seçilebilir. ■

Önerme 5.4: $D_1^2 = 1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$ (Kenso 1972)

İspat:

Q_8 de $r = 1$ ve $n = 3$ olduğundan D_1 temsili şu şekilde tanımlıdır:

$$x \mapsto \begin{bmatrix} cos(\theta_1) & -sin(\theta_1) \\ sin(\theta_1) & cos(\theta_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1^2 = \Big\{x \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1^2 = \Big\{y \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Tanımdan;

$$x \mapsto \quad 1+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3=[1]\oplus[1]\oplus[-1]\oplus[-1]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$y \mapsto \quad 1+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3=[1]\oplus[-1]\oplus[1]\oplus[-1]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$D_1^2=1+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3$ olduğunu göstermek için öyle bir P matrisi bulunmalıdır ki

$P(D_1^2)P^{-1}=1+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3$ olsun. Eşitliğin her iki tarafı P ile sağdan çarpılırsa

$P(D_1^2)=(1+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)P$ eşitliği elde edilir. $P=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{bmatrix}$ olsun.

x için;

$$\begin{bmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}d&-c&-b&a\\h&-g&-f&e\\l&-k&-j&i\\p&-o&-n&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\-i&-j&-k&-l\\-m&-n&-o&-p\end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden;

$a=d \quad b=-c \quad e=h \quad f=-g \quad l=-i \quad k=j\ p=-m \quad n=o$ bulunur. O halde

$P=\begin{bmatrix}a&b&-b&a\\e&f&-f&e\\-l&k&k&l\\m&n&n&-m\end{bmatrix}$ dir. y için benzer işlemler tekrarlanırsa;

$$\begin{bmatrix}a&b&-b&a\\e&f&f&e\\-l&k&k&l\\m&n&n&-m\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}a&b&-b&a\\e&f&-f&e\\-l&k&k&l\\m&n&n&-m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b & b & a \\ e & -f & f & e \\ l & k & k & -l \\ -m & n & n & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & -b & a \\ -e & -f & f & -e \\ -l & k & k & l \\ -m & -n & -n & m \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden;

$$a = a \quad b = -b \quad e = -e \quad f = f \quad l = -l \quad k = k \quad m = m \quad n = -n$$

Bulunur. Buna göre $a = f = k = m = 1$ ve $b = e = l = n = 0$ alınırsa aranılan P matrisi bulunur. ■

ζ_1, ζ_2 ve D_1 temsillerine karşılık gelen BQ_8 sınıflandırma uzayına ait indirgenmiş vektör demetleri şöyle tanımlıdır:

$$\lambda_1 = \zeta_1 - 1$$

$$\lambda_2 = \zeta_2 - 1$$

$$\Phi = D_1 - 2$$

Atiyah-Segal Tamamlama Teoremine göre (ASCT); $\lambda_1, \lambda_2, \Phi$ elemanları $K(BQ_8)$ i yaratır. Halkayı iyi tanımlamak için yaratanlar arasındaki minimal ilişkiler bulunmalıdır.

Önerme 5.2 den; $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 1$ dir. $\lambda_1 = \zeta_1 - 1 \Rightarrow \zeta_1 = \lambda_1 + 1$ ve $\lambda_2 = \zeta_2 - 1 \Rightarrow \zeta_2 = \lambda_2 + 1$ olduğundan ;

$\zeta_1^2 = (\lambda_1 + 1)^2 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 1 = 1$ olur. Buna göre $\lambda_1^2 + 2\lambda_1 = 0$ dır. Benzer şekilde;

$\zeta_2^2 = (\lambda_2 + 1)^2 = \lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 1 = 1$ olur. Buna göre $\lambda_2^2 + 2\lambda_2 = 0$ dır.

Önerme 5.3 den; $\zeta_1.\mathrm{D} = \zeta_2.\mathrm{D} = \mathrm{D}$ dir. $\Phi = D_1 - 2 \Rightarrow D_1 = \Phi + 2$ eşitlikte yerine konursa;

$\zeta_1.D = (\lambda_1 + 1).(\Phi + 2) = \lambda_1.\Phi + 2\lambda_1 + \Phi + 2 = \Phi + 2$ olur. Buna göre $\lambda_1.\Phi + 2\lambda_1 = 0$ dır. Benzer şekilde; $\zeta_2.D = (\lambda_2 + 1).(\Phi + 2) = \lambda_2.\Phi + 2\lambda_2 + \Phi + 2 = \Phi + 2$ olur. Buna göre $\lambda_2.\Phi + 2\lambda_2 = 0$ dır.

Önerme 5.4 ten; $D_1^2 = 1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$ dir. $\lambda_1, \lambda_2, \Phi$ elemanları eşitlikte yerine konulursa;

$(\Phi + 2)^2 = 1 + \lambda_1 + 1 + \lambda_2 + 1 + (\lambda_1 + 1).(\lambda_2 + 1)$ bulunur. Düzenlenirse;

$$\Phi^2 + 4\Phi = \lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$$

Elde edilir.

Buna göre $KO(BQ_8) = \mathbb{Z}(\lambda_1, \lambda_2, \Phi) \Big/ \begin{array}{c} \lambda_1^2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2^2 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1.\Phi + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2.\Phi + 2\lambda_2 = 0 \\ \Phi^2 + 4\Phi - \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{array}$ olarak bulunur.

3.4.3 Teoremde;

$$H^p(BQ_{4k};\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & ,p = 0 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & ,p = 4s + 2 \\ \mathbb{Z}_{4k} & ,p = 4s\,, s \geq 1 \\ 0 & ,p\ tek\ ise \end{cases}$$

Olarak verilmişti.

$H^p(BQ_{4k};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2\ p \equiv 1(mod8)$

$H^p(BQ_{4k};\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2\ p \equiv 2(mod8)$ olduğundan ve

$q(mod8)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widetilde{KO}(S^q)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Çizelge 1.4

Olduğundan AHSS incelenirse Q_8 için reel ve kompleks filtrasyonları karşılaştırıldığında şöyle bir tablo elde edilir:

Filtrasyonlar (Mod8)	$K(BQ_8)$	$KO(BQ_8)$
$E_\infty^{1,-1}$	0	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$E_\infty^{2,-2}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
$E_\infty^{3,-3}$	0	0
$E_\infty^{4,-4}$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_8$
$E_\infty^{5,-5}$	0	0
$E_\infty^{6,-6}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	0
$E_\infty^{7,-7}$	0	0
$E_\infty^{8,-8}$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_8$

Çizelge 1.5

Buna göre ; $K(BQ_8) \cong KO(BQ_8)$ dir. Fakat $n \geq 4$ için benzer bir izomorfizma olmayabilir.

$RO(Q_8)/_{\Phi^{N+1}RO(Q_8)}$ bölüm halkasında Φ nin orderını bulmak için kompleks halkadaki benzer işlemler yapıldığında şu sonuç elde edilir:

Sonuç 5.5: $KO\left(S^{4N+3}/_{Q_8}\right)$ bölüm halkasında Φ nin orderı 2^{2N+1} dir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada Genel Quaternion grubunun sınıflandırma uzayının K- halkası minimal sayıda yaratan ve ilişkiyle betimlenmiştir. Ayrıca bu halkadaki ana elemanın orderı da sınıflandırma uzayının iskeletleri üzerinde hesaplanmıştır. Bu çalışmadaki sonuçlar daha önceki çalışmalara göre daha basit ve anlaşılır şekilde ortaya konmuştur.

Bunun dışında; bir yan problem olarak genel quaternion grubunun sınıflandırma uzaylarının KO halkası da incelenmiş ve Q_8 grubunun sınıflandırma uzayının KO –halkası da tam olarak betimlenmiştir. $n \geq 4$ için Q_{2^n} grubunun sınıflandırma uzayının KO-halkaları açık bir problem olarak durmaktadır.

7. KAYNAKLAR

Adams J.F., Haeberly J.P., Jackowski S., MAY J.P. (1988) . A Generalization Of The Atiyah Segal Completion Theorem. Topology, 27: 1-6

Atiyah M.F. (1961). Characters And Cohomology Of Finite Groups. Publications Mathematiques De L'Institut Des Hautes Etudes Scientifiques, 9 : 23-74.

Atiyah M.F. (1967) . K-Theory. W. A. Benjamin, 216 sayfa, New York, USA.

Atiyah M.F. (1966). K-Theory and Reality. Quart. J. Math. Oxford 17, 2: 367-386.

Atiyah M.F., Hirzebruch F. (1972). Vector Bundles and Homogenous Spaces. Proc. Sym. Pure Math., III : 7-38

Atiyah M.F. , Segal G.B. (1969) . Equivariant K-Theory and Completion. J. Differential Geometry, 3:1-18

Atıyah M.F., Bott R. (1964). On the Periodicity Theorem for Complex Vector Bundles. Acta Mathematica, 112:229-247

Bredon G. (1967). Equivariant Cohomology Theories, Lecture Notes in Math, 34.

Cartan H., Eilenberg S. (1956). Homological Algebra. Princeton University Press.,421 sayfa,Londra, UK.

Conrad K. Generalized Quaternions., http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/. (erişim tarihi 9.2.2014)

Conrad K. Complexification. , http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/. (erişim tarihi 9.2.2014)

Curtıs C.W., Reıner I. (2006) . Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. AMS Chelsea Publishing,689 sayfa, USA.

Friedlander E.M. (2007). An Introduction to K-Theory. http://users.ictp.it/~pub_off/lectures/lns023/Friedlander/Friedlander.pdf (erişim tarihi 9.2.2014)

Hatcher A. (2009) . Vector Bundles and K- Theory. Allen Hatcher's Homepage http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html (erişim tarihi 9.2.2014)

Hayami T., Sanada K. (2002) . Cohomology Ring of the Generalized Quaternion Group with Coefficients in an order. Communications in Algebra., 30:3611-3628

Kaurabi M. (1978) . K-Theory, An İntroduction. Springer –Verlag, 307 sayfa ,Berlin Heidelberg Newyork.

Kenso F. (1987). The Additive Structure of $\widetilde{KO}\left(S^{4n+3}/Q_t\right)$. Mem. Fac. Educ. Miyazaki Univ. Nat. Sci. 62:1-54.

Lewıs G., May J.P., Mcclure J. (1981). Ordinary RO(G)-Graded Cohomology, Bull. Amer. Math. Soc. 4, 2:208-212

Landweber P.S. (2009) . K-Theory of S^7/Q_8 and a counterexample result of P.M. Akhmet'ev. Morfismos,13:55-60.

May J.P.(1996). Equivariant Homotopy and Cohomology Theory. Regional Conference Series in Mathematics, vol 91, Amer. Math. Soc.

Markett S. (2011) . A Comparision of Real and Complex K- Theory and Their Atiyah Hirzebruch Spektral Sequences. http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/markett/diplomarbeit.pdf (erişim tarihi 9.2.2014)

Murnaghan F. (2005) MAT 445/1196 - İntroduction to Representation Theory. http://www.math.toronto.edu/murnaghan/courses/mat445/notes.pdf (erişim tarihi 9.2.2014)

Ortiz O. (2012) . Classifying Spaces. Department of Mathematics and Statistics , University of Melbourne, http://ms.unimelb.edu.au/~ortizo/research.html. (erişim tarihi 9.2.2014)

Özdemir S., Kırdar M. (2013) On the K Ring of the Classifying Space of the Generalized Quaternion Group. *Preprint.*

Pitt D. (1971) . Free Actions of the Generalized Quaternion Groups on Spheres. *London Math. Soc.,*26:1-18.

Stykow M. (2013). Connections of K-Theory to Geometry and Topology. http://www.math.ubc.ca/~maxim/K-Theory.pdf (erişim tarihi 9.2.2014)

Teleman C. (2005). Representation Theory. Constantin's Home Page , Berkeley http://math.berkeley.edu/~teleman/math/RepThry.pdfb (erişim tarihi 9.2.2014)

Wadsley S. (2012). Representation Theory. Simon Wadsley's Homepage https://www.dpmms.cam.ac.uk/~sjw47/RepThLectures.pdf (erişim tarihi 9.2.2014)

Wolfson J., (2010) . An İntroduction to Complex K-Theory. The MIT TALBOT Workshop 2010 http://math.mit.edu/conferences/talbot/2010/notes/02_KtheoryIntro.pdf (erişim tarihi 9.2.2014)

Wu Siye (2000) . The Grothendieck Construction . Lectures on Topolological K-Theory , University of Calfornia, Santa Barbara .http://online.kitp.ucsb.edu/online/ktheory/wu/(erişim tarihi 9.2.2014)

Zinger A. (2010) . Notes on Vector Bundles. http://www.math.sunysb.edu/~azinger/mat531spr10/index.html (erişim tarihi 9.2.2014)

7. TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında hiç bir zaman yardımlarını ve desteğini eksik etmeyen, akademik başarısı ve kişiliğiyle örnek alınacak çok değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Mehmet KIRDAR'a en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca ihtiyaç duyduğum her an yardımlarını ve anlayışlarını hiçbir şekilde eksik etmeyen, haklarını hiç bir zaman ödeyemeyeceğim çok değerli anneme, babama ve kardeşime çok teşekkür ederim.

8. ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Tekirdağ'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimlerini Tekirdağ'da tamamladı. 2009 yılında Gazi Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2010 yılında Tekirdağ Teknik ve Endüstri Meslek Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2011 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı. Şu an Tekirdağ Anadolu İmam Hatip Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır. Halen Namık Kemal Üniversitesinde Tez dönemi öğrencisi olarak çalışmalarına devam ediyor.