SIRALI UZAYLARDA FREMLİN TENSÖR ÇARPIMLARI

Yağmur Nur TONKA

Yüksek Lisans

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Erdal BAYRAM

2020

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIRALI UZAYLARDA FREMLİN TENSÖR ÇARPIMLARI

Yağmur Nur TONKA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Doç. Dr. Erdal BAYRAM

TEKİRDAĞ-2020

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde eksiksiz biçimde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Yağmur Nur TONKA

Doç.Dr. Erdal BAYRAM danışmanlığında, Yağmur Nur TONKA tarafından hazırlanan "Sıralı Uzaylarda Fremlin Tensör Çarpımları" başlıklı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından 13.05.2020 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul/~~red~~ edilmiştir.

.

Jüri Başkanı : Doç.Dr. Nurrettin Cenk TURGAY *İmza:*

Üye : Doç.Dr. Erdal BAYRAM *İmza:*

Üye : Dr.Öğr.Üy. Dilek BAYRAK *İmza:*

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Doç.Dr. Bahar UYMAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SIRALI UZAYLARDA FREMLİN TENSÖR ÇARPIMLARI

Yağmur Nur TONKA

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Erdal BAYRAM

Bu çalışma matematiğin birçok branşında kullanılan tensör çarpımlarının incelenmesi üzerinedir. Esas olarak sıralı uzaylar teorisinde Arşimedyan Riesz uzaylarının ve Banach örgülerinin Fremlin tensör çarpımlarının sistematik bir biçimde incelenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, Fremlin tensör çarpımları için tanımlanan pozitif projektif norm irdelenmiş ve Riesz bimorfizmi, Riesz homeomorfizmi, Riesz izomorfizmlerinin, tensör çarpımlarındaki işlevlerinin gözlenmesi de hedeflenmiştir. Bu bağlamda vektör uzayları, normlu uzaylar ve sıralı uzayların tensör çarpımları ile ilgili literatür taraması yapılmış, ön bilgiler bir araya getirilmiş, kanıtlardaki boşluklar doldurularak gerekli bilgiler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Tensör Çarpımı, Projektif norm, İnjektif norm, Riesz Uzayı, Banach örgüsü, Riesz bimorfizmi.

2020, 68 sayfa

ABSTRACT

Msc. Thesis

FREMLIN TENSOR PRODUCTS IN ORDERED SPACES

Yağmur Nur TONKA

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Erdal BAYRAM

This study focuses on tensor products used in many branches of mathematics. The aim of this course is to investigate Fremlin tensor products of Banach lattices and Archimedean Riesz spaces systematically in the theory of ordered spaces. In addition, the positive projective norm defined for Fremlin tensor products are examined and it is aimed to observe the functions of Riesz bimorphism, Riesz homeomorphism, Riesz isomorphisms and tensor products is chosen as the target. In this context, literature is searched about tensor products of vector spaces, normed spaces and ordered spaces, preliminary information is gathered and the necessary information is given by filling the gaps in the proofs.

Key words: Tensor Product, Projective norm, Injective norm, Riesz Space, Banach lattice, Riesz bimorphism.

2020, 68 pages

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **i**
ABSTRACT .... **ii**
İÇİNDEKİLER .... **iii**
ŞEKİL DİZİNİ .... **iv**
SİMGELER ve KISALTMALAR .... **v**
TEŞEKKÜR .... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. Kaynak Özetleri **3**
3. Materyal ve yöntem **6**
4. Araştırma bulguları **18**
4.1. Cebirsel Tensör Çarpımları 18
4.2. Normlu Tensör Çarpımları 29
4.3. Sıralı Uzaylarda Fremlin Tensör Çarpımları 40
4.4. Banach Örgülerinin Tensör Çarpımları 49
5. Tartışma ve Sonuç **57**
KAYNAKLAR **58**
ÖZGEÇMİŞ **61**

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 4.3.1 ... 41
Şekil 4.3.2 ... 43
Şekil 4.3.3 ... 44
Şekil 4.3.4 ... 48
Şekil 4.4.1 ... 54

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
X^*	: *X* normlu uzayının sürekli duali
$\leq$	: Kısmi sıralama bağıntısı
$\lVert\cdot\rVert_\pi$	: Projektif norm
$\lVert\cdot\rVert_\varepsilon$	: İnjektif norm
$\lVert\cdot\rVert_\varepsilon^*$	: İnjektif norm ile üretilmiş dual norm
$\lVert\cdot\rVert_{\lvert\pi\rvert}$	: Pozitif projektif norm
$\overline{A}^\tau$	: *A* kümesinin τ topolojisine göre kapanışı
$x \vee y$	: *x* ile *y* elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	: *x* ile *y* elemanlarının infimumu
E^+	: E sıralı uzayının pozitif kısmı
$X \times Y$	: X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı
$x \otimes y$	: *x* ile *y* elemanlarının tensör çarpımı
$X \otimes Y$	: Cebirsel tensör çarpımı
$X \overline{\otimes} Y$	: Arşimedyan Riesz uzay tensör çarpımı
$X \overset{\Delta}{\otimes} Y$	: Banach örgüleri tensör çarpımının tamlanışı
$B\left(X \times Y, Z\right)$	: $X \times Y$ üzerinde tanımlı *Z* değerli bilineer dönüşümler
$L\left(X \otimes Y, Z\right)$	: $X \otimes Y$ üzerinde tanımlı *Z* değerli lineer dönüşümler

TEŞEKKÜR

Tez boyunca bana her konuda sabırla yardım eden, değerli fikirleriyle beni yönlendiren, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım Doç.Dr. Erdal Bayram‘a çok teşekkür ederim. Hayatımın her anında desteğini, güvenini ve sevgisini bana her zaman hissettiren aileme teşekkürler.

Mayıs, 2020 Yağmur Nur Tonka

1. GİRİŞ

Matematiğin her alanı kendine has dinamiklerle tensör çarpımlarını kullanır. Üstelik tensörler elastite, akışkanlar mekaniği ve genel görelilik gibi fiziğin bazı alanlarında karşılaşılan problemleri çözmek ve formüle etmek için matematiksel bir yapı sağlar. Vektör uzaylarının direkt toplamı, uzaylar üzerinde tanımlanan özel bir toplama işlemi iken tensör çarpımı vektör uzayları üzerinde özel bir çarpım işlemi sağlayarak yeni uzaylar ve bunların üzerinde yeni yapılar üretir. V *i*le W vektör uzaylarının tensör çarpımları için alışılmış notasyon $X \otimes Y$ kullanılır ve bu tensör çarpım uzayının her bir elemanına tensör adı verilir. Tensör çarpımının en önemli ve yararlı bir araç olma özelliklerinden birisi vektör uzaylarının kartezyen çarpımı üzerinde tanımlı bilineer dönüşümleri, tensör çarpımı üzerinde tanımlanan lineer dönüşümlere eşlemesidir. Yani, $L\left(X \otimes Y, H\right)$ ile $B\left(X \times Y, H\right)$ özdeşleştirilebilirdir. Banach uzayları durumunda ise $X \otimes Y$ üzerinde uygun bir normun tanımlanması gerekir. Bu amaçla tensör çarpımları üzerinde farklı özelliklere sahip normlar tanımlanabilmiştir. Bu tez çalışmada literatürde sıkça kullanılan projektif ve injektif normlar ele alınmıştır.

Tensörler ilk olarak 19 yüzyılın sonlarına doğru fizik ve matematik çalışmalarında görülmektedir. 1884 yılında Gibbs vücut üstündeki gerilmeler ile ilgili bir çalışmasında (zira tensör kelimesi germek, uzatmak anlamında Latince "tendere" kelimesinden gelmektedir.) $\mathbb{R}^3$ uzayındaki vektörlerin tensör çarpımlarını tanımlamış sonrasında ise bunları n boyut için genelleştirmiştir. Tensörler modern anlamda Voight'in 1898 yılındaki kristaller üzerine bir çalışmasında görülmüştür. Matematik alanında ise Ricci diferensiyel geometriye uygulamış ve Levi-Civita ile yazdığı bir makale Einstein'in genel görelilik çalışmasında önemli rol oynamıştır. Tensör çarpımlarının bir cebirsel yapı olan modüller için genişletilmesi adına ilk adım H.Whitney tarafından atılmıştır. Banach uzaylarının tensör çarpımları hakkında A.Grothendieck tarafından yapılan çalışmaların etkisi büyüktür. Sıralı uzaylar teorisinde tensör çarpımları hakkında, A.Hulanicki ile P.R.Phelps tarafından elde edilen sonuçlar olsa da literatürde Riesz uzayları ve Banach örgüleri ile ilgili çoğu çalışmada D.H. Fremlin tarafından verilen tensör çarpımları referans alınmaktadır.

Bu tez çalışmasında esas olarak sıralı uzaylar teorisinde Arşimedyan Riesz uzaylarının ve Banach örgülerinin Fremlin tensör çarpımlarının sistematik bir biçimde incelenmesi, projektif norm özelliklerinin irdelenmesi ve Riesz bimorfizmi, Riesz homeomorfizmi, Riesz izomorfizmlerinin, tensör çarpımlarındaki işlevlerinin gözlenmesi amaçlanmıştır. Bu yüzden ilk olarak materyal ve metod bölümünde diğer bölümlerde kullanılacak temel tanımlar, özellikler ve teoremler verilmiştir. Araştırma bulguları bölümünün ilk kısmında vektör uzaylarının cebirsel tensör çarpımları tanımlanıp bunların bazı özellikler verilmiş, ikinci kısımda cebirsel tensör çarpımlarına bağlı olarak normlu uzayların tensör çarpımları ele alınıp cebirsel tensör çarpımları üzerinde tanımlanan injektif tensör normu ve projektif tensör normu incelenmiştir. Üçüncü kısımda ise Arşimedyan sıralı vektör uzaylarının Fremlin tarafından tanımlanan tensör çarpımlarına yer verilmiştir. Son kısımda ise Banach örgülerinin tensör çarpımları, pozitif projektif norm kavramı ile birlikte incelenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Tensör çarpımları fonksiyonel analiz alanında ilk olarak Murray ve Neumann (1936) tarafından yapılan Hilbert Uzayları üzerindeki çalışmalarında görüldü. Banach uzaylarının tensör çarpımları üzerindeki normlar hakkındaki ilk sistematik çalışmalar ise Schatten (1950)'a aittir. Schatten'ın "Çarpım uzaylar teorisi" başlıklı etkili çalışması, teorinin en güzel uygulamaları olan Hilbert uzayları üzerinde tanımlı operatör idealleri, Hilbert–Schmidt operatörleri ve Schatten-vonNeumann (1946) sınıfları hakkında sonuçlar içerir. Grothendieck (1956) tarafından Bulletin Mathematical Society of Sao Paulo dergisinde yayınlanan "Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques" başlıklı makale fonksiyonel analiz çalışmalarını derinden etkileyen az sayıda makaleden biriydi. Fakat fonksiyonel analiz alanında tensör çarpımlarına ilişkin bir isteksizlik vardı. Ancak, bu makale Lindenstrauss and Pelczynski'nin "Absolutely summing operators in L^p -spaces and applications" başlıklı ünlü makalesinden sonra çok daha ilgi gördü.

Pietsch ve öğrencileri tarafından tensör çarpımları göz ardı edilerek Banach uzayları üzerinde tanımlı operatör idealleri kategorik tarzda sistematik araştırılmaya başlandı. Bu kategorik tarz tensör çarpımlarının teorisinin öğrenilmesinden daha kolaydı. Bunun sonucunda tensör çarpımlarının hiçbir şekilde kullanılmadığı Pietsch tarafından yayınlanan "operatör idealleri" adlı kitabı operatör idealleri hakkında zamanında bilinen çok fazla şey içeriyordu. Banach uzay teorisinde tensör çarpımlarına karşı bir önyargı olsa da projektif tensör normu ve injektif tensör normu vektör değerli fonksiyon uzaylarını içeren basit örnekler sayesinde faydalarını gösterdi. Genel tensör normları hakkında yeni sonuçlar yetmişli yıllarda elde edildi. Bu konudaki öncül çlışmaların en önemlisi Saphar ve Kwapein tarafından yapılan operatörlerin L^p uzaylarına göre ayrışımları üzerine çalışmasıdır. Ancak bu çalışma operatör idealleri diliyle yazılmıştır. Daha sonra Lotz tensör çarpımları üzerinde operatör ideallerin maksimal normunu temel aldı (bunlara Grothendieck idealleri deniyordu). Gordon-Lewis-Retherford operatör idealleri üzerine yaptıkları önemli çalışmaları Schatten ile Grothenideck'in sonuçlarına dayandırılmış ve tensör çarpımları metotlarını açık bir şekilde kullanmaktaydı. Diğer taraftan Pisier'in Banach uzayları teorisi üzerine çalışması tensör çarpımlarına dikkat çekti. Çalışmaları "İzomorfik olarak $X \otimes_\pi X = X \otimes_\varepsilon X$ eşitliğinin sağlayan sonlu boyutlu Banach uzayı X var mıdır?" sorusuna yanıt vermiştir. Pisier'in "Banach Uzayların Geometrisi ve Lineer Operatörlerin Ayrışımı" başlıklı kitabı Banach uzayları arasında tanımlı bir operatörün Hilbert uzayı boyunca bir ayrışıma sahip olması için gereken şartlar üzerine yoğunlaşmıştır. Bu araştırmalar sonucunda Grothenideck'in çalışmasında belirtilen soruların çözümlerine yol açtı. Pisier'in kitabına bakıldığında operatör idealleri ve tensör çarpımları açısından düşünmenin oldukça faydalı olduğu açıkça ortaya çıkmaktadır. Grothendieck (1956) 'in çalışmalarını anlamak çok zordu ve bu nedenle tensör normlarının daha anlaşılır bir biçimde teorisini vermek adına Amemiya-Shiga (1957), Lotz (1973), Losert-Michor (1976), Michor (1978), Gilbert-Leih (1980) örnekleri gibi birçok çalışma yapıldı.

Sıralı uzaylar teorisinde ise tensör çarpımları olarak genelde Fremlin'in yaptığı inşaalar kullanılır. D.H. Fremlin, fonksiyon uzaylarının doğal tensör çarpımlarıyla uyumlu olan bazı Riesz uzaylarının tensör çarpımının genel bir inşasını temsiller kullanarak inceledi (Fremlin 1972, 1974). Böyle bir yapının oldukça karmaşık olduğu ortaya çıktı. Bu konudaki referans olan makalesinde Fremlin (1972), iki fonksiyon uzayının cebirsel tensör çarpımı, alttaki uzayların kartezyen çarpımı üzerindeki fonksiyon uzayı olarak görür ve indirgenmiş bir sıralama tanımlar. Bu uzay genel olarak bir Riesz uzayı olmadığı için, vektör uzayların tensörel çarpımı tarafından üretilen Riesz alt uzayları düşünülür. Fremlin, keyfi Archimedean Riesz uzaylarının, Riesz uzayı olan tensör çarpımlarını oluşturmada başarılı oldu. Bu uzayların inşasında, sürekli fonksiyon uzaylarının alt uzayları olarak temsil edilen sıra birime sahip Arşimedyan Riesz uzaylarını kullanmıştır. Bu inşada temsil teorisinin kullanıldığı ana nokta, vektör uzaylarının tensör çarpımlarının bir alt uzay olduğu fonksiyon uzaylarının oluşturulmasıdır. Bu uzaylar tensör çarpımları üzerine bir sıralama indirger ve Riesz uzayının tamamlanışını verir.

Fremlin tensör çarpımının alternatif bir yapısı, Martinez (1972) 'deki ℓ gruplarının tensör çarpımları teorisidir. Grobler ve Labuschagne (1998), Fremlin tensör çarpımının yapısal bir inşasını verdi. Pozitif elemanların elementer tensör çarpımları ile üretilmiş koni olan vektör uzaylarının tensör çarpımının projektif konisini tanımlamış ve projektif koninin düzgün kapanışının tensör çarpımı üzerine uygun bir sıralama indirgediğini gözlemlemişlerdir. Böylelikle Fremlin tensör çarpımı bu uzayların Dedekind tamamlamaları ile elde edilmiştir. Ayrıca, Riesz ayrışma özelliğine sahip olan Arşimedyan kısmi sıralı vektör uzaylarının tensör çarpımını da elde etmişlerdir. Diğer taraftan tensör çarpımındaki sıra evrensel bir dönüşüm özelliğini sağlaması gerekmektedir. Riesz ayrıştırma işleminin kullanıldığı Grobler ve Labuschagne'nin inşasındaki önemli noktalardan birisi, projektif koninin relatif düzgün kapanışının sadece bir wedge değil tekrar bir koni olduğunun kanıtlanmasıdır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışma esas olarak fonksiyonel analizin Banach uzay teorisi, sıralı uzaylar teorisi ve tensör çarpımları teorisinin tekniklerini, araçlarını ve metodlarını kullanır. Matematik ile ilgili çalışmalarda literatür bilgisi çok önemlidir. Bu nedenle genel bir altyapı oluşturmak adına vektör uzayları, Banach uzayları ve sıralı vektör uzayları hakkındaki temel kavramlar ve sonuçlar ispatsız olarak bu bölümde verilecektir.

Tanım 3.1. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) $\mathbb{F}$ cisim ve V bir küme olsun. Eğer sırasıyla toplama ve skalar ile çarpım olarak adlandırılan

$$\begin{array}{l} +:V\times V\to V \\ (m,n)\to m+n \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{l} \cdot:\mathbb{F}\times V\to V \\ (\alpha,m)\to \alpha m \end{array}$$

işlemleri aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $(V,\mathbb{F},+,\cdot)$ dörtlüsüne bir vektör uzayı denir. Veya alışılageldiği üzere kısaca V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır denir.

i. $\forall m,n\in V$ için $m+n\in V$,

ii. $\forall m,n\in V$ için $(m+n)+l=m+(n+l)\in V$,

iii. $0\in V$ vardır öyle ki $\forall m\in V$ için $m+0=0+m=m$,

iv. $\forall m\in V$ için $m+(-m)=0=(-m)+m$ olacak biçimde $-m\in V$ vardır,

v. $\forall \alpha\in\mathbb{F}$ ve $m,n\in V$ için $\alpha(m+n)=\alpha m+\alpha n$,

vi. $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ve $m\in V$ için $(\alpha+\beta)m=\alpha m+\beta m$,

vii. $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ve $m\in V$ için $(\alpha\beta)m=\alpha(\beta m)$,

viii. $m\in V$ için $1m=m=m1$.

Aksiyomlarda geçen 0 elemanına toplamaya göre etkisiz eleman veya vektör uzayının sıfırı, $(-m)$ elemanına ise m elemanının toplamaya göre tersi denir. Bir vektör uzayının her bir elemanına da vektör adı verilir.

Tanım 3.2. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) X vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi Y olsun. Eğer Y kümesi X vektör uzayından indirgenen işlemlere göre bir vektör uzayı ise Y kümesine X vektör uzayının alt vektör uzayı denir.

Açık olarak, X vektör uzayının aşikar alt uzayları adı verilen $\{0\}$ ve X alt uzaylardır. X vektör uzayının kendisinden farklı olan alt uzaylarına ise öz alt uzay denir.

Teorem 3.3. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) X vektör uzayının bir alt kümesi Y 'nin alt vektör uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall\alpha\in\mathbb{F}$ ve $\forall x,y\in X$ için $x+y\in Y$ ve $\alpha x\in Y$ olmasıdır.

Örnek 3.4. Boş kümeden farklı olan Ω kümesinden X vektör uzayına tanımlı tüm fonksiyonların oluşturduğu X^{Ω}, $f,g\in X^{\Omega}$ olmak üzere $\forall x\in\Omega$ için $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ve $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ olarak tanımlanan ve noktasal toplama ile noktasal çarpma adı verilen işlemler ile bir vektör uzayıdır. Aslında vektör uzaylarının çoğu bazı fonksiyon uzaylarının alt uzaylarıdır.

Tanım 3.5. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) X vektör uzayı ve $\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset X$ olsun.

i. $i\in\{1,2,...,n\}$ için $\alpha_i\in\mathbb{F}$ olmak üzere $y=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+,...,+\alpha_nx_n$ vektörüne $x_1,x_2,...,x_n$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu adı verilir.

ii. $i=1,2,...,n$ için $\alpha_i\in\mathbb{F}$ olduğunda $\sum\alpha_i x_i=0$ iken $\alpha_i=0$ önermesi doğru ise $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır denir. Aksi durumda kümeye lineer bağımlıdır denir.

iii. X ' in sonlu olmayan bir alt kümesi M'nin sonlu elemanı her alt kümesi lineer bağımsız ise M lineer bağımsızdır denir.

iv. X 'in herhangi bir alt kümesi M'nin elemanları ile oluşturulacak tüm lineer kombinasyonlarının kümesi M'nin gerdiği (ürettiği, doğurduğu) küme denir ve $sp(M)$ ile gösterilir. Yani $sp(M)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i:\alpha_i\in\mathbb{F}\text{ ve }x_1,x_2,...,x_n\in M\right\}$ olur. Kolayca gösterilebilir ki $sp(M)$, M'yi kapayan en küçük alt uzaydır.

v. X vektör uzayının bir alt kümesi M lineer bağımsız ve $sp(M)=X$ ise M kümesi X için bir bazdır ve tabandır denir. O halde M bir baz ise X 'in her elemanı M 'nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazılabilir.

vi. X vektör uzayının her bir bazı aynı kardinaliteye sahiptir. Buna göre baz vektörlerin sayısına vektör uzayının boyutu denir ve genelde $\dim(X)$ ile gösterilir. Baz vektörlerinin sayısı sonlu ise X sonlu boyutlu vektör uzayı, aksi halde sonsuz boyutlu vektör uzayı denir.

Tanım 3.6. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) X vektör uzay olmak üzere $\forall u, v \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen $\|.\|: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

i. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

ii. $\|u\| \geq 0$

iii. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

iv. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(X, \|.\|)$ normlu uzay olmak üzere, $A \subseteq X$ alt vektör uzayına norm fonksiyonun kısıtlaması ile elde edilen $\left(A, \|.\|\big|_A\right)$ normlu uzayına alt uzay denir.

Özel olarak $d: X \times X \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \|x-y\|$ fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar. Norm ile tanımlanan bu metriğe norm tarafından üretilen (veya indirgenen) metrik adı verilir. Eğer indirgenmiş metriğe göre (X, d) tam ise $(X, \|.\|)$ Banach uzayı olarak adlandırılır.

Normlu uzayın $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kümesine X'in kapalı birim yuvarı denir. Normlu uzayın bir alt kümesi A için $A \subseteq \alpha B_X$ olacak biçimde bir $\alpha \in \mathbb{R}^+$ varsa A kümesine norm sınırlıdır denir.

Bazı Banach uzay örnekleri aşağıda verilmiştir.

i. $X=\mathbb{R}^n$ olmak üzere $\left\|\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Öklid normu $\left(\mathbb{R}^n,\|\ .\ \|\right)$ bir Banach uzayıdır.

ii. $\ell_\infty=\left\{\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}:\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{sınırlı}\right\}$ dizi uzayı $\left\|\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_\infty=\sup\left\{\left|x_n\right|:n\in\mathbb{N}\right\}$ normu ile normu Banach uzayıdır ve $c_0=\left\{\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}:x_n\to 0\right\}$, $c=\left\{\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}:\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \textit{yakınsak}\right\}$ aynı norm ile alt uzaylardır.

iii. $1\le p<\infty$ için $L^p\left(X,\mu\right)$ uzayı $\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ normu ile Banach uzayıdır.

iv. Ω topolojik bir uzay olmak üzere $C\left(\Omega\right)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R}:f\ \textit{sürekli}\right\}$ vektör uzayı normu ile Banach uzayıdır.

Tanım 3.7. $\left(X,\|.\|\right)$ bir normlu uzayı için $X^*=\left\{f:X\to\mathbb{R}:f\ \textit{sürekli}\right\}$ kümesi *X*'in sürekli veya norm duali olarak adlandırılır ve fonksiyonlar için verilen noktasal toplama ve skalar ile çarpma işlemlerine göre vektör uzayı, $\|f\|_{X^*}=\sup_{\|x\|\le 1}\left|f\left(x\right)\right|$ normu ile bir Banach uzayı olur.

X^* norm duali de bir normlu uzay olduğundan $\left(X^*\right)^*$ duali tanımlıdır ve bu normlu uzaya X'in ikinci duali denir. İyi bilinen bir sonuçtur ki her normlu uzay ikinci duali içine $C:X\to X^{**},\left(C\left(x\right)\right)\left(f\right)=f\left(x\right)$ kanonik dönüşümü ile gömülebilir.

Tanım 3.8. $\left(X,\|.\|_X\right)$ bir normlu uzay olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ Banach uzayına *X*'in norm tamlaması denir.

i. $\varphi:X\to Y$ injektif lineer dönüşümü vardır.

ii. $\left\|\varphi\left(x\right)\right\|_Y=\|x\|_X$ sağlanır.

iii. $\varphi\left(X\right)$, Y içinde yoğundur.

Teorem 3.9. Her normlu uzayın bir tamlaması vardır.

$\left(X,\|.\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ normlu uzaylar olmak üzere $X\times Y=\left\{(x,y)\mid \mathrm{x}\in X,\ \mathrm{y}\in Y\right\}$, $\left(x_1,y_1\right)+\left(x_2,y_2\right)=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$ ve $\alpha\left(x,y\right)=\left(\alpha x,\alpha y\right)$ işlemlerine göre vektör uzayı uzayıdır ve $X\times Y$ üzerinde $\|(x,y)\|_{X\times Y}=\|x\|_X+\|y\|_Y$ bir norm tanımlar. Aksi belirtilmedikçe $X\times Y$ üzerinde tanımlı fonksiyonların sürekliliği söz konusu olduğunda bu norm düşünülecektir.

Bundan sonraki kısımda sıralı uzaylar teorisindeki en temel kavramlar ve teoremler verilecektir. Bu tanım ve teoremler için Luxemburg ve Zaanen (1971), Aliprantis ve Burkinshaw (1985) ve Meyer-Nieberg (1991) referans olarak kullanılmıştır. Riesz uzayları teorisindeki ilk sonuçlar, F. Riesz, H. Freudenthal ve L.V. Kontorovitch ‘in birbirlerinden bağımsız olarak ve farklı konularda yaptığı çalışmalar ile elde edilmiştir. Sonrasında ise günümüze değin birçok matematikçi sıralı vektör uzaylarına ilişkin önemli katkılar sağlamıştır. Uygulama alanında örnek vermek gerekirse, ekonomi teorisinde kullanılan birçok uzay Riesz uzaylarıdır.

Tanım 3.10. $X\neq\emptyset$ için $X\times X=\left\{(x,y):x,y\in X\right\}$ sıralı ikili $R\subseteq X\times X$ alt kümesine X ‘de bir bağıntı denir. Buna göre “$(x,y)\in R\Leftrightarrow xRy$” olur.

i. $\forall x\in X$ için xRx

ii. $\forall x,y\in X$ için xRy ve yRx ise $x=y$

iii. $\forall x,y,z\in X$ için xRy ve yRz iken xRz

özellikleri sağlanıyor ise R ‘ye sıralama bağıntısı denir. $(x,y)\notin R$ ve $(y,x)\notin R$ olacak biçimde $x,y\in X$ elemanları varsa bu bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı denir. R bağıntısı yerine "$\leq$" sembolü kullanılacaktır.

Tanım 3.11. (Aliprants ve Burkinshaw, 1985) E vektör uzayı üzerinde tanımlı sıralama bağıntısı “$\leq$” olsun. Buna göre sıralama ile vektör uzayının cebirsel işlemleri uyumlu ise, yani $x,y\in E$ olmak üzere

i. Her için $z\in E$ için $\mathrm{x}\leq\mathrm{y}$ iken $\mathrm{x}+\mathrm{z}\leq\mathrm{y}+\mathrm{z}$

ii. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\mathrm{x}\leq\mathrm{y}$ iken $\alpha x\leq\alpha y$

gerektirmeleri sağlanıyorsa, E sıralı vektör uzayıdır denir.

E sıralı vektör uzayında $0 \leq x$ ise x elemanına pozitiftir denir ve tüm pozitif elemanlarının kümesi için E^{+} gösterimim kullanılır.

Tanım 3.12. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) Sıralı vektör uzayı E için her $u, v \in E$ için $\mathrm{u} \vee \mathrm{v} := \sup\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\} \in \mathrm{E}$ ve $\mathrm{u} \wedge \mathrm{v} := \inf\{\mathrm{u}, \mathrm{v}\} \in \mathrm{E}$ ise E Riesz uzayı veya vektör örgüsü olarak adlandırılır.

Örneğin aşağıdaki fonksiyon uzayları noktasal sıralama denilen

$$f \geq g \Leftrightarrow \forall x \in dom(f) \cap dom(g) \text{ için } f(x) \geq g(x)$$

sıralaması ile birer Riesz uzaylarıdır.

i. X topolojik uzay olmak üzere $C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ sürekli}\}$ ve $C_b(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ sınırlı}\}$

ii. $(\mathrm{X}, \Sigma, \mu)$ ölçüm uzayı ve $0 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(\mu) = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$

iii. Klasik dizi uzayları $c_0, c, \ell_p \; (1 \leq p \leq \infty)$.

iv. 2×2 reel matrislerin vektör uzayı $M_2(\mathbb{R})$ ile $\leq$ sıralama bağıntısı tarafından $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in M_2^{+}(\mathbb{R})$ tanımlanır ve norm ile $\left\| \left(\alpha_{i,j} \right) \right\| = \max\limits_{j} \left\{ \sum\limits_{i} \left| \alpha_{i,j} \right| : i, j = 1, 2 \right\}$ bir Banach örgüsüdür. Burada $M_2^{+}(\mathbb{R})$ pozitif reel girdileri olan tüm matrislerin kümesidir (Muzundu, 2012).

Sıralı vektör uzayı olup Riesz uzayı olmayan bazı örnekler de aşağıda verilmiştir.

i. X sonsuz elemanlı bir küme ve $\Omega=\{A\subset X : A \; sonlu \; ve \; cardA=2n, n\in\mathbb{N}\}$ olsun. $U=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $V=\{a_4,a_5\}\in\Omega$ için $U\wedge V=U\cap V=\{a_4\}\notin\Omega$ elde edilir. Dolayısıyla $(\Omega,\subseteq)$ bir örgü değildir.

ii. $C^1[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,f$, sürekli, diferansellenebilir$\}$ fonksiyon uzayını noktasal sıralama ile $C^1[0,1]$ sıralı vektör uzayıdır. $f(x)=x$, $g(x)=1-x$, şeklinde tanımlı $f,g\in C^1[0,1]$ fonksiyonlarını seçelim. $C^1[0,1]$ fonksiyon uzayı $f\vee g=\begin{cases}1-x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\notin C^1[0,1]$ ve $f\wedge g=\begin{cases}x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\notin C^1[0,1]$ olduğundan $C^1[0,1]$ uzayı Riesz uzayı değildir.

Tanım 3.13. E Riesz uzayı ve $x\in E$ olmak üzere $x^+ := x\vee 0$, $x^- := -x\vee 0$, $|x| := \sup\ x,-x$ elemanlarına sırasıyla x'in pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü denir.

Teorem 3.14. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) E Riesz uzayında aşağıdaki eşitlikler her $x,y\in E$ için sağlanır.

i. $x=x^+-x^-$

ii. $|x|=x^++x^-$

iii. $x^+\wedge x^-=0$

iv. $x=\ x-y\ ^{+}+x\wedge y$

Tanım 3.15. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) E bir Riesz uzayının boştan farklı bir alt kümesi A olsun.

i. $\forall\, x,y\in A$ iken $x\vee y\in A$ ve $x\wedge y\in A$ ise A'ya alt örgü veya Riesz alt uzayı denir.

ii. $y\in A$ için $|x|\le|y|$ iken $x\in A$ oluyorsa A kümesine katı (solid) küme denir.

$sol\ A = \{x \in E : \exists\, y \in A$ için $|x| \le |y|\}$ kümesine de A kümesinin katı zarfı denir ve bu küme A'yı içeren en küçük katı kümedir.

iii. E Riesz uzayının katı alt uzaylarına ideal adı verilir. $\left\{ y \in E : \exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } \exists\ x_1, x_2, ..., x_n \in A \text{ için } |y| \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x_k| \right\}$ kümesine A'nın doğurduğu ideal denir ve A'yı içeren en küçük idealdir. Bir $x \in E$ elemanının ürettiği ideale esas ideal denir ve $x \in E$ elemanının ürettiği esas ideal $I_x = \{y \in E : \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^+,\ |y| \le \lambda |x|\}$ olur.

Örneğin, $E = C[0,1]$ içinde $[0,1]$ üzerindeki tüm afin fonksiyonların alt uzayı Riesz alt uzayıdır fakat alt örgüsü değildir. c, ℓ_∞ için alt örgü olmasına rağmen ideal değildir. c_0, ℓ_∞ için bir idealdir fakat band değildir.

Tanım 3.16. E vektör örgüsünün boş olmayan bir alt kümesi A'yı içeren en küçük vektör örgüsüne A'nın ürettiği vektör örgüsü denir. Bu ise A'yı içeren tüm vektör örgülerinin arakesitidir.

Önerme 3.17. (Abramovich ve Aliprantis, 2002) E vektör örgüsünün boş olmayan bir alt kümesi A için

$$A^{\wedge} = \left\{ \inf\{a_1, a_2, ..., a_n\} : a_1, a_2, ..., a_n \in A \right\}$$

ve

$$A^{\vee} = \left\{ \sup\{a_1, a_2, ..., a_n\} : a_1, a_2, ..., a_n \in A \right\}$$

kümelerini tanımlayalım ve $\left(A^{\wedge}\right)^{\vee} = A^{\wedge\vee}$, $\left(A^{\vee}\right)^{\wedge} = A^{\vee\wedge}$ olsun. Buna göre A'nın ürettiği vektör örgüsü $\left(sp(A)\right)^{\wedge\vee} = \left(sp(A)\right)^{\vee\wedge}$ olacaktır.

İndeks kümesi I için $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$, E Riesz uzayında bir ağ olsun. Her $\alpha, \beta \in I$ için $x_\alpha \le x_\gamma$ ve $x_\beta \le x_\gamma$ koşullarını sağlayan bir $\gamma \in I$ varsa $\{x_\alpha\}$ yukarı yönlendirilmiştir denir ve $x_\alpha \uparrow$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $x_\alpha \uparrow$ ve $\sup\{x_\alpha\} = x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ ile gösterilir. Benzer şekilde her $\alpha, \beta \in I$ için $x_\alpha \geq x_\gamma$ ve $x_\beta \geq x_\gamma$ koşullarını sağlayan bir $\gamma \in I$ varsa x_α aşağı yönlendirilmiştir denir ve $x_\alpha \downarrow$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \downarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 3.18.(Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) Her bir $x \in E^+$ ve $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ sağlanıyorsa *E* Riesz uzayına Arşimedyandır (Archimedean) denir.

Örneğin, klasik fonksiyon Riesz uzayları Arşimedyandır. Fakat $\mathbb{R}^2$, sözlük (lexicographically) sıralama adı verilen " $x_1, x_2 \geq y_1, y_2 \Leftrightarrow x_1 > y_1$ ya da $x_1 = y_1$ olduğunda $x_2 \geq y_2$ " sıralamasına göre Arşimedyan olmayan Riesz uzayıdır.

Tanım 3.19. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) *E* Riesz uzayında $|x| \leq |y|$ koşulunu sağlayan $x, y \in E$ için $\|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa, *E* üzerinde tanımlanan $\|\,.\,\|$ normuna örgü normu ve $E, \|\,.\,\|$ ikilisine de normlu Riesz uzayı denir. Bu durumda normlu Riesz uzayı *E* örgü normuna göre tam ise, Banach örgüsü olarak adlandırılır.

Her normlu Riesz uzayı Arşimedyan Riesz uzayıdır ve bir Riesz uzayını Banach örgüsü yapan tüm normlar denktir. Ayrıca her nomlu Riesz uzayının norm duali ve norm tamlanışı Banach örgüsüdür.

Tanım 3.20. *X* reel vektör uzayının bir alt kümesi *C* aşağıdaki şartları sağlıyorsa *X*'in bir konisi denir.

i. $C + C \subseteq C$
ii. Her bir $\alpha \geq 0$ için $\alpha C \subseteq C$
iii. $C \cap -C = 0$

Açıktır ki sıralı vektör uzay *E*'nin pozitif kısmı E^+, *E* için bir konidir. Üstelik *X* reel vektör uzayının bir konisi *C* ise "$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in C$" bağıntısı ile *X* sıralı vektör uzayı olur ve $X^+ = C$ sağlanır.

Önerme 3.21. E, τ Hausdorff lokal solid Riesz uzayı için aşağıdakiler sağlanır.

i. E^+ konisi τ-kapalıdır.

ii. E,τ 'nin topolojik tamlanışı $\hat{E},\hat{\tau}$ ise E^+ konisinin $\hat{\tau}$-kapanışı $\hat{E},\hat{\tau}$ için bir konidir ve bu koni ile $\hat{E},\hat{\tau}$, E,τ 'yi Riesz alt uzay olarak içeren Hausdorff lokal solid Riesz uzayıdır.

Tanım 3.22. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) X ve Y aynı cisimli vektör uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ dönüşümü $x \in X$, $y \in Y$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ ve $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ şartlarını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer operatör denir.

Tanım 3.23. (Aliprantis ve Burkinshaw, 1985) X ve Y normlu uzaylar ve $T : D(T) \to Y$ bir operatör olsun.

i. $\forall x \in dom(T)$ için $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$ olacak şekilde $c \geq 0$ sayısı varsa T operatörüne sınırlıdır denir.

ii. T sınırlı ise $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ değeri vardır ve bu değere T operatörünün normu denir.

iii. Eğer T sınırlı ise

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| = 1}} \|Tx\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \forall x \in dom(T) \text{ } için \text{ } \|Tx\| \leq \lambda\|x\|\right\}$$

eşitlikleri vardır.

iv. T sınırlı ise $\forall x \in dom(T)$ için $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ olur.

v. T lineer ise "T sınırlıdır $\Leftrightarrow T$ süreklidir".

vi. $B(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ lineer ve sınırlı}\}$ kümesi $S,T \in B(X,Y)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(T+S)(x) = T(x) + S(x)$ ve $(\alpha T)(x) = \alpha(T(x))$ işlemleri ile bir vektör uzayıdır.

Üstelik, $\|.\|: B(X,Y) \to \mathbb{R}, \|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ bir norm tanımlar. Özel olarak $B(X,X)$ için $B(X)$ gösterimi kullanılır.

vii. Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ Banach uzayıdır. Buna göre bir normlu uzayın norm duali her zaman Banach uzayıdır.

Tanım 3.24. (Yıldız ve Eröz, 2009) X ve Y normlu uzaylar ve lineer dönüşüm olsun. $x \in X$ ve $f \in Y^*$ için $T^*: Y^* \to X^*, (T^* f)(x) = f(T(x))$ biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T'nin eşleği veya adjointi adı verilir.

Tanım 3.25. (Aliprantis ve Border, 2006) İki Banach uzayı X ve *Y* için $T: X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta\|x\|$ olacak biçimde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ var ise *T* dönüşümüne bir gömme dönüşümü denir. Bu durumda $T(X)$, Y'nin kapalı bir alt vektör uzayı, dolayısıyla Banach uzayıdır ve *X*'in *Y* içine gömülmesi olarak adlandırılır.

Eğer *E* ve *F* Banach örgüleri, $T: E \to F$ gömme dönüşümü aynı zamanda bir örgü homomorfizmi ise T'ye örgü gömmesi denir. Bu durumda $T(E)$, E ile özdeşleştirilen F'nin kapalı Riesz alt uzayı, dolayısıyla Banach örgüsüdür.

Tanım 3.26. (Aliprantis ve Border, 2006) *E* ve *F* Riesz uzayları olmak üzere $\phi: E \to F$ dönüşümü $x \in E$ ve $y \in F$ için $\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y)$ koşulunu sağlıyorsa örgü (Riesz) homomorfizmi olarak adlandırılır. İnjektif Riesz homomorfizmine Riesz izomorfizmi denir.

$\phi: E \to F$ Riesz homomorfizmi olmak üzere her bir $x \in E^+$ için $\phi(x) = \phi(x \vee 0) = \phi(x) \vee \phi(0) = (\phi(x))^+ \geq 0$ sağlandığından her Riesz homomorfizmi pozitiftir. Üstelik, Riesz homomorfizmleri örgü işlemlerini koruduğundan $\phi(E)$ bir Riesz alt uzaydır.

Teorem 3.27. (Aliprantis ve Border, 2006) *E* ve *F* Riesz uzayları ve $\phi: E \to F$ dönüşümü için aşağıdakiler denktir. $x, y \in E$ için,

i. $\phi: E \to F$ Riesz homomorfizmdir,

ii. $\phi(x\wedge y)=\phi(x)\wedge\phi(y)$,

iii. $\phi(x^{+})=\phi(x)^{+}$ ve $\phi(x^{-})=\phi(x)^{-}$,

iv. $\phi(|x|)=|\phi(x)|$.

Tanım 3.28. (Ryan R. A., 2002) X, Y ve Z reel vektör uzayları olmak üzere $A:X\times Y\to Z$ dönüşümü $x,y,z\in X$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$A(x+y,z)=A(x,z)+A(y,z),\ A(\alpha x,z)=\alpha A(x,z)$$

$$A(x,y+z)=A(x,y)+A(x,z), A(x,\alpha y)=\alpha A(x,y)$$

koşullarını sağlıyorsa bilineer dönüşüm olarak adlandırılır. Eğer X, Y ve Z sıralı vektör uzayları ve $A(X^{+}\times Y^{+})\subseteq Z^{+}$ ise A bilineer dönüşümü pozitiftir denir.

Tanım 3.29. (Bu, Buskes, ve Kusraev, 2007) E, F ve G Riesz uzayları ve $\phi:E\times F\to G$ bilineer dönüşümü olsun. Her $x\in E^{+}$ ve $y\in F^{+}$ için $E\to G,\ z\to\phi(z,y)$ ve $F\to G,\ z\to\phi(x,z)$ dönüşümleri pozitif (Riesz homomorfizmi) ise $\phi:E\times F\to G$ dönüşümüne pozitiftir (Riesz bimorfizmi) denir.

Önerme 3.30. (Fremlin 1972) E, F ve G Riesz uzayları ve $\phi:E\times F\to G$ pozitif bilineer dönüşüm ise $|\phi(x,y)|\le\phi(|x|,|y|)$ sağlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Cebirsel Tensör Çarpımları

Lineer cebirde skaler çarpım $X \times \mathbb{F} \to X$, nokta çarpım $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vektörel çarpım $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, matris çarpımları $M_{m\times k} \times M_{k\times n} \to M_{m\times n}$ gibi çarpım örnekleri vardır. Verilen bu örneklerde çarpım aslında bilineer bir dönüşümdür. Bunun gibi bir çarpımın başka bir örneği de tensör çarpımıdır. Eğer X ve Y, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki vektör uzaylarının tensör çarpımları $X \otimes Y$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde yeni bir vektör uzaydır ve tensör çarpımı denilen $\otimes : X \times Y \to X \otimes Y, \otimes(x, y) = x \otimes y$ dönüşümü bilineer olur. Bu dönüşümü tanımlamak için gerekli olan $X \otimes Y$ vektör uzayı farklı şekillerde inşa edilebilir. Bunlardan birisi aksiyomatik olarak $X \otimes Y$ vektör uzayının ve bilineer tensör dönüşümünün özelliklerini belirlemektir.

Tanım 4.1.1. (Purbhoo, 2012) X, Y ve W, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayları olmak üzere $\otimes : X \times Y \to W$ bilineer dönüşüm olsun. X ve Y için her hangi bazlar sırasıyla β_1 ve β_2 olduğunda $\otimes(\beta_1 \times \beta_2) = \{\otimes(x_1, x_2) \mid x_1 \in \beta_1,\ x_2 \in \beta_2\}$ kümesi W için bir baz oluyorsa $(W, \otimes)$ çiftine X ve Y vektör uzaylarının tensör çarpımı denir.

Genelde W vektör uzayı için $X \otimes Y$ ve $\otimes(x_1, x_2)$ için de $x_1 \otimes x_2$ notasyonları kullanılır. Ayrıca tanımdaki koşulun X ve Y vektör uzaylarının olası her bazı yerine sadece bir baz çifti için sağlanması yeterlidir. Çünkü aşağıdaki teoremden görülebileceği üzere yapılan bu tanımlama vektör uzaylarının bazlarından bağımsızdır.

Teorem 4.1.2. (Purbhoo, 2012) W bir vektör uzayı ve $\otimes : X \times Y \to W$ bir bilineer dönüşüm olsun. Kabul edelim ki W için bir baz $\otimes(\gamma_1 \times \gamma_2)$ olacak şekilde X ve Y için bazlar sırasıyla γ_1 ve γ_2 olsun. Buna göre X ve Y vektör uzayları için herhangi (β_1, β_2) baz çifti için $\otimes(\beta_1 \times \beta_2)$, W için bir bazdır.

İspat: İlk olarak $W = sp\{\otimes(\beta_1 \times \beta_2)\}$ olduğunu gösterelim. $w \in W$ seçildiğinde $w = \sum_{j,k} a_{jk} \otimes(z_{1j}, z_{2k})$ olacak biçimde $z_{1j} \in \gamma_1$ ve $z_{2k} \in \gamma_2$ elemanları bulunabilir. Diğer taraftan X için bir baz β_1 olduğundan $z_{1j} = \sum_{l} b_{jl} x_{1l}$ olacak biçimde $x_{1l} \in \beta_1$ elemanları vardır. Benzer şekilde Y için bir baz β_2 olduğundan $z_{2k}=\sum_k c_{km}x_{2m}$ olacak biçimde $x_{2m}\in\beta_2$ elemanları vardır. O halde,

$$w=\sum_{j,k}a_{jk}\otimes\left(\sum_l b_{jl}x_{1l},\sum_k c_{km}x_{2m}\right)=\sum_{j,k,l,m}a_{jk}b_{jl}c_{km}\otimes\left(x_{1l},x_{2m}\right)$$

eşitliğinden $w\in sp\left(\mu\left(\beta_1\times\beta_2\right)\right)$ olduğu görülür.

Eğer X ve Y sonlu boyutlu vektör uzayları ise $card\left\{\otimes\left(\beta_1\times\beta_2\right)\right\}=card\left\{\otimes\left(\gamma_1\times\gamma_2\right)\right\}$ olacaktır. Fakat sonsuz boyutlu vektör uzayları için lineer bağımsızlığın daha farklı olarak gösterilmesi gerekir.

Kabul edelim ki $x_{1l}\in\beta_1$ ve $x_{2m}\in\beta_2$ elemanları için $\sum_{l,m}d_{lm}\mu\left(x_{1l},x_{2m}\right)=0$ sağlansın. Bazların değişimine göre $x_{1l}=\sum_j e_{lj}z_{1j}$ ve $x_{2m}=\sum_k f_{mk}z_{2k}$ olacak biçimde $z_{1j}\in\gamma_1$ ve $z_{2k}\in\gamma_2$ elemanları vardır. Dikkat edilmelidir ki, e_{lj} elemanları, b_{jl} elemanları için $\sum_j e_{lj}b_{jl'}=\delta_{ll'}$ eşitliği anlamında ters matris formundadır. Benzer şekilde $\sum_k f_{mk}c_{km'}=\delta_{mm'}$ olur. Böylece

$$0=\sum_{l,m}d_{lm}\otimes\left(x_{1l},x_{2m}\right)=\sum_{l,m}d_{lm}\otimes\left(\sum_j e_{lj}z_{1j},\sum_k f_{mk}z_{2k}\right)=\sum_{j,k}\sum_{l,m}d_{lm}e_{lj}f_{mk}\otimes\left(z_{1j},z_{2k}\right)$$

elde edilir. $\otimes\left(\gamma_1\times\gamma_2\right)$ lineer bağımsız olduğundan $\forall j,k$ için $\sum_{l,m}d_{lm}e_{lj}f_{mk}=0$ olur. Dolayısıyla, her bir l',m' elemanları için;

$$d_{l'm'}=\sum_{l,m}d_{lm}\delta_{ll'}\delta_{mm'}=\sum_{l,m}d_{lm}\left(\sum_j b_{jl'}e_{lj}\right)\left(\sum_k c_{km'}f_{mk}\right)=\sum_{j,k}b_{jl'}c_{km'}\left(\sum_{l,m}d_{lm}e_{lj}f_{mk}\right)=0$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki sonuç kolayca görülür.

Önerme 4.1.3. Eğer X ve Y vektör uzayları sonlu boyutlu ise $\dim\left(X\otimes Y\right)=\dim\left(X\right)\dim\left(Y\right)$ olur.

Tensör çarpımı aşağıdaki biçimde ikiden fazla vektör uzayları için de tanımlanabilir.

Tanım 4.1.4. (Purbhoo, 2012) $V_1, V_2, ..., V_k$ ve Y, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayları ve $\mu : V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to Y$, k-lineer dönüşüm olsun. Her bir $i \in \{1, ..., k\}$ için, V_i vektör uzayının bir bazı β_i olmak üzere, $\{\mu(x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_i \in \beta_i\}$ kümesi Y için bir baz ise (Y, μ) çiftine $V_1, V_2, ..., V_k$ vektör uzaylarının tensör çarpımı denir. Notasyon olarak Y vektör uzayı için $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$ ve $\mu(x_1, x_2, ..., x_k)$ için de $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k$ kullanılır.

Tensör çarpım uzayında çalışmanın diğer bir yolu da $X \otimes Y$ uzayını ve tensör dönüşümünü bilindik matematiksel objelerle özdeşleştirmektir. Doğal olarak böyle bir özdeşleştirmenin yapılabileceği birçok olasılık vardır. Diğer taraftan, sadece $X \otimes Y$ ile özdeşleştirdiğimiz vektör uzayını belirlemek değil, aynı zamanda bu özdeşleştirmeyi yapmak için kullandığımız bilineer dönüşümü belirlemek te çok önemlidir.

Örnek 4.1.5. (Purbhoo, 2012) Sırasıyla satır ve sütun matrislerinden oluşan vektör uzayları $X = \mathbb{F}^n{}_{row}$ ve $Y = \mathbb{F}^m{}_{col}$ için $X \otimes Y = M_{m \times n}(\mathbb{F})$ olur. Üstelik burada tensör dönüşümü $(x, y) \to x \otimes y = (a_{ij})_{m \times n} = (y_i x_j)_{m \times n}$ şeklinde tanımlanır. Gerçekten, Y için standart baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve X için standart baz $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ise $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ için standart baz $\{f_i \otimes e_j\}$ olacaktır.

Yukarıdaki örneğe benzer olarak $y \otimes x = (y_i x_j)_{m \times n}$ tensör çarpımı ile $Y \otimes X = M_{m \times n}(\mathbb{F})$ olduğunu da söyleyebiliriz. Buna göre $X \otimes Y$ ile $Y \otimes X$ aynı gibi görünse de önemli bir fark vardır. Çarpımı tanımlamak için iki bileşenin değiştirilmesi gerekmiştir. $X \otimes Y$ ile $Y \otimes X$ arasındaki ilişki $X \times Y$ ve $Y \times X$ kartezyen çarpımları arasındaki ilişkiye paraleldir. Fakat (x, y) ve (y, x) elemanlarını birbiri yerine yazarsak birçok soruna yol açar. Benzer şekilde $X \otimes Y$ ve $Y \otimes X$ birbirine doğal olarak izomorfik olduklarından aynıdırlar. Fakat $y \otimes x$ kastedildiğinde yerine $x \otimes y$ yazılmaz (Purbhoo, 2012).

Örnek 4.1.6. (Purbhoo, 2012) Tek değişkenli polinomların vektör uzayı $X = \mathbb{F}[x]$ için tensör çarpımı $(g \otimes h)(x_1, x_2) = g(x_1)h(x_2)$ şeklinde tanımlandığında $X \otimes X$ tensör çarpımı iki değişkenli polinomların vektör uzayı $X \otimes Y = \mathbb{F}[x_1, x_2]$ olur. Gerçekten, X için bir baz

$\beta=\{1,x,x^2,x^3,...\}$ ise $\beta\otimes\beta=\{x^i\otimes x^j \mid i,j=0,1,2,3,...\}=\{x^i{}_1x_2{}^j \mid i,j=0,1,2,3,...\}$ kümesi $\mathbb{F}[x_1,x_2]$ için bir baz olacaktır. Fakat bu çarpım değişmeli değildir. Çünkü genelde $(g\otimes h)(x_1,x_2)=g(x_1)h(x_2)\neq h(x_1)g(x_2)=(h\otimes g)(x_1,x_2)$ olur.

Örnek 4.1.7. (Purbhoo, 2012) *X*, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı ise $X\otimes\mathbb{F}=X$ olur. Bu durumda tensör çarpımı $\otimes$ sadece skaler çarpımdır. Bu durumu $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ özel hali için gösterelim. Sonlu boyutlu vektör uzayı V olsun. $\varphi:\mathbb{R}\times X\to W$ bir vektör uzayı $(\lambda,x)\to\varphi(\lambda,x)=\lambda f(x)$ ve en az bir $f:X\to W$ lineer dönüşümü için $x\to f(x)$ olarak verilsin $f(\lambda\otimes x)=f(\lambda x)=\lambda f(x)=\varphi(\lambda,x)$ olduğundan $f\otimes=\varphi$ oldu. φ dönüşümü bilineerdir: $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $x\in X$ olsun.

$$\varphi(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2,u)=(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)f(u)=\alpha\lambda_1 f(u)+\beta\lambda_2 f(u)=\alpha\varphi(\lambda_1,u)+\beta\varphi(\lambda_2,u)$$

olur ve $\lambda\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $v_1,v_2\in V$ ise

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda,\alpha x_1+\beta x_2,)&=\lambda f(\alpha u+\beta v)=\lambda\left[\alpha f(u)+\beta f(v)\right]=\lambda\alpha f(u)+\lambda\beta f(v)\\&=\alpha\varphi(\lambda,u)+\beta\varphi(\lambda,v)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani φ bilineerdir. $f(\lambda\otimes x)=\varphi(\lambda,x)$ olur böylece $(V,\otimes)$çifti $\mathbb{R}$ ve V için tensör çarpımıdır. $\mathbb{R}\otimes X=X$ de özel olarak $\mathbb{R}=X$ ise $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}=\mathbb{R}$ 'dir. Yani $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ için $\lambda\otimes\mu=\lambda\mu$ olur. Burada her reel sayı bir tensör ve reel sayılardaki çarpma işlemi de tensör çarpma işlemi olur.

Aşağıdaki örnek Örnek 4.1.5.'nin soyut bir versiyonudur. Eğer $X=\mathbb{F}^n{}_{col}$ ve $Y=\mathbb{F}^m{}_{col}$ ise $X^*=\mathbb{F}^n{}_{row}$ olur. Buna göre Örnek 4.1.5 kullanıldığında $X\otimes Y$ tensör çarpımı $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ile yani $L(X,Y)$ ile özdeşleştirilmiş olur.

Örnek 4.1.8. (Purbhoo, 2012) $\mathbb{F}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayları *X* ve *Y* olmak üzere $f\in X^*$, $u\in Y$ için tensör çarpımı $(f\otimes u)(x)=f(x)u$ tanımlanırsa $X^*\otimes Y=L(X,Y)$ elde edilir.

Gerçekten X'in bir bazı $A=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ile oluşturulan X^* için dual baz $A^*=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ ise $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ sağlanır. Eğer $x\in X$ ise $x=\beta_1x_1+\beta_2x_2+,...,+\beta_nx_n$ olacak biçimde $\beta_i\in\mathbb{F}$ vardır. Buna göre,

$$f_j(x)=f_i\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_j(x_i)=\beta_j$$

olduğundan $x=f_1(x)x_n+f_2(x)x_n+,...,+f_n(x)x_n$ yazılabilir. Diğer taraftan, Y için bir baz $B=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ ise tanım gereği $X^*\otimes Y$ için bir baz $\varphi(X^*\times Y):=\{\varphi(f_i,y_j)\ \mid f\in A^*,\ y_i\in B\}$ olacağından $S\in L(X,Y)$ seçimi ile $i=1,...,n$ için $S(x_i)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^{\,i}y_j$ olacak biçimde $\alpha_j^{\,i}\in\mathbb{F}$ vardır. Dolayısıyla, $\forall x\in X$ için

$$S(x)=S\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)S(x_i)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^{\,i}y_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_j^{\,i}f_i(x)y_j$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_j^{\,i}\left(f_i\otimes y_j\right)\right](x)=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_j^{\,i}\left(f_i\otimes y_j\right)\right](x)$$

olduğu görülür. O halde $S=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_j^{\,i}\left(f_i\otimes y_j\right)\right]$ olacak biçimde $\alpha_j^{\,i}\in\mathbb{F}$ var olduğundan $S\in sp\{\varphi(X^*\times Y)\}$ sağlanır. Bu ise $L(X,Y)=X^*\otimes Y$ olduğunu gösterir.

Eğer X ve Y vektör uzayları sonsuz boyutlu ise $X^*\otimes Y$, $L(X,Y)$'nin öz alt uzayıdır. Özel olarak $X^*\otimes Y=\{T\in L(X,Y)\mid \dim\mathrm{R}(T)<\infty\}$, $L(X,Y)$ lineer sonlu rank dönüşümlerinin kümesidir. Bu durum $f\in X^*$, $u\in Y$ için $f\otimes u$ dönüşümünün rank 1 dönüşümü ve dolayısıyla böyle dönüşümlerin lineer kombinasyonlarının da sonlu ranka sahip lineer dönüşümler olduklarından görülebilir.

Örnek 4.1.9. (Purbhoo, 2012) $\mathbb{Q}^n$ ve $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde vektör uzayları olarak düşünüldüğünde ve tensör çarpım dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerindeki skaler çarpım olarak alındığında $\mathbb{Q}$ üzerinde bir vektör uzayı olan $\mathbb{Q}^n\otimes\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$ tensör çarpımı elde edilir.

Gerçekten, $\mathbb{Q}^n$ için standart baz $\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve $\mathbb{R}$ için bir baz $\gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ olduğunda $(a_1, a_2, ..., a_k) \in \mathbb{R}^n$ ise $x_j \in \gamma$ olmak üzere $a_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_j$ olarak yazılabilir. Böylece $(a_1, a_2, ..., a_k) = \sum_{i,j} b_{ij} x_j e_i = \sum_{i,j} b_{ij} (e_i \otimes x_j)$ olur. Yani $sp\{\beta \otimes \gamma\} = \mathbb{R}^n$ olur. Diğer taraftan, $\sum_{i,j} c_{ij} (e_i \otimes x_j) = 0$ ise $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $\sum_{i,j} c_{ij} (e_i \otimes x_j) = \left(\sum_j c_{1j} x_j, ..., \sum_j c_{nj} x_k \right)$ olduğundan $\sum_j c_{ij} x_j = 0$ elde edilir. Dolayısıyla γ lineer bağımsız olduğundan $c_{ij} = 0$ elde edilir. Bu ise $\beta \otimes \gamma$ ‘nin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

Vektör uzaylarının tensör çarpımı bu bölümün şimdiye kadar ki kısmında tabanlar yardımıyla tanımlandı. Fakat tensör çarpımı bilineer dönüşümlerle de tanımlanabilir. Bundan sonra aşağıda verilen bilineer dönüşümlerle verilen ve sonradan lineerleştirme de denilecek olan tanımı kullanacağız.

Tanım 4.1.10. (Gaans ve Kalauch, 2010) *X* ve *Y* (reel) vektör uzaylar olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $(W, \otimes)$ çiftine *X* ve *Y* için bir tensör çarpımı denir.

i. *W* bir vektör uzaydır ve $\otimes : X \times Y \to W$ bilineer dönüşümü vardır.
ii. Eğer *Z* vektör uzayı ve $\psi : X \times Y \to Z$ bilineer dönüşüm ise $\psi = T \otimes$ olacak şekilde bir tek $T : W \to Z$ lineer dönüşümü vardır.

Aşağıdaki teorem tensör çarpımı için bir varlık teoremidir.

Teorem 4.1.11. (Gaans ve Kalauch, 2010) *X* ve *Y* (reel) vektör uzayları için tensör çarpımı $(W, \otimes)$ vardır.

İspat: *X* ve *Y* vektör uzayları olmak üzere,

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \{(\alpha_1, x_1, y_1), (\alpha_2, x_2, y_2), ..., (\alpha_n, x_n, y_n,)\} : n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ ve } x_i \in X,\ y_i \in Y \quad \ni \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j \text{ ise } (x_i, y_i) \neq (x_j y_j) \\ \end{array} \right\}$$

kümesi için $+ : U \times U \to U$ işlemi

$$\left\{\left\{(\alpha_1, x_1, y_1),...,(\alpha_m, x_m, y_m)+(\alpha_{m+1}, x_{m+1}, y_{m+1}),...,(\alpha_{m+n}, x_{m+n}, y_{m+n})\right\}\right\}$$

$$=\left\{\left(\sum_{i=(x_i,y_i)=(u,v)} \alpha_i, u, v\right) : (u,v) \in \left\{(x_1, y_1),...,(x_{m+n}, y_{m+n})\right\}\right\}$$

şeklinde tanımlandığında $(U,+)$ bir yarı gruptur. Benzer şekilde, $\mathbb{R}\times U \to U$ skaler çarpma işlemi $\lambda\left\{(\alpha_1, x_1, y_1),...,(\alpha_n, x_n, y_n,)\right\}=\left\{(\lambda\alpha_1, x_1, y_1),...,(\lambda\alpha_n, x_n, y_n,)\right\}$ şeklinde tanımlanırsa, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $u, u_1, u_2 \in U$ için $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$, $\lambda(u_1+u_2)=\lambda u_1+\lambda u_2$ ve $1u=u$ eşitlikleri sağlanır. Bu iki işleme göre

$$V_1=\left\{\left\{\begin{array}{l}(\alpha_{ij}, x_{ij}, y_j):\ y_j \text{ elemanları ikişerli ayrık ve } \forall j\in\{1,...,n\} \text{ için} \\ \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n_j}\alpha_{ij}x_{ij}=0 \text{ olacak biçimde } i\in\{1,2,...,n_j\} \text{ vardır.}\end{array}\right\}\in U\right\}$$

ve

$$V_2=\left\{\left\{\begin{array}{l}(\alpha_{ij}, x_i, y_{ij}):\ x_i \text{ elemanları ikişerli ayrık ve } \forall i\in\{1,...,n\} \text{ için} \\ \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}y_{ij}=0 \text{ olacak biçimde } j\in\{1,2,...,n_i\} \text{ vardır}\end{array}\right\}\in U\right\}$$

kümeleri kapalıdır. $V=\{v_1+v_2 : v_1\in V_1,\ v_2\in V_2\}$ ise $u\in U$ için $0u\in V$ olur. Diğer taraftan, $u_1, u_2\in V$ için “$u_1 \sim u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1+(-1)u_2\in V$” şeklinde tanımlanan $\sim \ \subseteq U\times U$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve bu denklik bağıntısı ile oluşturulan $W=U/V=\{[u] : u\in U\}$ bölüm uzayı $[u_1]+[u_2]=[u_1+u_2]$ ve $\lambda[u]=[\lambda u]$ işlemleri ile vektör uzayıdır.

$\otimes : X\times Y\to W$, $\otimes(x,y)=\left[\{(1,x,y)\}\right]$ şeklinde tanımlı dönüşümün $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\in\mathbb{R}$, $x_1, x_2\in X$, $y_1, y_2\in Y$ için

$$\otimes(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)=\left[\left\{(1,(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2), y)\right\}\right]=\left[\left\{(1,(\alpha_1x_1), y)\right\}\right]+\left[\left\{(1,(\alpha_2x_2), y)\right\}\right]$$

$$=\alpha_1\left[\left\{(1, x_1, y)\right\}\right]+\alpha_2\left[\left\{(1, x_2, y)\right\}\right]=\alpha_1\otimes(x_1, y)+\alpha_2\otimes(x_2, y)$$

$$\otimes(x, \beta_1y_1+\beta_2y_2)=\left[\left\{(1, x, (\beta_1y_1+\beta_2y_2))\right\}\right]=\left[\left\{(1, x, (\beta_1y_1))\right\}\right]+\left[\left\{(1, x, (\beta_2y_2))\right\}\right]$$

$$=\beta_1\left[\left\{(1,x,y_1)\right\}\right]+\beta_2\left[\left\{(1,x,y_2)\right\}\right]=\beta_1\otimes(x,y_1)+\beta_2\otimes(x,y_2)$$
$$=\beta_1\otimes(x,y_1)+\beta_2\otimes(x,y_2)$$

eşitliklerinden dolayı bilineer olduğu görülür. Buna göre $w\in T$ elemanı $w=\left[\left\{(\alpha_1,x_1,y_1),...,(\alpha_n,x_n,y_n)\right\}\right]=\alpha_1\otimes(x_1,y_1)+...+\alpha_n\otimes(x_n,y_n,)$ olarak yazılabilir. Yani, $sp\left\{\psi(x,y):x\in X,\ y\in Y\right\}=W$ olur.

X ve Y için Hamel bazları sırasıyla $\left\{\varepsilon_i:i\in I\right\}\in X$ ve $\left\{\delta_j:j\in J\right\}\in Y$ olsun. ψ dönüşümü bilineer olduğundan $W=sp\left\{\otimes\left(\varepsilon_i,\delta_j\right):i\in I,\ j\in J\right\}$ olur. Eğer, $\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\otimes\left(\varepsilon_i,\delta_j\right)=0$ ise $\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\left[\left\{\left(1,\varepsilon_i,\delta_j\right)\right\}\right]=0$ olur ki bu ise $\left\{\left(\alpha_{ij},\varepsilon_i,\delta_j\right):i,j=1,...,n\right\}\in V$ anlamına gelir. O halde $\left\{\left(\alpha_{ij},\varepsilon_i,\delta_j\right):i,j=1,...,n\right\}=l_1+l_2$ olacak biçimde $v_1\in V_1$ ve $v_2\in V_2$ elemanları vardır. $k=1,2$ için $\Lambda_k=\left\{(i,j):\text{ bazı }\alpha_{ij}^{(k)}\in\mathbb{R}\text{ için }\left(\alpha_{ij}^{(k)},\varepsilon_i,\delta_j\right)\in l_k\right\}$ ise $\Lambda_1\cup\Lambda_2=\left\{(i,j):i,j=1,...,n\right\}$ sağlanır. Eğer $(i,j)\in\Lambda_1\cap\Lambda_2$ iken $\alpha_{ij}=\alpha_{ij}^{(1)}+\alpha_{ij}^{(2)}$ olurken $(i,j)\in\Lambda_k/\Lambda_1\cap\Lambda_2$ olduğunda $k=1,2$ için $\alpha_{ij}=\alpha_{ij}^{(k)}$ olur. Diğer taraftan, $v_1=\left\{\left(\alpha_{ij}^{(1)},\varepsilon_i,\delta_j\right):(i,j)\in\Lambda_1\right\}$ olduğundan $(i,j)\in\Lambda_1$ için $\sum_{i:(i,j)\in\Lambda_1}\alpha_{ij}^{(1)}\varepsilon_i=0$ olur. O halde $\left\{\varepsilon_i:(i,j)\in\Lambda_1\right\}$ lineer bağımsız olduğundan her $(i,j)\in\Lambda_1$ için $\alpha_{ij}^{(1)}=0$ elde edilir. Benzer şekilde her $(i,j)\in\Lambda_2$ için $\alpha_{ij}^{(2)}=0$ elde edilir. O halde her $i,j=1,...,n$ için $\alpha_{ij}=0$ olur. Sonuç olarak $\left\{\otimes\left(\varepsilon_i,\delta_j\right):i\in I,\ j\in J\right\}$ lineer bağımsız olduğundan W için bir Hamel bazıdır.

Kabul edelim ki Tanım 4.1.10 (ii) için Z bir vektör uzay ve $\psi:X\times Y\to Z$ bilineer dönüşüm olsun. $T:S\to Z,T\left(\otimes\left(\varepsilon_i,\delta_j\right)\right):=\psi\left(\varepsilon_i,\delta_j\right)$ dönüşümünü tanımlayalım. Lineer genişlemesi tarafından $T:S\to Z$ bir lineer dönüşüm tanımlanır. $\otimes$ ve ψ dönüşümlerinin bilinerliliği T'nin lineerliğini gerektirir ve $\forall x\in X\ \ ,y\in Y$ için $T\left(\otimes(x,y)\right)=\psi(x,y)$ sağlanır. Eğer $\theta:S\to Z$ bir lineer dönüşüm ve $\forall x\in X\ ,y\in Y$ için $\theta\left(\otimes(x,y)\right)=\psi(x,y)$ sağlanıyor ise $\theta=T$ olur. Böylece $(W,\otimes)$, X ve Y 'nin tensör çarpımıdır.

Teorem 4.1.12. (Gaans ve Kalauch, 2010) *X* ve *Y* (reel) vektör uzaylarının tensör çarpımı izomorfizmler altında tekdir. Yani *X* ve *Y* için iki tensör çarpımı $(W,\otimes)$ ve $(\hat{W},\hat{\otimes})$ ise $\forall x\in X$, $y\in Y$ için $\otimes(x,y)=\otimes^*\left(\hat{\otimes}(x,y)\right)$ olacak şekilde $\otimes^*:\widehat{W}\to W$ bir lineer bijektif dönüşümü vardır.

İspat: (Gaans ve Kalauch, 2010) *X* ve *Y* için başka bir tensör çarpımı $(\hat{W},\hat{\otimes})$ olsun. Tanım 4.1.10 gereği $(\hat{W},\hat{\otimes})$ ve $\otimes$ bilineer dönüşümü için bir tek $\otimes^*:\widehat{W}\to W$ lineer dönüşümü vardır ve $\forall x\in X$, $y\in Y$ için $\otimes(x,y)=\otimes^*\left(\hat{\otimes}(x,y)\right)$ olur. Buna göre $w\in W$ için $w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes\left(x_i,y_j\right)$ temsili ve $\widehat{w}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\hat{\otimes}\left(x_i,y_i\right)\in\widehat{W}$ elemanı vardır ve $\otimes^*\left(\widehat{w}\right)=w$ sağlanır. Bu ise $\otimes^*$ dönüşümünün örten olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki $k,l\in\widehat{W}$ için $k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\hat{\otimes}\left(x_i,y_i\right)$ ve $l=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,\hat{\otimes}\left(w_j,z_j\right)$ olacak biçimde $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$, $x_i,w_j\in X$, $y_i,z_j\in Y$ elemanları olsun. Eğer $\otimes^*(k)=\otimes^*(l)$ sağlanırsa $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes^*\left(\hat{\otimes}\left(x_i,y_i\right)\right)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\otimes^*\left(\hat{\otimes}\left(w_j,z_j\right)\right)$ ve dolayısıyla $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\otimes\left(x_i,y_i\right)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\otimes\left(w_j,z_j\right)$ olur. Tanım gereği $(W,\otimes)$ tensör çarpımı, $\hat{\otimes}$ bilineer dönüşümü için $\forall x\in X$, $y\in Y$ için $\hat{\otimes}(x,y)=\hat{\otimes}^*\left(\otimes(x,y)\right)$ olacak şekilde bir tek $\hat{\otimes}^*:W\to\widehat{W}$ lineer dönüşümü vardır. O halde, $\widehat{\varphi}^*$ ‘yi son eşitliğe uyguladığımızda edilir.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\hat{\otimes}^*\left(\otimes\left(x_i,y_i\right)\right)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,\hat{\otimes}^*\left(\otimes\left(w_j,z_j\right)\right)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\hat{\otimes}\left(x_i,y_i\right)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\,\hat{\otimes}\left(w_j,z_j\right)\Rightarrow k=l$$

elde edilir. Bu ise $\otimes^*$ ’nin injektif olduğunu gösterir.

Bu sonuçlara göre $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı *X* ve *Y* vektör uzaylarının tensör çarpımı, $B(X\times Y,\mathbb{F})$ üzerinde tanımlı lineer fonksiyonellerin uzayı olarak da inşa edilebilir. Şöyle ki: $x\in X$, $y\in Y$ için

$$x\otimes y:B(X\times Y,\mathbb{F})\to\mathbb{F},\ \left(x\otimes y\right)(A)=A(x,y)$$

şeklinde tanımlı temel tensörler için $X\otimes Y = sp\{x\otimes y : x\in X, y\in Y\}$ olur. Böylece $u\in X\otimes Y$ tensörü $\lambda_i\in\mathbb{F}$, $x_i\in X$, $y_i\in Y$ olmak üzere $u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes y_i$ şeklinde temsil edilebilir. Dolayısıyla her bir $A\in B(X\times Y)$ için, $u(A)=\left\langle A,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\otimes y_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i A(x_i,y_i)$ olur. Buna göre tensör çapımı için aşağıdaki özellikler vardır.

Önerme 4.1.13. (Ryan, 2002) *X* ve *Y* vektör uzayları için $x_1,x_2\in X$, $y_1,y_2\in Y$ ve $\lambda\in\mathbb{F}$ olmak üzere, $(x,y)\in X\times Y\to x\otimes y\in X\otimes Y$ dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $(x_1+x_2)\otimes y = x_1\otimes y + x_2\otimes y,$

ii. $x\otimes(y_1+y_2)=x\otimes y_1+x\otimes y_2,$

iii. $\lambda(x\otimes y)=(\lambda x)\otimes y = x\otimes(\lambda y),$

iv. $0\otimes y = x\otimes 0 = 0,$

İspat: Kabul edelim ki $x_1,x_2\in X$, $y_1,y_2\in Y$, $\lambda\in\mathbb{F}$ olsun. Her $A: X\times Y\to Z$ için,

i. $((x_1+x_2)\otimes y)(A)=A(x_1+x_2,y)=A(x_1,y)+A(x_2,y)=(x_1\otimes y)(A)+(x_2\otimes y)(A)$

ii. $(x\otimes(y_1+y_2))(A)=A(x,y_1+y_2)=A(x,y_1)+A(x,y_2)=(x\otimes y_1)(A)+(x\otimes y_2)(A)$

iii. $(\lambda(x\otimes y))(A)=A(\lambda x,y)=\lambda A(x,y)=A(x,\lambda y)$

iv. $(0\otimes y)(A)=A(0,y)=A(0x,y)=0A(x,y)=A(x,0y)=0A(x,y)$

eşitliklerinden istenen görülür.

Sonuç olarak, aslında her bir $u\in X\otimes Y$ tensörünün $u=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i$ şeklinde temel tensörlerin toplamı şeklinde temsil edilebileceği görülür.

Örnek 4.1.14. (Purbhoo, 2012) $\mathbb{R}^2$ doğal bazı $\{e_1,e_2\}$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ tensör çarpımına göre $(1,1)\otimes(1,4)+(1,-2)\otimes(-1,2)=6e_1\otimes e_2+3e_2\otimes e_1$ olur. Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
(1,1)\otimes(1,4)+(1,-2)\otimes(-1,2)&=(e_1+e_2)\otimes(e_1+4e_2)+(e_1-2e_2)\otimes(-e_1+2e_2)\\
&=(e_1\otimes e_1+4e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1+4e_2\otimes e_2)+(-e_1\otimes e_1+2e_1\otimes e_2-2e_2\otimes e_1-4e_2\otimes e_2)\\
&=6e_1\otimes e_2+3e_2\otimes e_1
\end{aligned}
$$

olur.

Aynı düşünce tarzıyla aşağıdaki teorem iki temel tensörün hangi durumlarda eşit olduğunu karakterize eder.

Önerme 4.1.15. (Ryan, 2002) X ve Y vektör uzayları olmak üzere $u=\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ tensörü için aşağıdakiler denktir.

i. $u=0$,

ii. $\forall \varphi \in X^*, \forall \psi \in Y^*$ için $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)=0$,

iii. $\forall \varphi \in X^*$ için $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i = 0$,

iv. $\forall \psi \in Y^*$ için $\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i = 0.$

Vektör uzaylarının bazı özelliklerine bağlı olarak tensörel çarpımları yapısı iyi bilinen vektör uzayları içine gömülebilir. Örneğin:

i. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right)(x \otimes y) \to \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i^*(y)$ dönüşümü ile $X^* \otimes Y^* \subseteq (X \otimes Y)^*$,

ii. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right)(x^*, y^*) \to \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i)$ dönüşümü ile $X \otimes Y \subseteq B(X^*, Y^*)$,

iii. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right)(x, y) \to \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i^*(y)$ dönüşümü ile $X^* \otimes Y^* \subseteq B(X, Y)$,

iv. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right)(x^*) \to \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y_i$ dönüşümü ile $X \otimes Y \subseteq L(X^*; Y)$,

v. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i^*\right)(x) \to \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i^*$ dönüşümü ile $X^* \otimes Y^* \subseteq L(X; Y^*)$,

vi. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i\right)(x) \to \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i$ dönüşümü ile $X^* \otimes Y \subseteq L(X, Y)$.

4.2. Normlu Tensör Çarpımları

Cebirsel tensör çarpım, temel tensörlerin sonlu lineer kombinasyonu olarak tanımlandı. Fakat sonlu olmayan toplamlar, dizilerin limitleri olarak verildiğinden bir topolojiye gerek vardır. Bu kısımda tensör normları hakkında genel olarak bahsedilecek ve özel olarak projektif norm ve injektif norm adı verilen iki normun özellikleri verilecektir.

$\left(X,\|.\|_X\right)$ ve $\left(Y,\|.\|_Y\right)$ normlu uzayları olmak üzere $\|.\|_X$ ve $\|.\|_Y$ normları yardımıyla $X\otimes Y$ üzerinde bir norm tanımlanıp tanımlanamaması önemlidir. Örneğin $x\in X$ ve $y\in Y$ elemanlarının tanımladığı $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|$ şeklindeki bir tanım elemanter tensörlerden oluşan alt uzay için norm tanımlasa da $X\otimes Y$ üzerinde genelde norm tanımlamaz. Dolayısıyla cebirsel tensör uzaylarının aksine $\left(X\otimes Y,\|.\|_\otimes\right)$ topolojik tensör uzayı $\left(X,\|.\|\right)_X$ ve $\left(Y,\|.\|\right)_Y$ bileşenleri tarafından tek türlü olarak belirlenemez (Hackbusch 2010).

Tanım 4.2.1. (Hackbusch, 2010) Her bir $x\in X$ ve $y\in Y$ için $\|x\otimes y\|_\otimes=\|x\|\|y\|$ şartını sağlayan $X\otimes Y$ üzerinde tanımlı olan herhangi bir norma çapraz norm denir.

$\left(X\otimes Y,\|.\|_\otimes\right)$ normlu uzayı sadelik açısından bazı durumlarda $X\otimes_{\|.\|}Y$ ile gösterilecektir.

Bilineer olan $\otimes:\left(X,\|.\|_X\right)\times\left(Y,\|.\|_Y\right)\to\left(X\otimes Y,\|.\|_\otimes\right)$ dönüşümün sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall x\in X$ ve $\forall y\in Y$ için $\|\otimes(x,y)\|_\otimes\le C\|x\|_X\,\|y\|_Y$ koşulunu sağlayan bir $C\in\mathbb{R}$ sayısının var olmasıdır. Dolayısıyla, bilineer olması sebebiyle tensör çarpımının sürekli olması $\|x\otimes y\|_\otimes\le C\|x\|_X\,\|y\|_Y$ koşulunu sağlayan bir $C\in\mathbb{R}$ sayısının var olmasına denktir.

Lemma 4.2.2. (Hackbusch, 2010) X Banach uzayı, Y normlu uzay olmak üzere $\forall x\in X$ ve $\forall y\in Y$ için $\|x\otimes y\|\le C_y\|x\|_X$ ve $\|x\otimes y\|\le C_x\|y\|_Y$ koşullarını sağlayan sırasıyla x ve y elemanlarına bağlı $C_x,C_y\in\mathbb{R}$ sayıları varsa $\|\otimes(x,y)\|_\otimes\le C\|x\|_X\,\|y\|_Y$ koşulunu sağlayan bir $C\in\mathbb{R}$ sayısı vardır.

Tensör normu için gerekli bir şart ta tensör çarpımının sürekliliğidir. Yani $(x,y)\in X\times Y\to x\otimes y\in X\otimes Y$ dönüşümü sürekli olması gerekir. Açıktır ki çapraz norm sürekliliği sağlar. Çünkü süreklilik sağlanmıyorsa $\|x \otimes y\|$ değerinin sonlu olmadığı $(x, y) \in X \times Y$ elemanı bulunabilir. Dolayısıyla norm $X \otimes Y$ üzerinde tanımlanamaz. Bu durum aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.2.3. $\left(X \otimes Y, \|.\|_{\otimes}\right)$ normlu uzay ise $(x, y) \in X \times Y \to x \otimes y \in X \otimes Y$ dönüşümü süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki $\left(X \otimes Y, \|.\|\right)$ normlu uzay, fakat tensör çarpım dönüşümünün sürekliliği sağlanmasın. O halde Lemma 4.2.2 'den $\sup\left\{\dfrac{\|x \otimes y\|_{\otimes}}{\|x\|_X} : 0 \neq x \in X\right\} = \infty$ olacak biçimde $x \in X$ elemanı vardır. Diğer taraftan, herhangi bir $y \in Y$ için $\phi_y : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \phi(x) = \|x \otimes y\|$ bir norm tanımlar ve $\|x\|_X \leq \phi_y(x)$ sağlanır. O halde $\phi_y(x_0) = \infty$ olacak biçimde $x_0 \in X$ elemanı vardır. Yani $\|x_0 \otimes y\|$ tanımlı değildir.

Dolayısıyla, $\left(X \otimes Y, \|.\|\right)$ normlu uzay veya $\|.\|$ bir tensör normu denildiğinde tensör çarpımının $\|.\|$-sürekli olduğu anlaşılacaktır.

Sonlu boyutlu vektör uzaylarının tensör çarpımı da sonlu boyutlu olacağından herhangi bir norma göre tamdır. Hatta bu durum vektör uzaylarından sadece birisinin bile sonlu boyutlu olması durumunda da geçerlidir. Diğer taraftan iyi bilinen bir sonuçtur ki, herhangi bir $\left(X, \|.\|_X\right)$ normlu uzayın bir tamlanışı $\left(\overline{X}, \|.\|_X\right)$ vardır ve bu tamlanış içinde yoğun alt küme olarak gömülüşü doğal bir sonuçtur. Buna göre aşağıdaki sonuç önemlidir.

Önerme 4.2.4. (Hackbusch, 2010) X_0, $\left(X, \|.\|_X\right)$ içinde yoğun ve Y_0, $\left(Y, \|.\|_Y\right)$ içinde yoğun ve $\otimes : \left(X, \|.\|_X\right) \times \left(Y, \|.\|_Y\right) \to \left(X \otimes Y, \|.\|\right)$ sürekli olsun. Bu durumda $X_0 \otimes Y_0$, $X \otimes_{\|.\|} Y$ içinde yoğundur. Yani, $\overline{X_0 \otimes Y_0}^{\|.\|} = X \otimes_{\|.\|} Y$.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $u \in X \otimes_{\|.\|} Y$ olsun. $X \otimes_{\|.\|} Y$ tanımı gereği $\|x - x'\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ ve $x' \in X \otimes Y$ olacak biçimde $x_i' \in X$ ve $y_i' \in Y$ elemanları vardır. $C_{\max} = \max\left\{\|x_i'\|_X, \|y_i'\|_Y : 1 \geq i \leq n\right\}$ kümesini tanımlayalım ve $nC\delta(2C_{\max} + \delta) \leq \varepsilon/2$ sağlanacak biçimde $\delta > 0$ sayısını seçelim. Diğer taraftan $\|x'_i - x_i\|_X \le \delta$ ve $\|y'_i - y_i\|_Y \le \delta$ olacak biçimde $x_i \in X_0$ ve $y_i \in Y_0$ elemanlarını seçelim ve $u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ elemanını tanımlayalım. Bu durumda,

$$\|u - u_\varepsilon\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(x'_i \otimes y'_i - x_i \otimes y_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(x'_i - x_i\right)\otimes y'_i + x'_i \otimes\left(y'_i - y_i\right) + \left(x_i - x'_i\right)\otimes\left(y'_i - y_i\right)\right\|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left\{\left\|\left(x'_i - x_i\right)\otimes y'_i\right\| + \left\|x'_i\left(y'_i - y_i\right)\right\| + \left\|\left(x_i - x'_i\right)\otimes\left(y'_i - y_i\right)\right\|\right\}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left\{\left\|\left(x'_i - x_i\right)\otimes y'_i\right\| + \left\|x'_i\left(y'_i - y_i\right)\right\| + \left\|\left(x_i - x'_i\right)\otimes\left(y'_i - y_i\right)\right\|\right\}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left\{C\left\|x'_i - x_i\right\|_X \left\|y'_i\right\|_Y + C\left\|x'_i\right\|_X \left\|y'_i - y_i\right\|_Y + C\left\|x_i - x'_i\right\|\left\|y'_i - y_i\right\|\right\}$$

$$\le nC\delta\left(2C_{\max} + \delta\right) \le \varepsilon/2$$

elde edilir ki, bu da $\|u - u_\varepsilon\| \le \varepsilon$ olduğunu gösterir.

Çapraz normunun elamanter tensörler için sağladığı özellik dolayısıyla herhangi bir $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ tensörü için $\|u\| \le \sum_{i=1}^{n}\|x_i \otimes y_i\| \le \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\|$ sağlanır. Dolayısıyla, tensörlerin temsilleri tek olmadığından

$$\|u\| \le \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i \otimes y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}$$

eşitsizliği de sağlanır. Bu eşitsizlik tensör çarpımları üzerinde tanımlı normlar arasında en güçlü bir norm tanımlanmasına olanak verir.

Teorem 4.2.5. (Hackbusch, 2010) X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $X \otimes Y \mapsto \left(B\left(X \times Y, \mathbb{F}\right)\right)^*$ gömülüşü ile $X \otimes Y$ üzerine indirgenen norm

$$\|u\|_\pi : X \otimes Y \to [0,\infty), \|u\|_\pi = \sup\left\{\left|\phi(u)\right| : \phi \in B\left(X \times Y, \mathbb{F}\right), \|\phi\| \le 1\right\}$$

bir çapraz norm tanımlar ve bu norm projektif tensör normu olarak adlandırılır. Bu tanıma denk olarak projektif norm şu şekilde de tanımlanır:

$$\|u\|_\pi : X \otimes Y \to [0,\infty), \|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_X \|y_i\|_Y : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}.$$

Dikkat edilmelidir ki tanımda infimum, u tensörünün olası tüm temsilleri üzerinden alınmaktadır.

Sadelik açısından $\left(X \otimes Y, \|.\|_\pi\right)$ normlu uzayı $X \otimes_\pi Y$ ile, tamlanışı ise $X \hat{\otimes}_\pi Y$ şeklinde gösterilecektir.

İspat: Her bir $X \otimes Y$ için $0 \le \|u\|_\pi$ olduğu tanımdan açıktır. Kabul edelim ki $\|u\|_\pi = 0$ olsun. Buna göre $\forall \varepsilon > 0$ için u tensörünün bir temsili $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ ise $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \le \varepsilon$ olur. Dolayısıyla, her $\varphi \in X^*$ ve $\psi \in Y^*$ için $\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)\right| \le \varepsilon \|\varphi\| \|\psi\|$ sağlanır. Yani $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i)$ bu değerlerin toplamı u'nun temsilinden bağımsızdır. $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\psi(y_i) = 0$ bunu takip eder X^*, Y^* cebirsel dualleri sırasıyla alt uzaylarını ayırır ve $u = 0$ olur.

$0 \ne \lambda \in \mathbb{R}$ ve $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ olsun. O halde, $\lambda u = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \otimes y_i$ olacağından $\|\lambda u\|_\pi \le \sum_{i=1}^{n} \|\lambda x_i\| \|y_i\| \le |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\|$ sağlanır. Yani u tensörünün her bir temsili için eşitsizlik sağlanacağından infimum gereği $\|\lambda u\|_\pi \le |\lambda| \|u\|_\pi$ elde edilir. Buna göre, $\|u\|_\pi = \|\lambda^{-1}\lambda u\|_\pi \le |\lambda|^{-1} \|\lambda u\|_\pi$ eşitsizliğinden de $|\lambda| \|u\|_\pi \le \|\lambda u\|_\pi$ olduğu görülür. Yani, her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda u\|_\pi = |\lambda| \|u\|_\pi$ olur.

Projektif normun tanımı gereği $u, v \in X \otimes Y$ ve $\varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \le \|u\|_\pi + \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\sum_{j=1}^{n} \|w_j\| \|z_j\| \le \|v\|_\pi + \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ ve $v = \sum_{j=1}^{n} w_j \otimes z_j$ temsilleri vardır. Buna göre $u + v \in X \otimes Y$ tensörünün bir temsili $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n} w_j \otimes z_j$ olur. O halde, $\|u + v\|_\pi \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| + \sum_{j=1}^{n} \|w_j\| \|z_j\| \le \|u\|_\pi + \|v\|_\pi + \varepsilon$ eşitsizliği her bir $\varepsilon > 0$ için sağlanacağından $\|u + v\|_\pi \le \|u\|_\pi + \|v\|_\pi$ elde edilir.

Açıktır ki $\|x\otimes y\|_\pi \le \|x\|\|y\|$ sağlanır. Hahn-Banach teoreminin bir sonucu gereği herhangi bir $x\otimes y=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$ tensör temsili için $\phi(x)=\|x\|_X$ ve $\|\phi\|_{X^*}\le 1$ olacak biçimde $\phi\in X^*$ vardır. Dolayısıyla $|\phi(y_i)|\le \|y_i\|_Y$ eşitsizliği de sağlanır. O halde $\|x\|_X\ y=\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\,y_i$ sağlanır ve üçgen eşitsizliğinden de $\|x\|_X\ \|y\|_Y \le \sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\|y_i\|_Y \le \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_X\ \|y_i\|_Y$ elde edilir. $x\otimes y$ tensörünün tüm temsilleri üzerinden infimum alındığında $\|x\|_X\ \|y\|_Y \le \|x\otimes y\|_\pi$ olduğu görülür. Yani projektif norm bir çapraz normdur.

Önerme 4.2.6. (Hackbusch, 2010) $(X,\|.\|_X)$ ve $(Y,\|.\|_Y)$ normlu uzaylar olsun. $\|.\|_\pi$, ile verilen norm $(x,y)\mapsto x\otimes y$ sürekliliğini sağlayan en güçlü normdur.

İspat: Tanım gereği $\|x\otimes y\|_\pi \le \|x\|_X\ \|y\|_Y$ sağlanacağından tensör çarpımının sürekli olduğu açıktır. $X\otimes Y$ üzerinde tanımlı herhangi tensör normu $\|.\|$ ise $(x,y)\mapsto x\otimes y$ dönüşümü sürekli olacağından $\|x\otimes y\|\le C\|x\|_X\ \|y\|_Y$ olacak biçimde $C\in\mathbb{R}$ vardır. Diğer taraftan keyfi seçilen $u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\in X\otimes Y$ tensörü için üçgen eşitsizliğine göre $\|u\|\le\sum_{i=1}^{n}\|x_i\otimes y_i\|$ olur. Dolayısıyla, $\|u\|\le C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\|$ sağlanır. Bu eşitsizlik $u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$ tensörünün tüm temsilleri için sağlanacağından infimum özelliği gereği $\|u\|\le\|u\|_\pi$ elde edilir.

Örnek 4.2.7. (Hackbusch, 2010) (l^1). $X=\left(l^1(I),\|.\|_{l^1(I)}\right)$ ve $Y=\left(l^1(J),\|.\|_{l^1(J)}\right)$ için bazı sonlu ya da I ve J sayılabilir kümelerini göz önüne alalım. Projektif norm ve Banach tensör uzayı ile $\|.\|_{\pi(X,Y)}=\|.\|_{l^1(I\times J)}$ ve $l^1(I)\otimes_\pi l^1(J)=l^1(I\times J)$ olur.

İspat: $c\in X\otimes_\alpha Y\subset l^1(I\times J)$, $\alpha\in I$ ve $\beta\in J$ için $c_{\alpha,\beta}$ vardır. $e_X^{(\alpha)}$ ve $e_Y^{(\beta)}$ birim vektörleri ve c nin bir temsili ile $c=\sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in J} c_{\alpha,\beta}e_X^{(\alpha)}e_Y^{(\beta)}$ şeklinde yazılır.

$\left\| e_X^{(\alpha)} \right\|_{l(I)} = \left\| e_Y^{(\beta)} \right\|_{l(J)} = 1$ ve $\|.\|_{\pi(X,Y)}$ projektif norm tanımından $\|c\|_{\pi(X,Y)} \le \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in J} \left| c_{\alpha,\beta} \right| = \|c\|_{l^1(I\times J)}$ olur.

$\|.\|_{l^1(I\times J)}$ bir çarpımnorm olmak üzere $c=1$ sahiptir. Yani $\|c\|_{l^1(I\times J)} \le \|c\|_{\pi(X,Y)}$ olur. Bunlar ile $\|c\|_{\pi(X,Y)} = \|c\|_{l^1(I\times J)}$ olur. Özdeşlik ile birlikte ($p=1$ için) tensör çarpımı $l^1(I) \otimes_\pi l^1(J) = l^1(I\times J)$ olur.

Projektif norma benzer olarak X ile Y normlu uzayları için $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ ile ilişkili bilineer form

$$\varphi_u : B\left(X^* \times Y^*\right) \to \mathbb{F}, \varphi_u(f,g) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, g(y_i)$$

şeklinde tanımlanır. O halde $X \otimes Y \mapsto B\left(X^* \times Y^*, \mathbb{F}\right)$ kanonik gömülüşü vardır.

Teorem 4.2.8. X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $X \otimes Y \mapsto B\left(X^* \times Y^*, \mathbb{F}\right)$ gömülüşü ile $X \otimes Y$ üzerine indirgenen norm $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ olmak üzere,

$$\|u\|_\varepsilon : X \otimes Y \to [0,\infty), \|u\|_\varepsilon = \sup\left\{ \left| u(f,g) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, g(y_i) \right| : f \in X^*, g \in Y^* \; \|f\| \le 1, \|g\| \le 1 \right\}$$

bir çapraz norm tanımlar ve injektif tensör normu olarak adlandırılır.

Sadelik açısından $\left(X \otimes Y, \|.\|_\varepsilon\right)$ normlu uzayı $X \otimes_\varepsilon Y$ ile, tamlanışı ise $(X \hat{\otimes}_\varepsilon Y)$ şeklinde gösterilecektir.

İspat: Bir $u \in X \otimes Y$ tensörünün bir temsili $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ olsun. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ise $f \in B_{X^*}, g \in B_{Y^*}$ elemanları için

$$\|\lambda u\|_{\varepsilon} = \sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} \left\{ |\lambda u(f,g)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\lambda x_i) g(y_i)\right| \right\} = \sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} \left\{ |\lambda| \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(y_i)\right| \right\} = |\lambda| \|u\|_{\varepsilon}$$

elde edilir. Benzer olarak $v \in X \otimes Y$ tensörünün bir temsili $\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes z_i$ ise $f \in B_{X^*}, g \in B_{Y^*}$ elemanları için geçerli olan

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i + w_i) g(y_i + z_i)\right| \le \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(y_i)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i) g(z_i)\right|$$

$$\le \sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} \left\{ \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(y_i)\right| \right\} + \sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} \left\{ \left|\sum_{i=1}^{n} f(w_i) g(z_i)\right| \right\}$$

eşitsizliği $\|u+v\|_{\varepsilon} \le \|u\|_{\varepsilon} + \|v\|_{\varepsilon}$ sağlandığını gösterir. Tanım gereği her bir $u \in X \otimes Y$ tensörü için $0 \le \|u\|_{\varepsilon}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $\|u\|_{\varepsilon} = 0$ ise her bir $f \in X^*, g \in Y^*$ için $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ temsiline göre $f(x_i) = 0$ ve $g(y_i) = 0$ olduğu görülür. Yani, $i \in \{1,2,...,n\}$ için $y_i = x_i = 0$, dolayısıyla $u = 0$ olur.

$x \otimes y \in X \otimes Y$ elamanter tensörü için,

$$\|x\otimes y\|_{\varepsilon(X,Y)} = \sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} |(f\otimes g)(x\otimes y)| = \sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} |f(x) g(y)|$$

$$= \left(\sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} |f(x)| \right) \left(\sup_{f\in B_{X^*},g\in B_{Y^*}} |g(y)| \right) = \|x\|_X \|y\|_Y$$

olduğundan injektif norm bir çapraz normdur.

Önerme 4.2.9. (Hackbusch, 2010) X ve Y normlu uzaylar olmak üzere her bir $u \in X \otimes Y$ için $\|u\|_{\varepsilon} \le \|u\|_{\pi}$ sağlanır.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $u \in X \otimes Y$ ise $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| \le \|u\|_{\pi} + \varepsilon$ olacak biçimde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ temsili vardır. Benzer şekilde tanımdan $\|u\|_{\varepsilon} \le \left|\sum_{i=1}^{n} (\varphi \otimes \psi)(u)\right| + \varepsilon$ olacak biçimde $f \in B_{X^*}$ ve $g \in B_{Y^*}$ elemanları vardır. Buna göre,

$$\|u\|_{\varepsilon} \le \left| (\varphi \otimes \psi) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right) \right| + \varepsilon = \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \psi(y_i) \right| + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)| |\psi(y_i)| + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| + \varepsilon \leq \|u\|_\pi + 2\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi seçildiğinden $\|u\|_\varepsilon \leq \|u\|_\pi$ olur.

$\left(X \otimes Y, \|.\|\right)$ normlu uzayı ile $\left(X \otimes Y\right)^*$ dual uzayı üzerinde $\|.\|_{(X\otimes Y)^*} = \|.\|^*$ dual normu tanımlanabilir. Buna göre $X^* \otimes Y^* \subset \left(X \otimes Y\right)^*$ kapsamasının sağlanması için $\left(X^*, \|.\|_{X^*}\right) \times \left(Y^*, \|.\|_{Y^*}\right) \mapsto \left(X^* \otimes Y^*, \|.\|^*\right)$ dönüşümünün sürekli olması, yani her bir $f \in X^*$ ve $g \in Y^*$ için $\| f \otimes g\|^* \leq C\| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*}$ eşitsizliğini sağlayan bir $C > 0$ sayısının var olmasıdır.

Önerme 4.2.10. (Hackbusch, 2010) İnjektif norm ile tanımlanan dual norm $X^* \otimes Y^*$ üzerinde bir çapraz normdur. Yani, her bir $f \in X^*$ ve $g \in Y^*$ için $\| f \otimes g\|_\varepsilon^* = \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*}$ sağlanır.

İspat: $0 \neq f \otimes g \in X^* \otimes Y^*$ temel tensörünü seçelim ve $f_1 = \dfrac{1}{\| f\|_{X^*}} f$ ve $g_1 = \dfrac{1}{\|g\|_{Y^*}} g$ fonksiyonellerini tanımlayalım. Her $u \in X \otimes_\alpha Y$ için

$$\left|\left(f \otimes g\right)(u)\right| = \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*} \left|\left(f_1 \otimes g_1\right)(u)\right| \leq \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*} \sup_{\phi \in B_{X^*}, \psi \in B_{Y^*}} \left|\phi \otimes \psi(u)\right| = \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*} \|u\|_\varepsilon$$

sağlanır. $u \in B_{X \otimes_\alpha Y}$ elemanları için supremum alındığında $\| f \otimes g\|_\varepsilon^* \leq \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*}$ olduğu görülür.

$\varepsilon > 0$ ve $f \otimes g \in X^* \otimes Y^*$ olsun. Dual norm tanımından $\|x\|_X = \|y\|_Y = 1$, $\left| f(x)\right| \geq (1-\varepsilon)\| f\|_{X^*}$ ve $\left|g(y)\right| \geq (1-\varepsilon)\|g\|_{Y^*}$ olacak biçimde $x \in X$ ve $y \in Y$ elemanları bulunabilir. Eğer $u = x \otimes y$ ise $\|u\|_\varepsilon = \|x \otimes y\|_\varepsilon = \|x\|_X \|y\|_Y = 1$ olur. Dolayısıyla,

$$(1-\varepsilon)^2 \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*} \leq \left| f(x)\right|\left|g(y)\right| = \left|\left(f \otimes g\right)\left(x \otimes y\right)\right| = \left|\left(f \otimes g\right)(u)\right|$$

$$\leq \sup_{\|w\|_\varepsilon = 1} \left|\left(f \otimes g\right)(w)\right| = \| f \otimes g\|_\varepsilon^*$$

elde edilir ki, bu ise $\| f \otimes g\|_\varepsilon^* \geq \| f\|_{X^*} \|g\|_{Y^*}$ eşitsizliğinin sağlandığını ifade eder.

O halde, $\left(X^*,\|.\|_{X^*}\right)\otimes\left(Y^*,\|.\|_{Y^*}\right)\subset\left(X\otimes Y,\|.\|_\varepsilon\right)^*$ olur.

Önerme 4.2.11. (Diestel, Fourie ve Swart, 2008) İnjektif norm, $\left(X^*,\|.\|_{X^*}\right)\times\left(Y^*,\|.\|_{Y^*}\right)\mapsto\left(X^*\otimes Y^*,\|.\|^*\right)$ dönüşümünü sürekli yapan $X\otimes Y$ üzerinde tanımlı normlar içinde en zayıf olanıdır.

İspat: Kabul edelim ki her bir $u\in X\otimes Y$ için $\|u\|\le\|u\|_\varepsilon$ olsun. O halde dual normları her bir $0\neq f\otimes g\in X^*\otimes Y^*$ için $\|f\otimes g\|_\varepsilon^*\le\|f\otimes g\|^*$ sağlanır. O halde $\varepsilon>0$ için dual norm tanımından $\|u\|=1$ ve $\|f\otimes g\|^*\le(1+\varepsilon)\left|(f\otimes g)(u)\right|$ olacak biçime $u\in X\otimes Y$ elemanı vardır. Diğer taraftan süreklilik hipotezi gereği, $\|f\otimes g\|^*\le C\|f\|_{X^*}\|g\|_{Y^*}$ olacak biçimde bir $C>0$ sayısı vardır. Böylece,

$$\|f\otimes g\|^*\le(1+\varepsilon)\left|(f\otimes g)(u)\right|\le(1+\varepsilon)\|f\otimes g\|^*\|u\|\le C(1+\varepsilon)\|f\|_{X^*}\|g\|_{Y^*}=C(1+\varepsilon)\|f\otimes g\|_\varepsilon^*$$

elde edilir. Bu ise $\|.\|^*$ ile $\|.\|_\varepsilon^*$ normlarının denk, dolayısıyla $\|.\|$ ile $\|.\|_\varepsilon$ normlarının denk olduğunu gösterir. Yani $X\otimes Y$ üzerinde injektif normdan daha zayıf söz konusu sürekliliği sağlayan bir norm yoktur.

Sonuç 4.2.12. (Diestel, Fourie ve Swart, 2008) X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $X\otimes Y$ üzerinde tanımlı herhangi bir norm $\|.\|$ ise her bir $u\in X\otimes Y$ için $\|u\|_\varepsilon\le\|u\|\le\|u\|_\pi$ sağlanır.

Dual uzay üzerinde tanımlı injektif norm ile projektif norm ile elde edilen dual norm arasındaki ilişkiyi aşağıdaki sonuç vermektedir.

Önerme 4.2.13. (Diestel, Fourie ve Swart, 2008) X, Y Banach uzayları olmak üzere $\left(X\otimes Y\right)^*$ üzerinde $\|.\|_{\varepsilon\left(X^*,Y^*\right)}=\|.\|^*_{\pi(X,Y)}$ olur.

İspat: $\Phi\in X^*\otimes Y^*$ için

$$\|\Phi\|^*_{\pi(X,Y)}=\sup_{0\neq u\in X\otimes Y}\frac{\left|\Phi(u)\right|}{\|u\|_{\pi(X,Y)}}=\sup_{0\neq u=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\in X\otimes Y}\frac{\left|\Phi\left(\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i\right)\right|}{\sum_{i=1}^n\|x_i\|_X\|y_i\|_Y}$$

$$\leq \sup_{0\neq u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\in X\otimes Y} \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\Phi\left(x_i\otimes y_i\right)\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left\|x_i\right\|_X\left\|y_i\right\|_Y} \leq \sup_{\substack{0\neq x\in X\\ 0\neq y\in Y}} \frac{\left|\Phi\left(x\otimes y\right)\right|}{\left\|x\right\|_X\left\|y\right\|_Y}$$

elde edilir ki burada $\frac{\left|\Phi\left(x\otimes y\right)\right|}{\left\|x\right\|_X\left\|y\right\|_Y} = \underset{i\in\{1,\dots,n\}}{maks}\left\{\frac{\left|\Phi\left(x_i\otimes y_i\right)\right|}{\left\|x_i\right\|_X\left\|y_i\right\|_Y}\right\}$ olur. Diğer taraftan dual norm tanımı gereği $\sup_{\substack{0\neq x\in X\\ 0\neq y\in Y}} \frac{\left|\Phi\left(x\otimes y\right)\right|}{\left\|x\right\|_X\left\|y\right\|_Y} \leq \left\|\Phi\right\|_{\pi(X,Y)}^{*}$ sağlanacağından $\left\|\Phi\right\|_{\pi(X,Y)}^{*} = \sup_{\substack{0\neq x\in X\\ 0\neq y\in Y}} \frac{\left|\Phi\left(x\otimes y\right)\right|}{\left\|x\right\|_X\left\|y\right\|_Y}$ eşitliği elde edilir.

Kabul edelim ki $\Phi=\sum_i \varphi_i\otimes\psi_i$ ve seçilmiş bir $y\in Y$ için $\varphi:=\sum_i \psi_i\left(y\right)\varphi_i\in X^*$ olsun. O halde,

$$\sup_{0\neq x\in X} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\left(x\right)\psi_i\left(y\right)\right|}{\left\|x\right\|} = \sup_{0\neq x\in X} \frac{\left|\varphi\left(x\right)\right|}{\left\|x\right\|} = \sup_{0\neq x^{**}\in X^{**}} \frac{\left|x^{**}\left(\varphi\right)\right|}{\left\|x^{**}\right\|^{**}} = \sup_{0\neq x^{**}\in X^{**}} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(\varphi_i\right)\psi_i\left(y\right)\right|}{\left\|x^{**}\right\|^{**}}$$

olur. Benzer şekilde bir normlu uzayın ikinci duali içine gömülebildiği düşünüldüğünde $\Phi=\sum_i \varphi_i\otimes\psi_i$ için

$$\sup_{\substack{0\neq x\in X\\ 0\neq y\in Y}} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\left(x\right)\psi_i\left(y\right)\right|}{\left\|x\right\|\left\|y\right\|} = \sup_{\substack{0\neq x^{**}\in X^{**}\\ 0\neq y^{**}\in Y^{**}}} \frac{\left|\left(x^{**}\otimes y^{**}\right)\left(\Phi\right)\right|}{\left\|x^{**}\right\|_{X^{**}}\left\|y^{**}\right\|_{Y^{**}}}$$

elde edilir. Sonuç olarak elde edilen bu iki eşitlikle $\left|\Phi\left(x\otimes y\right)\right|=\left|\sum_i \varphi_i\left(x\right)\psi_i\left(y\right)\right|$ eşitliği beraber düşünüldüğünde $\left\|\Phi\right\|_{\pi(X,Y)}^{*} == \sup_{\substack{0\neq x^{**}\in X^{**}\\ 0\neq y^{**}\in Y^{**}}} \frac{\left|\left(x^{**}\otimes y^{**}\right)\left(\Phi\right)\right|}{\left\|x^{**}\right\|_{X^{**}}\left\|y^{**}\right\|_{Y^{**}}}$ olduğu, dolayısıyla $\left\|\Phi\right\|_{\pi(X,Y)}^{*} = \left\|\Phi\right\|_{\varepsilon\left(X^*,Y^*\right)}$ olduğu görülür.

Sonuç 4.2.14. (Diestel, Fourie ve Swart, 2008) Her bir $\varphi\in X^*$ ve $\psi\in Y^*$ için $\left\|\varphi\otimes\psi\right\|_{\pi(X.Y)}^{*} = \left\|\varphi\right\|_{X^*}\left\|\psi\right\|_{Y^*}$ sağlanır.

İspat: Önerme 4.2.10 gereği injektif norm ile tanımlanan dual norm bir çapraz norm olduğundan ve $\left\|.\right\|_{\varepsilon\left(X^*,Y^*\right)} = \left\|.\right\|_{\pi(X,Y)}^{*}$ eşitliğinden istenen görülür.

Tanımları dikkate alındığında $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset B\left(X^* \times Y^*\right)$ olduğu açıktır. Ayrıca $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ için $L_u : X^* \to Y, L_u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i$ ve $\mathrm{R}_u : Y^* \to X, \mathrm{R}_u(\psi) = \sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i$ şeklinde tanımlı operatörler ile $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset L\left(X^*, Y\right)$ ile $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y \subset L\left(Y^*, X\right)$ kapsamalarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla injektif norm için

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i\right\| : \varphi \in X^*,\ \|\varphi\| \le 1\right\} = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i) x_i\right\| : \psi \in Y^*,\ \|\varphi\| \le 1\right\}$$

eşitlikleri de vardır. Böylece $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ tensör çarpımı $L\left(X^*, Y\right)$ ve $L\left(Y^*, X\right)$ içine gömülebilir.

Projektif norm için de benzer temsiller vardır. Her bir $B \in B\left(X \times Y\right)$ sınırlı bilineer formuna karşılık $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\left(L_B(x)\right)(y) = B(x, y)$ olacak biçimde $L_B \in L\left(X, Y^*\right)$ operatörü tanımlanabilir. Bu durumda açıktır ki $\varphi : B\left(X \times Y\right) \to L\left(X, Y^*\right), \varphi(B) = L_B$ dönüşümü izometrik izomorfizmdir. Böylece $\left(X \hat{\otimes}_\pi Y\right)^* = L\left(X, Y^*\right)$ özleştirilmesi görülür. Böylece $T \in L\left(X, Y^*\right)$ operatörü için $T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i, Tx_i \right\rangle$ olur. Benzer şekilde her bir $B \in B\left(X \times Y\right)$ sınırlı bilineer formuna karşılık $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\left(L_B(y)\right)(x) = B(x, y)$ olacak biçimde $L_B \in L\left(Y, X^*\right)$ operatörü tanımlanabilir. Bu durumda açıktır ki $\varphi : B\left(X \times Y\right) \to L\left(Y, X^*\right), \varphi(B) = L_B$ dönüşümü izometrik izomorfizm olduğundan $\left(X \hat{\otimes}_\pi Y\right)^* = L\left(Y, X^*\right)$ özleştirilmesi görülür. Buna göre $T \in L\left(Y, X^*\right)$ operatörü için $T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle y_i, Tx_i \right\rangle$ temsili vardır.

4.3. Sıralı Uzaylarda Fremlin Tensör Çarpımları

Bu bölüm sıralı uzaylar teorisinde D.H. Fremlin tarafından çalışılan sıralı uzayların tensör çarpımları hakkındaki sonuçlara ayrılmıştır. Fremlin ilk olarak bir topolojik uzay üzerinde tanımlı reel değerli tüm fonksiyonların kümesi olan $C(X)$ formundaki uzayların tensör çarpımlarını vermiş, daha sonra ise Riesz uzaylarının tensör çarpımlarını bu formdaki uzaylar içindeki temsilleri ile vermiştir.

Riesz uzaylarının tensör çarpımının tanımı, vektör uzaylarının tensör çarpımlarında verilen lineer dönüşümler yerine Riesz uzay yapısını koruyan Riesz homomorfizmler ile verilir.

Tanım 4.3.1. (Fremlin, 1972) E ve F (Arşimedyan) Riesz vektör uzaylar olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $(G,\otimes)$ çiftine E ve F'nin (Arşimedyan) Riesz tensör çarpımı denir.

i. G bir (Arşimedyan) Riesz uzaydır ve $\otimes : E\times F \to G$ Riesz bimorfizmidir.

ii. Eğer H (Arşimedyan) Riesz uzayı ve her $\psi : E\times F \to H$ Riesz bimorfizm ise $\psi = T\otimes$ olacak şekilde bir tek $T : G \to H$ Riesz homomorfizmi vardır.

Topolojik bir uzay X üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ ile gösterilir. $C(X)=\{ f : X \to \mathbb{R} : f \ \textit{sürekli}\}$ fonksiyonlar arasında tanımlı noktasal toplama ve noktasal skalarla çarpma ile reel vektör uzayı, noktasal sıralama ile Riesz uzayı ve $\|.\| : C(X) \to \mathbb{R}, \|f\| = \sup\{|f(x)| : x\in X\}$ normu ile Banach örgüsüdür.

Fremlin'in inşaa ettiği tensör çarpımı aşağıda verilen iyi bilinen bir temsil teoremine dayanır.

Teorem 4.3.2. (Kakutani, 1941) Birimli AM-uzayı E için kompakt Hausdorff uzay Ω vardır ve E, $C(\Omega)$'ya izometrik ve örgü izomorfiktir. Üstelik, kurulan bu temsilde birim, 1_Ω ile özdeşleştirilir ve Ω homeomorfizmler altında tektir.

Diğer taraftan eğer E Arşimedyan Riesz uzayı e sıra birimine sahip ise, $x \to \|x\| = \inf\{0 < \lambda : |x| \le \lambda e\}$ şeklinde tanımlı norm ile birimli AM-uzay olacaktır.

Dolayısıyla bir önceki teorem aynı zamanda sıra birime sahip Arşimedyan Riesz uzayları için de geçerlidir.

Fremlin'in tensör çarpımlarının inşasını verdiği sonuç aşağıdadır.

Teorem 4.3.3. (Fremlin, 1972) E ve F Arşimedyan Riesz uzayları olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayacak biçimde bir tek G Arşimedyan Riesz uzayı ve $\otimes : E \times F \to G$ bilineer dönüşümü vardır.

i. H Arşimedyan Riesz uzay ve $\psi : E \times F \to H$ Riesz bimorfizmi olduğunda bir tek $T : G \to H$ Riesz homomorfizmi vardır ve $\psi = T \otimes$ olur.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\psi"'] & E \bar{\otimes} F \arrow[dl, "T"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Şekil 4.3.1.

ii. Cebirsel tensör çarpımı $E \otimes F$, $\otimes : E \otimes F \to G$ ile G içine gömülebilir.

iii. Her bir $u \in G$ elemanına karşılık her $\delta > 0$ için $|u - v| \leq \delta x_o \otimes y_0$ olacak biçimde $v \in E \otimes F$ vardır koşulunu sağlayacak şekilde $x_0 \in E^+$, $y_0 \in F^+$ elemanları vardır.

iv. $E \otimes F$ G içinde sıra yoğundur. Yani $0 < u \in E \bar{\otimes} F$ için $u \geq x \otimes y$ olacak biçimde $0 < x \in E$ ve $0 < y \in F$ elemanları vardır.

İspat: Özel olarak E ve F sıra birime sahip Arşimedyan Riesz uzayları olsun. Dolayısıyla Kakutani temsil teoremi (Teorem 4.3.2) gereği X ve Y kompakt Hausdorff uzayları vardır öyle ki E ve F Riesz uzayları $C(X)$ ve $C(Y)$'nin, 1_X ve 1_Y elemanlarını içeren yoğun alt uzayları olarak görülebilir. O halde $f \in E$ ve $g \in F$ olmak üzere $x \in X$ ve $y \in Y$ için cebirsel tensör çarpımını da veren

$$\psi : E \times F \to G, \psi(f, g)(x, y) = (f \otimes g)(x, y) = f(x) g(y)$$

dönüşümü ile $E\otimes F$ tensör çarpımı $C(X\times Y)$ 'in lineer alt uzayı olduğu görülür. $C(X\times Y)$ 'de $E\otimes F$ tarafından üretilen Riesz alt uzayı G olsun. Buna göre ψ Riesz bimorfizmi $E\otimes F$ 'nin G Riesz uzayı içine ile gömülüşünü verir. Yani (ii) sağlanır.

Diğer taraftan Kakutani teoremi gereği E ile F, sırasıyla $C(X)$ ve $C(Y)$ içinde yoğun, $C(X)\otimes C(Y)$ de $C(X\times Y)$ içinde yoğun olduğundan; $E\otimes F$, $C(X\times Y)$ içinde yoğun, dolayısıyla *G* içinde norm yoğundur. İyi bilinen bir sonuçtur ki: her norm yoğun Riesz alt uzay sıra yoğundur.

Kabul edelim ki $0<w\in G$ olsun. $C(X)\otimes C(Y)$ de $C(X\times Y)$ içinde yoğun olduğundan, $C(X\times Y)$ içinde $0<f\otimes g\leq w\in G$ olacak biçimde $0\leq f\in C(X)$ ve $0\leq g\in C(Y)$ elemanları vardır. Diğer taraftan *E* ve *F* sırasıyla $C(X)$ ve $C(Y)$ içinde norm yoğun, dolayısıyla sıra yoğun olduğundan $0<x\leq f$ ve $0<y\leq g$ olacak biçimde $x\in E^+$ ve $y\in F^+$ elemanları vardır. Dolayısıyla, $0<x\otimes y\leq f\otimes g\leq w$ sağlanır.

Herhangi Arşimedyan Riesz uzayı *H* ve $\psi:E\times F\to H$ dönüşümü Riesz bimorfizm olsun. *H* içinde $\psi(1_X,1_Y)$ tarafından üretilen solid lineer alt uzayı H_0 olsun. Buna göre $H_0=\{h\in H:\exists\lambda>0 \text{ vardır ve } |h|\leq\lambda\psi(1_X,1_Y)\}$ aynı zamanda Riesz uzayıdır ve sıra birimi $\psi(1_X,1_Y)$ olur. Diğer taraftan, $H_0\subseteq C(\Omega)$ temsili gereği her bir $t\in\Omega$ için $\varphi:H_0\to\mathbb{R},\varphi(h)=h(t)$ dönüşümü bir Riesz homomorfizmi olur ve bu ise $Z=\{\otimes:H_0\to\mathbb{R}:0<\otimes \textit{ bir Riesz } \text{hom}\textit{omorfizm}\}$ kümesinin H_0 Riesz uzayını noktalarına ayırdığını gösterir. Sıra birim tanımından $x\in E$ ve $y\in F$ elemanları için $|x|\leq\lambda_1 1_X$ ve $|y|\leq\lambda_2 1_Y$ olacak biçimde $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^+$ vardır. Dolayısıyla $|\psi(x,y)|\leq\psi(|x|,|y|)\leq\lambda_1\lambda_2\psi(1_X,1_Y)$ sağlanacağından $\psi(E\times F)\subseteq H_0$ olduğu görülür. Herhangi bir $\varphi\in Z$ için $\varphi\psi:E\times F\to\mathbb{R}$ dönüşümü sıfırdan farklı Riesz bimorfizmi olduğundan süreklidir ve sıfırdan farklı $\eta:C(X)\times C(Y)\to\mathbb{R}$ Riesz bimorfizm genişlemesi vardır $(\eta|_Z=\otimes)$. Buna göre $\otimes\in Z$ elemanına bağlı tek bir şekilde $\alpha_h\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{t}_h\in X$ ve $u_h\in Y$ elemanları vardır ve $\forall x\in C(X),\forall y\in C(Y)$ için $\eta(x,y)=\alpha_h x(\mathrm{t}_h)y(u_h)$ sağlanır.

$$
\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\psi"'] & G = \langle \varphi(E \times F) \rangle \subseteq G^* = \prod K_i \arrow[dl, "T"] \\
H_0 = \psi(E \times F) \subseteq H &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 4.3.2.

Her bir $\varphi \in Z$ bir Riesz homeomorfizmi olduğundan,

$$G_1 = \left\{ w \in C(X \times Y) : \exists\, z \in H_0 \text{ vardır ve } \forall \varphi \in Z \text{ için } \varphi(z) = \alpha_h w(\mathrm{t}_h, u_h) \right\}$$

kümesi $C(X \times Y)$'in Riesz alt uzayıdır. $\forall x \in E$ ve $\forall y \in F$ için $\alpha_h (x \otimes y)(t_h, u_h) = \alpha_h x(\mathrm{t}_h) y(u_h) = \varphi\psi(x, y)$ sağlanacağından $x \otimes y \in G_1$ olur. Dolayısıyla $G \subseteq G_1$ sağlanır. O halde Z, H_0'ın noktalarını ayırdığından her $\forall w \in G$ elemanına karşılık $\forall h \in Z$ için $\otimes(Tw) = \alpha_h w(\mathrm{t}_h, u_h)$ eşitliğini sağlayan bir tek $T(w)$ elemanını karşılık getiren dönüşümü tanımlanabilir. Tanımı gereği *T* bir Riesz homomorfizmidir ve $T\otimes = \psi$ sağlanır. Yani (i) önermesini ispatlar.

Kabul edelim ki *E* ve *F* Arşimedyan Riesz uzayları ve küme olarak $E \times F$ kartezyen çarpımın alt kümeleri ile üretilmiş tüm Arşimedyan Riesz uzaylarının ailesi $\Re$ olsun. Yani, $card(K) \leq card(E \times F)$ koşulunu sağlayan *K* Arşimedyan Riesz uzayı, $\Re$'nin bir elemanına izomorfiktir. $I = \left\{ i = (K_i, \otimes_i) : K_i \in \Re \text{ ve } \otimes : E \times F \to K \text{ Riesz bimorfizm} \right\}$ olmak üzere Riesz bimorfizmi olmak üzere $G^* = \prod_{i \in I} K_i$ çarpım Riesz uzayını ve $\otimes : E \times F \to G^*, \otimes(x, y) = \langle \otimes_i (x, y) \rangle_{i \in I}$ dönüşümünü tanımlayalım. Açıktır ki G^* Arşimedyan ve $\otimes$ Riesz bimorfizmidir. G^* içinde $\otimes(E \times F)$ ile üretilen Riesz alt uzayı G olsun.

Herhangi bir Arşimedyan Riesz uzayı *H* ve $\psi : E \times F \to H$ Riesz bimorfizmi olsun. H içinde $\psi(E \times F)$ tarafından üretilen Riesz alt uzayı H_0 olsun. $card(H_0) \leq card(E \times F)$ olduğundan H_0'a izomorfik olan $K \in \Re$ vardır ve dolayısıyla $\varphi : H_0 \to K$ Riesz izomorfizmi tanımlanabilir. O halde, $\varphi\psi : E \times F \to K$ Riesz bimorfizmi olacağından $i_k = (K, S\psi) \in I$ olur.

Buna göre $\langle z_i \rangle_{i\in I} \in G$ için $T: G \to H$, $T\left(\langle z_i \rangle_{i\in I}\right) = \varphi^{-1} z_{i_K}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm Riesz bimorfizmdir ve $T\otimes = \psi$ sağlanır. Üstelik T dönüşümü bu şartları sağlayan tek Riesz bimorfizmidir. Eğer $T_1 : G \to H$ Riesz homeomorfizmi ve $T_1\otimes = \psi$ ise $G_1 = \{w \in G : Tw = T_1 w\}$ G için bir Riesz alt uzayıdır ve $\otimes(E\times F)$'yi kapsar.G, $\otimes(E\times F)$ tarafından üretildiğinden $G = G_1$ olmalıdır.

$$\begin{tikzcd}
C(X)\times C(Y)\supseteq E\times F \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\psi"'] & & E\otimes F\subseteq G=(E\otimes F)^{\vee\wedge}\subseteq C(X\times Y) \arrow[dl, "T"] \\
& H\supseteq H_0=I_d\left(\psi\left(1_x,1_Y\right)\right) &
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.3.3.

Diğer taraftan Tanım 4.3.1. gereği H bir Arşimedyan Riesz uzayı ve $\psi : E\times F \to H$ Riesz bimorfizmi vardır ve bu bimorfizm $E\otimes F \to H$ birebir lineer dönüşümü indirger. Eğer $S\otimes = \phi$ olacak biçimdeki $S : E\otimes F \to G$ lineer dönüşümü için TS dönüşümü birebirdir ve dolayısıyla S birebirdir. O halde S, $E\otimes F$'nin G içine bir gömülüşünü verir. Yani (ii) sağlanır.

Keyfi olarak $w\in G$ seçelim. olsun. O halde w elemanı, $\otimes(E\times F)$ tarafından üretilen Riesz alt uzayında olur. Dolayısıyla, sonlu $A\subseteq E$ ve $\mathrm{B}\subseteq F$ kümeleri vardır ve w aslında $\otimes(A\times B)$ tarafından üretilen Riesz alt uzayındadır. A ve B ile üretilen Riesz alt uzayları sırasıyla E_0 ve F_0 ise sırasıyla $x_0 = \sum_{a\in A} |a|$ ve $y_0 = \sum_{b\in B} |b|$ sıra birimlerine sahiptirler. Diğer taraftan E_0 ve F_0'ın Riesz uzay tensör çarpımı G_0 ise $\theta : E_0\times F_0 \to G_0$ kanonik Riesz bimorfizmi vardır. Ayrıca, $\otimes : E_0\times F_0 \to G$ dönüşümü de Riesz bimorfizmi olacağından $\phi = T\theta$ sağlanacak biçimde $T: G_0 \to G$ Riesz homomorfizmi vardır. O halde $T(G_0)$, $\otimes(E_0\times F_0)$'ı, dolayısıyla $\otimes(A\times B)$'yi içeren Riesz alt uzayı olmalıdır. Yani $w\in T(G_0)$ olur. $Tv = w$ olacak biçimde $v\in G_0$ seçelim. Her bir $\delta > 0$ için $|v - v_1| \le \delta\theta(x_0, y_0)$ olacak biçimde $v_1 \in sp\{\theta(E_0\times F_0)\}$ vardır. Dolayısıyla Tv_1, $E\otimes F$ ile özdeşleştirilen

$sp\{\otimes(E\times F)\}$ ‘nin bir elemanıdır. Bu ise G içinde $|v-Tv_1|\le\delta\otimes(x_0,y_0)$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Yani (iii) sağlanır.

Kabul edelim ki $0<w\in G$ olsun. Yukarıdaki ispata benzer olarak $v\neq 0$ olacağından $|v|>0$ ve dolayısıyla $T(|v|)=|Tv|=|w|=w$ sağlanır. Yine önceki ispattan $0<x_0\in E$ ve $0<y_0\in F$ elemanları vardır ve $\theta(x,y)\le|v|$ sağlanır. Dolayısıyla $\otimes(x,y)\le w$ sağlanır ve $\otimes(x,y)\neq 0$ olması gerektiğinden $0<\otimes(x,y)\le w$ elde edilir.

E ve *F* Arşimedyan Riesz uzaylarının yukarıdaki ispatta inşa edilen ve *G* ile gösterilen Arşimedyan Riesz uzayı tensör çarpımı (veya Fremlin tensör çarpımı) $E\overline{\otimes}F$ ile gösterilecektir.

Cebirsel tensör çarpımı $E\otimes F$ ‘nin $E\overline{\otimes}F$ içine gömülmesi $E\otimes F$ üzerinde bir kısmi sıralama indirgeneceği anlamına gelir. Fakat $\{x\otimes y : x\in E^+, y\in F^+\}$ ile üretilmiş P konisi ile $E\otimes F$ zaten bir sıralamaya sahiptir. Diğer taraftan, $(E\otimes F)^+=\left(E\overline{\otimes}F\right)^+\cap(E\otimes F)$ ise

$$(E\otimes F)^+=\left\{w\in E\otimes F : \forall f\in\left(E^*\right)^+, \forall g\in\left(F^*\right)^+ \ için \ \langle w\,|\, f\otimes g\rangle\ge 0\right\}$$

olur. Buna göre, *E* ve *F* Banach örgüleri ise $E\otimes F$ ’de $\{x\otimes y : x\in E^+, y\in F^+\}$ ile üretilen koni *P* olmak üzere $E\otimes F$ üzerindeki herhangi $\mathfrak{T}$ lokal konveks lineer topolojiye göre $(E\otimes F)^+\subseteq\overline{P}$ sağlanır.

Sıralı uzaylar teorisinde önemli bir araç bir sıralı uzayın Riesz tamlamasıdır. Kısmi sıralı bir *X* vektör uzayının Riesz tamlaması, *X*’in sıra yoğun olarak bipozitif dönüşümlerle gömüldüğü en küçük Riesz uzayıdır (Kalauch and Gaans, 2019). Dikkat edilmelidir ki $E\otimes F$ vektör uzayı tensör çarpımı $E\overline{\otimes}F$ içinde gömülebilirdir. Aşağıdaki teorem $E\otimes F$ ile $E\overline{\otimes}F$ arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Teorem 4.3.4. (Gaans ve Kalauch, 2019) *E* ve *F* Arşimedyan Riesz uzaylarının Fremlin tensör çarpımı $E\overline{\otimes}F$ olmak üzere $E\otimes F$ üzerindeki sıralama $E\overline{\otimes}F$ ‘den indirgenmiş olsun. Bu durumda $E\otimes F$ pre-Riesz uzayıdır ve Riesz tamamlaması $E\overline{\otimes}F$ olur. Ayrıca gömme dönüşümü $\hat{\otimes} : E\otimes F\to E\overline{\otimes}F$ bir Riesz homomorfizmidir.

İspat: $\otimes : E \otimes F \to E\overline{\otimes}F$ Riesz bimorfizmi ve $\hat{\otimes} : E \otimes F \to E\overline{\otimes}F$ gömme dönüşümü olsun. $E \otimes F$ üzerindeki sıralamaya göre $\hat{\otimes}$ dönüşümü bipozitiftir. $w \in G$ ise Teorem 4.3.3(iii) gereği $\delta > 0$ sayısına karşılık $v_\delta \in \hat{\otimes}(E \otimes F)$ vardır ve $|w - v_\delta| \le \delta \hat{\otimes}(x \otimes y)$ koşulunu sağlayan $x \in E$, $y \in F$ bulunabilir. Dolayısıyla $v_\delta + \delta \hat{\otimes}(x \otimes y) \in \hat{\otimes}(E \otimes F)$ ve $w \le v_\delta + \delta \hat{\otimes}(x \otimes y)$ olur. Benzer olarak $v_\delta - w \le \delta \hat{\otimes}(x \otimes y)$ olacağından $v_\delta \le w + \delta \hat{\otimes}(x \otimes y)$ sağlanır. Bu nedenle eğer α, $\{u \in \hat{\otimes}(E \otimes F) : u \ge w\}$ kümesi için bir alt sınır ise $\alpha \le v_\delta + \delta \le w + \delta \hat{\otimes}(x \otimes y) + \delta \hat{\otimes}(x \otimes y)$ olur. $E\overline{\otimes}F$ Arşimedyan olduğu için $\alpha \le w$ elde edilir. Dolayısıyla $E\overline{\otimes}F$ 'de $w = \inf\{u \in \hat{\otimes}(E \otimes F) : u \ge w\}$ olur. Bu ise $\hat{\otimes}(E \otimes F)$'nin, $E\overline{\otimes}F$ 'de sıra yoğun olduğunu gösterir.

G_0, $\hat{\otimes}(E \otimes F)$ tarafından üretilen $E\overline{\otimes}F$ 'nin Riesz alt uzayı olsun. Gömme dönüşümü $\hat{\otimes} : E \otimes F \to G_0$ bipozitiftir, $\hat{\otimes}(E \otimes F)$ sıra yoğundur ve bir Riesz uzayı olarak G_0'ı üretir. O halde $(G_0, \hat{\otimes})$, $E \otimes F$ 'nin bir Riesz tamlamasıdır ve özellikle $\hat{\otimes}$ Riesz homeomorfizmidir (Kalauch and Gaans, 2019). Diğer taraftan, $\otimes : E \times F \to E\overline{\otimes}F$ bir Riesz bimorfizmi ve $\otimes(E \times F) \subseteq G_0$ olduğundan $\otimes : E \times F \to G_0$ Riesz bimorfizmidir. Herhangi bir Arşimedyan Riesz uzayı H ve $\psi : E \times F \to H$ Riesz bimorfizmi ise Teorem 4.3.3 gereği $T : E\overline{\otimes}F \to H$ Riesz homomorfizmi vardır ve $T\otimes = \psi$ sağlanır. Açıktır ki $T_0 = T|_{G_0} : G_0 \to H$ kısıtlama dönüşümü de Riesz homomorfizmdir ve $T_0 \otimes = \psi$ sağlanır. Eğer başka bir Riesz bimorfizmi $T_1 : G_0 \to H$ ve $T_1 \otimes = \psi$ sağlanıyorsa $T_1 = T_0$ olmalıdır. Dolayısıyla G_0, Teorem 4.2 'nin (ii), (iii) ve (iv) şartlarını sağlar. O halde (Kalauch and Gaans, 2019 Teorem 2.4.2, Önerme 2.4.3, Önerme2.4.4) gereği G ile G_0 Riesz uzayları izomorf olduğundan G, $\hat{\otimes}(E \otimes F)$'nin Riesz tamlamasıdır.

Açıklama 4.3.5. (Fremlin, 1972) Bu temsillerin dezavantajı $E\overline{\otimes}F$ 'nin temsillerini tanımlamanın kolay olmamasıdır. Örneğin $E = F = C([0,1])$ durumda bile $[0,1]^2$ üzerindeki sürekli bir fonksiyonun $E\overline{\otimes}F$ ait olması için gerek ve yeter koşul olmadığıdır.

Aşağıdaki örnek Arşimedyan olmayan Riesz uzayları için Teorem 4.3.3. doğru olmayabileceğini gösterir.

Örnek 4.3.6. (Fremlin, 1972) $E = F = C([0,1])$ alalım. Her bir $\alpha > 0$ için $[\alpha,1]$ kapsayan, $P[0,1]$'in temel olmayan maksimal ideali ℓ ve $N_\ell = \{ f \in \mathbb{R}^X : \{t : f(t) \neq 0\} \in \ell \}$ solid lineer alt uzayı için $K = E \cap \mathbb{N}_\ell$ ve $H = E/K$ olsun. $\mathbf{1} = 1_{[0,1]}$ olmak üzere $\forall x, y \in E$ için

$$\psi : E \times E \to H, \psi(x,y) = ((2x - x(0)\mathbf{1})) \times ((2y - y(0)\mathbf{1}))$$

Riesz bimorfizmini tanımlayalım. Kabul edelim ki E'de $y \wedge z = 0$ olsun. ℓ bir maksimal olduğundan ayrık kümeler için $\{t : y(t) \neq 0\} \in \ell$ ya da $\{t : z(t) \neq 0\} \in \ell$ olur. Eğer $\{t : y(t) \neq 0\} \in \ell$ ise her bir $\alpha > 0$ için $[\alpha,1]$ kümesi ℓ tarafından kapsandığından ve *y* sürekli olduğundan $y(0) = 0$ olur. Dolayısıyla, $\{t : (2y - y(0)\mathbf{1})(t) \neq 0\} \in \ell$ olur. Sonuç olarak $2y - y(0)\mathbf{1} \in \mathbb{N}_\ell$ ve $\forall x \in E$ için $\psi(x,y) = 0$ elde edilir. Üstelik $\forall x \in E^+$ için $\psi(x,y) \wedge \psi(x,z) = 0$ olur. Böylece her bir $x \in E^+$ için $E \to H, y \to \psi(x,y)$ dönüşümü bir Riesz homomorfizmidir. Benzer şekilde $\{t : z(t) \neq 0\} \in \ell$ olduğunun kabul edilmesiyle her bir $y \in E^+$ için $E \to H, x \to \psi(x,y)$ dönüşümünün bir Riesz homomorfizmi olduğu görülür. Her $t \in [0,1]$ için $v, w \in E$ elemanları $v(t) = e^t$ ve $w(t) = e^{-t}$ şeklinde verilsin. O halde, $\forall t, u \in [0,1]$ için $v(t)w(u) + w(t)v(u) \geq 2$ ve dolayısıyla $E \otimes F \subseteq C([0,1]^2)$ içinde $v \otimes w + w \otimes v - 2.\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \geq 0$ olur. Ancak, $t > 0$ iken

$$z(t) = (2e^t - 1)(2e^{-t} - 1) + (2e^{-t} - 1)(2e^t - 1) + 2(2-1)(2-1) = 8 - 4(e^t + e^{-t}) < 0$$

olmak üzere H içinde $\psi(v,w) + \psi(w,v) - 2\psi(\mathbf{1},\mathbf{1}) = z$ elde edilir. ℓ temel ideal olmadığından $(0,1] \notin \ell$ ve $z \notin K$ olur. Buna göre $z < 0$ olur. Böylece eğer $T\otimes = \psi$ koşulunu sağlayan herhangi lineer dönüşüm $T : E \overline{\otimes} F \to H$ için $v \otimes w + w \otimes v - 2.\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} > 0$ iken $T(v \otimes w + w \otimes v - 2.\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) < 0$ elde edilir. Yani *T* pozitif dönüşüm olamayacağından bir Riesz homomorfizmi değildir.

Yukarıdaki örneğin bir sonucu olarak $v\otimes w+w\otimes v-2.\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\in E\otimes F$ elemanı $E\bar{\otimes}F$ 'nin pozitif konisinde olmasına rağmen $x_i, y_i\in E^+$ için $\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$ şeklinde temsil edilemez. Çünkü eğer öyle olsaydı H içinde $\psi(v,w)+\psi(w,v)-2\psi(\mathbf{1},\mathbf{1})=\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i,y_i)$ pozitif olmalıydı.

Sonuç 4.3.7. (Fremlin, 1972) *E* ve *F* Arşimedyan Riesz uzayları olsun. Eğer *H* Arşimedyan Riesz uzayı ve $0<x\in E$ için $0<\psi(x,y)\in H$ ise $E\bar{\otimes}F$ tensör çarpımı *H* içinde $\psi(E\times F)$ tarafından üretilen Riesz alt uzayına izomorfiktir.

$$\begin{tikzcd}
E\times F \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "0<\psi"'] & E\bar{\otimes}F \arrow[dl, "T"'] \arrow[dl, bend left, "\text{izomorfizm}"] \\
H\supseteq\left[\psi(E\times F)\right] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.3.4.

İspat: Kabul edelim ki $T\otimes=\psi$ olacak şekilde Riesz homomorfizmi $T: E\bar{\otimes}F\to H$ olsun. Eğer $0\neq w\in E\bar{\otimes}F$ ise Teorem 4.3.3(v) gereği $0<x\in E$ ve $0<y\in F$ elemanları vardır ve $x\otimes y\leq|w|$ sağlanır. O halde, $0<\psi(x,y)\leq T(|w|)=|Tw|$ sağlanır, yani $Tw\neq 0$ olur. Bu ise *T*'nin birebir olduğunu gösterir. Sonuç olarak $E\bar{\otimes}F$ ile $T\left(E\bar{\otimes}F\right)$ izomorfik, dolayısıyla $\psi[E\times F]$ tarafından üretilen Riesz alt uzayına izomorfiktir.

Sonuç 4.3.8. (Fremlin, 1972) *E* ve *F* Arşimedyan Riesz uzayları ile E_0 ve F_0 sırasıyla *E* ve *F*'nin Riesz alt uzayları olsun. O halde $E_0\bar{\otimes}F_0$, $E\bar{\otimes}F$ içinde $E_0\otimes F_0$ ile üretilen Riesz alt uzayıdır.

İspat: *E* ve *F* Arşimedyan Riesz uzaylarının Teorem 4.3.3'de verilen Fremlin tensör çarpımını tanımlayan $\otimes: E_0\times F_0\to E\bar{\otimes}F$ dönüşümü bir önceki sonucun koşullarını sağlar.

4.4. Banach Örgülerinin Tensör Çarpımları

Önceki bölümde, X ve Y Arşimedyan Riesz uzayları için Fremlin tensör çarpımının nasıl inşa edildiği verilmiş ve $X \otimes Y$ cebirsel tensör çarpımının lineer alt uzay olduğu gösterilmişti. İyi bilinen bir sonuçtur ki her normlu Riesz uzayı Arşimedyandır. O halde normlu uzayların Fremlin tensör çarpımları her zaman tanımlıdır. Bölüm 4.2'de ise $X \otimes_\pi Y$ projektif normlu uzay ve $X \otimes_\varepsilon Y$ injektif normlu uzayları tanıtılmış ve bunların tamlanışları sırasıyla $X \hat{\otimes}_\pi Y$ ve $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ ile gösterilmişti. Sıralı vektör uzayları teorisinin kavramları açısından, X ile Y'nin Banach örgüsü olması durumunda $X \hat{\otimes}_\pi Y$ ve $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ 'nin Banach örgüsü olup olmadıklarını bilmek önemlidir. Örneğin (Ω, Σ, μ) sonlu ölçü uzayı olmak üzere $L_1(\mu) \hat{\otimes}_\pi X = L_1(\mu, X)$ bir Banach örgüsüdür ve benzer şekilde K Hausdorff kompakt topolojik uzay olmak üzere $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon X = C(K, X)$ de Banach örgüsüdür. Ancak $X \hat{\otimes}_\pi Y$ ve $X \hat{\otimes}_\varepsilon Y$ genelde Banach örgüsü değildir.

Banach örgülerinin Fremlin Arşimedyan tensör çarpımları için Teorem 4.3.3'den elde edilecek bazı sonuçlar aşağıdaki verilmiştir.

Sonuç 4.4.1. (Fremlin, 1974) E ve F Banach örgüleri olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i. $E \overline{\otimes} F$ üzerinde herhangi bir Riesz normunun tanımladığı topolojiye göre $E \otimes F$, $E \overline{\otimes} F$ içinde yoğundur.

ii. $E \overline{\otimes} F$ üzerinde herhangi bir Riesz normunun tanımladığı topolojiye göre $\{x \otimes y : x \in E^+, y \in F^+\}$ tarafından oluşturulan koni P olmak üzere $\left(E \overline{\otimes} F\right)^+ = \overline{P}$ olur.

iii. Herhangi Banach örgüsü H ve Riesz bimorfizmi $\psi : E \times F \to H$ ile belirlenen Riesz homomorfizmi $T : E \overline{\otimes} F \to H$ ise H içinde $\overline{T(E \otimes F)} = T\left(E \overline{\otimes} F\right)$ olur. Dolayısıyla $T\left(E \overline{\otimes} F\right)$, H içinde kapalı Riesz alt uzaydır ve kendi içinde Banach örgüsüdür.

İspat: (i) Teorem3.3 gereği her bir $u \in E \overline{\otimes} F$ elemanına karşılık $x_0 \in E^+$, $y_0 \in F^+$ elemanları bulunabilir öyle ki her $\delta > 0$ için $|u - v| \le \delta x_o \otimes y_0$ olacak biçimde $v \in E \otimes F$ vardır. O halde $E \overline{\otimes} F$ üzerinde bir Riesz normu $\|.\|$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\delta < \varepsilon \|x_o \otimes y_0\|^{-1}$ seçildiğinde

$\|u-v\| \leq \delta \|x_o \otimes y_0\| < \varepsilon$ olacak biçimde $v \in E \otimes F$ bulunur. Yani $E \otimes F$, $E \overline{\otimes} F$ içinde $\|\,.\,\|$-yoğundur.

(ii) $E \overline{\otimes} F$ üzerinde bir Riesz normu $\|\,.\,\|$, lokal conveks lineer topoloji belirler. Diğer taraftan Fremlin (1972), Teorem 6.4 gereği $(E \otimes F)^{+} \subseteq P$ olur. O halde Fremlin (1972), Teorem 4.2 gereği istenen görülür.

(iii) Teorem 4.3.3(iii) $E \otimes F$, $E \overline{\otimes} F$ içinde $\|\,.\,\|$-yoğun ve $T : E \overline{\otimes} F \to H$ Riesz homomorfizmi olduğundan ispat açıktır.

Teorem 4.2.5'de verilen projektif norm tanımı sıralı uzaylar bağlamında Fremlin tarafından aşağıdaki biçimde verilmiştir.

Tanım 4.4.2. (Fremlin, 1974)*E* ve *F* Banach örgüleri olmak üzere

$$\|.\|_{|\pi|} : E \otimes F \to \mathbb{R},\ \|u\|_{|\pi|} = \sup\left\{\|\hat{\psi}(u)\| : G \textit{ Banach örgüsü},\ 0 \leq \psi \in B\left(E \times F, G\right) \textit{ ve } \|\psi\| \leq 1\right\}$$

fonksiyonu bir normdur ve pozitif projektif norm olarak adlandırılır.

Bu tanımda $\hat{\psi}$, herhangi bir *H* Banach örgüsü ve $\psi : E \times F \to H$ pozitif bilineer dönüşümü için tensör çarpımında karşılık gelen $\hat{\psi} : E \otimes F \to H$ lineer dönüşümüdür. Yani, $T\big|_{E \otimes F} = \hat{\psi}$.

E ve *F* Banach örgüleri olmak üzere $E \otimes F$ cebirsel tensör çarpımının $\|.\|_{|\pi|}$ normuna göre tamamlanışı $E \overset{\Delta}{\otimes} F$ ile gösterilecektir.

Lemma 4.4.3. (Fremlin, 1974) *E* ve *F* Banach örgüleri olmak üzere $x \in E^{+}$ ve $y \in F^{+}$ için $\|x \otimes y\|_{|\pi|} = \|x\|_E \|y\|_F$ sağlanır.

İspat: Tanım gereği $x \in E^{+}$ ve $y \in F^{+}$ için $\|x \otimes y\|_{|\pi|} \leq \|x\|_E \|y\|_F$ sağlanır. Diğer taraftan, $\|f\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$, $f(x) = \|x\|_E$ ve $g(y) = \|y\|_F$ olacak biçimde $f \in B_{E^*}$ ve $g \in B_{F^*}$ vardır. E^* ve F^* dual uzayları Banach örgüleri olduğundan $\|\,|f|\,\| = \|f\|$ ve $\|\,|g|\,\| = \|g\|$ sağlanır. Buna göre,

$\psi : E\times F \to R,\ \psi(w,z)=|f|(x).|g|(z)$ şeklinde tanımlı dönüşüm pozitif, bilineer ve $\|\psi\| = \| \,|f|\, \| \| \,|g|\, \| \le 1$ eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla,

$$\|x\|_E \|y\|_F = |f(x)||g(y)| \le |f|(x).|g|(y) = |\psi(x,y)| \le \|x\otimes y\|_{|\pi|}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.4. (Fremlin, 1974) E ve F Banach örgüleri olmak üzere $\left(E\otimes F, \|.\|_{|\pi|}\right)$ normlu uzaydır. Dolayısıyla $E\otimes F$ cebirsel tensör çarpımının $\|.\|_{|\pi|}$ normuna göre tamamlanışı $E\overset{\Delta}{\otimes}F$ bir Banach uzaydır ve $E\overset{\Delta}{\otimes}F$ üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde bir tek Riesz uzay yapısı vardır.

i. $E\overset{\Delta}{\otimes}F$ bir Banach örgüsü ve tensör çarpımı dönüşümü $\otimes : E\times F \to E\overset{\Delta}{\otimes}F$ Riesz bimorfizmidir.

ii. $\{x\otimes y : x\in E^+, y\in F^+\}$ tarafından üretilen koni $P\subseteq E\otimes F$ ise $\left(E\overset{\Delta}{\otimes}F\right)^+ = \overline{P}$ olur.

iii. Herhangi Banach örgüsü G olmak üzere, $\psi : E\times F \to H$ sürekli pozitif bilineer dönüşümler ile $\psi = T\otimes$ koşulunu sağlayan $T : E\overset{\Delta}{\otimes}F \to H$ sürekli artan lineer dönüşümler arasında bire bir norm koruyan bir eşleme vardır. Üstelik T bir Riesz homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart $\psi : E\times F \to H$ bir Riesz bimorfizmi olmasıdır.

iv. $\forall x\in E$ ve $\forall y\in F$ için $\|x\otimes y\|_{|\pi|} = \|x\|\|y\|$ sağlanır.

v. $E\overline{\otimes}F$, $E\overset{\Delta}{\otimes}F$ içine norm yoğun Riesz alt uzayı olacak biçimde gömülebilir ve $u\in E\overline{\otimes}F$ için, $\|u\|_{|\pi|} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\| : x_i\in E^+, y_i\in F^+, |u| \le \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right\}$ olur.

vi. $u\in E\overset{\Delta}{\otimes}F$ için $\|u\|_{|\pi|} = \inf\left\{\sum_{i\in N}\|x_i\|\|y_i\| : x_i\in E^+, y_i\in F^+ \forall i\le N, |u| \le \sum_{i\in N} x_i\otimes y_i\right\}$ olur.

İspat: Arşimedyan Riesz uzaylarının Fremlin tensör çapımının inşa edildiği Teorem 4.3.3'de geçen notasyonu kullanalım. Herhangi $u \in E\bar{\otimes}F$ için $|u| \le x_0 \otimes y_0$ koşulunu sağlayan $x_0 \in E^+, y_0 \in F^+$ elemanları vardır. Dolayısıyla,

$$\rho(u) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_E\|y_i\|_F : i \in \{1,...,n\}, x_i \in E^+, y_i \in F^+ \text{ ve } E\bar{\otimes}F \text{ içinde } |u| \le \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}$$

şeklinde $\rho : E\bar{\otimes}F \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli tanımlanabilir. Açıktır ki ρ bir Riesz yarı normudur.

Diğer taraftan herhangi Banach örgüsü H ve $\psi : E \times F \to H$ sürekli, pozitif bilineer dönüşümü için tensör çarpımı tanımından bir tek $T : E\bar{\otimes}F \to H$ lineer ve artan dönüşümü vardır ve $\psi = T\otimes$ sağlanır. $u \in E\bar{\otimes}F$ ve $\varepsilon > 0$ seçelim. O halde tensör çarpımı tanımı gereği $|u| \le \sum_{i\le n} x_i \otimes y_i$ ve infimum gereği $\sum_{i \le n}\|x_i\|\|y_i\| \le \rho(u) + \varepsilon$ sağlanacak biçimde $x_0,...,x_n \in E^+$ ve $y_0,...,y_n \in F^+$ elemanları vardır. Buna göre T'nin artan olması sebebiyle $|Tu| \le T|u| \le T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\psi(x_i, y_i)$ olur ve dolayısıyla Riesz normu gereği $\|Tu\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i, y_i)\right\| = \sum_{i=1}^{n}\|\psi(x_i, y_i)\| \le \sum_{i=1}^{n}\|\psi\|\|x_i\|\|y_i\| \le \|\psi\|(\rho(u) + \varepsilon)$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\|Tu\| \le \|\psi\|\rho(u)$ olur. Buna göre $u \in E \otimes F$ ve $\|\psi\| \le 1$ ise $\|\hat{\psi}(u)\| \le \rho(u)$ olur. Yani, $u \in E \otimes F$ ise $\|u\|_{|\pi|} \le \rho(u)$ elde edilir.

Öte yandan, $0 \ne u \in E\bar{\otimes}F$ ise $|u| \ge x \otimes y$ olacak biçimde $0 < x \in E$ ve $0 < y \in F$ elemanları vardır ve Lemma 4.4.3 yardımıyla $\rho(u) \ge \rho(x \otimes y) \ge \|x \otimes y\|_{|\pi|} = \|x\|\|y\| > 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\rho(u) = 0$ iken $u = 0$ olmalıdır. Bu ise ρ 'nun aslında bir norm olduğunu gösterir. Buna yüzden ρ Riesz normuna göre $E\bar{\otimes}F$ 'nin bir tamlanışı olan H Banach örgüsü vardır ve $E\bar{\otimes}F$, G içinde norm yoğun olur. Tensör çarpımı dönüşümü olan $\otimes : E \times F \to G$ Riesz bimorfizmi olduğundan $x \in E$ ve $y \in F$ için $|x \otimes y| = |x| \otimes |y| > 0$ olur ve $\rho(x \otimes y) \le \||x|\|\||y|\| = \|x\|\|y\|$ sağlanır. Bu durumda $\|\otimes\| \le 1$ olmalıdır. Dolayısıyla projektif norm tanımı gereği $\|u\|_{|\pi|} \ge \rho(u)$ elde edilir.

Sonuç olarak son iki eşitsizliği düşündüğümüzde $u \in E \otimes F$ için $\|u\|_{|\pi|} = \rho(u)$ olmalıdır. Bu sonuca bağlı olarak $x \in E$ ve $y \in F$ için

$$\|x \otimes y\|_{|\pi|} = \rho(x \otimes y) = \rho(|x \otimes y|) = \rho(|x| \otimes |y|) = \| \, |x| \otimes |y| \, \|_{|\pi|} = \| \, |x| \, \| \| \, |y| \, \| = \|x\| \|y\|$$

elde edilir.

Diğer taraftan Teorem 4.3.3 gereği $E \bar{\otimes} F = \overline{(E \otimes F)}^{\rho}$ olur. Dolayısıyla ρ ‘ya göre $E \bar{\otimes} F$ ‘nin tamlanışı olan Banach örgüsü H ile $E \overset{\Delta}{\otimes} F$ bir Banach uzayı olarak özdeşleştirilebilir. Bu durum $E \overset{\Delta}{\otimes} F$ üzerine bir Riesz uzayı yapısı tanımlar.

Üstelik, $E \overset{\Delta}{\otimes} F$ ’nin pozitif konisi $\{x \otimes y : x \in E^{+}, y \in F^{+}\}$ tarafından üretilen $P \subseteq E \otimes F$ pozitif konisinin $E \overset{\Delta}{\otimes} F$ içindeki kapanışıdır. Çünkü $E \bar{\otimes} F^{+} = \overline{P^{+}}^{\rho}$ olduğundan $H^{+} = \overline{(E \bar{\otimes} F)^{+}}^{\rho}$ olur. Yani (ii) doğrudur.

Eğer G herhangi bir Banach Örgüsü ve $\psi : E \times F \to H$ sürekli pozitif bilineer dönüşüm ise tensör çarpımı gereği bir tek $T : E \bar{\otimes} F \to H$ sürekli artan dönüşümü vardır öyle ki $T \otimes = \psi$ ve $\|T\| \leq \|\psi\|$ sağlanır. Buna göre Hahn-Banach teoremi gereği sürekli, artan ve lineer olacak biçimde $\hat{T} : E \overset{\Delta}{\otimes} F \to G$ genişlemesi vardır ve $\|\hat{T}\| \leq \|\psi\|$ sağlanır. Diğer taraftan herhangi $S : E \overset{\Delta}{\otimes} F \to H$ sürekli, artan, lineer dönüşüm ise $\psi = S \otimes : E \times F \to H$ pozitif, bilineer dönüşümdür ve $\|\psi\| \leq \|S\| \|\otimes\| = \|S\|$ sağlanır. Üstelik, Teorem 4.3.3.(ii) gereği, ψ bir Riesz bimorfizmi olması için gerek ve yeter koşul $T : E \bar{\otimes} F \to H$ Riesz homomorfizmi olması ve süreklilik gereği $\hat{T} : E \overset{\Delta}{\otimes} F \to H$ Riesz homomorfizmi olmasıdır.

Keyfi olarak $u \in E \overset{\Delta}{\otimes} F$ seçelim. Kabul edelim ki $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset E^{+}$ ve $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset F^{+}$ dizileri için $\sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\| \|y_i\| < \infty$ sağlansın. Dolayısıyla $\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \otimes y_i \in E \overset{\Delta}{\otimes} F$ olur ve $|u| \leq \sum_{i \in N} x_i \otimes y_i$ sağlanıyorsa

$$\|u\|_{|\pi|} \leq \left\| \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \otimes y_i \right\|_{|\pi|} \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i \otimes y_i\|_{|\pi|} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| \|y_i\|$$

olur. Diğer taraftan kapanış gereği $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n \in N$ için $\|u - u_n\|_{|\pi|} \leq 2^{-n}\varepsilon$ olacak biçimde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E\overline{\otimes}F$ dizisi vardır. Bazı bölümlerinde aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset E^+$ ve $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset F^+$ dizilerini seçelim. Her bir $\forall n \in N$ için

$$|u_0| \leq \sum_{i \leq k_o} x_i \otimes y_i \, ,$$

$$\sum_{i \leq k_0} \|x_i\| \|y_i\| \leq \|u_o\|_{|\pi|} + \varepsilon \, ,$$

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \sum_{k_n < i \leq k_{n+1}} x_i \otimes y_i \, ,$$

$$\sum_{k_n \leq i \leq k_{n+1}} \|x_i\| \|y_i\| \leq \|u_{n+1} - u_n\|_{|\pi|} + 2^{-n}\varepsilon \, .$$

Bu koşullar altında $|u| \leq |u_0| + \sum_{i\in N} |u_{n+1} - u_n| \leq \sum_{i\in N} x_i \otimes y_i$ sağlanır ve dolayısıyla

$$\sum_{i\in N} \|x_i\| \|y_i\| \leq \|u_0\|_{|\pi|} + \varepsilon + \sum_{i\in N} \|u_{n+1} - u_n\|_{|\pi|} + 2\varepsilon \leq \|u\|_{|\pi|} + 7\varepsilon$$

elde edilir. $0 < \varepsilon$ keyfi seçildiğinden ek küçük üst sınır olduğu görülür.

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\otimes"'] & H \\
E \overset{\Delta}{\otimes} F \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.4.1

Sonuç 4.4.5. (Fremlin, 1974) Eğer *E*, *F* ve *G* Banach örgüleri ise kanonik lineer uzay izomorfizmaları $E \otimes F \simeq F \otimes E$, $E \otimes (F \otimes G) \simeq (E \otimes F) \otimes G$ Banach örgüsü izomorfizmleri

$$E\overset{\Delta}{\otimes}F \simeq F\overset{\Delta}{\otimes}E \text{ ve } E\overset{\Delta}{\otimes}(F\overset{\Delta}{\otimes}G) \simeq (E\overset{\Delta}{\otimes}F)\overset{\Delta}{\otimes}G$$

izomorfizmlerine dönüşür.

E ve F Banach örgüleri için $E\overset{\Delta}{\otimes}F$ Banach örgüsü olduğundan $(E\overset{\Delta}{\otimes}F)^*$ dual uzayı da Banach uzayıdır. $(E\overset{\Delta}{\otimes}F)^*$ uzayının her bir elemanı sürekli, artan iki lineer fonksiyonun farkıdır ve bu fonksiyonlar $E\times F$ üzerinde tanımlı pozitif, sürekli, bilineer fonksiyonlar belirler. Bu durumda $(E\overset{\Delta}{\otimes}F)^*$ dual uzayının elemanları $E\times F$ üzerinde tanımlı sürekli, pozitif bilineer fonksiyonların farkı olarak yazılabilen sürekli bilineer fonksiyonellerdir.

$0 < h \in (E\overset{\Delta}{\otimes}F)^*$ için $\|h\| = sup\left\{\left\|h\left(x\otimes y\right)\right\| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\right\}$ olur. O halde genel olarak $\|h\| = \|\,|h|\,\| = \sup\left\{\sum_{i\le m, j\le n} |h(x_i \otimes y_i)| : \left\|\sum_{i\le m}|x_i|\right\| \le 1, \left\|\sum_{j\le n}|y_j|\right\| \le 1\right\}$ olur.

Önerme 4.4.6. (Fremlin, 1974) E ve F Banach örgüleri olmak üzere $E\otimes F$ içinde $\left\{x\otimes y : x\in E^+, y\in F^+\right\}$ tarafından üretilen koni P ve $\sigma : E\otimes F \to \mathbb{R}$ bir yarı normu için

(i) $\forall x\in E^+$ ve $y\in F^+$ için $\sigma(x\otimes y) \le \|x\|_E \|y\|_F$

(ii) $u+v\in P$ ve $u-v\in P$ koşullarını sağlayan $u,v\in E\otimes F$ için $\sigma(u)\le\sigma(v)$

koşulları sağlanıyorsa $\forall u\in E\otimes F$ için $\sigma(u) \le \|u\|_{|\pi|}$ olur.

İspat: $u_0 \in E\otimes F$ ise Hahn-Banach teoremi gereği $\forall u\in E\otimes F$ için $|f(u)| \le \sigma(u)$ ve $f(u_0) = \sigma(u_0)$ olacak biçimde $f : E\otimes F \to R$ lineer fonksiyoneli vardır. O halde Teorem1.7.1 (Jameson, 1970) ile $U = \{u : \sigma(u) \le 1\}$ olmak üzere $\forall u\in P$ için $|f(u)| \le g(u)$ ve $\forall u\in E\otimes F$ için $|g(u)| \le \sigma(u)$ olacak biçimde $g : E\otimes F \to R$ lineer fonksiyoneli vardır. Buna göre $f_1 = \frac{1}{2}(g+f)$ ve $f_2 = \frac{1}{2}(g-f)$ olmak üzere $f_1, f_2 : E\otimes F \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonları P üzerinde pozitiftir. Dolayısıyla $E\otimes F$ üzerinde pozitif, bilineer fonksiyoneller belirler ve bunların $E\overline{\otimes}F$ üzerine artan, lineer fonksiyonel olacak biçimde bir tek genişlemesi vardır. Böylece denk olarak $g = f_1 + f_2$ fonksiyoneli $E\overline{\otimes}F$ üzerinde bir lineer fonksiyonel olarak görülür. Herhangi $x \in E$ ve $y \in F$ için,

$$|g(x \otimes y)| \leq g(|x| \otimes |y|) \leq \sigma(|x| \otimes |y|) \leq \| \, |x| \, \| \| \, |y| \, \| = \|x\| \|y\|$$

olduğundan $g\otimes : E \times F \to \mathbb{R}$ bilineer fonksiyoneli için $\|g \otimes\| \leq 1$ sağlanır. Dolayısıyla $g : E\overline{\otimes}F \to R$ lineer fonksiyoneli için $\|g\| \leq 1$ olur (Teorem 4.4.4(iii)). Sonuç olarak

$$\sigma(u_0) = f(u_0) = f_1(u_0) - f_2(u_0) \leq |f_1(u_0)| + |f_2(u_0)|$$

$$\leq f_1(|u_0|) - f_2(|u_0|) = g(|u_0|) \leq \| \, |u_0| \, \|_{|\pi|} = \|u_0\|_{|\pi|}$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.7. (Fremlin, 1974) Bir önceki önermede (ii) şartını sağlayan $E \otimes F$ üzerinde tanımlı en güçlü çarpım normu $\| \ \|_{|\pi|}$ ' dur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Şimdiye değin tensörler hakkında oldukça fazla çalışma yapılmasına karşın özellikle Banach örgülerinin tensör çarpımları hakkında çalışılmamış birçok nokta vardır. Uzayların geometrik özelliklerinin tensör çarpımlarında da korunup korunmadığı araştırılması gereken önemli konulardır. Örneğin Banach örgülerinin tensör çarpımlarının Banach örgüsü olması gerekmediği veya Radon-Nikodym özelliğinin kalıtsal bir özellik olup olmadığı gösterilmemiştir.

Bu tez çalışması Banach uzaylarının ve sıralı uzayların tensör çarpımları hakkında literatürün derlenmesi, açık problemlerin ortaya konması açısından bir öneme sahiptir. Ayrıca Banach örgüleri üzerinde tanımlı bazı operatör uzaylarının (kompakt, zayıf kompakt, L- veya M-zayıf kompakt operatörler gibi) tensör çarpımları veya Riesz uzay teorisine ait bazı özel kümeler ve dualite açısından tensör çarpımlarının irdelenmesi ile elde edilecek olası sonuçlar için bir alt yapı sağlamıştır.

KAYNAKLAR

Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. (2002). *An Invation to Operator Theory*. American Mathematical Society Providence,Rhode Island.

Aliprantis, C.D., Border, K.C. (2006). *Infinite Dimensional Analysis.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN-10 3-540-29586-0.

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O. (2006). *Positive Operators*. Springer, ISBN-10 1-4020-5007-0.

Amemiya, I., Shiga K. (1957). On tensor products of Banach spaces. *Kodai Math. Sem. Rep. 9,* 161-178. (3)

Bu Q, Li Y., Xue, X. (2011). Some properties of the space of regular operators on atomic Banach lattices, *Collect. Math. 62*, 131–137.

Bu, Q. Buskes, G. and Kusraev, A.G. (2007). Bilinear maps on products of vector lattices, *Positivity*, 97-126

Buskes, G., vanRooij, A.C.M. (1993). The Archimedean l-group tensor product, *Order*, *10*(1), 93-102.

Defant, A. and Floret, K. (1988). Aspects of the metric theory of tensor product aand operatör ideals. *Note di Matematica 8,* 181- 281.(43).

Defant, A., Floret, K. (1993). *Tensor Norms And Operator Ideals,* North-Holland, ISBN:9780444890917

Diestel J, Fourie JH, Swart J (2008). The Metric Theory of Tensor Products_Grothendieck's Resume Revisited, *American Mathematical Society*, ISBN: 978-0-8218-4440-3.

Fremlin D.H, Talagrand, M (1979). A Decomposition Theorem In Tensor Products Of Archımedean Vector Lattıces, *Mathematika* 26 302-305.

Fremlin, D. H. (1972). Tensor Products of Archimedean Vector Lattices, *American Journal of Mathematics, Vol. 94*. No. 3, 777-798.

Fremlin, D.H. (1974). Tensor product of Banach lattice, *Mathematische Annalen*, *211(2)*, 87-106, DOI:10.1007/bf01344164.

Gaans, O.V., Kalauch, A. (2010). Tensor Products of Archimedean Partially Ordered Vector Spaces, *Mathematical Institute, Leiden University*, Netherlands.

Gilbert, J. E., Leih, T. (1980). Foctorization, Tensor products and bilinear forms in Banach space theory*, Üniv. Texas Press,* 182-305 (81).

Grobler, J.J., Labuschagne, C.C.A. (1988). The tensor product of Archimedean ordered vector spaces, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 104*, 331–345.

Groblerand, J. J., Labuschagne, C. C. A. (1988). The tensor product of Archimedean ordered vector spaces, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *104*, 331-345, doi:10.1017/S0305004100065506.

Haandel, M. (1993). *Completions in Riesz space theory* (Ph.D. thesis), University of Nij-megen, Netherlands.

Hackbusch, W. (2012). *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 978-3-642-28026-9.

Holub, J.R. (1972). Compactness in Topological Tensor Products and Operator Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society, 36*(2), 398-406.

Jameson, G.J.O. (1970). *Ordered Linear Spaces*, Springer, https://doi.org/10.1007/BFb0059132.

Kakutani, S.(1941b). Concrete reoresentation of abstracts (M)-spaces. (A characterization of the space of ontinuous functions.). *Ann of Math*, 42(2), 994-1024.

Kalauch, A., Gaans, O.V. (2010). Tensor Products of Archimedean Partially Ordered Vector Spaces, *Positivity*, 14, 705-714.

Kalauch, A., Gaans, O.V. (2019). *Pre-Riesz Spaces.* De Gruyter, ISBN 978-3-11-047539-5

Kelley, J.L., Namioka, I. (1963). *Linear Topological Spaces*. Springer-Verlag New York.

Lindenstrauss, J.A. Pelczynski, (1968). Absolutely summing operators in Lp-spaces and applications, *Studia Math., 29*, 275-326 (173)

Losert, V.-Michor, P. (1976). Ausarbeitung der Resume de la thehorie metrique des produits tensoriels topologiques (unpublished seminar notes), University of Wien. (179)

Lotz, H. P. (1973). Grothendieck ideals of operators in Banach spaces (unpublished lecture notes). Üniv. Illions, Urbana (180)

Martinez, J. (1972). Tensor products of partially ordered groups, *Pac. J. Math. 41* ,771–789.

Mathonline, *Tensor Products of Linear Operators of Normed Linear Spaces*, Erişim adresi: http://mathonline.wikidot.com/tensor-products-of-linear-operators-of-normed-linear-spaces.

Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach Lattices*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-76724-1.

Michor, P. (1978). Functors and categories in Banach -spaces, *Lecture Notes Math., 651*. (191)

Murray, F.J., vonNeumann, J. (1936). On rings of operators. *Annals of Math*., 37(1), 116-229.

Muzundu, K. (2012). *Positive Operators on Banach Lattices*, (Postgradute Seminar).

Puglisi, D. (2007). Fremlin Tensor Products of Banach Lattices, *Quaestiones Mathematicae, 30*(1), 45-56, DOI: 10.2989/160736007780205666.

Purbhoo, K. (2012). Notes on Tensor Products and Exterior Algebra, Lecture Notes, Erişim adresi: https://www.math.uwaterloo.ca/~kpurbhoo/spring2012-math245/tensor.pdf.

Qingying, B., Buskes, G. (2009). Schauder decompositions and the Fremlin projective tensor product of Banach lattices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 355*(1), 335–351, doi10.1016/j.jmaa.2009.01.061.

Racher G. (1992), On the tensor product of weakly compact operators, *Mathematische Annalen, 294, 267-275.*

Ryan R.A. (2002). *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, ISBN 1852334371.

Schatten, R. (1950). *A theory of cross-spaces*, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press. (249)

Waaij, J.V. (2013). *Tensor Products in Riesz Space Theory*. (Master Thesis), University of Leiden.

Wittstock, G. (1974). *Ordered normed tensor products*. Lecture Notes in Physics, vol 29. Springer, Berlin, Heidelberg.

Yıldız, A. ve Eröz, M. (2009). *Fonksiyonel analiz.* Sakarya Üniversitesi Yayınları.

Zaanen, A.C. (1997). *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg, ISBN 3-540-619-89-5.

ÖZGEÇMİŞ

Yağmur Nur Tonka, 27/07/1992 İstanbul doğumlu olup, 2010 yılında Ahmet Buhan Lisesinden ve 2016 yılında da Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun olmuştur. 2016 yılında Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesinde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.