

**N BOYUTLU SİLİNDİRİK SİMETRİK
BRANS-DICKE MAXWELL ÇÖZÜMLERİ**

Mehmet Barış AKINCIOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Dilek KAZICI

2019

T.C.
TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

N BOYUTLU SİLİNDİRİK SİMETRİK
BRANS-DICKE MAXWELL ÇÖZÜMLERİ

MEHMET BARIŞ AKINCIOĞLU

FİZİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. DİLEK KAZICI

TEKİRDAĞ-2019

Her hakkı saklıdır

Doç. Dr. Dilek KAZICI danışmanlığında Mehmet Barış AKINCIOĞLU tarafından hazırlanan "N BOYUTLU SİLİNDİRİK SİMETRİK BRANS-DICKE MAXWELL ÇÖZÜMLERİ" isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı : Prof.Dr. Özgür DELİCE

İmza:

Üye : Prof.Dr. Serbülent YILDIRIM

İmza:

Üye : Doç.Dr. Dilek KAZICI

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Doç. Dr. Bahar UYMAZ

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

N BOYUTLU SİLİNDİRİK SİMETRİK BRANS-DICKE MAXWELL ÇÖZÜMLERİ

Mehmet Barış AKINCIOĞLU

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Dilek KAZICI

Bu tezde öncelikle 4 boyutlu statik, silindirik simetrik uzay-zaman için bazı Einstein-Maxwell-Brans-Dicke çözümleri elde edilmiştir. Sonuçları daha genel yapıda değerlendirmek amacıyla teori, N boyutlu statik, silindirik simetrik uzay-zamana uygulanarak elektromagnetik alan stres-enerji tensörünün dört boyut ve yüksek boyutlu geometrilere davranış farklılığı incelenmiştir. 4 boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zaman için azimut açısı yönünde manyetik alan çözümleri ve sonrasında radyal yönde elektrik alan için çözümler incelenmiştir. N boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zaman için sadece azimut açısı yönünde manyetik alan çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlerin genel görelilik limitleri de incelenmiş dört ve daha yüksek boyutlu çözümlerin genel görelilik limitlerinin farklı olduğu farkedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Einstein Alan Denklemleri, Silindirik simetri, N boyutlu uzay-zaman
Brans-Dicke Skaler Alan Teorisi

2019, 54 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

N DIMENSIONAL CYLINDRICALLY SYMMETRY BRANS-DICKE MAXWELL SOLUTIONS

Mehmet Barış AKINCIOĞLU

Tekirdağ Namık Kemal University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Danışman: Assoc. Prof. Dr. Dilek KAZICI

In this thesis, we first obtain some Einstein-Maxwell-Brans-Dicke solutions in 4-dimensional static, cylindrical symmetric space time. Using the same theory, we get some solutions for N dimensional static, cylindrical symmetric systems and we examine the difference between the behaviour of electromagnetic field stress-energy tensor between the four and higher dimensional geometries. For 4 dimensional static cylindrical symmetrical space-time, we investigate the solutions with magnetic field in the azimuthal direction and also the solutions with and electrical field in the radial direction. For N dimensional static cylindrical symmetric space-time, we only study on magnetic field solutions in the direction of azimuth angle. The General Relativistic limit in these solutions is also studied and realized that the four and higher dimensional solutions have different general relativistic limits.

Keywords: Einstein field equations, cylindrical symmetry, N-dimensional spacetime, Brans-Dicke Scalar Field Theory

2019, 54 pages

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİL DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
TEŞEKKÜR	ix
1. GİRİŞ	1
2.KURAMSAL TEMELLER	5
2.1 Einstein Alan Denklemleri	5
2.2 Metrik Tensör	6
2.3 Baz Vektörleri, Kovaryant ve Kontravaryant Bileşenler	6
2.4 Çizgi Elemanı	8
2.5 Kovaryant Türev	9
2.6 Christoffel Sembolleri	12
2.7 Riemann Eğrilik Tensörü	16
2.8 Maxwell'in Elektromanyetik Teorisi	19
2.9 Maxwell Denklemlerinin Dörtlü Vektör Potansiyeli A^α ve Elektrik Akım Dört Vektörü J^α Tanımlanarak Kovaryant Formda Yazılması	21
3.MATERYAL ve YÖNTEM	26
3.1 Brans-Dicke Teorisi	26
3.2 Genel Görelilikte Silindirik Simetrik Sistemler ve Uygulamaları	30
3.3 N boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zamanda Brans-Dicke-Maxwell aksiyonu ve alan denklemlerinin elde edilmesi.....	32
3.4 4 boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zamanda Einstein Maxwell Brans-Dicke Teorisi	33
3.4.1 4 boyutlu uzay-zamanda Azimut açısı yönünde Manyetik alan Brans-Dicke çözümleri	35
3.4.2 4 boyutlu uzay-zamanda Radyal yönde Elektrik alan Brans -Dicke çözümleri	39
4.BULGULAR ve TARTIŞMA	43
4.1 N boyutlu Uzay-Zamanda Brans-Dicke Alan Denklemleri	43
4.2 N boyutlu Uzay-Zamanda Brans-Dicke Alan Denklemleri Çözümleri	44
4.3 Genel Rölativistik Limit	47
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	50
6. KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	54

ŞEKİL DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Kovaryant Türev.....	10
Şekil 2.2 : Christoffel Bağlantı Katsayısı	11
Şekil 2.3 : Riemann Eğrilik Tensörü	17

SİMGELER DİZİNİ

g	: Metrik Tensörünün Determinantı
$g_{\mu\nu}$: Metrik Tensörünün Kovaryant Bileşenleri
$g^{\mu\nu}$: Metrik Tensörünün kontravaryant Bileşenleri
$G_{\mu\nu}$: Einstein Tensörü Bileşenleri
$T_{\mu\nu}$: Madde Enerji-Momentum Tensörü Bileşenleri
R	: Ricci Skalari
$R_{\mu\nu}$: Ricci Tensörü Bileşenleri
$R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa}$: Riemann Tensörü Bileşenleri
$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$: Koordinat taban Christoffel Sembolleri Bileşenleri
$F_{\mu\nu}$: Faraday Tensörü Bileşenleri
A_{μ}	: Elektromanyetik 1-formu
G	: Newton Kütleçekim Sabiti
d	: Dış Türev İşlemcisi
D	: Kovaryant Türev İşlemcisi
∂_{ν}	: Kısmi Türev İşlemcisi
∇_{ν}	: Kovaryant Türev İşlemcisi
N	: Uzay-zaman Boyutu
\square	: Laplace-Beltremi Operatörü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımnda ve tezi hazırlamamda bilgi ve tecrübeleriyle bana her konuda destek olan, beni zor zamanlarda çalışmaya teşvik eden danışman Hocam Sayın Doç. Dr. Dilek KAZICI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarımnda beni destekleyen eşim ve oğluma da teşekkür ederim.

Mayıs 2019

Mehmet Barış AKINCIOĞLU
Fizik Öğretmeni

1.GİRİŞ

Doğada, evrenin düzenini, dengesini ve devamlılığını sağlayan dört çeşit temel etkileşim kuvveti vardır. Bunlar, en küçük atom altı parçacıklar arası etkileşimlerden başlayarak, büyük ölçeklerde galaksi ve galaksi kümeleri arasındaki mesafeler ve ötesine kadar tüm evrende etkili olan farklı karakterlerde, farklı ölçeklerde ve farklı şiddetlerde kuvvetlerdir. Temel olarak bu kuvvetler: çekirdek kuvveti, elektromanyetik kuvvet, zayıf kuvvet ve kütleçekim kuvvetleri olarak adlandırılır. Bu kuvvetlerin birbirine göre bağlı şiddetleri çekirdek kuvvetleri 1 olarak kabul edilir ise, elektromanyetik kuvvet 10^{-3} , zayıf kuvvetler 10^{-6} ve kütleçekim kuvveti 10^{-39} olarak ifade edilebilir. Bu değerler bize kütleçekim kuvvetinin diğer kuvvetlere göre çok daha zayıf olduğu sonucunu gösterir. Günümüzde bu etkileşim kuvvetlerini kapsayan matematiksel bir model bulunabilmesi teorik fiziğin önemli araştırma konularından birisidir. Büyük birleşme teorisi adı altında yapılan hesaplamalar, temel kuvvetleri tek bir teori ile açıklamaya yöneliktir, bu anlamda kütleçekim kuvvetinin diğer üç temel kuvvetten bu denli farklı olması tutarlı bir teorinin oluşmasını zorlaştırır. Standart model, teorik fiziğin matematiksel olarak kütleçekim kuvveti hariç diğer tüm kuvvetleri içeren, temel parçacıkları ve bunlar arası etkileşimleri başarılı bir şekilde açıklayabilen en iyi teoridir. Fakat Standart Model, kütleçekimsel etkileşimleri göz ardı etmektedir. Bu durum, zaten zayıf olan kütleçekim kuvvetinin yeterince küçük mesafelerde çok daha zayıf olacağı böylece matematiksel olarak ihmal edilebileceği şeklinde açıklanmaktadır. Kuantum teorisi küçük ölçeklerdeki fiziği içerirken, genel görelilik teorisi büyük ölçekli evreni açıklamakta ve temel olarak cisimlerin kütleçekim etkisini anlamaya yöneliktir. Genel görelilik teorisinin temeli madde ve geometri arasında bağlantı kurmasıdır. Bu noktada "geometri" ifadesi önemlidir çünkü geometriyi tanımlarken farklı bir kavram olan "uzay-zaman geometrisi" ifadesinin tanımını yapmak gereklidir. Bu anlamda zaman kavramı t 'nin de bir koordinat olduğu düşünülüp x, y, z uzaysal koordinatlar ile birlikte ifade edilmesiyle "uzay-zaman" kavramı oluşmuş ve böylece uzay-zaman geometrisini elde etmek mümkün olmuştur. İlk olarak 1905 yılında, Özel görelilik teorisi Einstein tarafından bulunduktan sonra hareket denklemlerinin dört boyutlu Minkowski uzay-zamanı kullanılarak matematiksel olarak daha anlaşılır bir şekilde ifade edilebileceği fark edilmiştir. Böylece, genel görelilik teorisinde de üç tane uzaysal boyut ve bir tane zamansal boyut olmak üzere (3+1) boyutlu eğri uzay-zamanda işlemler yapılmaktadır ve kütleçekim etkisi incelenmeye çalışılmaktadır. Ancak uzay-zamanın dört boyutlu olması da büyük birleşme teorisinin elde edilmesi için yeterli olmamıştır ve bazı teorik modellerde, matematiksel olarak tutarlı bir teori

için uzay-zamanın boyut sayısının daha fazla olması gerektiği sonucu savunulmuştur. Diğer bir deyişle matematiksel olarak boyut sayısının tanımı, bir noktayı ifade edebilmek için ihtiyaç duyduğumuz koordinat sayısıdır şeklinde yapılabilir. Bu anlamda kütleçekimi dahil tüm temel kuvvetleri içeren matematiksel yapıyı elde edebilmek ancak dört boyuttan fazla koordinat sayısı ile mümkün olabilmektedir. Bu konuda Theodor Kaluza (Kaluza 1921) ve Oscar Klein (Klein 1926) yapmış oldukları çalışmalarda (3+1) boyutlu uzaya çok küçük ve kapalı bir uzaysal boyut daha ekleyerek 4+1 boyutlu uzay-zamanda genel görelilik vakum çözümlerini elde etmişlerdir. Fazla boyutun kapalı ve küçük olma özelliğini kullanarak, dört boyutlu büyük ölçekte bildiğimiz kütleçekimi ve elektromagnetik alan denklemlerini elde etmişlerdir. Böylece elektromanyetizma ile kütleçekiminin birleştirilebileceğini teorik olarak göstermişlerdir, başka bir deyişle kütleçekimi ve elektromagnetizmanın gerçekte çok farklı olmadıkları düşüncesini oluşturmuşlardır. Kaluza'nın bir boyut eklemesiyle başlayan bu süreç şimdilerde Bozonik Sicim Kuramı için $N = 26$ boyuta, Süpersicim Teorisi için $N = 11$ boyuta taşınmıştır. Bu teorilerde fazla boyutların kapalı ve gözlenemeyecek kadar küçük oldukları varsayılmıştır. Öte yandan, yüksek boyutlu kuramların öneminin artmasında önemli bir rol oynayan Arkani, Dimopoulos Dvali (Arkani ve ark. 1998) tarafından ortaya atılan ADD Modeli gibi yeni fikirler fazla boyutların çok küçük olmayabileceğine öngörmüştür.

Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, doğadaki dört temel kuvvetten biri olan kütleçekim kuvveti Einstein'in genel görelilik kuramı ile açıklanmaktadır. Bu kuram uzay-zamanın geometrisi ile uzay-zamandaki madde ve enerji dağılımını ilişkilendirmesi açısından Newton teorisinden farklı yapıdadır. Genel görelilik alan denklemlerinin kütleçekim alanının statik olduğu (bu durumda zamana göre türevler sıfır olmaktadır), hareketin yavaş olduğu (bu durumda uzaysal boyutların zamana göre türevleri sıfır olmaktadır) ve kütleçekim alanının zayıf olduğu (bu durumda geometri yaklaşık Minkowski uzay-zamanı olmaktadır) limitlerde, Newton kütleçekim kuvvet denklemlerini verdiği görülmektedir. Einstein'in genel görelilik Teorisi, Newton kuramının yeterince iyi açıklayamadığı gözlemler olan ışığın Güneş tarafından saptırılması, Merkür'ün yörüngedeki hareketinde neden yalpaladığını açıklamada bunun yanında da yıldızların yaşam evreleri ve karadelikler hakkında bize ışık tutmuştur.

Genel görelilik teorisinin temellerini oluşturan Einstein Alan Denklemleri 4 boyutlu uzay-zamanda doğrusal olmayan 10 tane diferansiyel denklemden oluşmaktadır (Einstein 1915). Birbirine bağlı ve karmaşık yapıya sahip olan bu denklemler birçok fizikçi tarafından çözülmüştür. İlk çözüm Karl Schwarzschild (Schwarzschild 1916) tarafından, boş uzayda bulunan m kütleli r yarıçaplı küresel simetrik sistem için yapılmıştır ve bu çözüm aynı

zamanda en temel yüksüz ve dönmeyen karadelik çözümdür. Gözlemsel olarak bu çözümler Merkür'ün yörüngesindeki yalpalamaların anlaşılmasına ve ışığın Güneş tarafından bükülmesinin anlaşılmasını sağlamıştır. Kısa bir süre sonra, statik silindirik simetrik uzay-zaman için boşluk çözümü elde edilmiştir (Levi-Civita 1919).

Einstein alan denklemlerinde ifade edilen madde ve enerji dağılımının kaynağı olarak elektromanyetik alan göz önüne alındığında elde ettiğimiz bu denklemlere Einstein-Maxwell Denklemleri denir. Bu çözümlere en iyi örnek yüklü, küresel simetriye sahip madde dağılımının elektromanyetik ve kütleçekim alanı denklemlerin çözülmesiyle elde edilen Reissner-Nordström metriğidir (Reissner 1916, Nordström 1918). Benzer şekilde silindirik simetriye sahip elektromanyetik alan dağılımlarının Einstein-Maxwell çözümleri 1950'lerden sonra elde edilmiştir (Bonnor 1953, Raychaudhuri 1960).

Bu tezde daha önce Baykal ve ark. (2009) tarafından yapılmış olan 4 boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zamanda radyal veya simetri eksenine yönünde elektromanyetik alanlar için Einstein-Maxwell çözümleri elde edilecek ve yüksek boyutlu uzay-zamanlar için genelleştirme yapılacaktır.

Bu çözümlerin yapılmasında Brans-Dicke (BD) Skaler Tensör Teorisi kullanılacaktır. Brans-Dicke Skaler Tensör Teorisi, Genel Rölativiteye (GR) iyi uyarlanmış ve sıklıkla çalışılan alternatif bir kütleçekim teorisidir. Bu teoride Newton kütleçekim sabiti bir skaler alan ile değiştirilir ve yerçekimi eylemine minimal olmayan şekilde olarak bağlanır. Bu skalerin varlığı teorisinin aynı zamanda skaler alan teorisi olarak da adlandırılmasına sebep olur ve bu skaler alan çeşitli teorik sonuçlarla da desteklenir. Örneğin; klasik Kaluza-Klein teorisinden ekstra boyutların kapalı olduğu düşüncesinden kaynaklı olarak, dört boyutlu uzay-zamanda tanımlı hacim elemanında doğal olarak bir skaler alan elde edilir ki bu durum Brans-Dicke teorisinin ta kendisidir. Herhangi bir kütleçekimsel teoriyi anlamak için bu teorisinin tam çözümlerinin elde edilmesi ve mümkünse de farklı durumlar için tüm olasılıkları incelemek gerekir. Bu olasılıklar içinde yüksek boyutlu uzay-zaman teorilerinin de olması problemin çok yönlü anlaşılmasını, özellikle büyük birleşme teorileri için uygun teorik sistemler elde edilmesini sağlar. Küresel simetrik sistemler için bu tür çözümler çokça incelenmiştir. Bu yüzden daha yüksek boyutlu uzay-zamana sahip genişletilmiş alan konfigürasyonlarının da yerçekimi alanı araştırılmalıdır. Silindirik simetrik çözümler bu gibi konfigürasyonlara iyi bir yaklaşım olacağından kesin çözümlerin elde edilmesi ve bunların özelliklerini GR ve BD teorisi gibi alternatif teorilerde araştırmak mantıklıdır. Kozmik

sicimlerin ve kütleçekim dalgalarının anlaşılmasında silindirik simetrik veya eksenel simetrik uzay-zaman geometrisi sıklıkla kullanılmaktadır. Bu anlamda silindirik simetrik uzay-zamanda kütleçekim teorilerini incelemek önemlidir.

Bu çalışmada daha önce Çiftçi ve ark. (2015) tarafından yapılmış olan N boyutlu uzay-zaman için durağan silindirik simetrik Brans-Dicke-Einstein- Maxwell çözümleri yapılacaktır. Genel görelilik teorisinde N boyutlu uzay-zamanda silindirik simetrik Einstein-Maxwell çözümleri (Azreg-Aionu ve ark. 1996), (Kirezli ve ark. 2013) tarafından elde edilmiştir. Azimutal manyetik alanın bulunduğu durum için alan denklemlerinin doğrudan çözümü ile kesin çözümler elde edilir. Eksenel manyetik alan durumu gibi diğer konfigürasyonlar, koordinatların uygun şekilde etiketlenmesiyle elde edilebilir. Ayrıca literatürde var olan notasyondaki Maxwell tipi çözümlerle elde ettiğimiz çözümleri ilişkilendirmek için uyumlu olarak Jordan çerçevesi kullanılacaktır.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1 Einstein Alan Denklemleri

Genel Görelilik (GG) üç temel düşünce üzerine kurulmuştur. Birincisi, uzay-zamanın eğri olduğu düşüncesidir. Burada dört boyutlu matematiksel yapı vardır ve bu yapıya pseudo Riemann manifoldu denir. Pseudo-Riemann teriminin Türkçe'de kullanımı "sanki-Riemann" şeklinde olabilir. Burada "sanki" ifadesinin sebebi uzaysal koordinatların yanında farklı olarak zaman koordinatının olmasındandır. Daha sonra da göreceğimiz gibi metrik işaretleri $(-, +, +, +, +, \dots)$ olma durumu "pseudo" terimini kullanmamıza sebep olmaktadır. Tüm işaretlerin pozitif olması durumunda uzay Riemann manifoldu olarak tanımlanır. Genel görelilik teorisinde uzay ve zaman kavramlarının birlikte kullanılmasının sebebi, genel göreliliğin yerel olarak özel göreliliği içermesi ve özel göreliliğin temelinde dört boyutlu uzay-zaman kavramının yer almasıdır.

Genel Rölativitenin (GR) ikinci önemli yapıtaşı şu şekilde açıklanabilir; uzay-zamanın her noktasında bir eylemsiz referans çerçevesi vardır ve serbest düşen parçacıkların içinde bulunduğu bu referans çerçevesi lokal olarak düzdür. Bu lokal bölgede GR'ın özel görelilikten farkı hissedilmez. Cisim sabit ivme ile hareket eder, kütleçekimi etkisi serbest düşme esnasındaki ivmelenme ile yok edilmiş olur. Böylece serbest düşme referans çerçevesi ile eylemsiz referans çerçevesi tam olarak aynı olur. Bu durum Einstein'ın ünlü *eşdeğerlilik prensibidir*. Yani GR, özel göreliliğin eğri uzaydaki ifadesidir dersek yanlış olmaz.

Üçüncü temel yapıtaşı, kütlelerin yani kütle ve momentum akısının uzay-zamanı eğdiğini ve bu eğilme miktarının Einstein'ın alan denklemleri ile tanımlandığını ifade eder.

Bu üç fikir GR'ın Newton kütleçekim teorisinden farkını oluşturur. Newton bakış açısına göre kütleçekimi bir kuvvettir ve bu kuvvet, parçacıkları Öklit uzayında ivmelendirir. GR bakış açısına göre, kütleçekim kuvveti yoktur. Eğer elektromagnetik kuvvet veya başka hiçbir kuvvet yoksa, parçacıklar uzay-zamandaki kütle ve enerji tarafından eğilen yollar boyunca hareket ederler. Serbest düşen parçacıkların referans çerçevesi lokal eylemsiz referans çerçevesidir. Zaman ve uzay kavramları mutlak değildirler fakat uzay-zaman adı altında dört boyutlu manifold olarak tanımlanan bir kavramda birleşebilirler.

2.2 Metrik Tensör

Bir (m, n) rank tensör, m tane üst indis ve n tane alt indisli bileşenlerini göstermek üzere, rankı $(0,2)$ olan özel bir g tensör alanına metrik tensör denir. Bu metrik tensör, iki vektörün simetrik ve bilinear fonksiyonudur. Bu tanımı biraz açıklayacak olursak; g metrik tensör, verilen bir V ve U vektörlerinin nokta çarmı ile ilgili bir ifadedir ve vektörleri skalere dönüştürür, matematiksel olarak,

$$g(V.U) = V.U = U.V = g(U.V) \quad (2.1)$$

yazılabilir. Burada bazı terimlerin isimlerini tanıtacak olursak:

g : Metrik tensörün kendisidir ve kalın yazılır,

$g_{\mu\nu}$: Metrik tensör bileşenleridir,

\square : $g_{\mu\nu}$ bileşenlerinden yapılmış matristir.

g : Metrik tensörün determinantıdır, $g = \det \square = \det(g_{\mu\nu})$

Bu aşamada metrik tensörün tanımını daha açık yazmak için "baz vektörü" tanımı yapmamız uygun olacaktır.

2.3 Baz Vektörleri, Kovaryant ve Kontravaryant Bileşenler

Genel görelilikte fiziksel büyüklükleri koordinattan bağımsız olarak ifade edebilmek için tüm vektör uzaylarını kapsayan, birbirlerinden lineer olarak bağımsız baz vektörleri tanımlamamız gereklidir. Bir baz vektör alanı kümesi $\{e_\mu\}$ ile gösterilir ki burada μ indisi koordinatlar ile ilgilidir ve bir N boyutlu uzay-zaman için ($\mu = 0,1,2 \dots n-1$) değerlerini alabilir. Herhangi bir A vektörü, bu bazda baz vektörlerinin lineer olarak toplamı ile dört boyutlu uzayda aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$A = A^\mu e_\mu = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3. \quad (2.2)$$

Burada A^μ katsayıları vektörün kontravaryant bileşenleridir. Kontravaryant bileşeni deyimini kısaca tanımlamak istersek; bir vektör alanında, e_μ baz vektörleri gibi dönüşüme uğramayan ve fakat onların tam tersi yönde dönüşüme uğrayan bileşenler "kontra" yani "ters" yönde değişen anlamında "kontravaryant bileşen" adı verilmektedir. Matematiksel olarak gösterecek

olursak, bir S referans çerçevesinden başka bir S' referans çerçevesine dönüşüm yapan $n \times n$ matrisi M olarak tanımlayalım, dönüşüm ifadesi,

$$\mathbf{e}_{\mu'} = M^{\mu}_{\mu'} \mathbf{e}_{\mu} \quad (2.3)$$

şeklinde verilir. Burada $M^{\mu}_{\mu'}$ ifadesi M matrisinin bileşenleridir. Bir \mathbf{A} vektörü farklı referans çerçevesinde baz vektörleri cinsinden ifade edilebilir ve

$$\mathbf{A} = A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = A^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} \quad (2.4)$$

olarak yazılır. Baz vektörleri, $\mathbf{e}_{\mu'} = M^{\mu}_{\mu'} \mathbf{e}_{\mu}$ şeklinde dönüşüme uğradıkları için, bu eşitliğin sağlanması için

$$\mathbf{A} = A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} = A^{\mu'} \mathbf{e}_{\mu'} = A^{\mu} M^{\mu'}_{\mu} M^{\mu}_{\mu'} \mathbf{e}_{\mu} \quad (2.5)$$

olmalıdır, burada $M^{\mu'}_{\mu} M^{\mu}_{\mu'} = I$ (birim matris) olmak üzere üst indisli $A^{\mu'}$ bileşenlerinin $A^{\mu'} = A^{\mu} M^{\mu'}_{\mu}$ şeklinde dönüşmesi gerekir. Dikkat edilirse burada baz vektörleri $M^{\mu}_{\mu'}$ matrisi ile dönüşüme uğrarken üst indisli bileşenin dönüşüm matrisi $M^{\mu'}_{\mu}$ şeklindedir. Yani üst indisli vektör bileşenlerinin dönüşüm matrisi, baz vektörünün dönüşüm matrisinin tam tersidir. Bu nedenle baz vektörüne göre ters olarak değişen anlamına gelen kontravaryant adı kullanılır. Böylece üst indisli vektör bileşenleri kontravaryant vektör bileşenler denir. Burada "kovaryant" bileşen tanımını da yapmak uygun olacaktır. Bu durumda baz vektörleri ile aynı yönde dönüşen yani aynı dönüşüm matrisi ile dönüşen vektör bileşenlerine kovaryant (birlikte dönüşen) vektör bileşenleri denir. Matematiksel olarak $A_{\mu'} = M^{\mu}_{\mu'} A_{\mu}$ ifadesindeki dönüşüm matrisi tam olarak eşitlik (1)' deki baz vektörü dönüşüm matrisi ile aynı dönüşümü sağlamaktadır.

Bu tanımları yaptıktan sonra metrik tensör tanımına geri dönebiliriz. Bir metrik tensörü iki baz vektörünün nokta çarpımı olarak tanımlandığını daha önce ifade etmiştik. Metrik tensör bileşenleri rank (0,2) tensördür, ters metrik tensör bileşenleri rank (2,0) tensördür, birim metrik bileşenleri rank (1,1) ve sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilirler,

$$g_{\mu\nu} = g(\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu}) = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu}, \quad g^{\mu\nu} = g^{-1}(\mathbf{dx}^{\mu}, \mathbf{dx}^{\nu}), \quad \text{ve } \delta_{\mu}^{\nu} = (\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{dx}^{\nu}). \quad (2.6)$$

Böylece metrik tensör,

$$g = g_{\mu\nu} \mathbf{dx}^{\mu} \otimes \mathbf{dx}^{\nu} \quad (2.7)$$

olarak yazılabilir. Daha anlaşılır olması için iki baz vektörünün iç çarpımından,

$$(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = g(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

metrik ifadesini elde etmek için her iki tarafı $\mathbf{dx}^\alpha \otimes \mathbf{dx}^\beta$ ile çarparsak

$$g(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) \mathbf{dx}^\alpha \otimes \mathbf{dx}^\beta = g_{\mu\nu} \mathbf{dx}^\alpha \otimes \mathbf{dx}^\beta \quad (2.9)$$

$$g \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta = g_{\mu\nu} \mathbf{dx}^\alpha \otimes \mathbf{dx}^\beta \quad (2.10)$$

$$g = g_{\mu\nu} \mathbf{dx}^\mu \otimes \mathbf{dx}^\nu \quad (2.11)$$

elde edilir. Burada, $g_{\mu\nu}$ metrik tensörü bileşenleri genel olarak baz vektörlerinin skaler çarpımlarından elde edilir. Baz vektörleri uzay-zamanın geometrisi ile ilgili vektörler olduğu için metrik tensör bileşenleri de uzay-zamanın geometrisi ile ilgili büyüklüklerden oluşur. Eğer uzay düz ise ve sadece uzaysal koordinatlardan oluşuyorsa Öklit uzayıdır ve metrik tensör bileşenleri $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1,1,1)$ şeklindedir. Eğer uzay-zaman düz ise Minkowski uzayıdır ve metrik tensör bileşenleri $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ şeklinde yazılır. Eğri uzay-zaman için metrik tensör bileşenleri eğri uzayın yapısına göre (koordinat bazında) ± 1 'den farklı değerler almaktadırlar. Böylece uzayın geometrisi eğri uzay-zaman olmaktadır.

2.4 Çizgi Elemanı

Genel görelilikte uzay-zamanın geometrisini tanımlamak için çizgi elemanı kullanılır. Çizgi elemanı, iki nokta arasındaki sonsuz küçük mesafeyi tanımlamaktadır ki bu bizim Euclid uzayından bildiğimiz Pisagor bağıntısının ta kendisidir. Üç boyutlu düz uzayda, bir $x^\mu(\lambda)$ eğrisi üzerinde en küçük mesafe,

$$ds^2 = \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır. Çizgi elemanının eğri uzaydaki tanımını yaparken skaler çarpımda metrik tensörünü kullanmamız gerekir. Bu durumda

$$ds^2 = \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = g(\mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr}) = g\left(\frac{d\mathbf{r}}{dx^\mu} dx^\mu \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dx^\nu} dx^\nu\right) = g\left(\frac{d\mathbf{r}}{dx^\mu} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dx^\nu}\right) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.13)$$

elde edilir. $\frac{d\mathbf{r}}{dx^\mu}$ vektörü koordinat eğrilerine teğet vektörlerdir ve baz vektörü ile aynı yönde ve büyüklükteki vektörleri ifade ederler, bu durumda koordinat uzayında $\mathbf{e}_\mu = \frac{d\mathbf{r}}{dx^\mu}$ yazmamızda bir sakınca yoktur. Böylece çizgi elemanı

$$ds^2 = \mathbf{dr} \cdot \mathbf{dr} = g \left(\frac{dr}{dx^\mu} \cdot \frac{dr}{dx^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu = g(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.14)$$

olarak $g_{\mu\nu}$ metrik tensör bileşenleri ile birlikte tanımlanır. Genel görelilikte sıklıkla metrik tensörün işareti $(-, +, +, +)$ olarak seçilir, diğer taraftan yüksek enerji fiziğinde denklemlerin uyumluluğu açısından $(+, -, -, -)$ olarak tercih edilir.

Bu tez çalışmasında N boyutlu uzay-zamanda $(-, +, +, \dots, +)$ işaretine sahip Pseudo-Riemann tipi bir manifold göz önüne alınacaktır.

Ayrıca tüm geometrik büyüklükler koordinat baz uzayında tanımlanarak işlem yapılacaktır. Sıklıkla kullanılan diğer bir baz uzayı ise Ortonormal Baz uzayıdır. Bu iki baz uzayları arasındaki en temel farkı fazla detaya girmeden açıklayacak olursak, koordinat baz uzayında baz vektörleri öyle tanımlanır ki $g_{\mu\nu} = g(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu$ şeklinde metrik tensör bileşenleri elde edilir, burada \mathbf{e}_μ 'lere koordinat baz vektörleri denir. Diğer taraftan Ortonormal Baz uzayında baz vektörlerinin iç çarpımı $\eta_{\mu\nu}$ Minkowski metriği olmak üzere $\eta_{\mu\nu} = g(\hat{\mathbf{e}}_\mu, \hat{\mathbf{e}}_\nu) = \hat{\mathbf{e}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{e}}_\nu$ olarak ifade edilir ki burada $\hat{\mathbf{e}}_\mu$ 'lere ortonormal baz vektörleri denir. Başka bir deyişle ortonormal baz vektörleri normları bir ve birbirine dik olan vektörlerdir.

Bir uzay-zamanda $\{x^\mu\}$ ' ler koordinatlar olmak üzere, koordinat baz vektörleri her bir koordinat yönündeki değişim miktarını tanımlar ve

$$\mathbf{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilirler. Bu eşitlik sözlü olarak şu şekilde ifade edilir; koordinat baz vektörleri koordinat eğrilerine teğet vektörlerdir. Burada ortonormal baz vektörleri ise normu bir olan vektörlerdir ve $\hat{\mathbf{e}}_\mu = \frac{\mathbf{e}_\mu}{|\mathbf{e}_\mu|}$ Gram-Schmidt dikleştirme yöntemi kullanılarak elde edilebilir.

2.5 Kovaryant Türev

Euclid uzayından farklı olarak, Genel görelilikte geometrinin eğri olması ve zaman kavramının da uzay gibi bir boyut olması neticesinde birçok matematiksel niceliklerin bu eğri uzay-zamana kavramına göre ifade edilmesi gerekmektedir. Bu anlamda en belirgin farklılık türev kavramında olmaktadır. Tensörel büyüklüklerin eğri uzay-zamanda tanımlanan türev kavramı düz uzay-zamanda tanımlanandan farklı olmakta ve *Kovaryant Türev* adıyla ifade edilmektedir. Düz uzayda skaler bir fonksiyonun türevi kısaca,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.16)$$

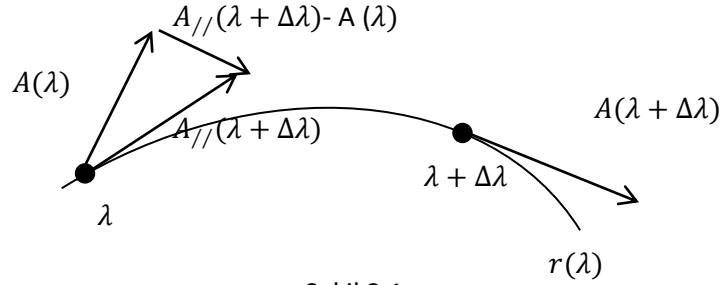
şeklindedir ve bir $\mathbf{A} = A^i e_i$ vektörünün türevi

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial A^i}{\partial x} \mathbf{e}_i \quad (2.17)$$

olarak ifade edilir. Oysaki eğri uzayda bir $r(\lambda)$ eğrisi boyunca olan değişim miktarı,

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{A_{//}(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{A}(\lambda)}{\Delta\lambda} \quad (2.18)$$

ile ifade edilir.



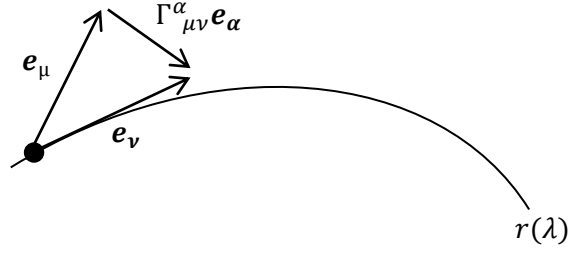
Şekil 2.1

Burada farklı olarak $A_{//}(\lambda + \Delta\lambda)$ niceliği düz uzaydaki vektörün $\lambda + \Delta\lambda$ noktasında aldığı değer değildir. Öte yandan $A(\lambda + \Delta\lambda)$ vektörünün, $r(\lambda)$ noktasına paralel taşınması sonucunda oluşan vektördür ve $A_{//}(\lambda + \Delta\lambda)$ ile $A(\lambda)$ vektörü arasındaki farkın aradaki mesafeye oranı kovaryant türev olarak adlandırılmaktadır (Şekil.2.1) (Gröfn ve Ark. 2007).

Düz uzaydan farklı olarak yukarıdaki ifadenin ikinci terimindeki baz vektörün türevi sıfır değildir. Bir baz vektörünün başka bir koordinat eksenine yönündeki değişim miktarı, farklı yöndeki baz vektörü ile orantılı bir büyüklük verir. Bu durumun matematiksel olarak ifadesi

$$\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha \quad (2.19)$$

şeklindedir. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2

Burada $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ bağlantı katsayılarıdır ve Christoffel sembolleri olarak adlandırılır ve daha sonra ayrıntılı olarak anlatılacaktır. Böylece (2.18) türev ifadesini tekrar yazacak olursak

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial (A^{\mu} \mathbf{e}_{\mu})}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \mathbf{e}_{\mu} + A^{\mu} \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \mathbf{e}_{\mu} + A^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad (2.20)$$

elde edilir. Tensörel ifadelerde eşitliğin iki tarafındaki indis eşitliği korunduğu sürece toplam formundaki indis çiftlerinin ismini değiştirmekte bir sakınca yoktur, diğer bir deyişle dummy indeksler isim değiştirebilirler. Böylece (2.20) bağıntısını

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^{\nu}} = \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + A^{\beta} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \right) \mathbf{e}_{\mu}, \quad (2.21)$$

olarak yazmanın hiçbir sakıncası yoktur. Burada parantez içindeki kısım bir vektör bileşeninin kovaryant türevidir ve

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + A^{\beta} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \quad (2.22)$$

yazılır. Bu ifade eğri uzay-zamanda vektörel büyüklüklerin türevidir ve Kovaryant Türev adını alır. Diğer taraftan $\nabla_{\nu} A_{\mu}$ ifadesi, alt indisli vektörlerin kovaryant türevidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\nabla_{\nu} A_{\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - A_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Genel olarak örneğin karışık indisli bir rank (2,1) tensöründe karmaşık indisler,

$$\nabla_{\gamma} T^{\mu\nu}_{\alpha} = \frac{\partial T^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} + T^{\mu\beta}_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} + T^{\mu\beta}_{\alpha} \Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} - T^{\mu\nu}_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \quad (2.24)$$

olur.

2.6 Christoffel Sembolleri

Christoffel sembolleri, (2.19) bağıntısından da görülebileceği gibi, bir baz vektörünün bir eğri üzerinde paralel taşınması edilmesi sonucu, başlangıçtaki ve sonraki iki baz vektörün arasındaki fark ile orantılı büyüklüklerdir. Tensörel nicelikleri, eğri uzay-zamanda tanımlanırken bir vektörün, bir noktadan başka bir noktaya paralel ötelenmesi (*parallel transport*) tanımının bilinmesi gereklidir. Bu tanım eğri uzay-zamanın jeodezik çizgilerinin belirlenmesinden tutun kovaryant türevin tanımına kadar önemli konularda karşımıza çıkmaktadır. Eğri uzay-zamanı tanımlarken, bu uzay-zamandaki eğri jeodezik çizgileri hayal etmek bize kolaylık sağlayacaktır. Bir tepe yükseltisine bakarken yüzey eğriliğini tanımlayan doğal çizgileri jeodezik eğriler olarak düşünebiliriz. Öklit uzayında iki nokta arasındaki en kısa mesafe düz çizgidir. Eğri uzayda durum biraz daha farklıdır ve en kısa mesafe düz değildir. İki noktayı birleştiren en kısa veya en uzun eğriye *jeodezik eğri* denir ve tanjant vektörün paralel transportu ile veya Lagrangianın ekstremum noktalarının bulunmasıyla elde edilir.

Bir vektörün bir eğri yüzeye göre paralel ötelenmesi demek, o vektörün bu eğrinin teğet vektörleri (baz vektörleri) ile arasındaki açının aynı kalacak şekilde ötelenmesi demektir. Kovaryant türev, (2.22) denkleminde de görüleceği gibi $r(\lambda)$ daki bir vektörün $r(\lambda + \delta\lambda)$ noktasına paralel ötelenmesi durumundaki değişimi ölçer. Bu durumda eğer vektörde paralel öteleme sonucunda bir değişiklik olmuyorsa bu vektörün kovaryant türevi sıfır olur. Başka bir deyişle, bir vektörün eğri uzayda paralel transport etmesi demek bu vektörün kovaryant türevinin sıfır olması demektir. Düz uzayda bir vektörün paralel taşınması demek, vektör bileşenlerinin boylarının değişmemesi ve vektörün eğri teğetleri ile aynı açıyı yapacak şekilde ötelenmesi demektir. Böylece kısaca bir $r(\lambda)$ eğrisi üzerinde bir \mathbf{A} vektörünün paralel ötelenmesi demek bu eğri parametresine göre değişmemesi demektir ve

$$\frac{D\mathbf{A}}{D\lambda} = 0 \quad (2.25)$$

olur. Diğer taraftan $r(\lambda)$ eğrisine teğet vektör olan $\mathbf{u} = \frac{dr(\lambda)}{d\lambda}$ vektörü kendi $r(\lambda)$ eğrisi boyunca yani kendi jeodezikleri üzerinde daima paralel transport eder ve $\frac{D\mathbf{u}}{D\lambda} = 0$ olur. Bu bağıntı bize jeodezik eğrileri ve Christoffel sembollerini metrik tensör cinsinden bulmamızı sağlar. Bu durumu koordinatlar cinsinden yazacak olursak $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ vektörü koordinat

eğrilerine teğet vektör bileşenidir ve bu vektör bileşeninin kendi koordinat eğrisi boyunca paralel taşınması sıfır olacaktır ve

$$\frac{Du^\mu}{D\lambda} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{Du^\mu}{Dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \nabla_\nu u^\mu u^\nu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\alpha u^\nu = \frac{du^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\alpha u^\nu = 0 \quad (2.27)$$

böylece parçacığın izlediği yolu bulmamızı sağlayan ve fizikte çok önemli olan

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (2.28)$$

jeodezik denklemi elde edilir. Burada $\frac{D}{D\lambda}$ terimi eğri boyunca kovaryant türevi ifade etmektedir. Bu ikinci dereceden diferansiyel denklemin çözümleri uzay-zamanın eğriliği hakkında bilgi verir ve bir serbest parçacık bu jeodezik eğrileri takip eder. Düz uzayda Kartezyen koordinatlar için Christoffel sembolleri sıfırdır ve jeodezik denklemin çözümleri düz çizgilerdir. Eğri uzayda ise o uzayın düz çizgilerine karşılık gelen eğriler olarak düşünülebilir. Christoffel sembolleri gerçekte (2.19) bağıntısından da görülebileceği gibi bir baz vektörünün eğri uzay üzerinde paralel taşınması ile elde edilen büyüklüktür ve jeodezik denklemde koordinat eğrilerine teğet vektörün paralel transform etmesi gerçeğinden elde edilir.

Sonuç olarak, Genel görelilik kuramına göre bir dış alanın mevcut olmadığı durumlarda test parçacıkları herhangi bir kuvvet hissetmezler ve kendi doğal yolları olan

$$\dot{u}^a + \Gamma^a_{bc} u^b u^c = 0 \quad (2.29)$$

denklemine uyan yollar boyunca hareket ederler. Burada koordinat eğrilerinin değişim miktarı mutlak zaman parametresi τ 'ya göre elde edildiği zaman

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau} \quad (2.30)$$

parçacığın dört hız vektörü olarak adlandırılır ve nokta ile ifade edilen türev has zaman τ 'ya göre türevi ifade etmektedir. Has zaman, parçacığın kendi referans sisteminde uzaysal yer değiştirmenin olmadığı durumdaki geçen zamanı ifade eder. Yani parçacık kendi referans sisteminde durgundur. Bu durumda belli bir aralıkta geçen zaman has zaman olarak adlandırılır ve $d\tau^2 = -ds^2$ olur.

Eğer bir dış alan mevcut ise test parçacıkları bu dış alandan kaynaklanan kuvvetlerden dolayı, jeodeziklerden sapacaklardır (artık serbest parçacık değildirlir). Örneğin bir elektro- manyetik alan mevcut ise e yüküne ve m kütlesine sahip test parçacıklar

$$\dot{u}^a + \Gamma^a_{bc} u^b u^c = \frac{e}{m} F^a_b u^b \quad (2.31)$$

denklemlerinin sağlayacağı yörüngelerde hareket edeceklerdir. Bu denklem klasik elektro- manyetizmadaki Lorentz kuvvetinin eğri uzaylara genelleştirilmesidir.

Aynı sonucu elde etmenin diğer bir yolu da varyasyon prensibini kullanmaktır. Jeodezik eğriler iki nokta arasındaki ekstremum noktaları tanımladığı için çizgi elemanının (ds 'in) kritik noktaları bulunarak jeodezik denklemi elde edilebilir. Böylece

$$\delta \int ds = 0 \quad (2.32)$$

olan yollar parçacığın izleyeceği jeodeziklerdir. Burada,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.33)$$

$$= -d\tau^2 \quad (2.34)$$

uzay-zamanın çizgi elemanıdır ve aşağıdaki gibi yazılır

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (2.35)$$

Aynı zamanda hareket denkleminin ekstremumları Lagranjiyen cinsinden

$$\delta \int \mathcal{L} \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) d\lambda = 0, \quad (2.36)$$

olarak da ifade edilebilir. Böylece Lagranjiyen $\mathcal{L} \left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$ olarak yazılabilir.

Euler Lagrange denklemi,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial x^\sigma / \partial \lambda)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = 0, \quad (2.37)$$

kullanılarak jeodezik denklemleri elde edilir. Ayrıca bu bağıntı bize Christoffel sembollerinin metrik tensör cinsinden ifadesini de elde etmemizi sağlar. (2.37) denkleminde

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2\mathcal{L}} g_{\mu\nu,\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\frac{\mathcal{L}}{2} g_{\mu\nu,\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.38)$$

burada (2.34) denklemini kullanılarak $\mathcal{L}^2 = -\frac{d\tau^2}{d\lambda^2}$ ifadesinden

$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\tau^2}{d\lambda^2} = -\mathcal{L}^2 \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ yazılmıştır. Diğer taraftan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(dx^\sigma/d\lambda)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} g_{\mu\nu} \left(\delta_\sigma^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \delta_\sigma^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.39)$$

bu sonuç tekrarlanan indislerde gerekli değişiklikler yapılarak elde edilmiştir. Son olarak

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial x^\sigma / \partial \lambda)} \right) = \frac{d\tau}{d\lambda} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\mathcal{L}} g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{d\lambda} \right), \quad (2.40)$$

$$= \mathcal{L} \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right), \quad (2.41)$$

$$= \mathcal{L} \left(g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dg_{\mu\sigma}}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right), \quad (2.42)$$

$$= \mathcal{L} \left(g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right), \quad (2.43)$$

$$= \mathcal{L} \left(g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right), \quad (2.44)$$

$$= \mathcal{L} \left(g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \quad (2.45)$$

(2.37) ve (2.38) denklemleri kullanılarak

$$\mathcal{L} \left(g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) - \frac{\mathcal{L}}{2} g_{\mu\nu,\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{L} \left(g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) - \frac{\mathcal{L}}{2} g_{\mu\nu,\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.47)$$

$$g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\mu\alpha,\sigma}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.48)$$

her tarafı $g^{\sigma\lambda}$ ile çarparsak,

$$g^{\sigma\lambda} g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\mu\alpha,\sigma}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.49)$$

$$\delta_\sigma^\lambda \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\mu\alpha,\sigma}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.51)$$

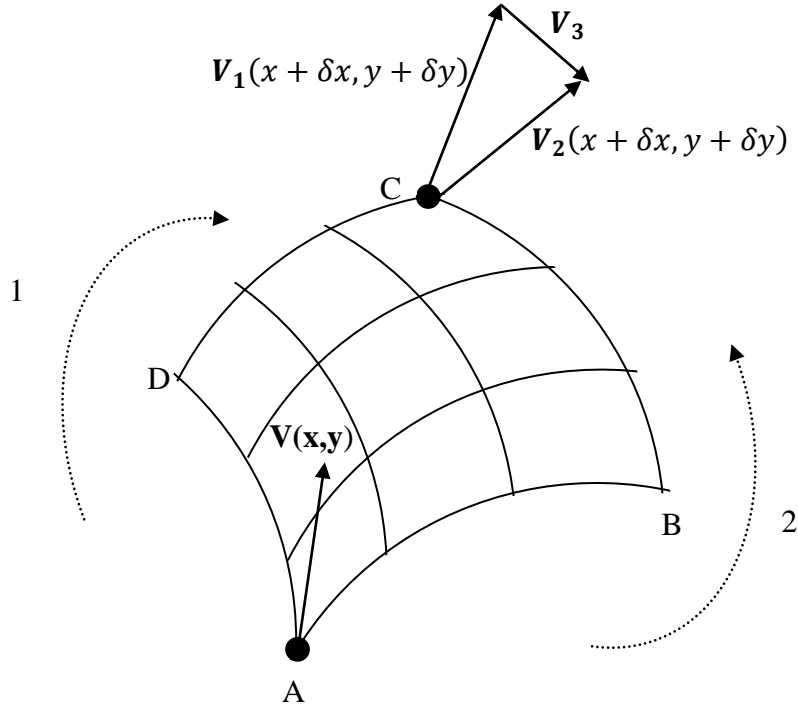
jeodezik denklem elde edilir ve böylece $\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda = \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} (g_{\mu\sigma,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\mu\alpha,\sigma})$, Christoffel sembollerinin metrik tensör cinsinden ifadesi de elde edilmiş olur.

2.7 Riemann Eğrilik Tensörü

Bir vektörün iki nokta arasındaki sonsuz küçük mesafede bir koordinat eksenine göre değişimini, bu koordinat değişkenine göre türevi olarak tanımlayabiliriz. Düz uzayda bir vektörü sonsuz küçük mesafeye hangi yoldan götürürseniz götürün değişim miktarı aynıdır, yani önce x eksenini boyunca değişimini ölçüp sonra y eksenini boyunca değişimini ölçelim, sonra vektörü ötelediğimiz yolların sıralarını değiştirelim sonuçta her iki yoldan da gidildiğinde vektördeki değişim miktarının aynı olduğunu görürüz. Matematiksel olarak ifade edecek olursak

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V^i = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V^i \quad (2.52)$$

bu ifadeyi farklı şekilde yazacak olursak $\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] V^i = 0$ elde edilir, yani türevlerin komutasyonu sıfırdır denir. Oysaki eğri uzayda öncelikle bir vektörün kovaryant türevinden bahsedebiliriz. Bir vektör bileşeninin eğri uzayda iki kovaryant türevinin komutasyonu sıfır değildir ve bu vektör ile orantılı başka bir vektör olur, yani geometrik olarak ifade edecek olursak, Şekil 2.3 te görüldüğü gibi eğri uzayda V_3 vektörü sıfırdan farklıdır ve bu vektörün boyu uzayın eğriliğine bağlıdır. Eğrilik miktarını belirten tensör Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Burada $V_1(x + \delta x, y + \delta y)$ vektörü, V vektörünün 1 yolunu takip ederek C noktasına gelmesi ile elde edilen vektör iken $V_2(x + \delta x, y + \delta y)$ vektörü V vektörünün 2 yolunu takip ederek C noktasına gelmesi ile elde edilen vektörlerdir.



Şekil 2.3

olur. Matematiksel olarak ifade edecek olursak, koordinat baz uzayında

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = R^\alpha_{\beta\mu\nu}V^\beta, \quad (2.53)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ Riemann tensörüdür ve kovaryant türevlerin komütasyonuna eşittir. Eğri uzayda kovaryant türevlerin sırası önemlidir ve iki kovaryant türevin komütasyonundan elde edilen fark bize uzay-zamanın eğriliği hakkında bilgi verir. Bu fark miktarı Riemann tensör bileşenlerini sıfırdan farklı yapar. Düz uzayda Riemann tensör bileşenleri sıfırdır. (2.53) eşitliğinde kovaryant türevleri açıp gerekli işlemleri yaparsak Riemann tensörünü,

$$R^a_{bcd} = \partial_b \Gamma^a_{cd} - \partial_c \Gamma^a_{bd} + \Gamma^a_{be} \Gamma^e_{cd} - \Gamma^a_{ce} \Gamma^e_{bd} \quad (2.54)$$

olarak elde ederiz. Riemann tensörünün simetrisi önemlidir ve

$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ eşitliklerini sağlar ve ayrıca Riemann tensörü daima $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$ eşitliğini sağlar. Ricci tensörü Riemann tensörünün metrik tensör ile büzülmesinden elde edilir ve

$$R_{ab} = R^c_{acb} = g^{cd}R_{dacb} \quad (2.55)$$

olarak elde edilir ve simetrik bir tensördür. Ricci skaleri, Ricci tensörünün g^{ab} ile kontraksiyonu ile elde edilir.

$$R = R^a_a = g^{ab} R_{ab} \quad (2.56)$$

elde edilir. $R = 0$ Riemann tensör bileşenlerinin sıfır olması durumunda uzay-zaman düzdür ve Minkowski metriği bu çözümleri sağlar. Buradan hareketle Einstein denklemi,

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \quad (2.57)$$

olarak tanımlanır.

Einstein'in çekim kuramını tanımlayan alan denklemi

$$S = S_G + S_{Madde} = \int L \sqrt{-g} d^4x \quad (2.58)$$

olarak tanımlanır. Burada L sistemin Lagranjiyeni, g ise metrik tensörün izidir. Hareketin Lagrangiyeni sistemin eğriliği, içerdiği madde miktarı ile ilgili bilgiler içerir. Böylece genel olarak tanımlanır.

$$L = L_G + L_{Madde} \quad (2.59)$$

Lagranjiyenin bir skaler olması gerektiği düşüncesinden yola çıkarak bu skalerin Ricci skaleri olması yerindedir. Böylece, $L_G = \frac{1}{\kappa} R$ ve $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ (ilerideki işlemlerde uygunluk açısından $c \equiv 1$ olarak tanımlanmıştır.) ile ifade edilir. Minimum eylem prensibine göre bu Lagrange yoğunluğunun maksimum ve minimumlarının elde edilmesi için uzay-zamanın geometrisine göre yani metrik tensör g^{ab} ye göre varyasyonunu alınarak sıfıra eşit olduğu değerler bulunur ve hareket denklemleri elde edilir. Genel görelilik Teorisinde bu varyasyon sonucunda Einstein alan denklemleri elde edilmektedir. Eylem denkleminin diğer alanlara göre, örneğin Maxwell alanına göre varyasyonu yapıldığında Maxwell alan denklemleri elde edilmektedir. Einstein çekim kuramının temel varsayımları, 3+1 boyutlu Pseudo-Riemann uzay-zamanında tanımlanmakta ve bu uzay-zamandaki toplam madde ve enerji ile uzay-zamanın geometrisi arasında bağlantı kurmaktadır. Bu bağlantıya Einstein Denklemi denir ve,

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \quad (2.60)$$

ile ifade edilir. Burada T_{ab} stres enerji tensörüdür ve uzay-zamanın içerdiği maddeyle ilgilidir.

Bu tezde $L_{Maddde} = L_{EM}$ olarak elektromanyetik alan yani Maxwell alanından meydana gelen stres enerji tensörünü göz önüne alacağız. Bu alana ait Lagrange yoğunluğu

$$L_{EM} = -\frac{1}{4\sqrt{\kappa}} F_{ab} F^{ab} \quad (2.61)$$

olup, bu alana ait enerji momentum tensörü

$$T_{ab} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S_{Maddde}}{\partial g^{ab}} \quad (2.62)$$

ile ifade edilir. Sonuç olarak elektromanyetik alan stres enerji tensörü

$$T^{(EM)}_{ab} = \frac{1}{\kappa} \left(F^c{}_a F^c{}_b - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \quad (2.63)$$

olarak elde edilir. Bu alandaki yüklü test parçacıkları ise (2.31) denklemi ile tanımlanan hareket denklemlerinin belirleyeceği yörüngeleri izleyeceklerdir.

2.8 Maxwell'in Elektromanyetik Teorisi

Maxwell'in Elektromanyetik denklemleri birkaç farklı notasyonda yazılabilir. En yaygın kullanımı diferansiyel formda aşağıdaki gibi ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{Gauss Denklemi}) \quad (2.64)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}, \quad (\text{Ampere Yasası}) \quad (2.65)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Manyetik Alan İçin Gauss Yasası}) \quad (2.66)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday Yasası}) \quad (2.67)$$

ifade edilir.

Burada; ρ , yük yoğunluğu ve \vec{J} , akım yoğunluğudur. (2.64) denkleminin zamana göre türevi alınırsa,

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.68)$$

ve (2.65) denkleminin her iki tarafının diverjansı alınırsa,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (2.69)$$

bağıntıları elde edilir. Burada matematiksel olarak $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ sağlanacağından (2.68) ve (2.69) denklemlerinden süreklilik denklemi elde edilir ve

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.70)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan matematiksel olarak

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0 \quad (2.71)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (2.72)$$

ifadeleri her zaman doğrudur. Böylece (2.66) denklemi manyetik alanı herhangi bir vektör potansiyelinin rotasyoneli olarak ifade edebiliriz. Böylece

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.73)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade (2.67) denkleminde yerine yazılırsa

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (2.74)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.75)$$

elde edilir. Bu ifadenin sağlanması için; daha önce yazdığımız gibi (2.72) denkleminde yararlanarak parantez içindeki ifade bir skaler potansiyelin gradiyenti olarak yazılabilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (2.76)$$

burada (−) işareti denklemlerdeki uyumluluğun sağlanması için koyulmuştur. Böylece elektrik alan bir skaler ve vektör alanı cinsinden aşağıdaki gibidir,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.77)$$

Sonuç olarak $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ve $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ eşitlikleri elektrik ve manyetik alanın bir skaler ve bir vektör potansiyeli cinsinden ifadelerdir. Bu iki ifadenin başka iki sonucu daha vardır. Bu eşitlikleri sağlayan tek bir vektör potansiyel ve tek bir skaler potansiyel yoktur. Bu durumu matematiksel olarak yazacak olursak daha iyi anlaşılabilir.

Eğer $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ise ve matematiksel olarak $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$ ifadesi her zaman doğru ise \vec{A} vektör alanını $\vec{A} = \vec{A} - \vec{\nabla} \psi$ yazmamızda hiçbir sakınca yoktur. Buradaki (-) işareti daha sonraki uygunluk olarak seçilmiştir.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi \quad (2.78)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{\nabla} \psi) \quad (2.79)$$

yani \vec{A} vektör potansiyelini herhangi bir ψ fonksiyonunun gradyenti kadar değiştirmemizin hiçbir sakıncası yoktur. Diğer taraftan $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ifadesinin de aynı kalması gerekir.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} - \vec{\nabla} \psi) = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.80)$$

Bu denklemin ilk denklemlerle aynı olması için ϕ skaler alanının $\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ kadar ayarlanması gerekir.

Potansiyel ifadelerinin bu şekilde ayarlanmasına “ayar şartları” denir ve böylece Maxwell denklemleri Lorentz dönüşümleri altında değişmeyecek şekilde kalırlar.

2.9 Maxwell Denklemlerinin Dörtlü Vektör Potansiyeli A^α ve Elektrik Akım Dört Vektörü J^α Tanımlanarak Kovaryant Formda Yazılması

Genel görelilikte alan denklemleri tensörel formda yazıldığı için Maxwell denklemlerini de tensörel olarak ifade etmek yerinde olacaktır. 3-boyutlu Euclid uzayında vektör potansiyeli olarak tanımlanan \vec{A} vektörü, 3+1 boyutlu Pseudo-Riemann uzay-zamanında, A^α 4-vektör potansiyeli olarak tanımlanır. Diğer tarafta J^α dört akım yoğunluğu vektörü ile tanımlanarak Maxwell denklemleri Genel görelilik notasyonunda uygun halde yazılabilir. Dörtlü vektör potansiyeli ile akım yoğunluğu vektör bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$A^\alpha = \left(\frac{\phi}{c}, A^1, A^2, A^3 \right) = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (2.81)$$

$$J^\alpha = (c\rho, J^1, J^2, J^3) = (J^0, J^1, J^2, J^3) \quad (2.82)$$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ve $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ denklemleri 4-vektörler potansiyeli cinsinden yazılabilir.

Örneğin; bu bileşenler cinsinden

$$B_z = \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}, \quad (2.83)$$

$$E_1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \quad (2.84)$$

sırasıyla z yönündeki manyetik alan ve radyal yöndeki elektrik alanı ifade eder. Aynı büyüklükler tensörel olarak yazılacak olursa $F^{\alpha\beta}$ elektromanyetik alan tensörü olmak üzere, en genel halde,

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad (2.85)$$

olarak tanımlanır. Burada 4 gradyent operatörünün kovaryant bileşenleri

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (2.86)$$

kontravaryant bileşenleri Minkowski metriği için,

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(-\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (2.87)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $F^{\alpha\beta}$ elektromanyetik alan tensörü aynı zamanda 4 boyut için 4×4 matris olarak

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

şeklinde yazılır.

$$\frac{E_i}{c} = F^{0i} \quad (2.89)$$

$$B_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F^{jk} \quad (2.90)$$

tanımlarından yararlanarak:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad \text{ve} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{tanımlarından:}$$

$$F^{10} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \quad (2.91)$$

$$F^{10} = \frac{\partial}{\partial x} A^0 + \frac{\partial}{\partial t} A^1 \quad (2.92)$$

$$F^{10} = \frac{\partial}{c\partial x} + \frac{\partial}{c\partial t} A^1 \quad (2.93)$$

$$F^{10} = -\frac{E_1}{c} \quad (2.94)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde;

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad (2.95)$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 , \quad (2.96)$$

$$F^{23} = \frac{\partial}{\partial y} A^3 - \frac{\partial}{\partial z} A^2 , \quad (2.97)$$

$$F^{23} = B_1 . \quad (2.98)$$

olarak bulunacaktır.

Böylece yeni notasyona göre Maxwell denklemlerinde iki homojen eşitlik $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

ve $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ ifadeleri

$$\partial^{[\alpha} F^{\beta\gamma]} = 0 \quad (2.99)$$

olarak yazılabilir.

Örneğin; $\alpha = 1, \beta = 2$ ve $\gamma = 3$ için

$$\partial^1 F^{23} + \partial^3 F^{12} + \partial^2 F^{31} = 0 \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial z} B_z + \frac{\partial}{\partial y} B_y = 0 \quad (2.101)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.102)$$

ile Maxwell'in (2.66) denklemi elde edilmiş olur.

Örneğin: $\alpha = 0$, $\beta = 1$ ve $\gamma = 2$ için;

$$\partial^0 F^{12} + \partial^2 F^{01} + \partial^1 F^{20} = 0 \quad (2.103)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} B_z + \frac{\partial}{\partial y} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_y = 0 \quad (2.104)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} B_z - (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 \quad (2.105)$$

ile Maxwell'in (2.67) denkleminde ifade edilen Faraday yasasını bulmuş oluruz.

Diğer taraftan aşağıda verilen homojen olmayan Maxwell Denklemleri;

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ve} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

indis notasyonunda kısaca,

$$\partial_\alpha F^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\beta \quad (2.106)$$

olarak yazılır. Bu tanım açık olarak yazılırsa,

$$\partial_0 F^{\beta 0} + \partial_1 F^{\beta 1} + \partial_2 F^{\beta 2} + \partial_3 F^{\beta 3} = \mu_0 J^\beta \quad (2.107)$$

olur. Örneğin $\beta = 0$ bileşeni için,

$$\partial_0 F^{00} + \partial_x F^{0x} + \partial_y F^{0y} + \partial_z F^{0z} = \mu_0 J^0 \quad (2.108)$$

$$0 + \partial_x \frac{E_x}{c} + \partial_y \frac{E_y}{c} + \partial_z \frac{E_z}{c} = \mu_0 J^0 \quad (2.109)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.110)$$

Maxwell denklemlerinde Gauss Yasasını elde etmiş oluruz.

Burada, örneğin $\beta = y = 2$ olarak alınırsa,

$$\partial_0 F^{20} + \partial_x F^{2x} + \partial_y F^{22} + \partial_z F^{23} = \mu_0 J^2 \quad (2.111)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_0 J_y \quad (2.112)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{B})_y = \mu_0 J_y \quad (2.113)$$

ile Maxwell denklemlerinde Ampere denkleminin y bileşenini elde etmiş oluruz. Böylece 4-vektör tanımlamaları ile Maxwell Denklemlerini tensörel olarak ifade etmiş oluruz. Genel görelilikte yüklü sistemler ve elektromanyetik alan içindeki sistemler için Maxwell denklemlerini tensörel formda kullanmak uygundur.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Brans-Dicke Teorisi:

Doğanın en temel fizik yasalarından olan kütleçekim yasasındaki G çekim sabiti uzun yıllar sabit olarak kabul edilirken, 1900 lü yılların başından itibaren bu sabitin bir skaler alan olabileceğini göz önüne alan Skaler Alan Teorileri ortaya atılmaya başlandı. 1912 yılında G.Nordström tarafından ortaya atılan skaler alan teorileri, Einstein'ın ileri sürdüğü ve Genel göreliliğe ciddi bir rakip olan modern skaler-tensör kozmoloji teorilerinde (Faraoni 2004), (Fujii ve Ark. 2007) bu sabitin zamana bağlı olduğunu ileri sürmesiyle devam etti. Dirac ve Jordan'ın çalışmalarıyla kütleçekim teorisi şekillenmeye başladı ve G sabiti kütleçekimsel skaler alan gibi düşünüldü. 1961 yılında skaler tensör fikri olgunluğa ulaştı. 1961 de Brans ve Dicke (Brans-Dicke 1961) bir teori yayınladılar. Bu teori yıllar sonra Einstein'ın ortaya attığı fikrin bir protitipi oluyordu. Brans-Dicke (BD) teorisi genel göreliliğin standart Einstein denklemlerine alternatif bir skaler alan teorisidir.

Bu teoriye göre, aksiyon denklemi genel olarak

$$S^{ab} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{cd} \nabla_c \Phi \nabla_d \Phi - V(\Phi) + S^{(m)} \right] \quad (3.1)$$

yazılır. Burada $S^{(m)}$ ifadesi içinde Φ skaler alan olmayan, başka tür madde yapısını içeren eylemi ifade eder ve

$$S^{(m)} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}^{(m)} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır. $\mathcal{L}^{(m)}$ Lagrange yoğunluğudur ve Φ skaler alanına bağlı değildir. Diğer taraftan Φ skaleri direkt olarak Ricci skaleri ile birleşmiştir. Böylece BD teorisinde temel olarak şunu söyleyebiliriz; kütleçekimsel alan, metrik tensörü (g_{ab}) ve BD skaler alan (Φ) ile tanımlanır ayrıca maddeyi ifade eden Lagrange yoğunluğu ve skaler potansiyel ($V(\Phi)$) gibi diğer değişkenlerle beraber sistemin dinamiğini oluşturur. Skaler potansiyel $V(\Phi)$ kozmolojik sabitin genel bir ifadesidir ve sistemin dinamiğine göre bazen kütle terimine bazen de sabit bir parametreye indirgenebilir. Erken evren dönemini inceleyen teoriler veya günümüz evren teorilerindeki karanlık enerjiyi açıklayan teoriler, skaler potansiyel terimini içermektedir. Denklem (3.1) den de görüldüğü gibi BD skaler alanı Newton kütleçekim sabitinin tersi gibi davranmaktadır ve değişken değerler alabilmektedir,

$$G_{eff}(\Phi) = \frac{1}{\Phi} \quad (3.3)$$

Burada çekici kütleçekim etkisine karşılık gelmesi için $\Phi > 0$ değerleri tercih edilmektedir.

Brans ve Dicke, aslında bu kütleçekim teorisinde bir skaler alan tanımlayarak, Mach prensiplerini de içeren bir teori elde etmeyi amaçlamışlardır. Çünkü gerçekte genel görelilik teorisi Mach prensiplerini içermez. Temel olarak Mach prensibi şunu söyler: Bir parçacığın sahip olduğu kütlesi veya eylemsizliği bu cismin çevresi tarafından oluşturulan dinamik bir niceliktir. Yani bir cismin eylemsizliğe sahip olabilmesinin tek yolu evrenin geri kalan kısmındaki tüm kütlelerin bir şekilde etkileşimde olması ile mümkündür. Örneğin genel görelilik teorisinde Schwarzschild çözümleri, cismin çevresindeki diğer cisimleri ihmal edilerek yapılmaktadır ve kütleçekim etkisi sabit bir değerdir. Öte yandan buna benzer çözümlerin BD teorisinde, cismin çevresindeki madde tarafından oluşturulan kütleçekimsel etkinin değişken bir fonksiyon olduğu ve bir skaler alan vasıtasıyla iletildiği ve $G = \frac{1}{\Phi}$ şeklinde değiştiği öne sürülür. Mach prensibi yanlış olmamasına rağmen deneylerle doğrulanamamıştır. Bu anlamda BD teorisinin test edilebilir özelliklere sahip olması ve Mach prensibini içermesi onu daha cazip hale getirmiştir. Güneş sistemi ölçeğindeki gözlemler genel görelilik teorisinin öngördüğü sonuçlar ile uyumaktadır, ancak kozmolojik ölçeklerde veya kütleçekim etkisinin fazla olduğu durumlarda genel görelilik teorisinden sapmalar olabileceği düşünülmektedir. Bu sebeple BD teorisi ile işlem yapmak daha genel bir teori elde etmek açısından gereklidir.

BD alan denklemlerini elde etmek için (3.1) eyleminin uzay-zaman geometrisinde göre varyasyonu alınarak, $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ ifadesinden,

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{ab}^{(m)} + \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\nabla_a \Phi \nabla_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} (\nabla_a \nabla_b \Phi - g_{ab} \square \Phi) - \frac{V}{2\Phi} g_{ab} \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada,

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} \quad (3.5)$$

ve

$$\delta(\sqrt{-g} R) = \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} \equiv \sqrt{-g} G_{ab} \delta g^{ab} \quad (3.6)$$

ifadeleri kullanılmıştır. Maddenin stres enerji tensörü

$$T_{ab}^{(m)} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}^m) \quad (3.7)$$

olarak yazılır.

Diğer taraftan sistemin dinamiğini tam olarak açıklayabilmek için aksiyon denkleminin varyasyonunu diğer bir değişken olan skaler alana göre de yapmalıyız. $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$ ifadesinden skaler alan denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\frac{\omega}{\Phi} \square \Phi + R + \frac{\omega}{\Phi^2} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi - \frac{dV}{d\Phi} = 0. \quad (3.8)$$

Burada \square operatörü Laplace-Beltremi Operatörüdür. 3-boyutlu uzaydaki Laplacien operatörüne karşılık gelir. Bu durumda (3.4) denklemini g^{ab} ile çarparak Ricci skalerini stres enerji tensörü ve skaler alan cinsinden

$$R = \frac{-8\pi}{\Phi} T^{(m)} + \frac{\omega}{\Phi^2} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi + \frac{3\square\Phi}{\Phi} + \frac{2V}{\Phi} \quad (3.9)$$

olarak elde ederiz. (3.8) ve (3.9) denklemlerinden R ifadeleri yok edilirse, skaler alanın dalga denklemini aşağıdaki gibi elde edebiliriz,

$$\square \Phi = \frac{1}{2\omega+3} \left[8\pi T^{(m)} + \Phi \frac{dV}{d\Phi} - 2V \right]. \quad (3.10)$$

Bu ifade bize skaler alanın kaynağının uzay-zaman içindeki madde ve ayrıca skaler potansiyel olduğunu söylemektedir. Bu anlamda eğer skaler potansiyel yoksa $V(\Phi) = 0$ ve uzay-zaman boş $T_{ab}^{(m)} = 0$ veya sadece elektromagnetik radyasyon ile dolu ise (dört boyutlu uzay-zamanda elektromagnetik alan stres enerji tensörünün izi sıfırdır $T^{(EM)} = 0$),

$$\square \Phi = 0 \quad (3.11)$$

sonucu elde edilir ki bu durumda uzay-zamanın içerdiği madde skaler alan için bir kaynak teşkil etmez, bu durumda evren konformal yapıdaki madde ile doludur denir. BD teorisinde konformal madde tanımı, konformal dönüşümler altında değişmezlik özelliği gösteren ve uzayın her yerini homojen olarak doldurmuş madde türü olarak yapılabilir. Bu tür uzay-zamanlarda evreni dolduran skaler alan değişken bir fonksiyondur. Öte yandan genel olarak

BD parametresinin $\omega \rightarrow \infty$ limitinin genel görelilik limiti olduğu bilinir. Oysaki $\square\Phi = 0$ olması durumunda madde yapısı konformal yapıda olduğu için BD parametresinin bu değerleri genel görelilik limiti değildir. Bu tür uzay-zamanlarda BD parametresini ne kadar öteleysek öteleyelim teori yine BD teorisi olarak kalmaya devam edecektir ve başka bir kütleçekim teorisine dönüşmeyecektir (Matsuda 1972) ve (Faraoni 1998). Böyle bir durumda genel görelilik limitini elde etmek için skaler alanı sabit olarak seçmemiz gerekir. $\square\Phi \neq 0$ durumunda, madde konformal yapıda değildir yani uzay-zaman simetrik yapıdaki madde ile dolu değildir. Bu durumda ω parametresinin değişmesi BD teorisini başka bir kütleçekim teorisine dönüştürebilir ve hatta $\omega \rightarrow \infty$ limiti bu teoriyi GR kütleçekim teorisine dönüştürür. Bu limitin uygulaması daha sonra (Bölüm 4.2) tekrar incelenecektir. Bu iki durumu matematiksel olarak gösterelim.

$\square\Phi = 0$ durumu: (3.9) denkleminde

$$\frac{1}{\Phi^2} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi = \frac{R}{\omega} \quad (3.12)$$

olur. Bu değer (3.4) alan denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{ab}^{(m)} + \frac{R}{2} \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu denklem Einstein alan denklemi değildir. Böylece konformal madde dağılımı olan durumlarda BD teorisi GR teorisine dönüşmez ve BD teorisi içinde kalır. Uzay-zamanın geometrisi BD teorisi içinde bir simetriye sahiptir ve bu simetri BD parametresi ω ne kadar ötelenirse ötelensin kırılmaz (Faraoni 1999).

$\square\Phi = \frac{8\pi T^{(m)}}{2\omega+3}$ durumu: (3.9) denkleminde

$$\frac{1}{\Phi^2} \nabla^c \Phi \nabla_c \Phi \propto O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (3.14)$$

sonucu elde edilir. Bu değer (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{ab}^{(m)} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (3.15)$$

elde edilir. Bu eşitliğin $\omega \rightarrow \infty$ limitinde, sağdaki ikinci terim sıfır olacak ve böylece Einstein alan denklemleri elde edilecektir. Sonuç olarak konformal formda olmayan madde yapılarında BD teorisinin simetrisi kırılır ve GR limiti elde edilmiş olur.

3.2 Genel Görelilikte Silindirik Simetrik Sistemler ve Uygulamaları

Bu bölümdeki temel bilgiler Bronnikov, Santos ve Wang'ın çalışmasından yararlanılarak sunulmuştur.

Silindirik simetrik uzay-zaman ile ilgili çalışmalar 1919' da Levi-Civita (1919) ile başlamıştır ve bu çalışmada silindirik simetrik uzay-zaman için durgun(statik) vakum çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümler 1925'de Beck (1925) tarafından durgun olmayan, zamana bağlı çözümlere genelleştirilmiş ve silindirik kütleçekim dalgalarının yayılımı ile ilişkilendirilmiştir. Bu düşünce daha sonra 1937'de Einstein-Rosen (Einstein ve ark. 1937) tarafından tekrar incelenmiş ve silindirik simetrik kütleçekim dalgalarının tam çözümleri incelenmiştir.

Genel Görelilikte teorisinde, uzay-zamanın tekilliklerinin araştırılması, kozmik sansür ve halka varsayımı (hoop conjecture) problemlerini incelerken uzay-zamanın simetrisini iyi anlamak oldukça önemlidir. Çünkü Einstein alan denklemleri oldukça karmaşık ve çözülmesi kolay olmayan diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Bu anlamda silindirik simetrik uzay-zaman geometrilerini de anlamak bu ve benzeri konuların daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır.

Silindirik simetrik uzay-zamanlarda çalışmalar daha sonra Kibble'nin 1976'da topolojik bozuklukları keşfetmesi ile tekrar hız kazanmıştır (Kibble 1976). Bu topolojik defektlerden oluşan kozmik sicimlerin büyük ölçekli evrende kozmik arka alan ışımlarının (CMB) oluşmasında etkili olabileceği öngörülmüştür. Fakat gözlemsel sonuçlar, kozmik arka alan ışımlarında bu tür kozmik sicimlerin katkısının varsa bile çok az olduğunu göstermiştir. Diğer taraftan kozmik sicimlerin Büyük Birleşme Teorilerinde (GUT) simetri kırılımları esnasında oluştuğu ve kozmik perturbasyonların kaynağı oldukları öne sürülmüştür (Bennett ve ark. 1996, Smoot 1992, Spergel 2007).

Son zamanlarda silindirik simetrik sistemler Sicim/M-Teorisi konusunda tekrar önem kazanmıştır. Bu silindirik simetrik yapılar kozmik süpersicimlerdir ve enflasyondan önce oluştukları düşünülmekte ve enflasyondan sonra makroskobik ölçeğe geçtikleri

öngörülmektedir (Copeland ve ark. 2004, Dvali ve ark. 2004). Daha sonraki dönemlerde bu sicimlerin karmaşık bir ağ oluşturdukları öne sürülmüştür. Bu sicim ağının en önemli sonucunun rastgele kütleçekim dalgalarının arka alanını oluşturabildikleri düşüncesidir (Aasi 2004, Abbott 2016, Stoot ve ark. 2017, Vachaspati ve ark. 1985).

Kütleçekim dalgalarının 11/2018 yılındaki gözlemlerinden (Abbott 2018), dalgaların geçtikleri yerlerdeki izlerinin ve lineer olmayan özelliklerinin de incelemenin mümkün olabileceği anlaşılmıştır (Favata 2010). Kütleçekim dalgaları daha çok düzlemsel simetriye sahip uzay-zamanlı sistemlerde incelenmektedir. Ancak lineer olmayan etkilerinin incelenmesi için silindirik simetrik geometrilere ihtiyaç duyulmaktadır (Mishima ve ark. 2017).

Kütleçekim dalgalarının lineer olmayan özelliklerinin yanında Piran, Safier ve Stark (Piran ve ark. 1985, Piran ve ark. 1985) tarafından keşfedilen kütleçekimsel Faraday dönmeleri de ilginç bir çalışmadır. Bu çalışmada elektromagnetizmadaki Faraday dönmesi ile aynı anoloji kurularak bir kütleçekim dalgasının polarizasyonunun başka bir kütleçekim dalgası tarafından döndürülebileceği düşüncesini öngörmüşlerdir. Bu etki kütleçekim dalgalarının lineer olmayan etkileşiminden kaynaklanmaktadır. Faraday dönmeleri daha sonra, Maxwell dalgaları (Arafah ve ark. 1990), dönen silindirik kütleçekim dalgaları (Pereira ve ark. 2003) ve son zamanlarda silindirik simetrik kütleçekimsel soliton dalgaları gibi bir çok sisteme uygulanmıştır.

Genel görelilikte sıklıkla farklı geometriler incelenmekte ve olması muhtemel henüz gözlemlenmemiş sistemler için çözümler elde edilmektedir. Bu anlamda günümüzde en ilgi çeken cisimler Wheeler tarafından öngörülen solucan delikleridir (Wheeler 1957). Doğada henüz gözlemlenmemiş olan bu sistemler silindirik simetrik uzay-zaman konfigürasyonlarında sıkça incelenmektedir (Bronnikov 2016, Bronnikov ve ark. 2019).

Diğer taraftan silindirik simetrik uzay-zaman geometrilerin en temel problemi asimptotik olarak düz uzay-zamana indirgenememeleridir. En karmaşık silindirik simetrik veya eksenel simetrik sistemler asimptotik olarak L-C uzay-zamanına indirgenmektedir. Bu anlamda daha çok lokal sistemler için öngörülmüş geometrilerdir ve kozmolojide henüz silindirik simetrik cisimlere rastlanmamıştır.

3.3 N boyutlu Statik Silindirik Simetrik Uzay-Zamanda Brans-Dicke-Maxwell Aksiyonu ve Alan Denklemlerinin Elde Edilmesi

Uzay-zamanın içerdiği madde sadece elektromagnetik radyasyondan ibaret ise BD eylem denklemi, Brans-Dicke-Maxwell olarak adlandırılır. Bu eylem denklemi N -boyutta aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S = \int d^N x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Φ BD skaler alanıdır ve Newton kütleçekim sabitinin sabit olmayıp bir skaler alan ile değiştiği varsayılır. (3.16) aksiyon denkleminde BD skaler alanının $\Phi = \frac{1}{16\pi G_N}$ büyüklüğüne karşılık geldiği söylenebilir. Bu denklemin $g^{\mu\nu}$ 'ye göre varyasyonunu alırsak:

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (3.17)$$

eşitliğinden BD alan denklemleri

$$G_{\mu\nu} = \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi \right) + \frac{2}{\Phi} \left(F_{\mu\lambda} F_\nu^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \right) \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir.

(3.16) numaralı aksiyon denkleminin Φ 'ye göre varyasyonu alınır; $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$

$$R = \frac{\omega}{\Phi^2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{2\omega}{\Phi} \square \Phi \quad (3.19)$$

(3.18) denklemini $g^{\mu\nu}$ ile kontrakt edersek:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.20)$$

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R \quad (3.21)$$

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} NR \quad (3.22)$$

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R\left(1 - \frac{N}{2}\right) \quad (3.23)$$

$$R = \frac{\omega}{\Phi^2} \nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{2\omega}{\Phi} \square \Phi \quad (3.24)$$

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = \frac{w}{\Phi^2} \left(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \Phi \nabla^\lambda \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square \Phi \right) + \frac{2}{\Phi} \left(g^{\mu\nu} F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \right) \quad (3.25)$$

$$R\left(1 - \frac{N}{2}\right) = \frac{w}{\Phi^2} \left(\nabla_\lambda \Phi \nabla^\lambda \Phi - \frac{1}{2} N \nabla_\lambda \Phi \nabla^\lambda \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(\nabla^\nu \nabla_\nu \Phi - N \square \Phi \right) + \frac{2}{\Phi} \left(F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} - \frac{N}{4} F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} \right) \quad (3.26)$$

$$R\left(1 - \frac{N}{2}\right) = \frac{\omega}{\Phi^2} \left[\left(1 - \frac{N}{2}\right) \nabla \Phi \nabla^\lambda \Phi \right] + \frac{1}{\Phi} \left[\left(1 - \frac{N}{4}\right) \square \Phi \right] \quad (3.27)$$

(3.24) denklemi (3.27) de yerine konulursa Φ skaler alanı,

$$\square \Phi = - \frac{N-4}{2[\omega(N-2)+(N-1)]} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.28)$$

sonucu elde edilir. Burada $N > 4$ durumunda elektromanyetik alanın Φ skaler alanının kaynağı olduğu görülmektedir. Diğer taraftan $N = 4$ için elektromagnetik stres enerji tensörü skaler alan için bir kaynak görevi görmez.

3.4 4 Boyutlu Statik Silindirik Simetrik Uzay-Zamanda Einstein Maxwell Brans-Dicke Teorisi

Uzay-zamanın geometrisi için 4 boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zaman metriği

$$ds^2 = e^{2(K-U)}(-dt^2 + dr^2) + e^{2U} dz^2 + e^{-2U} W^2 d\varphi^2 \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada; r, z ve Φ silindirik simetrik uzaysal koordinatlarıdır ve t ise zaman koordinatıdır. K, U ve W fonksiyonları ise radyal (r ye bağlı) koordinata bağlı fonksiyonlardır. Alan denklemleri kullanılarak metrik fonksiyonları elde edilecek ve bu geometriyi sağlayan uygun elektromanyetik stres enerji tensörü elde edilecektir.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, manyetik alan azimut açısı yönünde tanımlanarak uygun elektromanyetik stres enerji tensörü elde edilecek ve 4 boyutta alan denklemleri çözülecektir. İkinci bölümde, radyal doğrultuda elektrik alan tanımlanarak elektromanyetik alan stres enerji tensörü ve alan denklemlerinin mümkün çözümleri elde

edilecektir. Daha sonraki kısımda her iki çözüm genelleştirilerek N boyutlu uzay-zamanda mevcut çözümler elde edilecek.

4 boyutlu silindirik simetrik uzay-zaman metriği matris formunda

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2(K-U)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(K-U)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2U} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2U}W^2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda metrik tensörünün determinanı,

$$|g_{\mu\nu}| = g = -e^{4K(r)-4U(r)} W(r)^2 \quad (3.31)$$

olur. Bu metrik tensörünü sağlayan Christoffel sembolleri bölüm 2.6 'da anlatıldığı gibi elde edilir ve sıfırdan farklı bileşenleri,

$$\Gamma_{tt}^r = K'(r) - U'(r), \quad (3.32)$$

$$\Gamma_{tr}^t = K'(r) - U'(r), \quad (3.33)$$

$$\Gamma_{rr}^r = K'(r) - U'(r), \quad (3.34)$$

$$\Gamma_{rz}^z = U'(r), \quad (3.35)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{-W(r)U'(r)+W'(r)}{W(r)}, \quad (3.36)$$

$$\Gamma_{zz}^r = e^{-2K(r)+4U(r)}U'(r), \quad (3.37)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = e^{-2K(r)}W(r)(W(r)U'(r) - W'(r)). \quad (3.38)$$

olarak elde edilir.

(3.29) çizgi elemanından elde edilen Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibidir

$$G^t_t = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - \frac{K'W'}{W} + \frac{W''}{W} \right\}, \quad (3.39)$$

$$G^r_r = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - \frac{K'W'}{W} \right\}, \quad (3.40)$$

$$G^z_z = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - 2U'' + K'' + \frac{W''}{W} - \frac{2U'W'}{W} \right\}, \quad (3.41)$$

$$G_\Phi^\Phi = e^{2(U-K)} \{ U'^2 + K'' \}. \quad (3.42)$$

Ricci skaleri ise,

$$R = -2e^{-2K(r)+2U(r)} \left(U'(r)^2 - \frac{U'(r)W'(r)}{W(r)} + K''(r) - U''(r) + \frac{W''(r)}{W(r)} \right). \quad (3.43)$$

ile verilir.

Bu tür silindirik simetrik uzay-zaman geometrileri için farklı yönlerde manyetik alan vektörü olan çözümler mevcuttur. Biz bu tezde manyetik alanın azimut açısı yönünde ve simetri eksenini yönünde olduğu durumları inceleyerek uygun metrik tensör fonksiyonlarını elde edeceğiz. İlk olarak manyetik alanın azimut açısı yönünde olduğu durumları inceleyelim.

3.4.1 4 Boyutlu Uzay-Zamanda Azimut Açısı Yönünde Manyetik Alan Brans-Dicke Çözümleri

Azimut açısı yönünde manyetik alan elde etmek için elektromanyetik potansiyel dört vektör bileşenleri aşağıdaki gibi seçilir

$$A_\mu = \{0, 0, f(r), 0\}. \quad (3.44)$$

burada vektör potansiyeli $A_z = f(r)$ simetri eksenini yönünde seçilmiştir. Böylece elektromanyetik alan tensörü;

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.45)$$

yararlanarak genel durumda, sıfırdan farklı bileşenler,

$$F_{\mu z} = \partial_\mu A_z - \partial_z A_\mu \quad (3.46)$$

olarak yazılabilir. Burada elektromanyetik potansiyel sadece radyal bileşene bağlı olduğundan $\partial_z A_\mu = 0$ olur. Böylece

$$F_{rz} = \partial_r A_z = \frac{df}{dr} = B_\theta \quad (3.47)$$

ile azimut açısı yönünde yani açısal yönde manyetik alan elde edilir. Einstein-Maxwell stres enerjisi tensörü

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = 2 \left(F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right) \quad (3.48)$$

ifadesi kullanılarak sıfırdan farklı bileşenler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T_{tt} = \frac{1}{2} e^{-2U(r)},$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2} e^{-2U(r)},$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2} e^{-2K(r)+2U(r)},$$

$$T_{\Phi\Phi} = \frac{1}{2} e^{-2K(r)-2U(r)} W(r)^2,$$

Burada stres enerji tensörünün (tt) bileşeni (3.48) tanımından

$$T_{tt}^{(EM)} = 2 \left[F_{t\lambda} F^{\lambda}_t - \frac{1}{4} (-e^{2K-2U} F_{rz} F^{rz}) \right] \quad (3.49)$$

olarak bulunur. Burada elektromanyetik alan tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$F_{rz} = f' = \frac{df}{dr} = B_{\theta} = -F_{zr}, \quad (3.50)$$

$$F^{rz} = g^{11} g^{22} F_{12}, \quad (3.51)$$

$$F^{rz} = e^{-2K+2U} e^{-2U} f', \quad (3.52)$$

$$F^{rz} = e^{-2K} f' \quad (3.53)$$

elde edilir. Böylece

$$F_{t\lambda} F^{\lambda}_t = 0$$

$$F_{\alpha\lambda} F^{\alpha\lambda} = F_{tt} F^{tt} + F_{rr} F^{rr} + \dots + F_{tr} F^{tr} + F_{tz} F^{tz} + \dots + F_{zr} F^{zr} + \dots = 2f'^2 e^{-2K} \quad (3.54)$$

sonuçları kullanılarak $T_{tt} = \frac{1}{2} e^{-2U(r)}$ denklemi elde edilir.

Brans-Dicke Alan Denklemleri

4 boyutlu silindirik simetrik uzay-zamanda B-D Einstein Maxwell alan denklemleri (3.18) denklemleri ile ifade edilmektedir. Azimut açısı yönünde manyetik alan etkisinde olan silindirik simetrik sistem için bu alan denkleminin sıfırdan farklı bileşenleri, (3.18) numaralı denklemdaki sağ tarafta Φ skaler alanı içeren kısımlar $T^{\mu}_{\nu(\Phi)}$ olarak adlandırılırsa

$$G^{\mu}_{\nu} = \bar{T}^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu(\Phi)} + T^{\mu}_{\nu(EM)} \quad (3.55)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$G^{\mu}_{\nu} = \bar{T}^{\mu}_{\nu}$$

bağıntısının genel olarak, $G^{\mu}_{\nu} - \bar{T}^{\mu}_{\nu} = 0$ yazılması uygundur. Alan denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$G^t_t - \bar{T}^t_t = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - \frac{K'W'}{W} + \frac{W''}{W} - \left(-\frac{e^{-2U} f'^2}{\Phi} - \frac{U'\Phi'}{\Phi} + \frac{K'\Phi'}{\Phi} - \frac{W'\Phi'}{W\Phi} - \frac{\omega \Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) \right\} = 0, \quad (3.56)$$

$$G^r_r - \bar{T}^r_r = e^{2(U-K)} \left\{ -U'^2 + \frac{K'W'}{W} - \left(\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{K'\Phi'}{\Phi} - \frac{W'\Phi'}{W\Phi} + \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} \right) \right\} = 0, \quad (3.57)$$

$$G^z_z - \bar{T}^z_z = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - 2U'' + K'' + \frac{W''}{W} - \frac{2U'W'}{W} - \left(\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{W'\Phi'}{W\Phi} - \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) \right\} = 0, \quad (3.58)$$

$$G^\Phi_\Phi - \bar{T}^\Phi_\Phi = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 + K'' - \left(-\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) \right\} = 0. \quad (3.59)$$

Burada \bar{T}^μ_ν ifadesi skaler potansiyelden ve Maxwell alanlarından kaynaklı stres enerji tensörünün tamamını içermektedir.

(3.56) ve (3.57) denklemleri toplanırsa;

$$\frac{W''}{W} + \frac{W'\Phi'}{W\Phi} - \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

$$\frac{(W\Phi)''}{W\Phi} = 0.$$

Burada $W\Phi = \Omega$ dersek

$$\Omega'' = 0. \quad (3.60)$$

sonucu yazılabilir. (3.60) denklemini integre edildiğinde,

$$\Omega = \Omega_0 r + \Omega_1 \quad (3.61)$$

elde edilir. Burada Ω_0 ve Ω_1 integral sabitleridir. İşlemlerde kolaylık olması açısından bundan sonraki kısımda $\Omega_1 = 0$ seçilmiştir. Diğer taraftan (3.56) ve (3.59) toplanırsa

$$(\Omega K')' - \left(\Omega \frac{W'}{W} \right)' = 0 \quad (3.62)$$

ifadesi elde edilir. Bu işlem integre edilirse ifade basitçe

$$K' - \frac{W'}{W} = \frac{c_2}{r} \quad (3.63)$$

elde edilir. Burada c_2 integral sabitidir. Maxwell denklemlerinde akım yoğunluğunun sıfır olduğu sistemler için $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ifadesi kullanılarak; (4 boyut için)

$$f' = f_0 \frac{e^{2U}}{W}, \quad (3.64)$$

Burada f_0 integral sabitidir. Ayrıca skaler alan denklemi (3.28) denkleminde

$$\frac{e^{2U}}{WX} (\Phi'W)' = 0 \quad (3.65)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemi çözersek genel olarak

$$\Phi'W = f_1 = \text{sabit} \quad (3.66)$$

sonucu yazılabilir. Burada f_1 integral sabitidir.

Çözümler

(3.61), (3.63) ve (3.66) denklemini sağlayan metrik fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz (Baykal ve ark. 2009).

$$\Phi = \phi_0 r^{1-k}, \quad (3.67)$$

$$W = W_0 r^k, \quad (3.68)$$

$$K = q \ln r, \quad (3.69)$$

$$U = 1/2(p + k - 1) \ln r - \ln(1 + c^2 r^p), \quad (3.70)$$

$$f = \mp \frac{\sqrt{\Phi_0}}{c(1+c^2 r^p)} \quad (3.71)$$

Burada Φ_0, W_0, ϕ_0, f_0 integralden gelen sabit parametrelerdir.

$$q = \frac{1}{4} [p^2 + 2\omega - 1 - 2k(1 + 2\omega) + k^2(2\omega + 3)] \quad (3.72)$$

Bu çözümler $p \rightarrow -p$ dönüşümünde invaryanttır. Bu durumda B-D-M alan çözümleri ve manyetik alan değeri,

$$B_\Phi = f' = \pm \frac{cpr^{p-1}\sqrt{\Phi_0}}{(1+c^2 r^p)^2} \quad (3.73)$$

olarak elde edilir.

3.4.2 4 Boyutlu Uzay-Zamanda Radyal Yönde Elektrik Alan Brans -Dicke Çözümleri

Radyal yönde elektrik alan içeren çözümlerde Einstein-Rosen tipi silindirik simetrik metrik yeterli olmamaktadır. Bu sebeple Weyl tipi koordinatları seçerek işlem yapmamız uygun olacaktır.

Silindirik simetrik uzay-zamanda Weyl metriği,

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{2(K-U)}(dr^2 + dz^2) + e^{-2U} W^2 d\Phi^2 \quad (3.74)$$

şeklindedir.

Radyal yöndeki elektrik alan çözümlerinde elektromanyetik alan tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$F_{tr} = E(r) dt \wedge dr \quad (3.75)$$

şeklinde tanımlanarak uygun metrik fonksiyonları elde edilir.

Maxwell denklemlerinde akım yoğunluğunun sıfır olduğu bölgelerde $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ ifadesi geçerlidir ve metrik fonksiyonları cinsinden

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = e^{-2(K-U)} \left[E' - 2EU' + \frac{W'}{W} \right] = 0 \quad (3.76)$$

yazılır. Bu basit diferansiyel denklem çözümünden radyal yöndeki elektrik alanı

$$E = E_0 \frac{e^{2U}}{W}$$

elde edilir. Einstein-Maxwell stres enerji tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$T^\nu_{\mu(EM)} = g^{\mu\nu} \left(F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right) \quad (3.77)$$

$$T^t_{t(EM)} = -\frac{1}{2} e^{-2K(r)} f(r)^2 \quad (3.78)$$

$$T^r_{r(EM)} = -\frac{1}{2} e^{-2K(r)} f(r)^2 \quad (3.79)$$

$$T^z_{z(EM)} = \frac{1}{2} e^{-2K(r)} f(r)^2 \quad (3.80)$$

$$T^\Phi_{\Phi(EM)} = \frac{1}{2} e^{-2K(r)} f(r)^2 \quad (3.81)$$

olarak elde edilir. (3.74) çizgi elemanının Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$G^t_t = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - \frac{2U'W'}{W} + \frac{K'' - U'' + W''}{W} \right\}, \quad (3.82)$$

$$G^r_r = -e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - \frac{K'W'}{W} \right\}, \quad (3.83)$$

$$G^z_z = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 + \frac{W''}{W} - \frac{K'W'}{W} \right\}, \quad (3.84)$$

$$G_\Phi^\Phi = e^{2(U-K)} \{ U'^2 + K'' \}. \quad (3.85)$$

olarak elde edilir. B-D alan denklemi

$$G_{\mu\nu} - \frac{w}{\Phi^2} \left(\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(\partial_\mu \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha \Phi \right) + \frac{2}{\Phi} T^\nu_{\mu(EM)} = 0 \quad (3.86)$$

olarak yazılır. Bu denklemde $G_{\mu\nu}$ Einstein tensörü haricinde kalan bütün kısımları $\bar{T}_{\mu\nu}$ ile sembolize ederek metrik fonksiyonlarını elde edeceğimiz diferansiyel denklemleri aşağıdaki gibi yazarız. Böylece

$$G^t_t - \bar{T}^t_t = e^{-2K(r)+2U(r)} \left(-\frac{e^{-2U(r)} f(r)^2}{\Phi(r)} - U'(r)^2 + \frac{2U'(r)W'(r)}{W(r)} + \frac{U'(r)\Phi'(r)}{\Phi(r)} - \frac{W'(r)\Phi'(r)}{W(r)\Phi(r)} - \frac{\omega\Phi'(r)^2}{2\Phi(r)^2} - K''(r) + 2U''(r) - \frac{W''(r)}{W(r)} - \frac{\Phi''(r)}{\Phi(r)} \right) = 0 \quad (3.87)$$

$$G^r_r - \bar{T}^r_r = e^{-2K(r)+2U(r)} \left(-\frac{e^{-2U(r)} f(r)^2}{\Phi(r)} + U'(r)^2 - \frac{K'(r)W'(r)}{W(r)} - \frac{K'(r)\Phi'(r)}{\Phi(r)} + \frac{U'(r)\Phi'(r)}{\Phi(r)} - \frac{W'(r)\Phi'(r)}{W(r)\Phi(r)} + \frac{\omega\Phi'(r)^2}{2\Phi(r)^2} \right) = 0 \quad (3.88)$$

$$G^z_z - \bar{T}^z_z = e^{-2K(r)+2U(r)} \left(\frac{e^{-2U(r)} f(r)^2}{\Phi(r)} - U'(r)^2 + \frac{K'(r)W'(r)}{W(r)} + \frac{K'(r)\Phi'(r)}{\Phi(r)} - \frac{U'(r)\Phi'(r)}{\Phi(r)} - \frac{W'(r)\Phi'(r)}{W(r)\Phi(r)} - \frac{\omega\Phi'(r)^2}{2\Phi(r)^2} - \frac{W''(r)}{W(r)} - \frac{\Phi''(r)}{\Phi(r)} \right) = 0 \quad (3.89)$$

$$G_\Phi^\Phi - \bar{T}_\Phi^\Phi = e^{-2K(r)+2U(r)} \left(\frac{e^{-2U(r)} f(r)^2}{\Phi(r)} - U'(r)^2 - \frac{U'(r)\Phi'(r)}{\Phi(r)} - \frac{\omega\Phi'(r)^2}{2\Phi(r)^2} - K''(r) - \frac{\Phi''(r)}{\Phi(r)} \right) = 0 \quad (3.90)$$

olur.

B-D aksiyon denkleminin skaler alana göre varyasyonundan 4 boyutlu uzay-zamanda

$$\square\Phi = 0 \quad (3.91)$$

bağıntısı elde edilir ve metrik fonksiyonları cinsinden

$$\frac{W'}{W} \frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{\Phi''}{\Phi} \quad (3.92)$$

bulunur, burada

$$(\Phi'W)' = 0 \quad (3.93)$$

yazılarak,

$$W = \frac{W_0}{\Phi'} \quad (3.94)$$

elde edilir. (3.87) –(3.94) diferansiyel denklemleri çözülerek metrik fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir (Baykal ve ark. 2009).

$$\Phi(r) = \phi_0 r^{1-k} \quad (3.95)$$

$$W = W_0 r^k, \quad (3.96)$$

$$K = q \ln r, \quad (3.97)$$

$$U = d \ln r - \ln(1 - c^2 r^p), \quad (3.98)$$

burada integral sabitleri

$$d = \frac{1}{2}(p + k - 1) \quad (3.99)$$

$$q = \frac{1}{4}[p^2 + 3k^2 - 2k - 1 + 2\omega(1 - k)^2] \quad (3.100)$$

bu sonuçlardan elektrik alan

$$E(r) = \frac{r^{p-1}}{(1 - c^2 r^p)^2} \quad (3.101)$$

elde edilir.

Bu uzay-zaman için Ricci skaleri ve Kretschmann skaleri gibi büyüklükler hesaplandığında tekil noktalarını elde edebiliriz. Örneğin Ricci skaleri,

$$R = \frac{(1-k)^2 r^{\frac{1}{2}} [p^2 - 2p + 3k^2 - 4k + 5 + 2\omega(1-k)^2]}{(1 - c^2 r^p)^2} \quad (3.102)$$

olarak hesaplanır. Buradan $r = c^{-2/p}$ ve B-D parametresi ω 'nın değerine bağlı olarak $r = 0$ da tekil nokta mevcuttur.

Biz bu bölümde Weyl tipi silindirik simetrik metrik kullanarak radyal yöndeki elektrik alan içeren çözümlerini elde ettik. Bu çözümleri alan denklemlerini bularak elde ettik. Diğer taraftan $t \rightarrow iz$, $z \rightarrow it$, $c \rightarrow ic$ dönüşümlerini yaparak z-simetri eksenine yönünde manyetik alan içeren çözümlere geçebiliriz. Bu dönüşüm sonucunda elde ettiğimiz geometri Einstein-Rosen metriği olur.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1.N boyutlu Uzay-Zamanda Brans-Dicke Alan Denklemleri

N boyutlu silindirik simetrik uzay-zaman da metriğimiz,

$$ds^2 = e^{2(K-U)}(-dt^2 + dr^2) + e^{2U}dz^2 + e^{-2U}W^2d\Phi^2 + \sum_{i=5}^N X_i^2(dX^i)^2 \quad (4.1)$$

ile ifade edilirse azimut açısı yönünde manyetik alan etkisinde olan (3.44) silindirik simetrik sistem için bu alan denkleminin sıfırdan farklı bileşenleri :

$$G^t_t - \bar{T}^t_t = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - \frac{K'W'}{W} + \frac{W''}{W} + \sum_i^n \left[\left(U' - K' + \frac{W'}{W} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{X'_j}{X_j} \right) \frac{X'_i}{x_i} + \frac{X''_i}{X_i} \right] - \left(-\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} - \frac{U'\Phi'}{\Phi} + \frac{K'\Phi'}{\Phi} - \frac{W'\Phi'}{W\Phi} - \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} - \sum_i^N \frac{\Phi'X'_i}{\Phi X_i} \right) \right\} = 0 \quad (4.2)$$

$$G^r_r - \bar{T}^r_r = e^{2(U-K)} \left\{ -U'^2 + \frac{K'W'}{W} + \sum_i^N \left[\left(-U' + K' + \frac{W'}{W} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{X'_j}{X_j} \right) \frac{X'_i}{x_i} \right] - \left(\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{K'\Phi'}{\Phi} - \frac{W'\Phi'}{W\Phi} + \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \sum_i^N \frac{\Phi'X'_i}{\Phi X_i} \right) \right\} = 0 \quad (4.3)$$

$$G^z_z - \bar{T}^z_z = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - 2U'' + K'' + \frac{W''}{W} - \frac{2U'W'}{W} + \sum_i^N \left[\left(-U' + \frac{W'}{W} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{X'_j}{X_j} \right) \frac{X'_i}{x_i} + \frac{X''_i}{X_i} \right] - \left(\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{W'\Phi'}{W\Phi} - \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} - \sum_i^N \frac{\Phi'X'_i}{\Phi X_i} \right) \right\} = 0 \quad (4.4)$$

$$G^\Phi_\Phi - \bar{T}^\Phi_\Phi = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 + K'' + \sum_i^N \left[\left(U' + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{X'_j}{X_j} \right) \frac{X'_i}{x_i} + \frac{X''_i}{X_i} \right] - \left(-\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} - \sum_i^N \frac{\Phi'X'_i}{\Phi X_i} \right) \right\} = 0 \quad (4.5)$$

$$G^{X_i}_{X_i} - \bar{T}^{X_i}_{X_i} = e^{2(U-K)} \left\{ U'^2 - U'' - \frac{U'W'}{W} + K'' + \frac{W''}{W} + \sum_{j \neq i} \left[\left(\frac{W'}{W} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j \neq i} \frac{X'_k}{X_k} \right) \frac{X'_j}{x_j} + \frac{X''_j}{X_j} \right] - \left(-\frac{e^{-2U}f'^2}{\Phi} + \frac{U'\Phi'}{\Phi} - \frac{\omega\Phi'^2}{2\Phi^2} - \frac{\Phi''}{\Phi} \right) \right\} = 0 \quad (4.6)$$

Burada,

$$X = \prod_{i=4}^{N-1} X_i \quad (4.7)$$

ve

$$\Omega = \Phi W X \quad (4.8)$$

tir.

$$(\Omega)'' = 0 \quad (4.9)$$

bu durumda bu ilişkiyi ifade eden Ω ifadesi

$$\Omega = \Omega_0 r \quad (4.10)$$

Benzer şekilde (4.2) ve (4.5) denklemleri toplanırrsa,

$$(\Omega K')' - \left(\Omega \frac{W'}{W}\right)' = 0 \quad (4.11)$$

bulunur. Bu ifade integre edilirse;

$$K' - \frac{W'}{W} = \frac{c_2}{r} \quad (4.12)$$

olur.

Maxwell denkleminin çözümlerinden $dF = 0$ ifadesi kullanılarak; (N boyut için)

$$f' = f_0 \frac{e^{2U}}{WX} \quad (4.13)$$

bulunur. Burada f_0 integral sabitidir. Ayrıca skaler alan denklemi (3.28) denkleminde

$$\frac{e^{2U}}{WX} (\Phi'WX)' = - \frac{(N-4)}{(N-1)+(N-2)W} f'^2 \quad (4.14)$$

(4.13) ve (4.16) çözümlerinden;

$$\Phi'WX = \frac{(N-4)}{(N-1)+(N-2)} f_0 f + f_1 \quad (4.15)$$

bulunur. Bu yöntemle, oldukça karmaşık yapıdaki B-D-M alan denklemleri basitleştirilerek çözümleri kolay diferansiyel denklemler haline getirilmiştir.

4.2. N boyutlu Uzay-Zamanda Brans-Dicke Alan Denklemleri Çözümleri

(4.8), (4.9) ve (4.13) denklemini sağlayan metrik fonksiyonlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\Phi = \phi_0 r^{1-k} (1 + c^2 r^p)^{-\frac{2(N-4)}{\omega_N}} \quad (4.16)$$

$$W = W_0 r^{k-l} (1 + c^2 r^p)^{-\frac{N-4}{N-3} \left(1 - \frac{N-2}{\omega_N}\right)} \quad (4.17)$$

$$K = q \ln r - \frac{(N-4)}{(N-3)} \left(1 - \frac{N-2}{\omega_N}\right) \ln(1 + c^2 r^p) \quad (4.18)$$

$$U = d \ln r - \left(1 - \frac{N-4}{\omega_N}\right) \ln(1 + c^2 r^p) \quad (4.19)$$

$$X_i = X_{i0} r^{l_i} (1 + c^2 r^p)^{\frac{1}{N-3} \left(1 + \frac{N-4}{\omega_N}\right)} \quad (4.20)$$

$$f = \pm \sqrt{\frac{N-2}{N-3} - \frac{(N-4)^2}{\omega_N(N-3)} \frac{\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{2c(1+c^2 r^p)}}} + f_2 + f_0 \quad (4.21)$$

Burada Φ_0, W_0, ϕ_0, f_0 integralden gelen sabit parametrelerdir.

$$\omega_N = 4(N-3)(\omega+1) + (N-2) \quad (4.22)$$

$$l = \sum_{i=4}^{N-1} l_i, \quad (4.23)$$

$$m^2 N \sum_{i=4}^{N-1} l_i^2, \quad (4.24)$$

$$p = 2d + 1 - k \quad (4.25)$$

$$q = d(d+1-k+1) + \frac{\omega}{2}(1-k)^2 - k(1-k+l) + \frac{l^2+m^2}{2} \quad (4.26)$$

Bu çözümler $p \rightarrow -p$ bilgisinde invarianttır. Bu durumda B-D-M alan çözümleri ve manyetik alan değeri,

$$B_\Phi = f' = \pm \frac{\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{2}} W_0 X_0 \sqrt{\frac{N-2}{N-3} - \frac{(N-4)^2}{\omega_N(N-3)} \frac{cpr^{p-1}}{(1+c^2 r^p)}} \quad (4.27)$$

(4.13) ve (4.21) denklemleri integre edilirse

$$f_0 = \mp \frac{cp\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{2}} W_0 X_0 \sqrt{\frac{N-2}{N-3} - \frac{(N-4)^2}{\omega_N(N-3)}} \quad (4.28)$$

ve böylece

$$k = 1 - \frac{2p(N-4)}{\omega_N} \quad (4.29)$$

elde edilir. Bu sonuç GR limiti bölümünde ayrıntılı olarak incelenecektir. Böylece çizgi elemanı aşağıdaki gibi yazılır,

$$ds^2 = (r)^{\frac{2}{N-3}} \left[r^{2(q-d)} (-dt^2 + dr^2) + W_0^2 r^{2(k-d-l)} d\Phi^2 + \sum X_{i0}^2 r^{2l_i} dX_i^2 \right] + \left[G(r)^{\frac{N-4-\omega_N}{N-4+\omega_N}} r^d \right]^2 dz^2 \quad (4.30)$$

burada $G(r) = (1 + c^2 r^p)^{\frac{N-4}{\omega_N} + 1}$ 'dir (Baykal ve ark. 2009). 4 boyutlu uzayda $N = 4$ yazılırsa oldukça basit bir ifade elde edilir.

BD vakum çözümlerinde $c = 0$ yazılarak

$$ds^2 = \left[r^{2(q-d)} (-dt^2 + dr^2) + r^{2d} dz^2 + W_0^2 r^{2(k-d-l)} d\Phi^2 + \sum X_{i0}^2 r^{2l_i} dX_i^2 \right] \quad (4.31)$$

elde edilir. Burada BD skaleri,

$$\Phi = \Phi_0 r^{1-k} \quad (4.32)$$

dir. Bu çözümler statik silindirik simetrik BD vakum çözümünün Einstein-Rosen tipi koordinat sistemindeki ifadesidir (Baykal ve ark. 2010). $N = 4$ boyut için $c = 0$ için BD boşluk çözümü (Arazi ve ark. 2000) (4.19) denklemi için ,

$$ds^2 = r^{2(q-d)} (-dt^2 + dr^2) + r^{2d} dz^2 + W_0^2 r^{2(k-d-l)} d\Phi^2 + \sum X_{i0}^2 r^{2l_i} dx_i^2 \quad (4.33)$$

$\Phi = \Phi_0 r^{1-k}$ ile $k = 1$ limitinde Levi-Civita GR (1919) vakum için metrik

$$ds^2 = r^{2d(d-1)} (-dt^2 + dr^2) + r^{2d} dz^2 + W_0^2 r^{2(1-d)} d\Phi^2 \quad (4.34)$$

elde edilir. Diğer taraftan $c \neq 0$ için elektromanyetik alan uzay-zamanı bükecektir.

Elektromanyetik potansiyelin bir formu $A(r)_z = f(r) dz$, Maxwell çözümüne göre

$f(r)' = f_0 e^{-2U} \frac{W}{X}$ bulunur ve B-D-M çözümüne göre uzay-zaman metriği

$$ds^2 = G(r)^{\frac{2}{N-3}} \left[r^{2(q-d)} (-dt^2 + dr^2) + r^{2d} dz^2 + W_0^2 r^{2(k-d-l)} d\Phi^2 + \sum X_{i0}^2 r^{2l_i} dX_i^2 \right] + \left[G(r)^{\frac{N-4-\omega_N}{N-4+\omega_N}} r^{k-d-l} \right]^2 d\Phi^2 \quad (4.35)$$

Buradan;

$$f = \mp \frac{\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N-2}{N-3} - \frac{(N-4)^2}{\omega_N(N-3)} \frac{1}{c(1+c^2 r^p)}} + f_2 \quad (4.36)$$

olur.

Elektromanyetik Lorentz değişmezi ile Ricci skaleri

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \Phi_0 \left[\frac{N-2}{N-3} - \frac{(N-4)^2}{\omega_N(N-3)} \right] p^2 c^2 r^{-2(1+q-p)} (1 + c^2 r^p)^{-2 \frac{N-2}{N-3} \left(1 + \frac{N-4}{\omega_N}\right)} = 2B^2 > 0 \quad (4.37)$$

ve

$$R = \frac{N-4}{N-3} \left[1 - \frac{5N-14}{\omega_N} \right] p^2 r^{-2(1+q-d)} (1 + c^2 r^p)^{-2 \frac{N-2}{N-3} \left(1 + \frac{N-4}{\omega_N(N-2)}\right)} \left(\frac{N-4}{\omega_N} + c^2 r^p \right) \quad (4.38)$$

bulunur. Burada Kretschmann skalerleri de (Kirezli 2011) tekillik koşullarında tıpkı Ricci skaleri gibi aynı değere sahip olur. (4.36) ve (4.37) skaler büyüklüklerden uzay-zamanın tekil noktalarını elde edebiliriz. Burada p parametresinin reel bir sayı ve c^2 nin daima pozitif sayı olmasından dolayı $1 + c^2 r^p$ ifadesi tekil noktayı içermez. Diğer taraftan $r^{-2(1+q-d)}$ ifadesine bağlı olarak $r = 0$ noktası tekil noktadır. Eğer r 'nin üzerindeki üstel ifade sıfır eşitliğini sağlarsa bu durumda uzay-zamanın tekilliği ortadan kalkmış olur.

4.3. Genel Rölativistik Limit

GR'a göre daha genel bir kütleçekim teorisi olan BD teorisinin belli limitlerde, GR kütleçekim teorisi ile uyuşmasını bekleriz. Bilindiği gibi GR teorisinde Newton kütleçekim parametresi sabit bir değerdir ve skaler alan ile bağıntısı kısaca $G_N = \frac{1}{\Phi_0}$ şeklindedir. Böylece BD teorisinde Φ fonksiyonunu sabit sayı yapan değerler GR limiti olarak düşünülebilir. Ayrıca genel anlamda, daha önce de ifade ettiğimiz gibi $\omega \rightarrow \infty$ limitinde BD alan denklemleri GR alan denklemlerine indirgenmektedir. Fakat bu limit değeri her zaman doğru sonuç vermemektedir (Matsuda 1972), (Faraoni 1998). Küresel simetrik sistemler için vakum çözümleri (Bhadra ve ark. 2006) çalışmasında elde edilmiş ve limit değerleri incelenmiştir.

Bu tez, hangi durumda $\omega \rightarrow \infty$ limitinin GR olduğu, hangi durumda olmadığı ayırımını yapabilmek açısından güzel bir örnektir. Kısaca açıklamak istersek, eğer uzay-zaman içindeki stres enerji tensörünün izi sıfır ise ($T = 0$), madde yapısı konformaldır denir. Konformal madde ile dolu uzayda BD parametresi değişse ve hatta sonsuz bile olsa $\omega \rightarrow \tilde{\omega} \rightarrow \infty$, BD teorisi kendi içinde kalır başka bir kütleçekim teorisine dönüşmez. Bu konformal madde türleri ya vakum, yada elektromagnetik radyasyondur. Diğer taraftan stres enerji tensörünün izi sıfır değil ise ($T = T^\mu_\mu \neq 0$), konformal değişmezlik $\omega \rightarrow \tilde{\omega} \rightarrow \infty$, limitinde kırılır ve teori BD içinde kalmaz, başka kütleçekim teorilerine dönüşebilir ve hatta BD parametresinin sonsuz olduğu değerde GR kütleçekim teorisi elde edilir. Kozmolojide kullanılan ideal sıvı

stres enerji tensörü konformal madde değildir. Sonuç olarak, BD alan denklemlerinin GR limitinin elde edilebilirliği, uzay-zamanın içerdiği madde yapısı ile yakından ilgilidir.

N boyutlu silindirik simetrik uzay-zamanda BD elektromagnetik çözümlerinin GR limitini incelemek için öncelikle 4 boyutlu durumu inceleyip kıyaslama yapmak daha doğru olacaktır.

4 boyutta silindirik simetrik Einstein-Maxwell BD çözümlerinin GR limiti:

4 boyutlu uzay-zamanda Einstein-Maxwell stres enerji tensörünün izi sıfırdır, yani

$$T^{(EM)} = T_a^{a(EM)} = g^{ab}T_{ab} = \frac{g^{ab}}{\kappa} \left(F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) \quad (4.39)$$

$$T^{(EM)} = g^{ab}T_{ab} = \frac{1}{\kappa} \left(F^{bc} F_{bc} - \frac{1}{4} g^{ab} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) = 0 \quad (4.40)$$

elde edilir. Burada indislerde düzenleme yapılmıştır ve ayrıca dört boyutlu uzay-zamanda $g^{ab} g_{ab} = 4$ olduğu unutulmamalıdır. Böylece skaler alan denklemi (3.10)

$$\square \Phi = 0 \quad (4.41)$$

olur. Bu sonuç $\omega \rightarrow \infty$ limitinin GR limiti olmayacağını göstermektedir. Madde konformal yapıdadır. Diğer taraftan alan denklemlerinin çözülmesinden $\Phi = \phi_0 r^{1-k}$ değeri elde edilir. Burada k integral sabitidir ve bir serbest parametredir. Böylece GR limit için $k = 1$ değeri BD skaler alanının sabit olmasını sağlar ve böylece BD alan denklemleri $k = 1$ değeri için GR alan denklemlerine dönüşür (Baykal ve ark. 2009).

N boyutta silindirik simetrik Einstein-Maxwell BD çözümlerinin GR limiti:

Daha önce Bölüm (3.1)'de ifade edildiği gibi N boyutlu uzay-zamanda elektromagnetik stres enerji tensörünün izi

$$T^{(EM)} = g^{ab}T_{ab} = \frac{1}{\kappa} \left(F^{bc} F_{bc} - \frac{1}{4} g^{ab} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right) = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{N}{4} \right) F^{bc} F_{bc} \quad (4.42)$$

elde edilir burada $g^{ab} g_{ab} = N$ 'dir ve böylece $T^{(EM)} \neq 0$ olur. Bu durumda skaler alan denklemi aşağıdaki gibidir

$$\square \Phi = - \frac{N-4}{2[\omega(N-2)+(N-1)]} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.43)$$

Bu sonuçtan da anlaşılacağı gibi, yüksek boyutlu uzay-zaman senaryolarında, elektromanyetik madde, skaler alan için bir kaynak gibi davranmaktadır. Einstein Genel

Görelilik teorisinde, Kaluza-Klein (KK) teorisi ile benzerlik kurulabilir (Kaluza 1921), (Einstein 1916), (Klein 1926), (Klein 1926). KK teorisi, beş boyutlu uzay-zamanda skaler alan içeren elektromagnetik alan çözümlerini dört boyutta kütleçekimsel etki ile birleştirilmesi açısından önemlidir. Bizim çalışmamızda benzer olarak, dört boyutlu uzay-zamanda elektromagnetik stres enerji tensörü konformal madde olmakta ve skaler alan denkleminde sadece kütleçekimsel sektör yer almaktadır. Diğer taraftan N boyutlu uzay-zamanda simetri kırılmakta, elektromagnetik etki konformal yapısını kaybetmekte ve skaler alan için kaynak olmaktadır.

Alan denklemleri çözülerek N boyutlu silindirik simetrik elektro vakum için skaler alan $\Phi = \phi_0 r^{1-k} (1 + c^2 r^p)^{-\frac{2(N-4)}{\omega_N}}$ olarak elde edilmişti. Burada k , serbest bir parametre değildir ve $k = 1 - \frac{2p(N-4)}{\omega_N}$ 'dir. Bu ifadelerden de kolayca anlaşılacağı gibi $\omega \rightarrow \infty$ olduğu durumda $k = 1$ olmakta ve skaler alan $\Phi = \phi_0 = \text{sabit}$ olmaktadır ve GR limit elde edilmektedir. Böylece $N > 4$ ve $\omega \rightarrow \infty$ limitlerinde, GR ve k sayıları birlikte uyumlu çalışır (Kirezli P. ve ark. 2013). Burada unutulmamalıdır ki 4 boyutlu uzay-zamandaki GR limiti ile N boyutlu uzay-zamandaki GR limitleri aynı şekilde elde edilemez. 4 boyutta madde konformal yapıdadır, $\omega \rightarrow \infty$ limit işe yaramaz ve serbest parametre olan $k = 1$ yazılarak GR elde edilir. Öte yandan N boyutta madde konformal yapıda değildir, $\omega \rightarrow \infty$ limitinde GR elde edilmektedir. Tekrar belirtmek gerekirse, 4 boyuta indirgenme işlemi $k = 1 - \frac{2p(N-4)}{\omega_N}$ denkleminde basitçe $N = 4$ yazılarak elde edilemez çünkü bu ifade dört boyutlu alan denklemlerinde mevcut değildir ve dört boyutta k değeri için bir kısıtlama yoktur (Çiftci ve ark. 2015).

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle 4 boyutlu uzay-zamanda Azimut açısı yönünde Manyetik alan Brans-Dicke çözümleri yapıp sonrasında yine 4 boyutlu uzay-zamanda radyal yönde elektrik alan Brans-Dicke çözümleri yapıldıktan sonra bu çalışmalar daha geliştirilerek N boyutta uzay-zamanda azimut açısı yönünde manyetik alan Brans-Dicke çözümleri yapılmıştır.

Tezin giriş bölümünde literatür özeti ve yapılan bu çalışmanın öneminden bahsedildikten sonra, ikinci bölümde tezin oluşmasında büyük önem taşıyan kuramsal temeller ele alınmıştır. Genel Görelilik Teorisinin temel kavramı olan Einstein Alan Denklemleri ayrıntılı bir şekilde incelenip, Materyal ve Yöntem bölümünde kullanılacak Maxwell Elektromanyetik Alan Teorisi ile ilgili ihtiyaç duyulan temel bilgiler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde öncelikle Genel Görelilik Teorisine alternatif teorilerden biri olan ve tezimizin çözümleme yöntemi Brans-Dicke Teorisi ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Sonrasında ilk olarak 4 boyutlu statik silindirik simetrik uzay-zamanda Einstein Maxwell Brans-Dicke Teorisi açıklanmıştır. Bu açıklamaların fiziksel anlamları, bulunan parametrelerin fiziksel yorumları tartışılmıştır. Burada yapılan çözümler ve tanımlar, sonrasında yapılacak uygulamalar için büyük önem taşımaktadır. Bu temel bilgilerin uygulaması olarak 4 boyutlu uzay-zamanda azimut açısı yönünde manyetik alan Brans-Dicke çözümleri yapıp çıkan matematiksel sonuçların fiziksel açıklamaları yapıldıktan sonra, 4 boyutlu uzay-zamanda radyal yönde elektrik alan Brans-Dicke çözümleri ve incelemeleri yapılmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde ise 4 boyutta yapılan azimut açısı yönünde manyetik alan Brans-Dicke çözümleri geliştirilerek bu çalışma N boyuta taşınmıştır. Çıkan sonuçların Genel rölativite limitlerine uygun olup olmadığı incelenerek sonuçları tartışılmıştır. Bu konuda çalışmalar devam etmektedir. Yüksek boyutlu silindirik simetrik genel görelilik, Einstein-Maxwell çözümleri Gibsons ve arkadaşları tarafından yapılmıştır (Gibsons ve ark. 1987, Kirezli ve ark. 2013).

6.KAYNAKLAR

- Aasi J et al. (LIGO Scienti_c and VIRGO Collaborations) (2014). Constraints on cosmic strings from the LIGO-Virgo gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. Lett.* v. 112, 131101.
- Abbott BP et al. (LIGO & Virgo Scienti_c Collaboration) (2016). Search for transient gravitational waves in coincidence with short duration radio transients during 2007-2013, *Phys. Rev.* v. D93, 122008.
- Abbott BP et al (The LIGO Scienti_c and Virgo Collaborations) (2018). GWTC-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by LIGO and Virgo during the _rst and second observing runs, arXiv:1811.12907.
- Arazi A, Simeone C (2000). *Gen. Relativ. Gravit.* 32, 2259.
- Arkani-Hamed N, Dimopoulos S, Dvali G (1998). The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Milimeters. *Phys. Lett. B*, Vol. 429: s.263-272.
- Ayon-Beato E, Canfora F, Zanelli J (2016). Analytic selfgravitating Skyrmons, cosmological bounces and AdS wormholes. *Phys. Lett. B* 752, 201-205.
- Azreg-Ainou M (2010). Solution of a Class of Nonlinear Matrix Differential Equations with Application to General Relativity. In: Constanda C., Pérez M. (eds) *Integral Methods in Science and Engineering*, Volume 1. Birkhäuser Boston.
- Baykal A, Delice Ö (2009). Cylindrically symmetric Brans-Dicke-Maxwell solutions, *Gen Relativ. Gravit.* 41, 267-285.
- Baykal A, Delice Ö, Çiftçi D (2010). Cylindrically symmetric Vacuum Solutions in Higher Dimensional Brans-Dicke Theory *J. Math. Phys.* 51, 072505.
- Beck G (1925). Zur theorie binarer gravitationsfelder. *Z. Phys.* v. 33, 713-728.
- Bennett CL, Banday A, Gorski KM, Hinshaw G, Jackson P, Keegstra P, Kogut A, Smoot G F, Wilkinson DT, Wright EL (1996). 4-Year COBE DMR cosmic microwave background observations: maps and basic results. *Astrophys. J.* v. 464, L1-L4.
- Bhadra A, Nandi KK (2001). Omega dependence of the scalarfield in Brans-Dicke theory, *Phys. Rev. D.* 64, 087501.
- Bhadra A, Sarkar K (2006). On static spherically symmetric solutions of the vacuum Brans-Dicke theory. *Gen. Relativ. Gravit.* 37, 2189-2199.
- Bonnor WB (1953). Certain Exact Solutions of the Equations of General Relativity with an
- Bronnikov KA (2016). Rotating cylindrical wormholes: A no-go theorem. *J. Phys. Conf. Series* v. 675, 012028.
- Bronnikov KA, Bolokhov SV (2019). Skvortsova MV Cylindrical wormholes: a search for viable phantom-free models in GR. In preparation, arXiv: 1903.09862.
- Brans C, Dicke RH (1961). Mach's principle and a relativistic theory of gravitation, *Phys. Rev.* 124, 925-935.

- Çiftçi DK, Delice Ö (2015). Brans-Dicke-Maxwell Solutions for Higher Dimensional Static Cylindrical Symmetric Spacetime, *J. Math. Phys.* 56 no.7, 072502.
- Copeland EJ, Myers RC, Polchinski J (2004). Cosmic F and D strings, *JHEP*, v. 06, 013.
- Dvali G , Vilenkin A (2004). Formation and evolution of cosmic D strings, *JCAP*, v. 03, 010.
- Einstein A, (1915). The Field Equations of Gravitation. König. Preuss. Akad. Wiss., Vol. 844.
- Einstein A (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie *General Relativity Ann. Phys.* 49, 769.
- Einstein A, Rosen R (1937). On gravitational waves. *J. Franklin Inst.* v. 223, 43-54.
- Faraoni V (1998). Conformal transformations in Classical gravitational theories and in cosmology *Phys.Lett. A*245 (1998) 26-30.
- Faraoni V (1999). Illusions of general relativity in Brans-Dicke gravity, *Phys.Rev. D.* 59. 084021.
- Faraoni V (2004). *Cosmology in scalar-tensor gravity*, Springer, 274 p, Netherlands, USA.
- Favata M (2010). The gravitational-wave memory effect. *Class. Quantum Grav.* v. 27, 084036.
- Fujii Y, Maeda K (2007). *The scalar-tensor theory of gravitation*. 1st edition, Cambridge University Press, 260 p, Cambridge, UK.
- Gibbons GW, Wiltshire DL (1987). Spacetime a Membrane in Higher Dimensions. *Nuclear Physics B*287: pp. 717-742.
- Grøn Ø, Hervik S (2007). *Einstein's General Theory of Relativity, With Modern Applications in Cosmology*. Springer-Verlag, 538p, New York, USA.
- Kaluza, T (1921). Zum Unitätsproblem in der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.)*: pp.966-972.
- Kibble TWB (1976) Topology of cosmic domains and strings. *J.Phys.* v. A9, 1387-1398.
- Kibble T W B (1980). Some implications of a cosmological phase transition. *Phys. Report*, v. 67, 183-199.
- Kirezli P , Çiftçi DK , Delice Ö (2013). Higher Dimensional Cylindrical or Kasner Type Electrovacuum Solutions *Gen. Relativ. Gravit. Gen. Relativ. Gravit.* 45, 2251.
- Kirezli P (2011). Yüksek Boyutlu Statik Silindiriksel Simetrik Uzay-zamanlarda Einstein-Maxwell Çözümleri. *Yük. Lisans. Tezi*, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ, Türkiye.
- Klein O (1926). Quantum Theory and Five Dimensional Theory of Relativity *Z. Phys.* 37, 895-906.
- Klein O (1926). The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law. *Nature* 118, 516.
- Klein O (1926). Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei*. Vol.37 (12): pp.953.

- Levi-Civita T (1919). ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. IX:L'analogo del potenziale logaritmico. T.Rend. Acc. Lincei, 28, 101.
- Matsuda T (1972). On the Gravitational Collapse in Brans-Dicke Theory of Gravity, Progr. Theor. Phys. 47, 738.
- Mishima T, Tomizawa S (2017). Construction and application of variations on the cylindrical gravitational waves of Weber, Wheeler, and Bonnor, Phys. Rev. v. D 96, 024023.
- Nordström G, (1918). On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wehenschap., Afdel. Naturk., Amsterdam 26: pp. 1201-1208.
- Pereira PRCT (2000). Wang A. Dynamics of rotating cylindrical shells in general relativity, Gen. Relativ. Grav. v. 32, 2189- 2218.
- Piran T, Safier PN (1985). A gravitational analogue of Faraday rotation. Nature, v. 318, 271-273.
- Piran T, Safier PN (1985). Stark R.F. General numerical solution of cylindrical gravitational waves. Phys. Rev. v. D32, 3101- 3107.
- Raychaudhuri, AK (1960). Static Elektromagnetic Fields in General Relativity, Ann. Phys.(USA), Vol. 11: pp.501.
- Reissner H (1916). Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. Annalen der Physik 50: 106-120.
- Schwarzschild K (1916). Über das Gravitationsfeld Eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys. Math. Klasse pp. 189-196. (Reprinted in: on the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory. General Relativity and Gravitation, (2003) Vol. 35:pp. 951-959.
- Smoot GF et al. (COBE) (1992). Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. Astrophys. J. v. 396, L1-5.
- Spergel DN et al. (WMAP) (2007). Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology. Astrophys. J. Suppl. v. 170, 377-408.
- Stott MJ, Elghozi T, Sakellariadou M (2017). Gravitational wave bursts from cosmic string cusps and pseudocusps. Phys. Rev. v. D96, 023533.
- Szekeres P (1965). The gravitational compass. J. Math. Phys. v. 6, 1387-1391.
- Vachaspati T, Vilenkin A (1985). Gravitational radiation from cos cosmic strings. Phys. Rev. v. D31, 3052-3058.
- Wheeler JA (1957). On the nature of quantum geometrodynamics. Ann. Phys. v. 2, 604-614.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Barış AKINCIOĞLU 1977 yılında Kırklareli'nde dünyaya gelmiştir. İlk, orta ve Lise eğitimini Kırklareli'nde tamamladıktan sonra, 1998 yılında Çanakkale 18 Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nden mezun olmuştur. Halen bir kamu kurumunda Fizik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.