ÖRGÜ GRUPLARI

Aslı YAVAŞ
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Mehmet KIRDAR
2019

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖRGÜ GRUPLARI

Aslı YAVAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Doç. Dr. MEHMET KIRDAR

TEKİRDAĞ-2019

Doç. Dr. Mehmet KIRDAR danışmanlığında, Aslı YAVAŞ tarafından hazırlanan “ ÖRGÜ GRUPLARI ’’ isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Doç. Dr. Ünver ÇİFTÇİ *İmza*:

Üye: Doç. Dr. Mehmet KIRDAR *İmza*:

Üye: Doç. Dr. Sezgin SEZER *İmza*:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Doç. Dr. Bahar UYMAZ

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÖRGÜ GRUPLARI

Aslı YAVAŞ

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet KIRDAR

Bu tezde Örgü gruplarını üreteçleri ve ilişkileriyle betimlemeye ve Artin teoremini ispatlamaya çalıştık. Ayrıca küçük indeksli örgü grupları için bu grupların kompleks temsilleri çalışıldı. Örgü grupları, Matematikte pek çok yerde karşımıza çıkan, simetrik gruplarla birlikte anılan, sonsuz elemanlı değişmez grup ailelerinden biridir. Bu gruplar, ayrıca fizikte, özellikle kuantum teorisinde uygulama alanı bulmuştur. Bu grupların temsiller yoluyla betimlenmesi pek çok probleme konu olmuştur. Bu problemlerin pek çoğu hala açık problemdir. Biz bu tezde bu grupları Artin teoremi ile betimlemeye ve B_3 örgü grubunun matris temsilleri üzerinde çalıştık. Ayrıca Artin grubunun merkezi, saf örgü grubu ve Burau temsili gibi diğer önemli konulara da değinildi.

Anahtar Kelimeler: Artin teoremi, B_3 örgü grubunun kompleks temsilleri, Burau Temsili

2019, 34 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

BRAID GROUPS

Aslı YAVAŞ

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KIRDAR

In this thesis, we decribe the Braid groups of knitters with their genarators and their relations and prove the Artin theorem. We also studied the complex representations of these groups for small indexed Braid groups. Braid groups, one of the many groups in mathematics, emerging, as related to symmetric groups, are a family of non- abelian groups with infinitely many elements.These groups also found application in physics, especially in quantum theory. Description of these groups through representations has been the subject of many problems. Many of these problems are still open problems in mathematics. In this thesis, we tried to decribe these groups by Artin theorem and also we studied two dimentioal matrix representations of the Braid group B_3. We also touched upon other important issues such as the center of the Artin group, the pure Braid group, and the Burau representation.

Keywords: Artin Theorem, Complex representations of B_3, Burau representation

2019, 34 pages

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

B_n	: σ_i elemanları tarafından üretilen örgü grubu
β_n	: n-telli geometrik örgülerin kümesi
$B_n = {}^{\beta_n}/_{\sim}$	: β_n kümesinin izotopi denklik ilişkisi altındaki denklik sınıfları kümesi
B_n^0	: B_n örgü grubunun bir alt grubu
$B_n/P_n \cong S_n$	: Bölüm grubu ve S_n'simetrik grubuna izomorftur
β	: İndirgenmiş Burau temsili
$\beta^{\wedge}$	: İndirgenmemiş Burau temsili
$\beta(z)$	: 2-boyutlu z parametreli indirgenmiş Burau temsili
$[B_n: B_n^0]$	: B_n^0 alt grubunun B_n içindeki indeksi
$a \star b$	: İki örgünün çarpılmsı işlemi
$\sim_h$	: Homeomorfizma denkliği
$a \sim_h b$	: Homeomorf denk örgüler
$\sim_{iso}$	: İzotopi denkliği
$\lhd$	: Normal alt grup
$\cong$	: İzomorfizma
$\ltimes$	: Yarı-direkt çarpım
$\oplus$	: Direkt toplam
$\otimes$	: Tensör çarpım
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı tüm kompleks sayılar kümesi
G_n	: Bir grup
G_n^0	: G_n grubunun bir alt grubu
$GL_n(\mathbb{C})$	: $n \times n$-boyutlu ters çevrilebilir kompleks matrisler grubu
$[G_n: G_n^0]$	: G_n^0 alt grubunun G_n içindeki indeksi
$\xi\{z\}$	: B_3 örgü grubunun 1-boyutlu temsilleri
$\mu\{z\}$	: İndirgenemez 3-boyutlu bir temsil
P_n	: Saf örgü grubu
S_n	: Simetrik grup

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olmak için elinden geleni sunan, çalışmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren, her sorun yaşadığımda güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki meslek hayatımda da bana katmış olduğu değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Mehmet KIRDAR'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Teşekkürlerin az kalacağı, bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan biricik aileme, ayrıca insani ve ahlaki değerleri ile her zaman örnek aldığım sevgili babam Hüseyin YAVAŞ'a çalışmalarımda beni cesaretlendirerek verdiği desteklerden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Mayıs 2019 Aslı YAVAŞ

Matematik Öğretmeni

1.GİRİŞ

Örgü teorisi geçtiğimiz 20. Yüzyılda ortaya çıkmıştır. Temelleri 1925'te Alman matematikçi Emil Artin tarafından atılmıştır, ancak Artin'den öncesine gidilecek olursa A.Hurwitz, Fricke ve Klein'in eserlerinde ve hatta KF Gauss'un defterlerinde bahsettiğini görüyoruz. Artin'in öne sürdüğü örgü kuramı cebirsel anlamda, 3-boyutlu uzaydaki çizgelerin kesişme noktalarının incelenmesine önemli bir katkıydı. Fakat başlangıçta Artin, örgüleri, tekstil endüstrisi için matematiksel bir model olarak sunmuştur, ancak bu teorinin uygulama alanının çeşitliliği, günümüzde Karmaşık Analiz, Kuantum Mekaniği ve Kuantum Alan teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca Örgü Grupları yoğun bilgisayar işlemlerini sağlamada son derece etkilidir. Bu arada çeşitli araştırmacılar, işlevsellik açısından teknoloji ile aramıza elektronik verileri koruyucu protokoller ağı inşa etmeyi gerekli gördüler. Bu sebeple, Örgü Gruplarına dayalı şifreleme sistemleri için, bilgisayar dilinde çeşitli protokoller önerdiler. Bu protokoller, Anshel-Anshel-Godfeld protokolü, anahtar değişim protokolü Diffie-Hellman, eşlemede şema imzası, kör imza şeması Verma, protokolleri bazılarındandır. Bu protokollerin günümüzde aşağıdaki bilgi güvenliği sorunlarına çözüm üretmesi beklenmektedir. Saklanan verilerin gizliliği, iletilen verilerin gizliliği, bulut bilgisinin gizliliği, bulutta işlenen bilgilerin bütünlüğü, bilginin orijinalliği, kullanıcı doğrulama, kullanıcının anonimliği gibi. Ve Örgü Grubuna dayalı şifreleme temel kripto sistemleri için örneğin, anahtar değişim protokolü, şifreleme, kimlik doğrulama sistemi, elektronik imza sistemi gibi bilişim dünyasının günümüzde gelişen popüler konularına temel olmuştur.

Bunun dışında, hayatımızın pek çok anında örgülerle karşılaşıyoruz. Acaba ne kadar farkındayız? Bu durumları aşağıda verilen şekil 1.1'deki görseller gibi çeşitlendirebiliriz.

(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g)

Şekil 1.1. (a) Çanta örgüsü (Anonim 2019) (b) Saç örgü (Melanie 2016) (c) Metal boruda örgü (Anonim 2013) (d) Dekoratif ip örgü (Anonim 2019) (e) Dekoratif fayanslar (Anonim 2019) (f) Örgü boru ve hortum (Anonim 2019) (g) Renkli kurdeleler (Richeson 2009)

Matematikçiler, matematiğin güzelliğini yansıtan her şeyden büyülenmişlerdir. Sonsuz fraktallar, çeşitli desenler, cisimlerin geometrisi, uzaydaki matematik ve tabiki de örgüler şeklinde bu örnekleri çeşitlendirebiliriz. Matematikten etkilenen sadece matematikçiler değildir, ondan ilham alan birçok sanatçıda mevcuttur.

Sanat ve Matematik arasındaki bağlantıyı göstermek için her yıl düzenlenen Bridges Konferansları önemli bir oluşuma hizmet etmektedir. Konferansta Matematikten ilham alınarak yapılan çalışmalarına dair geniş yelpazeden örnekler de yer almaktadır. Örgü örme eşitlikleri başlığı altında aşağıdaki görselde tasvir edilen atkıda, bir istatiksel mekanik eşitliği olan Yang-Baxter eşitliğinden ilham alınmıştır. Bu eşitlik, cebirsel örgü eşitliğinden bir çeşitleme yada düğüm teorisindeki 3'üncü Reidemeister hareketi olarak tanımlanmıştır. Mavi, yeşil ve altın renklerine sırasıyla 1, 2, 3 rakamlarını vererek, Yang-Baxter eşitliği bu çalışmada bahsettiğimiz örgü grubunun üreteçleri ile üretilen $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ eşitliği ile alakalıdır. Bu eşitlikten iplerin birbiri üzerinden dolanması tasvir edilmektedir. Bu dolanmalar farklı biçimlerde görülmelerine rağmen izotopi denkliği altında aynı örgüye karşılık gelir. Eşitliğin iki yanı, atkının iki ucunda sergilenirken, eşitlik işareti ise atkının orta bölümünde yer alıyor. Eşitliği doğru okumak için, kumaşın iki yüzlü olması gereklidir. Sanatçı, iki yüzlü kumaşı ve ipliklerin birbirleriyle eş zamanlı olarak dolaşımını üretebilmek için çift örgüyü ve boru şeklinde örgüyü karışık halde kullanmıştır. Bu yöntem sonucunda, renkli ipler atkının kahverengi gövdesi üzerinde örülerek matematiksel bir sanat eseri ortaya çıkmıştır. Matematiksel eşitliklerle sanat adlı yazısında Sönmez (2017) kış gelince, sokaklar bu tarz bir atkıyı boynuna dolayan matematikçilerle dolabilir, şeklinde şekil 1.2 ‘de örgülerin popüler bilimde yeri olduğundan bahsetmektedir.

Şekil 1.2. Atkı örgü modeli (Sönmez 2017)

Fakat bu tez, örgünün cebirsel yapısı ve temelleri üzerinde şekillenmiştir. Artin örgü grubu da aşağıda tanımlanacağı üzere bazı kurallar etrafında şekillenen bir gruptur.

Artin örgü grubu B_n, $n \geq 2$, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ üreteçleri ile üretilen ve aşağıdaki (1.1) ve (1.2) ilişkileri ile verilmiş bir gruptur.

- $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, |i - j| \geq 2$ (1.1)
- $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i,\ 1 \leq i \leq n - 2$ (1.2)

Örgü grupları, Topoloji ve Geometrinin bir çok konusunda ve problemlerinde karşımıza çıkar. Örneğin, Ping Zhang’in öğrencisi Dervişe Işıman, polinomsal kaplama yüzeylerinin örgü grupları ile ilişkisini tezinde incelemiştir. Işıman’ın (Ocak 1999) tezinde Örgü Grupları hakkında kısa bir bilgi appendix 1’de veriliyor.

$n = 2$ için $B_2 \cong \mathbb{Z}$ olur ve enteresan değildir. Bununla birlikte $n = 3$ için B_3 örgü grubu σ_1 ve σ_2 üreteçleri ve $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ ilişkisi ile üretilen bir değişmesiz, sonsuz elemanlı bir gruptur ve oldukça karmaşıktır. Aynı şekilde $n \geq 3$ için, örgü grupları değişmesiz, sonsuz gruplardır.

B_n örgü grubunun k-boyutlu bir kompleks temsili bu gruptan $GL_k(\mathbb{C})$ grubuna, yani $k \times k$ tersi alınabilir kompleks matrisler grubuna olan bir grup homomorfizmasıdır.

İki temsil sabit bir P matrisi ile eşlenik ise bu iki temsilin birbirine izomorf olduğu söylenir. Bir temsil, daha düşük boyutlu iki temsilin direkt toplamına izomorf ise bu temsile indirgenebilir, aksi durumda indirgenemez denir. Tanım gereği tüm 1-boyutlu temsiller indirgenemezdir.

Örgü grubunun daha yüksek boyutlu indirgenemez bir temsiline örnek olarak Burau temsili verilmektedir (Formanek 1994 ve Long 2015). B_n grubunun Burau temsili

$(n-1)$ boyutlu indirgenemez bir kompleks temsildir.

B_3 örgü grubunun ≥ 5-boyutlu indirgenemez kompleks temsillerinin bir sınıflandırılması Tuba ve Henzl (2001) yapmış oldukları çalışmasında yer verilmektedir. Bu tezde B_3 grubunun indirgenemez kompleks temsillerinin sınıflandırılması 2-boyutlu temsiller için yapıldı ve ayrıca B_3 örgü grubunun Burau temsili daha yakından incelendi. Ayrıca Burau temsilinin karesinin 3+1 boyutlu bir parçalanmaya sahip olduğu gösterildi.

Örgü gruplarının düşük boyutlu temsilleri Formenek (1994)'in çalışmasında ele alınmıştır ve sınıflandırma yapılmıştır. Bu makale de Burau temsiline dayanmaktadır.

Fakat bu tezde Jordan formları göz önüne alınarak, Burau temsilinden daha fazla sayıda temsil olduğu gösterilmiştir.

Burau temsilinin karesine ve diğer kuvvetlerine bakmak ise örgü gruplarının temsil halkalarının incelenmesinde önemli bir bakış açısı olacaktır. Bu tezin devamı niteliğindeki çalışmalarda da bu yöndeki araştırmalar ve hesaplamalar devam edecektir. Ve yeni temsiller üretilmeye çalışılacaktır.

2. GEOMETRİK ÖRGÜLER

Geometrik örgünün tanımı Weinberger (2015) tezinde aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 2.1. I=[0,1] birim aralığı olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan $\mathrm{b} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathrm{I}$ kümesine n- ipli örgü denir:

i) $\mathrm{b} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathrm{I}$ ip denilen, topolojik olarak I=[0,1] birim aralığa homeomorf n tane ayrık iplerin kümesinden oluşur, ve $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ projeksiyonu altında bu ipler birim aralığa homeomorfdur.

ii) $\mathrm{b} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1{,}0), (2{,}0), \ldots, (\mathrm{n}, 0)\} \times \{0\}$

$\mathrm{b} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1{,}0), (2{,}0), \ldots, (\mathrm{n}, 0)\} \times \{1\}$

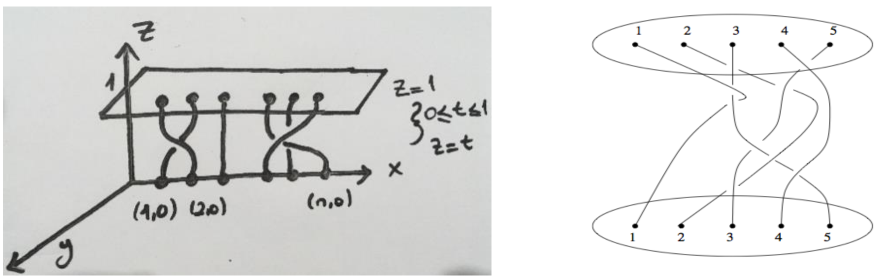
Birinci şart bize her iplikçiğin $\mathrm{z} = \mathrm{t},\ 0 \leq \mathrm{t} \leq 1$ düzlemini sadece bir noktada kestiğini söylüyor. İp $\mathrm{z} = 1$ düzleminden, $\mathrm{z} = 0$ düzlemine iniyor. Yukarıdaki bir noktayı aşağıdaki bir noktaya birleştiriyor. Bu ipler ayrık olduğu yani kesişmedikleri için aynı noktadan başlamazlar, aynı şekilde aynı noktaya inemezler. İkinci şart ise bize yukarıdaki noktalar ile aşağıdaki noktalarının yerini veriyor. Bu noktalar sabittir.

Yukarıdaki noktalar $\{(1{,}0{,}1), (2{,}0{,}1), (3{,}0{,}1), \ldots, (\mathrm{n}, 0{,}1)\}$ noktaları,

Aşağıdaki noktalar $\{(1{,}0{,}0), (2{,}0{,}0), (3{,}0{,}0), \ldots, (\mathrm{n}, 0{,}0)\}$ noktalarıdır.

Aşağıdaki resimlerde örgü örnekleri verilmiştir. $\mathrm{B_n}$ örgü grubu ve $\mathrm{B_5}$ örgü grubu için görsel iki örnek sunulmuştur (Şekil 2.1).

(a) (b)



Şekil 2.1: (a) $\mathrm{B_n}$ ve (b) $\mathrm{B_5}$ örgü grupları için örgü örnekleri (15-03-LebedevFV 2015)

Aşağıdaki ifadede iki örgünün denk olması tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.

a, b iki örgü olsun, $a, b \subset \mathbb{R}^2 \times I$.

$F(a) = b$ şartını sağlayan bir $F: \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2 \times I$ homeomorfizması varsa,

a ve b' ye homeomorf denk örgüler denir ve $a \sim_h b$ ile gösterilir.

Örgüler arasındaki diğer bir denklikte izotopi denkliğidir. Bu denklik Artin teoreminin ispatında önemli bir rol oynamaktadır. Aşağıdaki tanımda izotopik denk örgülerden bahsedilmiştir.

Tanım 2.3.

a ve b iki örgü olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir $F: a \times I \to \mathbb{R}^2 \times I$ fonksiyonu varsa a ve b'ye izotopik ve ya izotopi denk örgüler denir:

i) F sürekli fonksiyondur .

ii) $\forall\, s \in I$ için $F_s: a \to \mathbb{R}^2 \times I, x \longrightarrow F(x, s)$ fonksiyonu içine fonksiyondur, ve görüntüsü yine bir örgüdür.

iii) $F(a, 0) = a$, $F(a, 1) = b$.

Bu denklik homeomorfizma denkliği ile aynıdır. Yani

$a \sim_h b \Leftrightarrow a \sim_{iso} b$.

(Weinberger 2015).

Aşağıda iki n- telli örgünün çarpılması işlemi tanımlanıyor.

Tanım 2.4.

$a, b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ iki örgü olsun. Bu iki örgünün çarpılması işlemi $a \star b$ ile aşağıdaki gibi tanımlıdır **(2.1).**

$$a \star b = \left\{ \begin{array}{ll} (x, y, t) \subset \mathbb{R}^2 \times I \,|\, (x, y, 2t) \in a, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \text{ ise} \\ (x, y, 2t - 1) \in b, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \quad \text{ ise} \end{array} \right\} \qquad \textbf{(2.1)}$$

n- telli geometrik örgülerin kümesi β_n ile gösterilsin. Burada örgüler arasındaki ikili ilişki tanımlanmıştır. (n- telli geometrik örgülerin kümesi) β_n kümesinin izotopi denklik ilişkisi altındaki denklik sınıfları kümesi B_n ile gösterilsin. Yani $B_n = {}^{\beta_n}/_{\sim}$ şeklinde yazılır.

Daha sonra B_n örgü grubu üzerinde çarpma işlemini tanımlandığında, bu çarpma işlemi aşağıdaki gibidir.

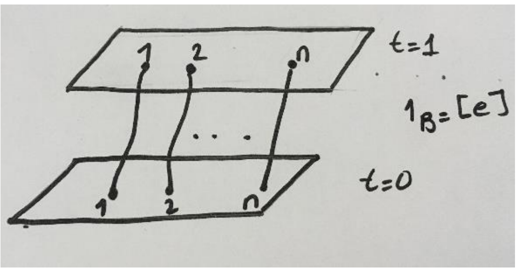
$\alpha = [a] \in B_n$ ve $\beta = [b] \in B_n$ ise $\alpha.\beta = [a \star b]$

Önerme 2.1. B_n, $a.\beta = [a \star b]$ çarpma işlemi altında bir gruptur.

İspat:

Birim elemanı: $1_B = [e] \in B_n$ dir (Şekil 2.2).

$e = \{(i, 0, t) \mid i = 1,2, \dots, n, \quad 0 \le t \le 1\}$



Şekil 2.2. Birim elemanın gösterimi

Ters elemanı:

$a \in \beta_n$ için $a^{-1} \in \beta_n$ elemanı,

$a^{-1} = \{(x, y, t) \mid (x, y, 1 - t) \in a\}$ şeklinde tanımlansın.

$[a] = \alpha$ ise $[a^{-1}] = \alpha^{-1}$ şeklindedir. $a \star a^{-1} \sim e$ olacağı için $\alpha\alpha^{-1} = 1_B$.

Birleşme özelliği:

$\alpha = [a],\ \beta = [b],\ \gamma = [c]$ olsun. Buradan,

$(\alpha.\beta).\gamma = [(a \star b) \star c] = [a \star (b \star c)] = \alpha(\beta.\gamma)$.■

Tanım 2.5.

Önerme 2.1'de grup olduğu ispatlanan B_n örgü grubuna, n-telli örgü grubu denir.

$2.1. B_n$ Örgü Grubunun Temel Üreteçleri

Aşağıdaki şartları sağlayan bir örgüyü e_i ile göstereceğiz.

1) $(i+1,0,1)$ noktasını $(i,0,0)$ noktasına; $(i,0,1)$ noktasını $(i+1,0,0)$ noktasına birleştirecektir.

2) Diğer noktalar için $(j,0,1)$ noktasını $(j,0,0)$ noktasına dümdüz bir şekilde birleştirecektir.

$j \neq i, \ i+1$

3) $(i+1,0,1)$'dan başlayan tel, $(i,0,1)$'dan başlayan telin üstünden bir kez geçecek. Görsel olarak sayfa dışında olan tel ve bu iki tel başka tellerin üzerinden veya altından geçmeyecek.

Tanım 2.1.1.

İzotopi denkliği altında, $\sigma_i = [e_i]$, $1 \leq i \leq n-1$ olsun. σ_i elemanlarına B_n örgü grubunun temel üreteçleri denir.

Teorem 2.1.1.

B_n örgü grubu σ_i, $1 \leq i \leq n-1$ elemanları tarafından üretilir.

İspat:

$t_0 \leq t \leq t_1$, $0 \leq t_0$, $t_1 \leq 1$ belirtilen şekilde olmak üzere seviye seviye verilen örgü parçalandığında, her seviyedeki resim, bir e_i örgüsü veya e_i^{-1} ters örgüsü içerir.

$(1 \leq i \leq n-1)$.

Dolayısıyla verilen örgünün e_i ler'in terslerinin $\star$ işlemi altında bileşimi olduğu görülebilir. Bu sebeple B_n örgü grubunun her elemanı σ_i üreteçlerinin veya terslerinin çarpımıdır.

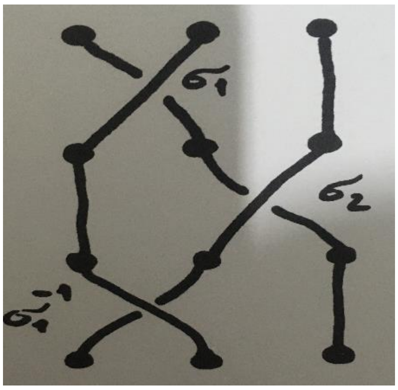
Yani $\alpha \in B_n$ ise

$\alpha = {\sigma_{i_1}}^{j_1} . {\sigma_{i_2}}^{j_2} . \ldots {\sigma_{i_k}}^{j_k}$ şeklinde yazılır.

Burada $i_1, i_2, \ldots i_k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$,

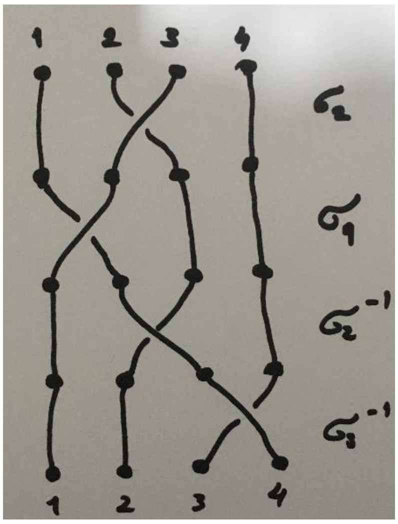
$j_1, j_2, \ldots, j_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. ■

Örnek 2.1.1



Şekil 2.1.1. $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$ elemanının gösterimi

örnek 2.1.2.



Şekil 2.1.2. $\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$ elemanının gösterimi

Aşağıdaki teorem 2.1.2'de verilen B_n örgü grubunun üreteçlerinin sağladığı ilişkiler Chiodo (2005) tezinde belirtilmiştir.

Teorem 2.1.2.

B_n örgü grubun σ_i üreteçleri aşağıdaki (2.1.1), (2.1.2) ilişkileri sağlar:

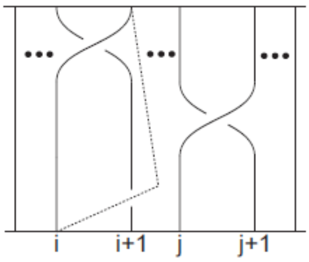
1) $\sigma_i.\sigma_j = \sigma_j.\sigma_i, \quad |i-j| > 1$ **(**2.1.1)

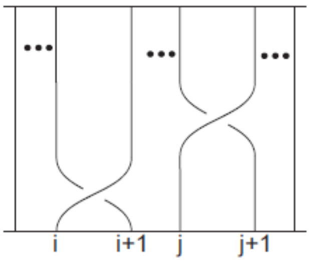
2) $\sigma_i.\sigma_{i+1}.\sigma_i = \sigma_{i+1}.\sigma_i.\sigma_{i+1}, \ 1 \le i \le n-2.$ **(**2.1.2)

İspat:

$|i - j| > 1$ ise $i + 1 \neq j$ ve $j + 1 \neq i$'dir.Yani i, j, $i + 1$, $j + 1$ her nokta birbirinden farklıdır. Aşağıdaki şekillerle izah edilecek olursa , $j > i$ olur.

i i+1 j j+1 i i+1 j j+1





$\sigma_j \sigma_i$ $\sigma_i \sigma_j$

Şekil 2.1.3. İzotopi denk örgüler **Şekil 2.1.4.** İzotopi denk örgüler (Chiodo 2005)

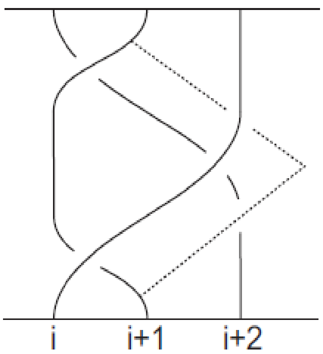
Şekil 2.1.3.'deki 1. Kesişimi aşağı itilir, 2. Kesişim yukarı çekildiğinde şekil 2.1.4.'ü elde edilir. Şekille tasvir edilen bu örgüler izotopi denktir.

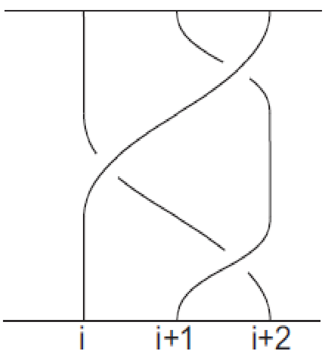
Böylece,

$\sigma_j . \sigma_i = \sigma_i . \sigma_j$ eşitlikleri sağlanır.

2. Eşitliklerin ispatı:

i $i + 1$ $i + 2$ i $i + 1$ $i + 2$





Şekil 2.1.5. **Şekil 2.1.6.**

$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ elemanının gösterimi $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ elemanının gösterimi (Chiodo 2005)

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \; .$$

Şekil 2.1.5.'te i+1'den i+1'e inen tel diğer iki tel arasından sağa doğru çekilirse şekil 2.1.6. elde edilir, dolayısıyla bu görseldeki geometrik örgüler izotopi denktir. O halde,

$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$. ■

Yukarıdaki teoremlerde B_n örgü grubunun üreteçleri tespit edildi ve bazı ilişkileri yazıldı. Fakat bu ilişkilerin minimal olduğu, yani bu grubu tanımlayan ilişkiler olduğu konusu şuana kadar ki araştırma, çalışmamız için yeterli değildir. Başka ilişkilerinde var olacağı düşüncesi ile gözlem ve incelemelere devam edilmiştir.

1920'lerde Emil Artin bu grupta başka ilişkilerin olmadığını ve bu örgü grubunun bu üreteçler ve ilişkiler ile tanımlandığını kanıtlamıştır. Bu teorem Artin Örgü Teoremi olarak bilinmektedir. Japon matematikçi Morita (1992) makalesinde Artin Örgü teoremini, Artin'den farklı ve daha kısa bir şekilde ispatlamıştır. Bir sonraki bölümde tüme varım yöntemi kullanılan bu ispatı aşağıda vermeye çalışacağız.

3. ARTİN ÖRGÜ TEOREMİ

Morita (1992) Artin Örgü teoremini aşağıdaki gibi ispatlamaktadır.

Teorem 3.1. (Artin Örgü Teoremi)

B_n örgü grubu $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ üreteçleri ile ve $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, $|i-j| > 1$

$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, $\quad 1 \le i \le n-2$

İlişkileri ile tanımlıdır.

İspat:

B_n örgü grubundan S_n simetrik grubuna, bir sonraki konuda gösterileceği gibi doğal bir $\pi_n: B_n \to S_n$ projeksiyon homomorfizması vardır. S_{n-1} simetrik grubu S_n grubunun alt grubudur. Benzer şekilde B_{n-1} örgü grubu da B_n örgü grubunun alt grubudur. Şimdi,

$B_n^0 = \pi_n^{-1}(S_{n-1})$ kabul edilsin. B_n^0 kümesi B_n örgü grubunun bir alt grubudur ve B_{n-1} grubu da B_n^0 grubunun bir alt grubudur. Yani, $B_{n-1} < B_n^0 < B_n$. Ayrıca B_n^0 alt grubunun B_n örgü grubundaki indeksi n'ye eşittir, çünkü S_{n-1}'in S_n simetrik grubu içindeki indeksi n'dir.

Şimdi, soyut bir G_n grubu tanımlansın.

$$G := \left\langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \middle| \begin{array}{c} x_i x_j = x_j x_i, \ \ |i-j| > 1 \\ x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \ \ i = 1,2,\dots,n-2 \end{array} \right\rangle$$

Daha sonrada bu grubun içinde bazı elemanlar tanımlanacaktır.

$$\tau_i = x_{n-1}^{-1} \dots x_{i+1}^{-1} x_i^2 x_{i+1} \dots x_{n-1}, \qquad 1 \le i \le n-2$$

$$\tau_{n-1} = x_{n-1}^2.$$

Kabul edelim ki, $G_n^0 < G_n$ alt grubu, $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ ve $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ elemanları tarafından üretilen G_n'in alt grubu olsun.

$G_{n-1} < G_n$ alt grubunu da sadece $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ tarafından üretilen alt grup olarak tanımlayalım. Bu durumda $G_{n-1} < G_n^0 < G_n$ olur. Şimdi G_n'den B_n örgü grubuna,

$\phi_n: G_n \to B_n$, $\phi(x_i) = \sigma_i$, $1 \le i \le n-1$ şeklinde tanımlı doğal bir homomorfizma vardır. Benzer şekilde $\phi_{n-1}: G_{n-1} \to B_{n-1}$ homomorfizması da vardır. Şimdi ispat tüme varım yöntemi ile yapılacaktır.

$n = 2$ için izomorfizmadır. Çünkü $B_2 \cong \mathbb{Z} \cong G_2$.

ϕ_{n-1}'in izomorfizma olduğunu kabul edelim ve ϕ_n'in izomorfizma olduğunu gösterelim.

B_n^0 grubundan B_{n-1} grubuna n-inci ipi silerek doğal bir homomorfizma tanımlayabiliriz:

$\theta: B_n^0 \to B_{n-1}$, $\sigma \to$ n $-$inci ipi silinmiş σ.

Bu durumda $\text{Çek}(\theta)$ çekirdek alt grubu $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_{n-1}$ elemanları tarafından üretilen özgür gruptur.

$\text{Çek}(\theta) = F\langle \tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_{n-1} \rangle = F_{n-1}$.

$\tau'_i = \tau_{n-1}^{-1} \ldots \tau_{i+1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{n-1},\ 1 \leq i \leq n-2$ ve $\tau'_{n-1} = \sigma_{n-1}^2$.

θ homomorfizması örten olduğu için $B_n^0 = B_{n-1} \ltimes \text{Çek}(\theta)$ olur. Ama G_n^0'ın benzer şekilde olduğu yani,

$G_n^0 = G_{n-1} \ltimes F_{n-1}(\tau_1, \tau_2, \ldots., \tau_{n-1})$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca ϕ_n homomorfizması altında x_i'ler σ_i'ye gittiğine göre τ_i'ler de τ'_i ye gider. Dolayısıyla, ϕ_n homomorfizması altında B_n^0 ve G_n^0 alt grupları izomorfiktir.

Şimdi,

$\rho = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \in G_n$ şeklinde bir eleman tanımlayalım.

$$X = G_n^0 \cup G_n^0 \rho \cup G_n^0 \rho^2 \cup \ldots \cup G_n^0 \rho^{n-1}$$

$X = G_n$ olduğunu göstereceğiz. Öncelikle, $G_n = \langle G_n^0, \rho \rangle$ olduğunu görüyoruz. Çünkü,

$\sigma_{n-1} = \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-3}^{-1} \ldots \sigma_1^{-1} \rho$ ve $\sigma_{n-1} \in \langle G_n^0, \rho \rangle$ olur. X'in alt grup olduğu gösterilirse $X = G_n$ olduğu ispatlanmış olur. Aşağıdaki ilişkiler X'in alt grup olduğunu kanıtlar:

$$\rho x_i = x_{i+1} \rho,\ (1 \leq i \leq n-2)$$

$$\rho x_{n-2} = x_{n-2}^{-1} \ldots x_2^{-1} x_1^{-1} \rho^2$$

$$\rho^2 x_{n-2} = x_1 x_2 \ldots x_{n-2} \tau_{n-1} \rho$$

$$\rho \tau_i = x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_i^2 x_{i-1}^{-1} \ldots x_2^{-2} x_1^{-1} \rho, \qquad (1 \leq i \leq n-2)$$

$$\rho \tau_{n-1} = \tau_1 \rho$$

$$\rho^n = (x_1 x_2 \ldots x_{n-2})^{n-1} \tau_{n-1} \tau_{n-2} \ldots \tau_2 \tau_1$$

O halde,

$X = G_n$'dir. Ve $[G_n : G_n^0] = n$ olur. Çünkü $\rho^n \in G_n^0$ ve ρ'nun n-tane koseti vardır. Ama benzer şekilde B_n^0 grubunun da B_n içinde n-tane koseti vardır.

$[B_n : B_n^0] = n$. $G_{n-1} \cong_{\phi_{n-1}} B_{n-1}$ olduğu tüme varımdan dolayı kabul edilmiş idi.

$$F(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \cong_{\emptyset_n} F(\tau_1', \tau_2', \dots, \tau_{n-1}')$$

olduğu için, $G_n^0 \cong_{\phi_n} B_n^0$ olur. Dolayısıyla $[G_n : G_n^0] = [B_n : B_n^0]$ ve böylece $G_n \cong_{\phi_n} B_n$ olur.■

Şimdi B_n örgü grubunun alternatif bir sunumunu verelim.

Bunun için B_n örgü grubu ile ilgili çalışmalarda sıkça kullandığımız aşağıdaki özel elemanı tanımlayalım.

Tanım 3.1.

$\alpha = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$.

Teorem 3.2.

B_n örgü grubu σ_1 ve α ile üretilir. (Yani iki üreteçli bir gruptur.)

İspat:

$n = 1$, $n = 2$ için ispatlanacak hiçbir şey yoktur, bu sebeple $n \geq 3$ için incelenmiştir.

$\sigma_i = \alpha^{i-1} \sigma_1 \alpha^{1-i}$, $\forall\, i = 1, \dots, n-1$ eşitliğini tümevarımla ispatlayacağız.

Bunun için,

$(k = 1, \dots, i)$, $\alpha^{i-1} \sigma_1 \alpha^{1-i} = \alpha^{i-k} \sigma_k \alpha^{k-i}$ eşitliklerinin doğru olduğu tüme varım yöntemi ile ispatlanacaktır.

$k = 1$, için bu ilişki totolojidir. Bu ilişkinin $k - 1$ içinde geçerli olduğunu varsayalım. Daha sonra, $\alpha^{i-1} \sigma_1 \alpha^{1-i} = \alpha^{i-k} \sigma_k \alpha^{k-i}$ olduğunu göstermek için, grup ilişkilerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\alpha \sigma_{k-1} \alpha^{-1} &= \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_{n-1} \alpha^{-1} \\
&= \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-2} \sigma_k \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_{n-1} \alpha^{-1} \\
&= \sigma_k \sigma_1 \dots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1} \sigma_k \sigma_{k+1} \dots \sigma_{n-1} \alpha^{-1} \\
&= \alpha_k \alpha \alpha^{-1} = \sigma_k
\end{aligned}$$

olduğu görülür . O halde, k içinde

$$\begin{aligned}
\alpha^{i-1} \sigma_1 \alpha^{1-i} &= \alpha^{i-(k-1)} \sigma_{k-1} \alpha^{k-1-i} \\
&= \alpha^{i-k} \alpha \sigma_{k-1} \alpha^{-1} \alpha^{k-i} \\
&= \alpha^{i-k} \sigma_k \alpha^{k-i}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi $k = i$ ‘yi yerine koyarsak, $\alpha^{i-1}\sigma_1\alpha^{1-i} = \sigma_i \quad i \geq 2$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak α ve σ_1 diğer σ_i’leri üreteceğinden, B_n örgü grubunu üretmek için α ve σ_1 yeterlidir.■

Weinberger (2005) yapmış olduğu çalışmasında aşağıdaki Ω örgüsünü tanımlamıştır. Bu eleman B_3 örgü grubunda önemlidir.

Tanım 3.2. $\Omega = \sigma_1\alpha$

Sonuç 3.2. $B_3 = \langle \alpha, \Omega \mid \Omega^2 = \alpha^3 \rangle$

İspat:

$\Omega = \sigma_1\alpha$ elemanında, $\alpha = \sigma_1\sigma_2$ elemanını yerine koyarsak,

$\Omega = \sigma_1\sigma_1\sigma_2 = {\sigma^2}_1\sigma_2$ elde edilir. Ω’nın karesi alınırsa,

$\Omega^2 = {\sigma^2}_1\sigma_2{\sigma^2}_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2$ elde edilir.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ ilişkisi nedeniyle,

$\Omega^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \alpha\alpha\alpha = \alpha^3$olur.■

3.1. Simetrik Grup ve Saf Örgü Grubu

A={1,2,…, n} kümesinin tüm permütasyonlar kümesi, permütasyon çarpması altında bir gruptur ve S_n simetrik grubu olarak adlandırılır. S_n simetrik grubu $n!$ tane elemandan oluşur. En basit elemanlarına ikili denir.

Aşağıda tanımladığımız özel ikililer bu grubun üreteçleri olacaktır.

Tanım 3.1.1.

$(i, i+1) = s_i \ , \quad 1 \leq i \leq n\,.$

Aşağıdaki teorem Weinberger (2015)’in makalesinde verilmiştir.

Teorem 3.1.1.

S_n simetrik grubu $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ elemanları tarafından aşağıdaki ilişkiler ile üretilir:

- $s_i s_j = s_j s_i \qquad |i - j| > 1$ (3.1.1)
- $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-1$ (3.1.2)
- ${s_i}^2 = 1 \qquad 1 \leq i \leq n-1$ (3.1.3)

(3.1.1) ve (3.1.2) ilişkileri’nin örgü grubunun ilişkileri gibi olduğu görülür.

S_n'de farklı olarak $s_i{}^2 = 1$ ilişkileri vardır. Bu ilişkiler S_n simetrik grubunu sonlu grup haline getirmektedir. Öte yandan B_n örgü grupları sonsuzdur ($n \geq 2$). S_n simetrik grubu B_n örgü grubunun bir projeksiyonudur.

Teorem 3.1.2.

$\pi: B_n \to S_n$, $\pi(\sigma_i) = s_i$, $i = 1, \dots, n-1$

şeklinde tanımlı fonksiyon grup homomorfizmasıdır.

Tanım 3.1.2.

Yukarıdaki π homomorfizmasının çekirdeğine n- telli saf örgü grubu denir. P_n ile gösterilir.

$$P_n = \text{çek}(\pi) = \{\beta \in B_n | \pi(\beta) = 1\}$$

$$P_n \lhd B_n$$

$$B_n / P_n \cong S_n$$

$$[B_n : P_n] = [S_n] = n!$$

Saf örgü grubun üreteçleri ve ilişkileri aşağıdaki Teorem 3.2.1.'de verilmiştir.

3.2. Saf Örgü Grubu için Artin Teoremi

Aşağıdaki teorem Jackson (2004)'de verilmiştir.

Teorem 3.2.1. (Saf Örgü Grubu için Artin Teoremi)

Saf örgü grubu P_n aşağıdaki üreteçler ve ilişkiler ile üretilir.

Üreteçleri şunlardır:

$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1}\sigma^2{}_i\sigma^{-1}{}_{i+1} \dots \sigma^{-1}{}_{j-2}\sigma^{-1}{}_{j-1}$

İlişkileri aşağıdaki gibi belirtilmiştir:

$1 \leq i < j \leq n$,

$$A_{rs}A_{ij}A^{-1}{}_{rs} = \begin{cases} A_{ij} & s < i,\ j < r \\ A^{-1}{}_{is}A_{ij}A_{is} & i < j = r < s \\ A^{-1}{}_{ij}A^{-1}{}_{ir}A_{ij}A_{ir}A_{ij} & i < r < j = s \\ A^{-1}{}_{is}A^{-1}{}_{ir}A_{is}A_{ir}A_{ij}A^{-1}{}_{ir}A^{-1}{}_{is}A_{ir}A_{is} & i < r < j < s \end{cases}$$

4. ÖRGÜ GRUPLARI ve BAZI TEMSİLLERİ

Bu bölümde örgü gruplarının karmaşık sayılar üzerindeki temsillerine bakacağız. Bu örgü gruplarının elemanlarını matrislerle yazmak istiyoruz. Ayrıca B_3 ve B_4 gruplarının temsillerini sınıflandırmaya ve örnekler vermeye çalışacağız. Özel olarak bu örgü gruplarının Burau temsilleri ile ilgileneceğiz.

4.1. Burau Temsili

Burau temsilini Weinberger (2015)'in tezinde olduğu gibi tanımlıyoruz.

Tanım 4.1. (İndirgenmemiş Burau Temsili)

İndirgenmemiş Burau temsili $\beta^{\wedge}: B_n \to GL_n(\mathbb{C})$ $n \geq 2$ için,

$\beta^{\wedge}(\sigma_i) = I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 1-z & z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-i-1}$, $1 \leq i \leq n-1$, şeklinde tanımlanır. Burada,

$z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır.

Bu ifade açık olarak yazılacak olursa:

$$\beta^{\wedge}(\sigma_i) = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-z & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{bmatrix}.$$

Şimdi, $\begin{bmatrix} 1-z & z \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğu için,

$\mathbb{C}^n$' nin $\mathrm{Span}\{e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$ alt uzayı indirgenmemiş Burau temsili'nin değişmez alt uzayıdır. Dolayısıyla, $\beta^{\wedge}$indirgenebilir bir temsildir.

Teorem 4.1.

$\beta^{\wedge}$ indirgenebilir bir temsildir ve $\beta^{\wedge} \cong \beta \oplus 1$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$\beta: B_n \to GL_{n-1}(\mathbb{C})$ şeklinde $(n-1)$ boyutlu indirgenemez bir temsildir. β temsili aşağıdaki matris formunda tanımlanır.

$\beta(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -z & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-3}$,

$$\beta(\sigma_i) = I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & z & -0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2}, \text{ burada}$$

$2 \leq i \leq n-2$. Ve son yaratan için,

$$\beta(\sigma_{n-1}) = I_{n-3} \oplus \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & -z \end{pmatrix}.$$

İspat:

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $n \times n$'lik matris şeklinde alırsak, $C^{-1}\beta^{\wedge}(\sigma_i)C = \begin{pmatrix} \beta(\sigma_i) & 0 \\ \star_i & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde olur. Dolayısıyla,

$\beta^{\wedge} \cong \beta \oplus 1$ dir. Burada $\star_i$ $n-1$ uzunluğunda bir yatay vektördür ve,

$\star_i = (0, \cdots, 0, 0)$ eğer $i = 1, \cdots, n-2$ ve

$\star_i = (0, \cdots, 0, 1)$ eğer $i = n-1$. Dolayısıyla,

β, $\mathbb{C}^n / \mathrm{span}\{e_1 + \cdots + e_n\} \cong \mathbb{C}^{n-1}$ uzayı üzerinde $(n-1)$ boyutlu bir temsildir. Başka bir değişmez alt uzayı olmadığı için indirgenemezdir.■.

Tanım 4.2.

Yukarıdaki $\beta: B_n \to GL_{n-1}(\mathbb{C})$, temsiline B_n örgü grubunun indirgenmiş Burau temsili denir.

Örnek 4.1.

B_3 örgü grubunun indirgenmiş Burau temsili

$$\sigma_1 \to A = \begin{pmatrix} -z & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 \to B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & -z \end{pmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

Bir önceki örnekte B_3 örgü grubunun indirgenmiş Burau temsilini vermiştik, benzer şekilde B_4 ve B_5 örgü gruplarının indirgenmiş Burau temsillerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

Örnek 4.2.

B_4 örgü grubunun indirgenmiş Burau temsili

$$\sigma_1 \to \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_2 \to \begin{bmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

Örnek 4.3.

B_5 örgü grubunun indirgenmiş Burau temsili

$$\sigma_1 \to \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_2 \to \begin{bmatrix} 1 & z & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_4 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{bmatrix}$$

$\beta: B_n \to GL_{n-1}(\mathbb{C}),\ n \geq 3$, indirgenmiş Burau temsilinin faithful (yani 1-1) homomorfizma olup olmadığı çokça incelenmiş bir problemdir.

$n = 3$ için bu temsil 1-1 dir.

$n \geq 5$ için bu temsil 1-1 değildir.

$n = 4$ için bu problem hala açık olan popüler ve zor bir problemdir. Yani B_4'ün Burau temsilinin 1-1 olup olmadığını bilmiyoruz. Fermat'ın son teoreminin ispatlandığı göz önüne alınırsa bu açık problemin bu teorem kadar zor bir problem olduğu ortadadır.

4.2. B_3 Grubu ve 2-Boyutlu Temsilleri

Bu bölümde de B_3 örgü grubun temsillerine bakacağız.

Önerme 4.2.1.

B_3 örgü grubunun Burau temsili,

$\sigma_1 \to A' = \begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 \to B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z} & \frac{-z}{1+z} \\ -\frac{1+z+z^2}{1+z} & -\frac{z^2}{1+z} \end{pmatrix}$ temsiline denktir.

İspat:

Önce A matrisini köşegenleştirelim.

$|\lambda I - A|$ =0 denkleminden A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = -z$ ve $\lambda_2 = 1$ olarak bulunur. $\lambda_1 = -z$ özdeğerine ait öz vektör,

$v_1 = \begin{bmatrix} -1-z \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\lambda_2 = 1$ özdeğerine ait öz vektör $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir. Dolayısıyla

$$P = \begin{bmatrix} -1-z & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+z} & 0 \\ \frac{1}{1+z} & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Böylece,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şeklinde köşegenleştirilir. Bu durumda

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+z} & -\frac{z}{1+z} \\ -\frac{1+z+z^2}{1+z} & -\frac{z^2}{1+z} \end{bmatrix}$$

olur.

Yani $P^{-1}\beta_3 P$ temsili önermede verilen temsildir ve Burau temsiline denktir.■

Şimdi genel olarak B_3 örgü grubunun 2-boyutlu tüm temsillerini tespit etmeye çalışacağız.

Önerme 4.2.2.

B_3 örgü grubunun 2-boyutlu temsilleri,

$$\Phi: B_3 \to GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

$$\sigma_1 \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \sigma_2 \to \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$.

Bu grup aşağıdaki (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) eşitlikleri ile tanımlıdır:

1. $a^2e + fca + abg + bhc = e^2a + fec + ebg + fgd$ (4.2.1)
2. $eab + afd + b^2g + hdg = eaf + f^2c + ebh + fhd$ (4.2.2)
3. $cea + fc^2 + dge + dhc = gae + hec + g^2b + ghd$ (4.2.3)
4. $ecb + cfd + dbg + d^2h = gaf + fhc + gbh + h^2d$ (4.2.4)

İspat:

B_3 örgü grubun tek ilişkisi, $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$'den istenen eşitlikler elde edilir.■

Şimdi B_n örgü grubunun 1- boyutlu temsillerini sınıflandıralım. $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ ilişkisi nedeniyle, eğer $\xi: \sigma_1 \to z_1$, $\sigma_2 \to z_2$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, B_3 örgü grubunun 1-boyutlu bir temsili ise $z_1z_2z_1 = z_2z_1z_2$ olur. Buradan $z_1 = z_2$ elde ederiz. O halde $\xi: \sigma_1 \to z$, $\sigma_2 \to z$ şeklinde olmalıdır, $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Bu şekildeki 1-boyutlu temsillere $\xi(z)$ ismini vereceğiz. B_3 örgü grubunun bütün 1-boyutlu temsilleri bu şekildedir. Bu durum $B_n$örgü grupları $(n \geq 4)$ için de geçerlidir. Yani B_n örgü gruplarının, $n \geq 3$, bütün 1-boyutlu temsilleri bu şekildedir. Şimdi, B_3 örgü grubunun 2-boyutlu indirgenemez temsillerini saptamak istiyoruz. Elde ettiğimiz genel sonuç aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.2.1.

B_3 örgü grubunun tüm indirgenemez 2-boyutlu temsilleri $\xi(t) \otimes \rho$ şeklindedir, $t \in \mathbb{C}^*$ve ρ, 2-boyutlu temsili aşağıdaki durumlardan birindeki gibidir:

i) $\sigma_1 \to \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_2 \to \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & f \\ g & -\frac{z^2}{z+1} \end{bmatrix}, fg = \frac{z(z^2+z+1)}{(z+1)^2}, z \neq 0, -1$ ve $z^2 + z + 1 \neq 0$

ii) $\sigma_2 \to \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_2 \to \begin{bmatrix} e & z(e-1)^2 \\ -\frac{1}{z} & 2-e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ -\frac{1}{z} \end{bmatrix}, z \neq 0$

İspat:

Şimdi B_3 örgü grubunun 2-boyutlu bir temsilini dikkate alalım ve bu temsil $\sigma_1 \to A$, $\sigma_2 \to B$, $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$ şeklinde olsun. 2-boyutlu temsillerin izomorfizma sınıfları ile ilgilendiğimiz için A matrisini köşegenleştirilebilir kabul edebiliriz, eğer köşegenleştirilebilirse. Eğer köşegenleştirilemez ise A matrisi Jordon formuna dönüştürülür. Onuda ayrı bir 2. durum olarak inceleyeceğiz. O halde 2 durum vardır.

I. A matrisi köşegenleştirilebilsin. Eğer λ_1 ve λ_2 A matrisinin özdeğerleri ise bu temsilin $\xi(\lambda_2^{-1})$, 1-boyutlu temsili ile tensörünü alırsak ortaya çıkan matrisin özdeğerlerinden biri 1 olur. O halde, özdeğerlerinden birini 1 kabul edebiliriz ve A matrisini, $A = \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, z \neq 0$, şeklinde kabul edebiliriz. Ve B matrisinide $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ şeklinde kabul edelim. A matrisinde özdeğerin değerini –z seçebiliriz. Amacımız Burau temsili ile bağlantı kurmaktır. Şimdi,

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

ilişkisi nedeniyle $ABA = BAB$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten aşağıdaki (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7), (4.2.8) denklemler elde edilir:

1. $ez^2 = -e^2z + fg$ **(4.2.5)**
2. $-zf = -ezf + hf$ **(4.2.6)**
3. $-gz = -gze + gh$ **(4.2.7)**
4. $h = -gzf + h^2$ **(4.2.8)**

3 ve 2 numaralı eşitliklerde sadeleştirme yapılırsa bu eşitliklerin aynı olduğu görülür.

Bu eşitlikleri e, h ve fg çarpımı için çözersek, $e = \frac{1}{z+1}$, $h = -\frac{z^2}{z+1}$, $fg = \frac{z(z^2+z+1)}{(z+1)^2}$ bulunur. O halde $z \neq -1$ kabul etmeliyiz. Zaten $z = -1$ durumunda $A = I$ olur ve $B = I$ olur. Bu temsil birim 2-boyutlu temsildir ve indirgenebilirdir. O halde $z \neq -1$ olmalıdır.

B matrisinde $z^2 + z + 1$ ifadesini görüyoruz. $z^2 + z + 1 = 0$ olduğunda $fg = 0$ olur. O halde $f = 0$ veya $g = 0$ olmalıdır. Eğer $f = 0$ ise $B = \begin{bmatrix} -z & 0 \\ g & 1 \end{bmatrix}$ olur.

$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü B matrisinin $\lambda = 1$ özdeğerine ait özvektörüdür. Bu vektör A matrisinin de $\lambda = 1$ özdeğerine ait özvektörüdür. Yani bu $\lambda = 1$ özdeğerine ait ortak özvektördür. Bu özvektör de 1-boyutlu bir alt temsil yaratır. Yani bu iki boyutlu temsil indirgenebilirdir. Benzer şekilde $g = 0$ olduğunda da bu temsil indirgenebilirdir. O halde, $z^2 + z + 1 = 0$ ise bu temsil indirgenebilirdir.Diğer durumlarda bu ifade sıfırdan farklı ise ortak özvektör bulunamayacağı için temsil indirgenemezdir. Sonuç olarak , $z \neq 0$, $z^2 + z + 1 \neq 0$ ise bu durumda tanımlanmış temsil 2-boyutlu indirgenemez bir temsildir.

II. Şimdi de A matrisinin Jordan formda olduğunu varsayalım. Yine aynı şekilde 1-boyutlu temsillerle tensörünü düşünürsek, özdeğerinin 1 olduğunu varsayabiliriz. O halde

$A = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde, $z \neq 0$ kabul edebiliriz. Ve yine $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ şeklinde olsun.

$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ ilişkisinden yine $ABA = BAB$ olur ve aşağıdaki (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12) eşitlikleri elde edilir.

1. $e + gh = e^2 + egz + fg$ (4.2.9)
2. $ez + f + gz^2 + hz = ef + hez + fh$ (4.2.10)
3. $g = eg + g^2zh + hg$ (4.2.11)
4. $gz + h = fg + hgz + h^2$ (4.2.12)

bu eşitliklerden, $f = z(e-1)^2$, $g = -\frac{1}{z}$ ve $h = 2 - e$, çözümü elde edilir. Bu durumda A matrisinin sadece bir özvektörü olduğu için bu temsil iki tane 1- boyutlu alt temsilin direkt toplamı olarak yazılamaz dolayısıyla bu temsil indirgenemezdir.■

Formanek (1994)'in makalesinde $z^2 + z + 1 \neq 0$ şartını genel olarak gözlemlemiştir. Bu ifade makalede Lemma 6'da bütün B_n örgü grupları için geliştiriliyor. Onun kullandığı yöntem Burau temsilini sahte yansımalar ile ifade etmektir. Fakat, bu makaledeki Teorem 11 yanlış görünüyor. Biz yukarıdaki teoremde, B_3 örgü grubu için, Formenek (1994)'in teoreminde belirtilenden daha fazla 2-boyutlu indirgenemez kompleks temsil olduğunu gösterdik.

4.3. B_3 Grubunun Temsil Halkası

S_3 simetrik grubu $A = \{1,2,3\}$ kümesinin permütasyon grubudur ve $3! = 6$ eleman içerir.

$S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$.

Bu grubun 3 tane eşlenik sınıfı vardır:

$C_1 = \{e\}$, $C_2 = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ ve

$C_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ )\}$. Temsil teorisindeki genel bir teoremden dolayı, her eşlenik sınıfına karşılık bir temsil gelir.

1. C_1 için, $1: S_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ aşikar temsil.
2. C_2 için, $\xi: S_3 \rightarrow \mathbb{C}^*$ işaret temsili.
3. C_3 için, $\rho: S_3 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ standart temsil.

S_3 simetrik grubu $s_1 = (1\ 2)$ ve $s_2 = (1\ 3)$ elemanları ile üretilebilir.

$S_3 = \langle s_1, s_2 \rangle /\ s_1^2 = 1\ , s_2^2 = 1,$

$s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$

Dolayısıyla, B_3 örgü grubundan S_3 simetrik grubuna doğal bir örten homomorfizma vardır:

$\pi: B_3 \rightarrow S_3$

$\sigma_1 \rightarrow s_1$

$\sigma_2 \rightarrow s_2$

Bu homomorfizmanın çekirdeği, P_3 saf örgü grubudur.

S_3 simetrik grubunun temsilleri s_1 ve s_2 üzerindeki değerleri ile aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. $1: s_1 \rightarrow 1,\ s_2 \rightarrow 1$
2. $\xi: s_1 \rightarrow -1,\ s_2 \rightarrow -1$
3. $\rho: s_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, s_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Bu temsiller aşağıdaki ilişkilere sahiptir:

$\xi^2 = 1$

$\xi\rho = \rho$, (ρ'lar sadeleşmez tensör çarpımıdır.)

$\rho^2 = \rho + \xi + 1$

Burada + sembolü $\oplus$ direk toplamdır. $\rho^2 = \rho \otimes \rho$ ve $\xi\rho = \xi \otimes \rho$ tensör çarpımlardır. S_3 simetrik grubunun temsiller halkası $R(S_3)$, ξ ve ρ tarafından yukarıda verilen ilişkiler ile üretilir. ρ temsili, B_3 örgü grubunun β, indirgenmiş Burau temsilinin z=1 değerindeki özelleşmesidir. Yani,

$\rho \circ \pi = \beta|_{z=1}$.

S_3 simetrik grubunun temsil halkasındaki ilişkilerin benzerlerinin B_3 örgü grubun temsil halkasında olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için B_3 örgü grubunun 1-boyutlu temsillerini $\xi(z)$ ile göstereceğiz, $z \in \mathbb{C}^*$.

$\xi(z): B_3 \to \mathbb{C}^*$

$\sigma_1 \to z$

$\sigma_2 \to z$

Ve 2-boyutlu, z-parametreli Burau temsilini $\beta(z)$ ile

göstereceğiz.

$\beta(z): B_3 \to GL_2(\mathbb{C})$

$\sigma_1 \to \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\sigma_2 \to \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & -z \end{bmatrix}$

Şimdi, $\beta(z) \otimes \beta(z)$ tensör çarpımını bularak S_3 simetrik grubundaki ilişkinin bir benzerini elde etmeye çalışalım.

Önerme 4.3.1.

$\beta(z)^2 = \xi(-z) + \mu(z),\ z \neq 0, -1.$

Burada, $\mu(z)$, $z^3 \neq 1$ ise indirgenemez 3-boyutlu bir temsildir ve aşağıdaki

şekilde tanımlanmıştır:

$$\sigma_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 \to \begin{bmatrix} \frac{z^4}{(z+1)^2} & \frac{z^2}{(z+1)^2}(z^2+z+1) & \frac{1}{(z+1)^2}(z^2+z+1)^2 \\ 2\frac{z^3}{(z+1)^2} & z\frac{z^2+1}{(z+1)^2} & -\frac{2}{(z+1)^2}(z^2+z+1) \\ \frac{z^2}{(z+1)^2} & -\frac{z}{(z+1)^2} & \frac{1}{(z+1)^2} \end{bmatrix}$$

İspat:

İlk önce tensör çarpımlarını hesaplayalım,

$$A = \beta(z) \otimes \beta(z)(\sigma_1) = \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -z & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z^2 & 0 & 0 & 0 \\ -z & -z & 0 & 0 \\ -z & 0 & -z & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \beta(z) \otimes \beta(z)\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & -z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & -z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & z & z & z^2 \\ 0 & -z & 0 & -z^2 \\ 0 & 0 & -z & -z^2 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix}$$

A matrisi aşağıdaki P matrisi ile köşegenleştirilir.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z^2+z+1 \\ 0 & -z-1 & -1 & -z-1 \\ 0 & 0 & 1 & -z-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Benzer şekilde B matrisinin de P matrisi ile elde edilen eşleniğini hesaplayalım.

$$
P^{-1}BP = \begin{bmatrix}
\frac{z^4}{(z+1)^2} & \frac{z^2}{(z+1)^2}(z^2+z+1) & 0 & \frac{1}{(z+1)^2}(z^2+z+1)^2 \\
2\frac{z^3}{(z+1)^2} & z\frac{z^2+1}{(z+1)^2} & 0 & -\frac{2}{z+1}(z^2+z+1) \\
\frac{-z^3}{z+1} & -\frac{z}{z+1}(z^2+z+1) & -z & \frac{1}{z+1}(z^2+z+1) \\
\frac{z^2}{(z+1)^2} & -\frac{z}{(z+1)^2} & 0 & \frac{1}{(z+1)^2}
\end{bmatrix}
$$

$\mathbb{C}^4$ =Span$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. Yukarıdaki hesaplamalardan şunu gözlemliyoruz. Burada Span$\{e_3\}$'ün, $\beta(z) \otimes \beta(z)$ temsilinin $-z$ özdeğerli değişmez bir alt uzay olduğunu görüyoruz. Bu nedenle $\beta(z) \otimes \beta(z)$ indirgenebilirdir. Ve böylece, $\beta(z) \otimes \beta(z) = \xi(-z) \oplus \mu(z)$ tensör çarpımı şeklinde ayrılabilir. $\xi(-z)$ temsili 1-boyutlu alt temsildir. $\mu(z)$ temsili ise 3-boyutludur ve aşağıdaki şekilde verilir.

$$
\sigma_1 \to C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix},
$$

$$
\sigma_2 \to D = \begin{bmatrix}
\frac{z^4}{(z+1)^2} & \frac{z^2}{(z+1)^2}(z^2+z+1) & \frac{1}{(z+1)^2}(z^2+z+1)^2 \\
2\frac{z^2}{(z+1)^2} & z\frac{z^2+1}{(z+1)^2} & -\frac{2}{(z+1)^2}(z^2+z+1) \\
\frac{z^2}{(z+1)^2} & -\frac{z}{(z+1)^2} & \frac{1}{(z+1)^2}
\end{bmatrix}
$$

Bu matrislerin $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ ilişkisini sağladığını kontrol ederek $\mu(z)$'in temsili olduğunu gösterebiliriz. D matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini makine ile hesapladığımızda 1, -z ve z^2'ye karşılık gelen özvektörlerinin, aşağıdaki gibi olduğunu görüyoruz.

D matrisinin 1 özdeğerine karşılık gelen özvektörünü $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$-z$ özdeğerine karşılık gelen özvektörünü $\begin{bmatrix} -\frac{1}{z}(z^2+z+1) \\ \frac{1}{z}(z^2+1) \\ 1 \end{bmatrix}$,

z^2 özdeğerine karşılık gelen özvektörünü $\begin{bmatrix} \frac{1}{z^2}(z^4+2z^3+3z^2+2z+1) \\ \frac{1}{z}(2z^2+2z+2) \\ 1 \end{bmatrix}$, olarak hesapladık.

Buna karşılık C matrisinin özvektörleri ise $\mathbb{C}^3$'ün standart bazı yani, e_1, e_2, e_3 vektörleridir.

$z \neq 1$ ve $z^2 + z + 1 \neq 0$ ifadeleri $z^3 \neq 1$ olduğu anlamına gelir ve ortak özvektörleri olmadığından $\mathbb{C}^3$'te 1-boyutlu alt temsili yoktur. Bu nedenle $\mu(z)$ indirgenemezdir. ■

Diğer yandan, $z = 1$ için indirgenebilir olduğunu görebiliriz.

D matrisinin z=1 için, 1 özdeğerine karşılık gelen özvektörleri, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

Aynı zamanda, $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü C matrisinin z=1 için 1 özdeğerine karşılık gelen ortak özvektörüdür. Bu vektör $\xi(1)$ alt temsilini yaratır. Yani, C ve D matrisleri ortak özvektörlere sahip olduklarından, $\mu(1)$ indirgenebilir 3-boyutlu bir alt temsildir.

Buradaki parçalanma simetrik grubun temsil halkasında gözlemlediğimiz $\rho^2 = \rho + \xi + 1$ ilişkisine karşılık gelir. z=1 olduğundan, $\xi(1)$ temsili 1- boyutlu aşikar temsildir.

$\rho\xi = \rho$ ilişkisinin benzeri bu simetrik grupta yoktur.

Burau grubunun sağladığı ilişkileri gözlemledikten sonra, B_3 örgü grubunun temsil halkası hakkında önemli bilgilere ulaşıyoruz.

Acaba B_3 örgü grubunun temsil halkası sadece 1 boyutlu $\xi(z)$ temsilleri ve 2-boyutlu $\beta(z)$ temsilleri ile mi yaratılıyor? Yani bu halka, I ilişkiler kümesi olmak üzere, $\mathbb{Z}[\xi(z), \beta(z)]/_{I}$ şeklinde midir? $(z\epsilon\mathbb{C}^*)$

Bu ilişkilerin bazıları aşağıda verilmiştir.

1.) $\xi(z)^2 = \xi(z^2)$ (4.3.1)

2.) $\beta(z)^2 = \beta(-z) + \mu(z)$ (4.3.2)

Bu sorunun cevabı hayır. Çünkü B_3 örgü grubunun boyutu 2'den büyük indirgenemez temsilleri vardır. Örneğin çeşitli 3-boyutlu indirgenemez temsillerine Weinberger (2015)'in makalesinde yer verilmiştir.

Ayrıca, Teorem 3.4.1'de B_3 örgü grubu halkasının 2-boyutlu temsillerinin Burau temsilinden fazla olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla B_3 örgü grubunun temsil halkasını anlamak çok zor bir problem olarak görünüyor. Diğer yandan, $\beta(z)$ve $\xi(z)$ temsilleri B_3 örgü grubunun temsil halkasının S_3 simetrik grubu ile ilgili kısmını oluşturur.

4.4. Örgü Grupları ve Merkezi

Tanım 4.4.1.

G bir grup olsun. G'nin her elemanı ile değişmeli olan elemanların oluşturduğu gruba G'nin merkezi denir.

$Z(G) = \{x \in G | xg = gx, \forall g \in G\}$

Önerme 4.4.1.

Herhangi bir G grubu için $Z(G) \lhd G$, merkez normal alt gruptur.

Önerme 4.4.2.

G abelian $\Leftrightarrow G = Z(G)$

Örgü grubunun merkezi aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 4.4.1.

$Z(B_n) = \langle \Delta^2 \rangle \cong \mathbb{Z}$,

$\Delta = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\cdots(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})$

$\Delta^2 \in Z(B_n), \langle \Delta^2 \rangle = \langle Z(B_n) \rangle$.

İspat (Sadece $n = 3$ için):

$Z(B_3) = \langle (\sigma_1^2\sigma_2)^2 \rangle = \langle \sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2 \rangle$ olduğunu göstermek için Δ^2 elemanının $\sigma_1$ve σ_2 ile değişmeli olduğunu göstereceğiz. Önce σ_1 ile değişmeli olduğunu gösterelim:

$(\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1$

($\sigma_2\sigma_2^{-1}$ile çarpılır)

$= \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1$

$= \sigma_1\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1$

$= \sigma_1^3\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2$

$= \sigma_1^3\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2$

$= \sigma_1^3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2$

$= \sigma_1(\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)$.

Ve böylece Δ^2'nin σ_1 ile değişmeli olduğunu göstermiş olduk. Benzer şekilde σ_2 ile de değişmelidir.

Δ^2'nin σ_2 ile değişmeli olduğunu gösterelim.

$$(\sigma^2{}_1\sigma_2\sigma^2{}_1\sigma_2)\sigma_2 = \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2, \quad (\sigma_1\sigma^{-1}{}_1)\text{'i araya ekleyelim.}$$

$$= \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma^{-1}{}_1\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2$$

$$= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma^{-1}{}_1\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2$$

$$= \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma^{-1}{}_1\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2$$

$$= \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2$$

$$= \sigma_2(\sigma_1\sigma^2{}_2\sigma_1\sigma^2{}_2). \blacksquare$$

Ve böylece Δ^2'nin σ_2 ile değişmeli olduğunu göstermiş olduk. Dolayısıyla Δ^2 örgüsü merkezin içindedir. Bu elemanın merkezi yarattığı Meneses (2011)'de gösterilmiştir.

5. SONUÇ

Bu tezde sonsuz elemanlı değişmesiz gruplardan en önemlilerinden biri olan örgü gruplarını tanıttık.

Bu grupları üreteçleri ve minimal ilişkileri ile betimleyen Artin Örgü Teoremi'nin modern bir ispatını verdik.

Çalışmamıza, Örgü gruplarının temsilleri ile devam ettik. B_3 örgü grubunun iki boyutlu, indirgenemez kompleks temsillerini sınıflandıran bir teoremi ispatladık. Burau temsilinin bu sınıflandırmada, sadece özel bir durum olduğunu gördük. Burau temsilinin karesini alarak, bu temsilin temsil halkası içinde sağladığı ilişkisini bulduk. Bu bize 3-boyutlu indirgenemez yeni bir temsil verdi.

Son olarak, Örgü gruplarının merkezini anlatan teoremi verdik ve bunu B_3 örgü grubu için kısmen ispatladık.

B_3 örgü gruplarının temsillerini çalıştığımızda bu konunun uçsuz bucaksız bir konu olduğunu anladık.

Çalışmamızın devamı olarak B_3 örgü grubunun 3-boyutlu kompleks temsilleri çalışılabilir. Burau temsilinin karesinden elde ettiğimiz 3-boyutlu indirgenemez temsil, bizim için sonraki çalışmamızın yönünü belirleyen temsil olacaktır.

Burau temsilinin karesine diğer B_n, $n \geq 4$, grupları için bakmakta, bu konunun genelleştirilmesi için önemli bir fikirdir.

,

6. KAYNAKLAR

Anonim (2015). Algebraic Foundation of The Braid Group. http://cryptowiki.net/index.php?title=File:Braid_english_2.png (erişim tarihi, 21.05.2019)

Anonim (2019). Braid Tube. http://www.cvp.com.tw/en/product-606503/HIGH-PRESSURE-BRAIDED-TUBING-AND-HOSE.html (erişim tarihi, 23.05.2019).

Anonim (2019). Picket Braid in the Mix. https://www.freclaytile.com/gallery/detail/picket-braid-in-the-mix (erişim tarihi, 22.05.2019).

Anonim (2013). Stainless Steel Corrugeated Hose & Assemblies. http://www.precisionvalvs.net/index.php/stainless-steel-corrugated-hose-assemblies (erişim tarihi, 21.05.2019).

Anonim (2014). Standart 4 Braid. https://abdogsupplies.wordpress.com/2014/08/standard-4-braid-group-website-e1414762310127.jpg (erişim tarihi, 21.05.2019).

Anonim (2019). Pail Bag. https://www.uptimehawk.ca/unique-Wayuu-of-Colombia-of-merchandise-on -hand- a-group-of-things-with-common-features-braid-thin-shoulder-by-hand-inclined-carry-on-the-arm-tassel-bag-confuses-your-date-trumpet-559353638439/p 2170/ (erişim tarihi 22.05.2019).

Chiodo M (2005). An Introduction to Braid Theory. M.Sc Thesis, University of Melbourne.

Formanek E (1996). Braid Group Representations of Low Degree, Proceedings of the london Mathematical Society, Volume s3-73, Issue 2: 279-322.

Işıman D, (JANUARY 1999). A Study on Certain Problems About Covering Spaces Master of Science, Eastern Mediterranean University.

Jackson N, (February 23, 2004). Notes on braid groups.

Kubat M (2014). S_5 ve S_6 Simetrik Gruplarının Temsilleri, Karakter Tabloları ve Temsilleri Arasındaki İlişkiler. Yüksek Lisans Semineri, Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı.

Long D D (1994). Construction Representation of Braid Groups. Communations in Analysis and Geometry, Volume 2, Number 2, 217-238.

Melanie (2016). Lace Crown With Four Twists. http.//frenchbraidsbytwistedsisters.com/melanie/melanie%2016.jpg (erişim tarihi, 21.05.2019).

Meneses G J (2011). Basic result on braid groups. Volume 18, p.15-56. http.//ambp.cedram.org/item?id=AMDB_2011_18_1_15_0.

Morita J (1992). A Combinatorial Proof for Artin's Presentation of the Braid Group B_n and some Cyclic Analogue. Tsukuba J. Math, Volume 16 No.2: 439-442.

Richeson (2009). The Maypole Braid Group. https:/www.flickr.com/photos/henkimina/1516173381 (eriim tarihi, 21.05.2019).

Sönmez (2017). Örgü Örme Eşitlikleri. https://www.matematiksel.org/matematiksel-eşitsizliklerle-sanat/ (erişim tarihi, 23.05.2019).

Tuba I and Wenzl H (january 2000). Representations of the Braid Group B_3 and of SL(2,Z). Pasific Journal of Mathematics, 197(2).

Weinberger O (May 2015). The braid group, representations and non –abelian anyons (Bachelor's Thesis), SA104X Degree Project in Engineering Pyhsics, First Cylcle Department of Mathematics KTH, Royal Institute of Technology, Supervisor. Douglas Lundholm.

ÖZGEÇMİŞ

Aslı YAVAŞ 13/04/1991 Tekirdağ doğumlu olup, 2009 yılında Hacı Rafet Gümüş Lisesinden ve 2016 yılında da Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun olmuştur. 2016 yılında Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Topoloji Bilim Dalın'da Yüksek Lisans eğitimine başlamıştır.