



**UYUMLU KESİRLİ TÜREVLE MODELLENMİŞ  
KONDANSATÖRLÜ FARKLI TÜRDEKİ DARBE  
ÜRETEÇLERİNİN MAKSİMUM ENERJİSİ HAKKINDA  
VARYASYONEL PROBLEMLER**

**Fadime UYAN**

**Yüksek Lisans Tezi  
Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı  
Danışman: Doç. Dr. Reşat MUTLU  
2021**

**T.C.**  
**TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**UYUMLU KESİRLİ TÜREVLE MODELLENMİŞ KONDANSATÖRLÜ  
FARKLI TÜRDE DEN DARBE ÜRETEÇLERİNİN MAKSİMUM ENERJİSİ  
HAKKINDA VARYASYONEL PROBLEMLER**

**Fadime UYAN**

**ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN: Doç. Dr. Reşat MUTLU**

**TEKİRDAĞ-2021**

**Her hakkı saklıdır.**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### UYUMLU KESİRLİ TÜREVLE MODELLENMİŞ KONDANSATÖRLÜ FARKLI TÜRDEEN DARBE ÜRETEÇLERİNİN MAKSİMUM ENERJİSİ HAKKINDA VARYASYONEL PROBLEMLER

**Fadime UYAN**

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Reşat MUTLU

Bu çalışmada uyumlu kesirli türev (UKT) ile modellenmiş kondansatör ( $C_\alpha$ ) içeren farklı türden iki tane darbe üreticinin maksimum enerjisi hakkındaki varyasyonel problemler çözülmüştür. Ele alınan ilk devrede, darbe üretici devresi seri bağlı bir direnç ve UKM kondansatörden yani  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşmaktadır. Ele alınan ikinci devre, darbe üretici devresinde UKM kondansatörden ( $C_\alpha$ ), kondansatörün ideal olmayan yalıtkanını modelleyen ve ona paralel bağlı bir dirençten ( $R_p$ ) ve ikisine de seri bağlı bir dirençten ( $R$ ) oluşmaktadır. Bu her iki devre topolojisini tanımlayan uyumlu kesirli mertbe diferansiyel denklemler türetilmiştir. Her bir devre için, darbe üreticinin enerjisini maksimum yapmak amacıyla Euler-Lagrange denklemleri ve devreyi tanımlayan diferansiyel denklem kullanılarak bir optimizasyon problemi elde edilmiştir. Her iki problemde kondansatörün yüklenmesi sonucu erişeceği gerilim ( $V_{C_\alpha}(\tau)$ ) ve bu yüklenmenin gerçekleşmesi için gerekli zaman süresi yani yüklenme zamanı ( $\tau$ ) problemin netliği açısından sabit alınmıştır. Kondansatörün başlangıçta yüksüz olduğu yani kondansatör geriliminin  $V_{C_\alpha}(0) = 0$  Volt olduğu kabul edilmiştir. Daha sonra bu optimizasyon denklemleri sınır değerlerinin yerine koyulmasıyla ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Her darbe jeneratörünün UKM kondansatör geriliminin sayısal çözümü Matlab ile yapılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Uyumlu kesirli mertbe türev, Optimizasyon, Euler-Lagrange Denklemi, Varyasyonel problem, Sonlu Farklar Yöntemi, Darbe Üretici,

2021, 75 sayfa

## ABSTRACT

MSc. Thesis

### VARIATIONAL PROBLEMS ABOUT MAXIMUM ENERGY OF DIFFERENT TYPES OF PULSE GENERATORS WITH A CAPACITOR MODELLED USING CONFORMABLE FRACTIONAL DERIVATIVE

**Fadime UYAN**

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electronic and Communication Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Reşat MUTLU

In this study, the variational problems about the maximum energy of two different types of pulse generators containing capacitors ( $C_\alpha$ ) modeled with a conformable fractional derivative (CFD) are solved. In the first circuit discussed, the pulse generator circuit consists of a resistor and a CFD capacitor, namely  $R$  and  $C_\alpha$ , connected in series. In the second circuit discussed, the pulse generator consists of a CFD capacitor ( $C_\alpha$ ), a resistor ( $R_p$ ), which models its non-ideal insulator and connected in parallel with the CFD capacitor, and a resistor ( $R$ ) connected in series to both of them. Conformable fractional order differential equations that describe both of the circuit topologies are derived. For each circuit, an optimization problem is obtained by using the Euler-Lagrange equation and the differential equation describing the circuit in order to maximize the energy of the pulse generator. In both problems, the voltage ( $V_{C_\alpha}(\tau)$ ) that the capacitor will reach as a result of charging and the time required for the realization of this charging, that is, the charging time ( $\tau$ ), are taken as constant for the clarity of the problem. It is assumed that the capacitor is initially uncharged, that is, the capacitor voltage is  $V_{C_\alpha}(0) = 0$  Volts. Then, these optimization equations are solved numerically by substituting the boundary values and using the finite difference method. The numerical solution of the CFD capacitor voltage of each pulse generator is done with Matlab.

**Keywords:** Conformable fractional order derivative, Optimization, Euler-Lagrange Equation, Variational problem, Finite Difference Method, Pulse Generator,

2021, 75 pages

# İÇİNDEKİLER

## ÖZET i

ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL DİZİNİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER .....</b>	<b>5</b>
2.1. “Darbe Generatörünün Maksimum Enerjisi Hakkında Varyasyonel Problem” İsimli Makalenin Özetlenmesi .....	5
2.2. Uyumlu Kesirli Mertebe Türev ve UKM Kondansatör .....	10
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM.....</b>	<b>12</b>
3.1. UKM Kondansatör ile Modellenmiş İki Darbe Üreticinin Maksimum Enerjisinin Bulunmasına Dair Varyasyonel Problemler .....	12
3.1.1. Yüklenme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C\alpha$ 'dan Oluşma Durumu.....	12
3.1.2. Yüklenme Devresinin $R-C\alpha//Rp$ 'dan Oluşma Durumu .....	16
3.2. Sonlu Farklar Yöntemi Kullanılarak Varyasyonel Denklemlerin Sayısal Çözümü .....	21
3.2.1. Yüklenme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C\alpha$ 'dan Oluşma Durumu.....	21
3.2.2. Yüklenme Devresinin $R-C\alpha//Rp$ 'dan Oluşma Durumu .....	25
3.3. Gauss Eliminasyon Yöntemi ve Matlab'te Yazılan Fonksiyonu.....	30
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>36</b>
4.1. Yüklenme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C\alpha$ 'dan Oluşma Durumu İçin Optimum Çözümlerin Simülasyonu.....	36
4.2. Yüklenme Devresinin $R-C\alpha//Rp$ 'dan Oluşma Durumu İçin Optimum Çözümlerin Simülasyonu.....	44
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>54</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>56</b>
<b>EKLER .....</b>	<b>58</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>Hata! Yer işareti tanımlanmamış.</b>

## ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 2.1. Seri bağlı $R$ ve $C$ elemanlarından oluşan yüklenme devresi .....	6
Şekil 2.2. $R$ bağlantı direnci ve ideal olmayan yani bir ( $R_p$ ) direnci olan bir yalıtıkana sahip $C$ kondansatöründen oluşan yüklenme devresi .....	8
Şekil 2.3. UKM kondansatör sembolü.....	11
Şekil 3.1. Seri bağlı $R$ ve $C_\alpha$ elemanlarından oluşan yüklenme devresi.....	13
Şekil 3.2. $R-C_\alpha//R_p$ yükleme devresi .....	16
Şekil 3.3. Oluşturulan katsayılar matrisinin köşegenlerinin gösterilmesi .....	32
Şekil 4.1. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=40 \Omega$ , $\alpha =1$ ve $\tau=40 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi .....	37
Şekil 4.2. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=100 \Omega$ , $\alpha =1$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	38
Şekil 4.3. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=100 \Omega$ , $\alpha =1$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	38
Şekil 4.4. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=40 \Omega$ , $\alpha =0,90$ ve $\tau = 40 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi .....	39
Şekil 4.5. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=100 \Omega$ , $\alpha =0,90$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	40
Şekil 4.6. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=100 \Omega$ , $\alpha =0,50$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	41
Şekil 4.7. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=40 \Omega$ , $n=100$ ve $\tau = 40 \text{ sn}$ için ve $\alpha$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi .....	42
Şekil 4.8. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=40 \Omega$ , $n=200$ ve $\tau = 40 \text{ sn}$ için ve $\alpha$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi .....	43
Şekil 4.9. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R=100 \Omega$ , $n =50$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için ve $\alpha$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	44
Şekil 4.10. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $R.R_p^{-1}=100$ , $\alpha =1$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	45
Şekil 4.11. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $\alpha=0,95$ , $\tau = 0,01 \text{ sn}$ ve $R.R_p^{-1}=0,04$ değeri için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	46
Şekil 4.12. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $\alpha=0,99$ , $\tau = 0,01 \text{ sn}$ ve $R.R_p^{-1}=0,01$ değeri için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	47
Şekil 4.13. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $n=50$ , $\tau = 0,25 \text{ sn}$ ve $R.R_p^{-1}=0,25$ değerleri için ve $\alpha$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	48
Şekil 4.14. $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ , $n=100$ , $\tau = 0,25 \text{ sn}$ ve $R.R_p^{-1}=0,25$ değeri için ve $\alpha$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	48

Şekil 4.15.a. $\alpha=1, R.R_p^{-1} = 100, C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}, \tau = 100 \text{ sn}$ için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	50
Şekil 4.15.b. $\alpha=0,95, R.R_p^{-1} = 100, C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}, \tau = 100 \text{ sn}$ , için ve $n$ parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	50
Şekil 4.16. $\alpha=0,95, R.R_p^{-1} = 100, C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}, n=70$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için kondansatör geriliminin zamana göre değişimi .....	51
Şekil 4.17. $\alpha=0,95, R.R_p^{-1} = 100, C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}, n=70$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için büyütülerek incelenen kondansatör geriliminin sağ sınırdaki değeri .....	52
Şekil 4.18. $\alpha=0,95, R.R_p^{-1} = 100, C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}, n=70-80$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için kondansatör geriliminin zamana göre değişimi .....	53
Şekil 4.19. $\alpha=0,95, R.R_p^{-1} = 100, C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}, n=70-80-90$ ve $\tau = 100 \text{ sn}$ için kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.....	53



## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\Omega$	: Ohm
$\tau$	: Yüklenme Zamanı
$\alpha$	: Alpha, Kesir Mertebesi
$C_\alpha$	: CFD Kapasitör Sabiti
$C$	: Darbe Jeneratörünün Yüklenme Kapasitesi
CFD	: Conformable Fractional Derivative
$i(t)$	: Yük Devresindeki Akım
$i_1$	: Yalıtkan Akımı
$i_C(t)$	: Kapasitör Akımı
$i_{C_\alpha}(t)$	: CFD Kapasitör Akımı
$i_p$	: Yalıtkan Akımı
$n$	: Nümerik Çözüm İçin Kullanılan Adım Sayısı
$R$	: Darbe Jeneratörü Direnci
$R_p$	: Yalıtkan Direnci
$t$	: Zaman
$U(t)$	: Kaynak Gerilimi
UKMT	: Uyumlu Kesirli Mertebe Türev
UKM	: Uyumlu Kesirli Mertebe
$V_C(t)$	: Kapasitör Gerilimi
$V_{C_\alpha}(t)$	: CFD Kapasitör Gerilimi



## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın tamamlanmasında bilgisini ve desteğini esirgemeyen, her konuda yanımda varlığını hissettiğim danışmanım sayın Doç. Dr. Reşat MUTLU'ya (Namık Kemal Üniversitesi), 2013 yılında yayınlamış olduğu “Darbe Generatörünün Maksimum Enerjisi Hakkında Varyasyonel Problem” isimli yayınıyla çalışmanın temelini oluşturmasını sağlayan ve bu çalışmada da bilgi birikimini ve desteğini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Hafız ALİSOY'a (Namık Kemal Üniversitesi), yoğun çalışmalarım sırasında ve stresli günlerimde sabır ve güvenle bana destek olan ve yüksek lisans konusunda beni cesaretlendiren sevgili aileme, çalışmalarımı sürdürebilmem için bana fırsat ve zaman tanıyan Ar-Ge yöneticisi Mutlu Güner'e (Reçber Kablo ) teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı tamamlayabilmek için bugüne kadar edindiğim bilgi birikimindeki, yüksek lisans yapmamdaki ve bulunduğum konuma gelmemdeki katkılarından dolayı tüm Namık Kemal Üniversitesi Çorlu Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümü hocalarıma sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Temmuz, 2021

Fadime UYAN  
Elektronik ve Haberleşme Mühendisi  
Ar-Ge Mühendisi

## 1. GİRİŞ

Türev kavramını ilk kez Newton kullanmıştır. Kesirli mertebeye türevlerin (Fractional Derivative) olabileceğini ise 1695 yılında Leibniz iddia etmiştir (Osler, 1970). Tam sayı ile ifade edilebilen integrallerin ve türevlerin derecelerinin kesirli sayılarla genelleştirilmesi ile elde edilen kesirli integralleri ve türevleri ifade etmek için kesirli mertebeye tanımını kullanılır. Günümüzde farklı türde kesirli diferansiyel denklemler tanımlanmıştır (David, Linares ve Pallone, 2011). Kesirli mertebeye türev uygulamaları son yarım yüzyılda araştırmacıların ilgisini çekmiştir ve günümüzde üzerine oldukça yoğun bir şekilde çalışma yapılmaktadır. Bazı mühendislik problemlerinde klasik tam sayılı hesabın kullanıldığı modellerle karşılaştırıldığında, kesirli mertebeye modellerle yapılan hesaplamalar daha önce dikkate alınmayan bazı etkileri ortaya koyar ve bu onun klasik diferansiyel hesaplara karşılaştırıldığında en büyük avantajıdır. Kesirli mertebeye türev çeşitli malzemelerin ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanması için mükemmel bir araç sunar (Gomez, Aguilar, 2016).

Literatür incelendiğinde kesirli dereceden türevlerle ilgili olarak çok sayıda çalışma yapılmış olduğu ve çalışmaların günümüzde de yoğun bir şekilde devam ettiği görülmektedir. Kesirli türevle ilgili 1730'lu yıllardan günümüze kadar farklı şekillerde tanımlar yapılmıştır. Kesirli mertebeden türev için yapılan tanımlar ve yaklaşımlara kısaca değinilecek olursa;

Riemann-Liouville kesirli türev için

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_\alpha^t \frac{f(v) dv}{(t - v)^{\alpha - n + 1}} \quad (1.1)$$

şeklinde bir tanım yapmıştır. Kesirli mertebeden türevin Grünwald-Letnikov tanımı önce 1867 yılında Anton Karl Grünwald tarafından önerilmiş daha sonra 1868 yılında Aleksey Vasilevich Letnikov tarafından geliştirilmiştir. Grünwald-Letnikov kesirli türev tanımı

$$D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (h)^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh) \quad (1.2)$$

olarak ifade edilmektedir. Kesirli mertebeden türevler içinde, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo'nun kesirli mertebeden türevi olmuştur. 1967 yılında gama fonksiyonunu kullanarak yaptığı kesirli türev tanımı

$${}^c D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_\alpha^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha-n+1}} \quad (1.3)$$

olarak ifade edilmektedir. Görüldüğü gibi bu kesirli mertebeden türevlerin hesabı zordur. Hala araştırmacılar daha iyi davranan ve hesabı daha kolay kesirli mertebeden türevler aramaktadır.

Son zamanlarda bir fonksiyonun türevinin bilinen limit tanımına bağlı olarak ingilizcede “Conformable Fractional Derivative (CFD)” adı verilen ve dilimize “Uyumlu Kesirli Mertebe Türev (UKMT)” olarak çevrilebilen yeni türden, iyi davranan, hesabı kolay ve diğer yöntemlere göre daha basit bir kesirli türev tanımlandı (Khalil, Al Horani, Yousef ve Sababheh, 2014). Bu yeni türev teorisi T. Abdeljawad tarafından geliştirildi (Abdeljawad, 2015). Bu yeni kesirli mertebe türev tanımı klasik türevin doğal bir uzantısıdır ve diğer kesirli mertebe türevlere göre geometrik ve fiziksel manasının anlaşılabilir olması avantajına sahiptir (Zhao, Luo 2017). Bu yeni kesirli mertebe türev tanımına göre,  $\alpha$ 'ncı dereceden türev basitçe fonksiyonun birinci dereceden türevinin zamanın  $(1-\alpha)$ 'ncü kuvveti yani  $t^{1-\alpha}$  ile çarpımına eşittir. Uyumlu kesirli mertebe türevinin sahip olduğu diğer bir önemli özellik ise bir sabitin Riemann-Liouville kesirli türevi sıfır değilken, bir sabitin uyumlu kesirli türevi sıfırdır. Ayrıca diğer kesirli türev tiplerine kıyasla uyumlu kesirli türev fiziksel olarak yorumlanabilme özelliğine de sahiptir (Zhao, Luo 2017).

Kesirli mertebe türev ile modellenmiş süper kondansatör modelleri literatürde mevcuttur (Kopka, 2017; Freeborn, Elwakil, Allagui 2018). Uyumlu kesirli türev kullanılarak modellenmiş kondansatörlü bazı devreler literatürde hâlihazırda incelenmiştir (Martinez, Rosales, Carreno, Lozano, 2018; Piotrowska, 2019; Tariboon, Ntouyas, 2016). Yakın geçmişte Simulink kullanılarak UKMT ile modellenen bir kondansatörden oluşan paralel bir rezonans devresinin analizi yapılmıştır (Mohammed, Kandemir, Mutlu, 2020). Yapılan bir başka çalışmada DC ve Sinüsoidal sinyaller altında UKMT ile modellenen bir kondansatörün davranışı incelenmiştir (Palaz ve Mutlu, 2021). Yakın geçmişte yapılan bir başka çalışmada ise bir lineer zamanla değişmeyen (LZD) kondansatör ve bir UKMT kullanılarak modellenmiş kondansatör ile iki kondansatör problemi incelenmiştir (Palaz ve Mutlu, 2021). Literatürde

olduğu gibi bu çalışmada da yer alan devrelerde kullanılan kesirli mertebe kondansatör sembolü formüllerde ve devrelerde  $C_\alpha$  ile gösterilecektir.

Kondansatörler yaygınca karşımıza çıkan devre elemanlarıdır. İdeal bir kondansatör gerçekte bulunmamaktadır. Gerçekte her bir kondansatörün seri bir direnci (bağlantı tellerinin direnci) bulunur. Böyle bir devre  $R-C$  devresi olarak modellenebilir. Ayrıca ideal olmayan bir kondansatörün yalıtkanı ideal bir kondansatöre paralel olarak bağlı bir direnç olarak modellenebilir. İdeal olmayan bir kondansatörün de bağlantı tellerinin direnci olacağı unutulmamalıdır. Böyle bir devre  $R-C//R_p$  devresi olarak adlandırılabilir. Darbe jeneratörleri yüksek gerilim deneylerinde yaygınca kullanılır. Darbe jeneratörleri kondansatör kullanarak yapılmaktadır. Yakın geçmişte yapılan bir araştırmada bir darbe jeneratörünün maksimum verimle dolması varyasyonel problemi incelenmiştir (Alisoy, Alisoy, Keleş, Deniz, Işık, İçel, 2013). Alisoy vd. (2013) tarafından  $R-C$  seri devresi modellenmiş ve  $R_p$  kaçak dirençli ideal olmayan kondansatörlü  $R-C//R_p$  devresi modellenmiş darbe üreteçlerinin optimum şarjı incelenmiştir.

Süper kondansatörlerin normal kondansatörlere göre daha yüksek bir sığası vardır ve kullanımları her geçen gün artmaktadır (Lewandowski ve Orzyłowski, 2017; Kopka, 2017; Freeborn, Elwakil, Allagui, 2018). Uyumlu kesirli türev süper kondansatör içeren bir elektrik devresini analiz etmek için de kullanılmıştır (Piotrowska, 2018). Alisoy vd.'nin incelediği  $R-C$  ve  $R-C//R_p$  darbe üreteci devrelerindeki lineer zamanla değişmeyen kondansatörler ( $C$ ) UKM kondansatör ( $C_\alpha$ ) ile değiştirilerek daha yüksek kapasitanslı darbe üreteçleri yapılabilir. Bu çalışmanın amacı UKM kondansatörü kullanarak yapılan  $R-C_\alpha$  ve  $R-C_\alpha//R_p$  darbe üreteci devrelerinin optimum şarjının incelenmesidir. Bu çalışmada önce UKM kondansatörü içeren üreteçleri tanımlayan diferansiyel denklemler elde edilecektir. Ardından bu devrelerin optimum verimle řarj edilmesi için gerekli varyasyonel problemler Euler-Lagrange denklemi kullanılarak elde edilecektir. Elde edilen denklemlerin analitik çözümü aranacaktır. Bulunmaması halinde bu diferansiyel denklemler sonlu farklar yöntemi ile çözülecektir.

Bu alışma şu takip eden şekilde düzenlenmiştir. İkinci bölümde ilham alınan ‘‘Darbe Generatörünün Maksimum Enerjisi Hakkında Varyasyonel Problem’’ adlı makale özetlenmiş ve uyumlu kesirli mertebe türev ve UKM kondansatör tanımları ve kısaca açıklamaları verilmiştir. Üçüncü bölümde UKM kondansatöre sahip farklı türden darbe üreteçlerinin devre modelleri verilmiş, bu devreleri tanımlayan diferansiyel denklemler türetilmiş, bu darbe üreteçlerinin maksimum yüklenme varyasyonel problemleri oluşturulmuştur. UKM kondansatör tabanlı bu darbe üreteçleri için elde edilen ve analitik yöntemlerle çözümüne

ulaşılamayan Euler-Lagrange denklemleri sonlu farklar nümerik yöntemi kullanılarak çözülmüş, her iki yüklenme devresi için elde edilen denklem sistemlerinin çözümleri ve devre simülasyonlarının yapılabilmesi için Matlab'te yazılmış Gauss eliminasyon fonksiyonu açıklanmış ve farklı parametreler için UKM kondansatör gerilimlerinin simülasyonu yapılmıştır. Çalışma sonuç ve öneriler bölümü ile sonuçlandırılmıştır.



## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilk olarak bu makaleye ilham olan Alisoy ve ark. tarafından yapılan çalışmadaki iki yüklenme devresi ve bu devrelerin varyasyonel problemleri özetlenecektir. Ardından bu çalışmada kullanılan Uyumlu Kesirli Mertebe Türev tanımı verilecek ve bu türev kullanılarak modellenmiş ve bu çalışmada yüklenme devrelerinde kullanılan UKM kondansatör devre elemanı tanıtılacaktır. Bu bölümde verilen kuramlar bir sonraki bölümde yapılan işlerde kullanılacaktır.

### 2.1. “Darbe Generatörünün Maksimum Enerjisi Hakkında Varyasyonel Problem” İsimli Makalenin Özetlenmesi

Alisoy ve ark. tarafından yapılan “Darbe Generatörünün Maksimum Enerjisi Hakkında Varyasyonel Problem” isimli araştırmada bir darbe jeneratörünün maksimum verimle dolması varyasyonel problemi incelenmiştir (Alisoy, Alisoy, Keleş, Deniz, Işık, İçel, 2013). İlgili çalışmada bu varyasyonel problem kondansatör üzerindeki gerilim değişimi değerinin maksimum olması sağlanarak çözülmüştür (Alisoy, Alisoy, Keleş, Deniz, Işık, İçel, 2013). Şarj işlemi başladığında kapasite üzerindeki gerilim  $V_C(0)=0$  ise, yüklenme devresinin faydalanma faktörü yani kondansatörde depo edilen enerjinin kaynaktan çekilen enerjiye oranı

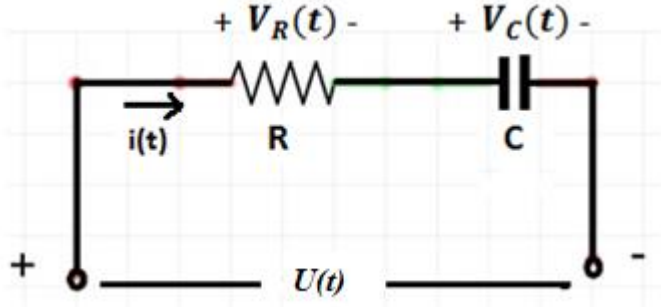
$$\eta = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot \int_0^{\tau} U(t) \cdot i(t) \cdot dt} \cdot 100\% \quad (2.1)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $C$  darbe jeneratörünün kapasitansı,  $U(t)$  kaynak gerilimi ve  $i(t)$  kaynak akımıdır.

Yapılan çalışmada  $\eta$  faydalanma faktörünün maksimum değerinin bu ifadenin paydasının minimum olmasıyla sağlanabileceği belirtilmiştir. Buna göre  $\eta$  faydalanma faktörünün maksimum değerinin belirlenmesinin bir varyasyonel problem gibi ele alınarak Euler-Lagrange yöntemi teoremine göre Denklem (2.2)'de verilen fonksiyonelinin zayıf ekstremumunun belirlenmesine dönüştürülebileceği ifade edilmiştir. Euler-Lagrange denklemi ile ilgili daha fazla bilgi EK 1'de yer almaktadır.

$$J = \int_0^{\tau} U(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

İlgili çalışmada ilk olarak Şekil 2.1’de yer alan yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C$  elemanlarından oluşma durumu incelenmiştir.



Şekil 2.1. Seri bağlı  $R$  ve  $C$  elemanlarından oluşan yüklenme devresi

Kirchoffun akımlar ve gerilimler kanunu kullanılarak  $U(t)$  devre gerilimi ve  $i(t)$  yüklenme devresi akımı sırasıyla

$$U(t) = RC \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \quad (2.3)$$

ve

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} \quad (2.4)$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.2)'de verilen fonksiyonel,  $U(t)$  devre gerilimi ve yüklenme devresindeki  $i(t)$  akımı denklemleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$J = C \int_0^{\tau} [R \cdot C \cdot (V'_C(t))^2 + V_C(t) \cdot V'_C(t)] \cdot dt \quad (2.5)$$

elde edilir. Burada  $\tau$  yüklenme devresinin yüklenme süresidir. Denklem (2.5) ifadesi ile belirlenen fonksiyonele karşılık gelen Euler-Lagrange denklemi

$$V_C''(t) = 0 \quad (2.6)$$

olarak bulunur. Alisoy ve ark. tarafından sonraki aşamada Denklem (2.6) ile verilen ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklemin çözümü bulunmuştur.  $V_C(0)=0$  ve  $V_C(\tau) = U$  sınır koşullarını sağlayan bu diferansiyel denklemin çözümü yani devredeki kondansatörün gerilimi

$$V_C(t) = \frac{U}{\tau} t \quad (2.7)$$

olarak yani bir doğru olarak bulunur. Bu çözüm kullanılarak kaynak geriliminin zamana göre değişimi

$$U(t) = \frac{U}{\tau} (t + RC) \quad (2.8)$$

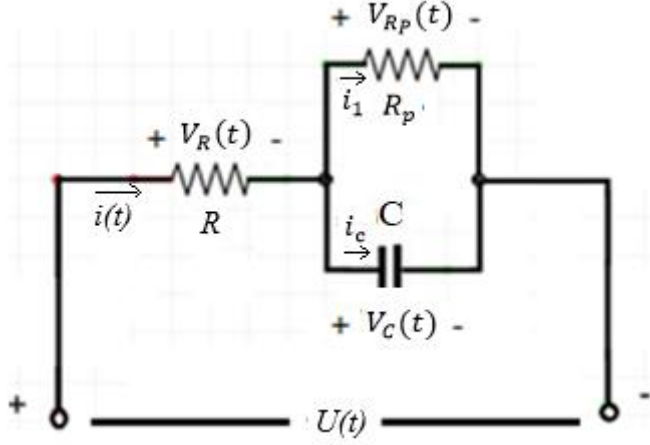
olarak bulunur. Elde edilen kaynak ve kondansatör gerilimi kullanılarak faydalanma faktörünün maksimum değeri

$$\eta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{2RC}{t}} \quad (2.9)$$

olarak bulunur.

İlgili çalışmada ikinci olarak Şekil 2.2'de yer alan yüklenme devresinin ideal olmayan yani direnci ( $R_p$ ) olan bir yalıtıkana sahip kondansatör ( $C$ ) ile  $R$  direncinin seri bağlı olmasından oluşan durum incelenmiştir. Bu devrede  $i_1$  yalıtıkana akımıdır ya da kondansatörün kaçak akımıdır.





Şekil 2.2.  $R$  bağlantı direnci ve ideal olmayan yani bir ( $R_p$ ) direnci olan bir yalıtıkana sahip  $C$  kondansatöründen oluşan yüklenme devresi

Kirchoff'un akımlar ve gerilimler kanunu kullanılarak  $U(t)$  devre gerilimi ve  $i(t)$  yüklenme devresi akımı sırasıyla

$$U(t) = R \cdot C \cdot V_C'(t) + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot V_C(t) \quad (2.10)$$

ve

$$i(t) = V_C(t)R_p^{-1} + C \cdot V_C'(t) \quad (2.11)$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.2)'de verilen fonksiyonel değeri belirlenmiş ve belirlenen fonksiyonel değerinde  $V_C(0) = 0$  ve  $V_C(\tau) = U$  sınır koşullarını sağlayan ekstremumunu bulmak için Euler-Lagrange denklemi çözülmüştür. Belirlenen fonksiyonele karşılık gelen Euler-Lagrange denklemi

$$V_C''(t) - \frac{1}{C^2 R R_p} + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot V_C(t) = 0 \quad (2.12)$$

olarak bulunur. İncelenen durum için devrenin dallanmayan kısmındaki  $i(t)$  yüklenme devresi akımı ve  $U(t)$  devre gerilimi sırasıyla

$$i(t) = K \left[ \frac{C}{a} \cosh \left( \frac{t}{a} \right) + R_p^{-1} \sinh \left( \frac{t}{a} \right) \right] \quad (2.13)$$

ve

$$U(t) = K \left[ \frac{RC}{a} \cosh \left( \frac{t}{a} \right) + (1 + RR_p^{-1}) \sinh \left( \frac{t}{a} \right) \right] \quad (2.14)$$

olarak bulunur. Bu denklemde  $a = C \cdot R_p [R(R_p + R)^{-1}]^{1/2}$  ve  $K = \frac{U}{\sinh \left( \frac{\tau}{a} \right)}$  biçiminde tanımlanmıştır.

Elde edilen kaynak ve kondansatör gerilimi kullanılarak faydalanma faktörünün maksimum değeri

$$\eta_{\max} = \frac{\sinh \left( \frac{\tau}{a} \right)}{\sinh \left( \frac{\tau}{a} + \emptyset \right)} \quad (2.15)$$

olarak bulunur. Bu denklemde  $\emptyset = \alpha \cdot \tanh \frac{\sqrt{R(R+R_p)}}{2R+R_p}$  biçiminde tanımlanmıştır.

## 2.2. Uyumlu Kesirli Mertebe Türev ve UKM Kondansatör

Bu bölümde bu çalışmada kullanılan uyumlu kesirli mertebe türev tanımı ve teoremleri verilecektir. Darbe üretici içindeki UKM kondansatörlerin maksimum verimle şarj edilmesi problemi çözümünde kullanılacak olan kondansatör modeli bu bölümde sunulacaktır.

Son yarım yüzyılda araştırmacılar bir çok yeni kesirli türev tanımı önermişlerdir (Osler, 1970; Piotrowska, 2018; Atangana, ve Secer, 2013; David, Linares ve Pallone, 2011). Riemann-Liouville kesirli mertebe türev tanımı gerçek dünya problemlerini modellemek için her zaman uygun değildir (Badur, 2018). Caputo kesirli mertebe türev tanımı, fiziksel alan problemlerini modellemekte ve çözmekte oldukça avantajlıdır fakat yeterli değildir (Badur, 2018). Kompleks sistemleri daha iyi modelleyebilmek için Khalil ve ark. önerdikleri yeni türev tanımının yani uyumlu kesirli mertebe (UKM) türevin klasik türevin özelliklerine benzer özellikleri olduğunu göstermişlerdir (Khalil vd. 2014). Klasik türevin sağladığı birçok özelliği, önerilen yeni kesirli türevin de sağlaması bu yeni tanımın bilinen kesirli türev tanımlarına göre daha avantajlı olduğunu göstermektedir. UKMT ayrıca diğer kesirli mertebe tiplerine kıyasla fiziksel olarak yorumlanabilir olma avantajına da sahiptir (Abdeljawad, 2015; Zhao ve Luo 2017). Khalil ve ark. önerdikleri UKM türevi aşağıdaki iki teoremle vermişlerdir.

**Teorem 1:**  $f: [0, +\infty) \rightarrow R$  ve  $t > 0$ .  $0 < \alpha \leq 1$  koşullarında uyumlu kesirli mertebe türev (UKMT)

$$D_a f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(t + p^{1-\alpha}) - f(t)}{p} \quad (2.16)$$

ile ifade edilir.  $t > 0$  ve  $t=0$ 'da uyumlu kesirli mertebeden türev

$$D_a f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (D_a f)t \quad (2.17)$$

ile tanımlanır. Elde edilen denklem daha anlaşılır olarak formülize edilirse

$$D_a f(t) = t^{1-\alpha} f'(t) \quad (2.18)$$

ifadesi elde edilir.

**Teorem 2:**  $\alpha \in (0,1]$ . Uyumlu mertebeye kesirli integral fonksiyonu  $f: [0,+\infty) \rightarrow R$  koşullarında

$$I_a^\alpha f(t) = \int_0^t s^{\alpha-1} f(s) \cdot ds \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu denklemde yer alan türev uyumlu kesirli mertebeye türev tanımı kullanılarak yazıldığında

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = t^{1-\alpha} f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \cdot t^{1-\alpha} \quad (2.20)$$

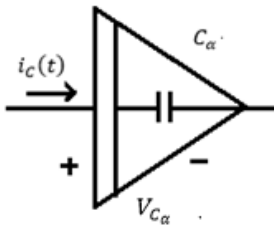
elde edilir. Bir kondansatör UKMT kullanılarak modellendiğinde UKM kondansatör akımı

$$i_{C_\alpha}(t) = C_\alpha \frac{d^\alpha V_{C_\alpha}(t)}{dt^\alpha} \quad (2.21)$$

olarak ifade edilir. Bu denklemde yer alan türev uyumlu kesirli mertebeye türev tanımı kullanılarak yazıldığında  $i_{C_\alpha}(t)$  UKM kondansatör akımı

$$i_{C_\alpha}(t) = C_\alpha \cdot V'_{C_\alpha}(t) \cdot t^{1-\alpha} \quad (2.22)$$

olarak ifade edilir. Burada  $i_{C_\alpha}(t)$  UKM kondansatör akımı,  $V_{C_\alpha}(t)$  UKM kondansatör gerilimi ve  $C_\alpha$  UKM kondansatör sabitidir. Şekil 2.3'te bu çalışmada kullanılacak UKM kondansatör sembolü yer almaktadır. UKM kondansatör birimi  $F/sn^{1-\alpha}$ 'dır.



Şekil 2.3. UKM kondansatör sembolü

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

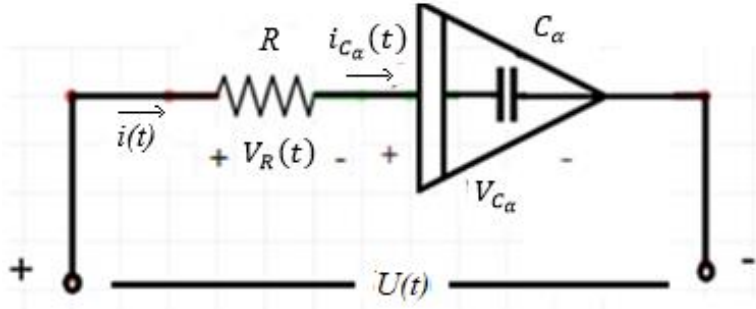
Bir önceki bölümdeki ilham alınan makalede bulunan kondansatörler uyumlu kesirli merteye kondansatör ile değiştirilerek elde edilen iki yeni darbe üretici bu bölümde tanıtılarak, bu devreleri tanımlayan diferansiyel denklemler türetilerek, bu devrelerdeki UKM kondansatörlerin maksimum enerji ile yüklenmesi yani maksimum faydalanma faktörü için gerekli Euler-Lagrange denklemleri oluşturulmuştur. Elde edilen bu Euler-Lagrange diferansiyel denklemlerinin önce analitik çözümü aranmıştır. Analitik çözüm bulunamayınca bu denklemlerin Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak sayısal çözümleri türetilmiştir. Ardından bu varyasyonel problemlerin Sonlu Farklar Yöntemi kullanarak elde edilen denklem sistemlerinin nasıl çözüleceği anlatılmıştır. Bu çözüm için gereken kodlar ek olarak verilmiştir.

#### 3.1. UKM Kondansatör ile Modellenmiş İki Darbe Üreticinin Maksimum Enerjisinin Bulunmasına Dair Varyasyonel Problemler

Bu bölümde uyumlu kesirli merteye kondansatöre sahip,  $R-C_\alpha$  seri devresi,  $R_p$  kaçak dirençli ideal olmayan UKM kondansatörlü  $R-C_\alpha//R_p$  devresi ile modellenen iki darbe üreticinin devre denklemlerinin uyumlu kesirli merteye türev yöntemi kullanılarak elde edilmesi ve darbe üretici içindeki UKM kondansatörlerin maksimum verimle şarj edilmesi probleminin çözümü amaçlanmaktadır.

##### 3.1.1. Yüklenme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C_\alpha$ 'dan Oluşma Durumu

Bu çalışmada ilk olarak Şekil 3.1'de yer alan yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$  elemanlarından oluşma durumu incelenmiştir. Uyumlu kesirli merteye türev yöntemi kullanılarak devre denklemleri oluşturulmuştur. Devreyi tanımlayan denklemler Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak optimizasyon problemine dönüştürülmüştür.



Şekil 3.1. Seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$  elemanlarından oluşan yüklenme devresi

Şekil 3.1’de yer alan yüklenme devresinde Kirchhoff ‘un akımlar kanunu kullanılırsa devre akımı  $i(t)$  ile UKM kondansatör akımı  $i_{C_\alpha}(t)$  arasındaki ilişki

$$i_{C_\alpha}(t) = i(t) \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Devredeki UKM kondansatörü içinden geçen akım

$$i_{C_\alpha}(t) = C_\alpha \frac{d^\alpha V_{C_\alpha}(t)}{dt^\alpha} \quad (3.2)$$

olarak ifade edilir. Bu denklemde yer alan türev uyumlu kesirli mertebe türev tanımı kullanılarak yazıldığında  $i_{C_\alpha}(t)$  UKM kondansatör akımı

$$i_{C_\alpha}(t) = C_\alpha \cdot V'_{C_\alpha}(t) \cdot t^{1-\alpha} \quad (3.3)$$

olur. Kirchhoff ‘un gerilimler kanunu kullanılarak  $U(t)$  devre gerilimi

$$U(t) = i_{C_\alpha}(t) \cdot R + V_{C_\alpha}(t) \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. Devre gerilimi uyumlu kesirli mertebe türev tanımı kullanılarak

$$U(t) = C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \cdot R + V_{C_\alpha}(t) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir. Daha önce faydalanma faktörünün maksimumunun belirlenebilmesinin Denklem (2.1)'in paydasının minimum olması ile sağlanabileceğinden bahsedilmiştir. Buradaki yeni devre için de paydanın minimize edilmesi ile yüklenme verimlilik katsayısı maksimize edilecektir. Devrenin çektiği enerji bu devre için de:

$$J = \int_0^{\tau} U(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (3.6)$$

olarak verilir. Denklem (3.6)'da verilen fonksiyonel,  $U(t)$  devre gerilimi ve yüklenme devresindeki  $i(t)$  akımı denklemleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$J = \int_0^{\tau} [R \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) + V_{C_{\alpha}}(t)] \cdot [C_{\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot t^{1-\alpha}] \cdot dt \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada  $\tau$  yüklenme devresinin yüklenme süresidir. Denklem (3.7) ifadesinde  $C_{\alpha}$  sabiti integral dışına alındığında belirlenen fonksiyonel

$$J = C_{\alpha} \int_0^{\tau} [R \cdot C_{\alpha} \cdot (t^{1-\alpha})^2 \cdot (V'_{C_{\alpha}}(t))^2 + V_{C_{\alpha}}(t) \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot t^{1-\alpha}] \cdot dt \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklemde integralin içi

$$A = R \cdot C_{\alpha} \cdot (t^{1-\alpha})^2 \cdot (V'_{C_{\alpha}}(t))^2 + V_{C_{\alpha}}(t) \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot t^{1-\alpha} \quad (3.9)$$

olsun. Bu optimizasyon problemi için Euler-Lagrange genel denklemi kullanılırsa:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dA}{dV'_{C_{\alpha}}(t)} \right) = \frac{dA}{dV_{C_{\alpha}}(t)} \quad (3.10)$$

bulunur. Artık Euler-Lagrange genel denkleminde yer alan türevler adım adım hesaplanabilir.  $A$ 'nın kondansatör geriliminin birinci türevine yani  $(V'_{C_\alpha}(t))$ 'ne göre türevi alındığında

$$\frac{dA}{dV'_{C_\alpha}(t)} = R \cdot C_\alpha \cdot (t^{1-\alpha})^2 \cdot 2 \cdot V'_{C_\alpha}(t) + V_{C_\alpha}(t) \cdot t^{1-\alpha} \quad (3.11)$$

elde edilir. Elde edilen denklem

$$B = R \cdot C_\alpha \cdot (t^{1-\alpha})^2 \cdot 2 \cdot V'_{C_\alpha}(t) + V_{C_\alpha}(t) \cdot t^{1-\alpha} \quad (3.12)$$

olarak kısaltılsın.  $B$ 'nin zamana göre yani  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = & 2 \cdot R \cdot C_\alpha \cdot [(2 - 2\alpha) \cdot t^{1-2\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) + V''_{C_\alpha}(t) \cdot t^{2-2\alpha}] + t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \\ & + (1 - \alpha) V_{C_\alpha}(t) \cdot t^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Denklem (3.13) yeniden düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = & 4 \cdot R \cdot C_\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot t^{1-2\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) + 2 \cdot R \cdot C_\alpha \cdot V''_{C_\alpha}(t) \cdot t^{2-2\alpha} + t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \\ & + (1 - \alpha) \cdot V_{C_\alpha}(t) \cdot t^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilmektedir.  $A$ 'nın kondansatör gerilimi  $V_{C_\alpha}(t)$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{dA}{dV_{C_\alpha}(t)} = t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \quad (3.15)$$

elde edilir. Denklem (3.11), Denklem (3.14) ve Denklem (3.15) Euler-Lagrange denkleminde yerine koyulduğunda yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşma durumunda devrenin optimum yüklenmesini tanımlayan diferansiyel denklem



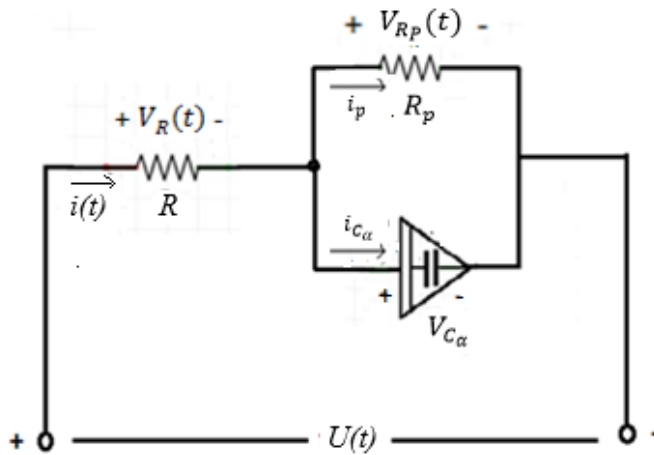
$$4. R. C_\alpha. (1 - \alpha). t^{1-2\alpha}. V'_{C_\alpha}(t) + 2. R. C_\alpha. V''_{C_\alpha}(t) . t^{2-2\alpha} + t^{-\alpha}. (1 - \alpha) V_{C_\alpha}(t) = 0 \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. Elde edilen diferansiyel denklemde  $\alpha = 1$  olarak alındığında denklem Alisoy ve ark. tarafından yapılan çalışmadaki yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C$ 'dan oluşma durumunda elde edilen Denklem (2.6)'ya indirgenmektedir.

Elde edilen diferansiyel denklem, Denklem (3.16), analitik olarak çözülmeye çalışılmış fakat çözülememiştir. WolframAlpha gibi sembolik olarak matematiksel hesap yapan programlarla elde edilen diferansiyel denklemin çözümü denenmiş ama bu programlar kullanılarak da bu diferansiyel denklem çözülememiştir. Bu devrenin optimum yüklenmesini tanımlayan diferansiyel denklem analitik olarak çözülemediğinden sayısal (nümerik) yöntemlerle çözüme devam edilmesi gerekmektedir. Çözüm için kullanılan sonlu farklar yöntemi ile ilgili detaylı bilgiler EK 2'de yer almaktadır.

### 3.1.2. Yüklenme Devresinin $R-C_\alpha//R_p$ 'dan Oluşma Durumu

Bu çalışmada ikinci olarak Şekil 3.2'de yer alan  $R-C_\alpha//R_p$  yüklenme devresi incelenmiştir. Uyumlu kesirli mertebe türev yöntemi kullanılarak devre denklemleri oluşturulmuştur. Devreyi tanımlayan denklemler Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak optimizasyon problemine dönüştürülmüştür.



Şekil 3.2.  $R-C_\alpha//R_p$  yüklenme devresi

Şekil 3.2’de yer alan yüklenme devresi incelendiğinde, Kirchoff ’un akımlar kanununa uygun olarak devre akımı  $i(t)$ , yalıtkan akımı  $i_p(t)$  ve UKM kondansatör akımı  $i_{C_\alpha}(t)$  aralarındaki ilişki

$$i(t) = i_p(t) + i_{C_\alpha}(t) \quad (3.17)$$

olarak yazılabilir. Devredeki UKM kondansatörü içinden geçen akım

$$i_{C_\alpha}(t) = C_\alpha \cdot \frac{d^\alpha V_{C_\alpha}(t)}{dt^\alpha} \quad (3.18)$$

olarak ifade edilir. Bu denklemde yer alan türev uyumlu kesirli mertebe türev tanımı kullanılarak yazıldığında,  $i_{C_\alpha}(t)$  UKM kondansatör akımı

$$i_{C_\alpha}(t) = C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \quad (3.19)$$

olur. Şekil 3.2’de yer alan devrede Kirchoff ’un gerilim kanunu uygulandığında  $V_{C_\alpha}(t)$  UKM kondansatör gerilimi ile  $R_p$  direnci üzerindeki gerilim eşit olduğundan, yalıtkan akımı  $i_p(t)$

$$i_p(t) = \frac{V_{C_\alpha}(t)}{R_p} \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir. Şekil 3.2’de yer alan devrede Kirchoff’un akım kanunu uygulandığında  $i(t)$  devre akımı

$$i(t) = i_p(t) + i_{C_\alpha}(t) \quad (3.21)$$

olur.  $i_p(t)$  yalıtkan akımı ve  $i_{C_\alpha}(t)$  kondansatör akımı Denklem (3.21)’de yerine koyulduğunda  $i(t)$  devre akımı

$$i(t) = \frac{V_{C_\alpha}(t)}{R_p} + C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \quad (3.22)$$

olur. Şekil 3.2’de yer alan devrede Kirchoff ’un gerilim kanunu uygulandığında  $U(t)$  kaynak gerilimi

$$U(t) = i(t) \cdot R + V_{C_\alpha}(t) \quad (3.23)$$

olarak bulunur. Denklem (3.22)’de elde edilen devre akımı tanımını yerine koyulduğunda  $U(t)$  kaynak gerilimi

$$U(t) = \left[ \frac{V_{C_\alpha}(t)}{R_p} + C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) \right] \cdot R + V_{C_\alpha}(t) \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (3.24) yeniden düzenlendiğinde

$$U(t) = [R \cdot C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t)] + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot V_{C_\alpha}(t) \quad (3.25)$$

elde edilir. Daha önce faydalanma faktörünün maksimumunun belirlenebilmesinin Denklem (2.1)’in paydasının minimum olması ile sağlanabileceğinden bahsedilmişti. Buradaki yeni durum için de paydanın minimize edilmesi ile yüklenme verimlilik katsayısı maksimize edilecektir. Devrenin çektiği enerji bu devre için de:

$$J = \int_0^\tau U(t) \cdot i(t) \cdot dt \quad (3.26)$$

olarak verilir. Denklem (3.26)’da verilen fonksiyonel,  $U(t)$  devre gerilimi ve yüklenme devresindeki  $i(t)$  akımı denklemleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$J = \int_0^{\tau} [R \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot V_{C_{\alpha}}(t)] \cdot \left[ \frac{V_{C_{\alpha}}(t)}{R_p} + C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \right] \cdot dt \quad (3.27)$$

elde edilir. Burada  $\tau$  yüklenme devresinin yüklenme süresidir. Denklem (3.27)'de paydalar eşitlenerek denklem düzenlendiğinde bu fonksiyonel

$$J = \int_0^{\tau} \left[ \frac{R}{R_p} \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot V_{C_{\alpha}}(t) + \left( \frac{1}{R_p} + \frac{R}{R_p^2} \right) \cdot V_{C_{\alpha}}^2(t) + R \cdot C_{\alpha}^2 \cdot t^{2-2\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t)^2 \right. \\ \left. + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot V_{C_{\alpha}}(t) \right] \cdot dt \quad (3.28)$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklemde integralin içi

$$A = \frac{R}{R_p} \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot V_{C_{\alpha}}(t) + \left( \frac{1}{R_p} + \frac{R}{R_p^2} \right) \cdot V_{C_{\alpha}}^2(t) + R \cdot C_{\alpha}^2 \cdot t^{2-2\alpha} \cdot (V'_{C_{\alpha}}(t))^2 \\ + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \cdot V_{C_{\alpha}}(t) \quad (3.29)$$

olsun. Bu optimizasyon problemi için Euler-Lagrange genel denklemi kullanılırsa:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dA}{dV'_{C_{\alpha}}(t)} \right) = \frac{dA}{dV_{C_{\alpha}}(t)} \quad (3.30)$$

bulunur. Artık Euler-Lagrange genel denkleminde yer alan türevler adım adım hesaplanabilir.  $A$ 'nın kondansatör geriliminin birinci türevine yani  $(V'_{C_{\alpha}}(t))$ 'ne göre türevi alındığında

$$\frac{dA}{dV'_{C_{\alpha}}(t)} = \frac{R}{R_p} \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V_{C_{\alpha}}(t) + 2 \cdot R \cdot C_{\alpha}^2 \cdot t^{2-2\alpha} \cdot V'_{C_{\alpha}}(t) \\ + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot C_{\alpha} \cdot t^{1-\alpha} \cdot V_{C_{\alpha}}(t) \quad (3.31)$$

elde edilir. Elde edilen denklem

$$B = \frac{R}{R_p} \cdot C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V_{C_\alpha}(t) + 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot t^{2-2\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} V_{C_\alpha}(t) \quad (3.32)$$

olarak kısaltılsın.  $B$ 'nin zamana göre yani  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = \frac{R}{R_p} \cdot C_\alpha \cdot [(1 - \alpha) \cdot t^{-\alpha} \cdot V_{C_\alpha}(t) + V'_{C_\alpha}(t) \cdot t^{1-\alpha}] \\ + 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot [(2 - 2\alpha) \cdot t^{1-2\alpha} \cdot V'_C(t) + V''_{C_\alpha}(t) \cdot t^{2-2\alpha}] \\ + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot C_\alpha \cdot [(1 - \alpha) \cdot t^{-\alpha} V_{C_\alpha}(t) + V'_{C_\alpha}(t) \cdot t^{1-\alpha}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir.  $A$ 'nın kondansatör gerilimi  $V_{C_\alpha}(t)$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dV_C(t)} = \frac{R}{R_p} \cdot C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) + 2 \cdot \left( \frac{R + R_p}{R_p^2} \right) \cdot V_{C_\alpha}(t) \\ + (1 + R \cdot R_p^{-1}) \cdot C_\alpha \cdot t^{1-\alpha} V'_{C_\alpha}(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. Denklem (3.31), Denklem (3.33) ve Denklem (3.34) Euler-Lagrange denklemine yerine koyulduğunda ve sadeleştirildiğinde devrenin optimum yüklenmesini tanımlayan diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left( \frac{R_p + R}{R_p^2} \right) \cdot V_{C_\alpha}(t) = 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot V''_{C_\alpha}(t) \cdot t^{2-2\alpha} \\ + 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot (2 - 2\alpha) \cdot t^{1-2\alpha} \cdot V'_{C_\alpha}(t) + C_\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot t^{-\alpha} V_{C_\alpha}(t) \cdot \left( \frac{2R + R_p}{R_p} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

olarak elde edilir. Elde edilen diferansiyel denklemde  $\alpha = 1$  olarak alındığında denklem Alisoy ve ark. tarafından yapılan çalışmadaki yüklenme devresinin  $R_p$  kaçak dirençli kondansatör  $C$  ile seri bağlı  $R$  direncinin oluşturduğu devreyi tanımlayan Denklem (2.12)'ye indirgenmektedir.

Elde edilen diferansiyel denklem, Denklem (3.35), analitik olarak çözülmeye çalışılmış fakat çözülememiştir. WolframAlpha gibi sembolik olarak matematiksel hesap yapan programlarla elde edilen diferansiyel denklemin çözümü denenmiş ama bu programlar kullanılarak da bu diferansiyel denklem çözülememiştir. Bu devrenin optimum yüklenmesini tanımlayan diferansiyel denklem analitik olarak çözülemediğinden sayısal (nümerik) yöntemlerle çözüme devam edilmesi gerekmektedir. Çözüm için kullanılan sonlu farklar yöntemi ile ilgili detaylı bilgiler EK 2’de yer almaktadır.

### 3.2. Sonlu Farklar Yöntemi Kullanılarak Varyasyonel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Bu bölümde UKM kondansatör ile modellenmiş darbe üreticilerinin maksimum enerjisinin bulunması için yüklenme devrelerinin incelenmesi sonucu elde edilen ve analitik yöntemlerle çözümüne ulaşılamayan denklemlerin sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal çözümleri türetilmiştir. Ayrıca her iki yüklenme devresi için sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen denklem sistemlerinin çözümü ve devre simülasyonlarının yapılabilmesi için Matlab’te yazılmış Gauss eliminasyon fonksiyonu da bu bölümde açıklanmıştır.

#### 3.2.1. Yüklenme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C_\alpha$ ’dan Oluşma Durumu

Geçen bölümde UKM Kondansatör ile modellenmiş  $R$  ve  $C_\alpha$ ’dan oluşan darbe üreticinin maksimum enerjisini tanımlayan diferansiyel denklem

$$4. R. C_\alpha. (1 - \alpha). t^{1-2\alpha}. V'_{C_\alpha}(t) + 2. R. C_\alpha. V''_{C_\alpha}(t). t^{2-2\alpha} + t^{-\alpha}. (1 - \alpha)V_{C_\alpha}(t) = 0 \quad (3.36)$$

olarak elde edilmişti. Denklem (3.36)’nın sayısal çözümünde aşağıda yer alan yol izlenecektir.

Aşağıda verilen zamana bağlı ifadeler tanımlansın:

$$A = 4. R. C_\alpha. (1 - \alpha). t^{1-2\alpha} \quad (3.37)$$

$$B = 2. R. C_\alpha. t^{2-2\alpha} \quad (3.38)$$

$$C = t^{-\alpha}. (1 - \alpha) \quad (3.39)$$

Bu ifadeleri kullanarak Denklem (3.36):

$$A. V'_{C\alpha}(t) + B. V''_{C\alpha}(t) + C. V_{C\alpha}(t) = 0 \quad (3.40)$$

olarak kısaltılabilir. Çözüm için Euler merkezi farklar yöntemi kullanılarak kondansatör geriliminin birinci ve ikinci dereceden türevleri

$$\frac{dV_{C\alpha}}{dt} \cong \frac{V_{C\alpha}(t + \Delta t) - V_{C\alpha}(t - \Delta t)}{2h} \quad (3.41)$$

ve

$$\frac{d^2V_{C\alpha}}{dt^2} \cong \frac{V_{C\alpha}(t + \Delta t) - 2V_{C\alpha}(t) + V_{C\alpha}(t - \Delta t)}{h^2} \quad (3.42)$$

olarak bulunabilir. Bu denklemler bilgisayarda çözüm için programlamaya uygun olacak şekilde  $t$  değişkeni yerine  $i$  indisi ve  $\Delta t$  yerine 1 yazılarak yeniden düzenlenirse

$$V'_{C\alpha}(t_i) \cong \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h} \quad (3.43)$$

ve

$$V''_{C\alpha}(t_i) \cong \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad (3.44)$$

olarak yazılabilir. Burada  $h$  zaman adımının değeridir ve  $t_i$   $i$ 'inci adımdaki zaman değeridir ve

$$t_i = t_0 + (i - 1)h \quad (3.45)$$

olarak hesaplanır.

Denklem (3.40),  $i$  'inci zaman adımı için

$$A_i \cdot V'_{C_\alpha}(t) + B_i \cdot V''_{C_\alpha}(t) + C_i \cdot V_{C_\alpha}(t) = 0 \quad (3.46)$$

şeklinde yazılabilir.

Euler merkezi farklar yöntemi Denklem (3.46)'ya uygulandığında

$$\frac{A_i \cdot V_{i+1} - A_i \cdot V_{i-1}}{2h} + \frac{B_i \cdot V_{i+1} - 2 \cdot B_i \cdot V_i + B_i \cdot V_{i-1}}{h^2} + C_i \cdot V_i = 0 \quad (3.47)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.47) yeniden düzenlendiğinde

$$A_i \cdot h \cdot V_{i+1} - A_i \cdot h \cdot V_{i-1} + 2 \cdot B_i \cdot V_{i+1} - 4 \cdot B_i \cdot V_i + 2 \cdot B_i \cdot V_{i-1} + 2 \cdot h^2 \cdot C_i \cdot V_i = 0 \quad (3.48)$$

elde edilir. Denklem (3.48) ortak parantezler kullanılarak

$$V_{i-1}(2 \cdot B_i - A_i \cdot h) + V_i(2 \cdot h^2 \cdot C_i - 4 \cdot B_i) + V_{i+1}(A_i \cdot h + 2 \cdot B_i) = 0 \quad (3.49)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.49)'de yer alan  $A_i, B_i, C_i$  ifadeleri  $i$ 'inci zaman adımı için aşağıdaki takip eden formüllerle verilir.

$$A_i = 4 \cdot R \cdot C_\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot t_i^{1-2\alpha} \quad (3.50)$$

$$B_i = 2 \cdot R \cdot C_\alpha \cdot t_i^{2-2\alpha} \quad (3.51)$$

$$C_i = t_i^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) \quad (3.52)$$

Simülasyon için oluşturulan zaman değişkeni sayısı  $N+1$  olsun. Bu durumda  $i$  indisi 0'dan  $N+1$ 'e kadar değer alır. Bu durumda sayısal olarak değeri hesaplanacak nokta sayısı  $N-1$  olur. Değeri hesaplanacak noktaların indisi 1'den  $N$ 'e kadar değişmektedir. Çünkü yüklenme sonucu kondansatörün ulaşacağı gerilim  $V_N = V_{C_\alpha}(\tau)$ 'dur ve değeri bilinmektedir. Ayrıca başlangıçta kondansatör yüksüz olduğundan  $V_{C_\alpha}(0) = V_0 = 0$  Volt'tur.



Yöntemi kullanmak için önce az sayıda nokta seçilsin.  $N=6$  olsun. Bu durumda  $i=0$ 'dan 5'e kadar değişir. Yani 6 zaman değerinden sadece 4 tanesinin hesaplanması gerekmektedir. Elde edilen Denklem (3.49), ortadaki dört noktanın ( $i=1,2,3,4$  indislerine sahip olan noktaların) gerilimlerinin hesaplanması için kullanılabilir. Bu denklem 4 nokta için uygulandığında aşağıdaki takip eden denklemler elde edilir:

$i=1$  için;

$$V_0(2.B_1 - A_1.h) + V_1(2.h^2.C_1 - 4.B_1) + V_2(A_1.h + 2.B_1) = 0 \quad (3.53)$$

$i=2$  için;

$$V_1(2.B_2 - A_2.h) + V_2(2.h^2.C_2 - 4.B_2) + V_3(A_2.h + 2.B_2) = 0 \quad (3.54)$$

$i=3$  için;

$$V_2(2.B_3 - A_3.h) + V_3(2.h^2.C_3 - 4.B_3) + V_4(A_3.h + 2.B_3) = 0 \quad (3.55)$$

$i=4$  için;

$$V_3(2.B_4 - A_4.h) + V_4(2.h^2.C_4 - 4.B_4) + V_5(A_4.h + 2.B_4) = 0 \quad (3.56)$$

$V_0=0$  yerine konursa

$$V_1(2.h^2.C_1 - 4.B_1) + V_2(A_1.h + 2.B_1) = 0 \quad (3.57)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi (bu dört denklem ) matrisleri kullanarak yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} 2.h^2.C_1 - 4.B_1 & A_1.h + 2.B_1 & 0 & 0 \\ 2.B_2 - A_2.h & 2.h^2.C_2 - 4.B_2 & A_2.h + 2.B_2 & 0 \\ 0 & 2.B_3 - A_3.h & 2.h^2.C_3 - 4.B_3 & A_3.h + 2.B_3 \\ 0 & 0 & 2.B_4 - A_4.h & 2.h^2.C_4 - 4.B_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1.h - 2.B_1).V_0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{C_\alpha}(\tau).(A_4.h + 2.B_4) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler sisteminin çözümü bu optimizasyon probleminin  $N=6$  için sayısal çözümünü verecektir. Nokta sayısı  $N$  artırılarak çözümün doğruluğu artırılabilir.

$[0, \tau]$  zaman aralığı  $N$  parçaya ayrılırsa (yani  $N+1$  nokta için),  $(N-1)$ . denklemlerde  $V_N=V_{C_\alpha}(\tau)$  yerine konursa  $(N-1)$ .denklemler:

$$V_{N-2}(2 \cdot B_{N-1} - A_{N-1} \cdot h) + V_{N-1}(2 \cdot h^2 \cdot C_{N-1} - 4 \cdot B_{N-1}) = -V_{C_\alpha}(\tau) \cdot (A_{N-1} \cdot h + 2 \cdot B_{N-1}) \quad (3.59)$$

olarak elde edilir.  $[0, \tau]$  zaman aralığı  $N$  parçaya ayrılırsa (yani  $N+1$  nokta için) ve  $V_{C_\alpha}(0)=V_0=0$  ve  $V_N=V_{C_\alpha}(\tau)$  alınır, tüme varım yöntemi kullanılarak seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşan yüklenme devresinin denklemleri matrisleri kullanarak aşağıdaki denklemler sistemi olarak ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot h^2 \cdot C_1 - 4 \cdot B_1 & A_1 \cdot h + 2 \cdot B_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 \cdot B_2 - A_2 \cdot h & 2 \cdot h^2 \cdot C_2 - 4 \cdot B_2 & A_2 \cdot h + 2 \cdot B_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 \cdot B_3 - A_3 \cdot h & 2 \cdot h^2 \cdot C_3 - 4 \cdot B_3 & A_3 \cdot h + 2 \cdot B_3 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cdot h^2 \cdot C_{N-1} - 4 \cdot B_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N-2} \\ V_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot h - 2 \cdot B_1) \cdot V_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_{C_\alpha}(\tau) \cdot (A_{N-1} \cdot h + 2 \cdot B_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Bu denklemler sisteminin nasıl çözüleceğine dair gerekli bilgiler Bölüm 3.3'te verilecektir.

### 3.2.2. Yüklenme Devresinin $R-C_\alpha//R_p$ 'dan Oluşma Durumu

Geçen bölümde UKM kondansatör ile modellenmiş  $R-C_\alpha//R_p$  yüklenme devresinden oluşan darbe üreticinin maksimum enerjisini tanımlayan diferansiyel denklemler

$$2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot V_{C_\alpha}''(t) \cdot t^{2-2\alpha} + 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot (2 - 2\alpha) \cdot t^{1-2\alpha} \cdot V_{C_\alpha}'(t) + C_\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot t^{-\alpha} V_{C_\alpha}(t) \cdot \left( \frac{2R + R_p}{R_p} \right) = 2 \cdot \left( \frac{R_p + R}{R_p^2} \right) \cdot V_{C_\alpha}(t) \quad (3.61)$$

olarak elde edilmişti. Denklem (3.61)'in nümerik çözümünde aşağıda yer alan yol izlenecektir.

Aşağıda verilen zamana bağlı ifadeler tanımlansın.

$$A = 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot t^{2-2\alpha} \quad (3.62)$$

$$B = 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot (2 - 2\alpha) \cdot t^{1-2\alpha} \quad (3.63)$$

$$C = C_\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot t^{-\alpha} \cdot \left( \frac{2R + R_P}{R_P} \right) \quad (3.64)$$

$$D = 2 \cdot \left( \frac{R_P + R}{R_P^2} \right) \quad (3.65)$$

Bu ifadeleri kullanarak Denklem (3.61):

$$A \cdot V_{C_\alpha}''(t) + B \cdot V_{C_\alpha}'(t) + C \cdot V_{C_\alpha}(t) = D \cdot V_{C_\alpha}(t) \quad (3.66)$$

olarak kısaltılabilir. Çözüm için Euler merkezi farklar yöntemi kullanılarak kondansatör geriliminin birinci ve ikinci dereceden türevleri

$$\frac{dV_{C_\alpha}}{dt} \cong \frac{V_{C_\alpha}(t + \Delta t) - V_{C_\alpha}(t - \Delta t)}{2h} \quad (3.67)$$

ve

$$\frac{d^2V_{C_\alpha}}{dt^2} \cong \frac{V_{C_\alpha}(t + \Delta t) - 2V_{C_\alpha}(t) + V_{C_\alpha}(t - \Delta t)}{h^2} \quad (3.68)$$

olarak bulunabilir. Bu denklemler bilgisayarda çözüm için programlamaya uygun olacak şekilde t değişkeni yerine i indisi ve  $\Delta t$  yerine 1 yazılarak yeniden düzenlenirse

$$V'_{C_\alpha}(t_i) \cong \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h} \quad (3.69)$$

ve

$$V''_{C_\alpha}(t_i) \cong \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} \quad (3.70)$$

olarak yazılabilir. Burada  $h$  zaman adımının değeridir ve  $t_i$   $i$ 'inci adımdaki zaman değeridir ve

$$t_i = t_0 + (i - 1)h \quad (3.71)$$

olarak hesaplanır.

Denklem (3.66),  $i$ 'inci zaman adımı için

$$A_i \cdot V''_{C_\alpha}(t) + B_i \cdot V'_{C_\alpha}(t) + (C_i - D_i) \cdot V_{C_\alpha}(t) = 0 \quad (3.72)$$

şeklinde yazılabilir. Euler merkezi farklar yöntemi Denklem (3.72)'ye uygulandığında

$$\frac{A_i \cdot V_{i+1} - 2 \cdot A_i \cdot V_i + A_i \cdot V_{i-1}}{h^2} + \frac{B_i \cdot V_{i+1} - B_i \cdot V_{i-1}}{2h} + (C_i - D_i) \cdot V_i = 0 \quad (3.73)$$

elde edilmektedir. Denklem (3.72) ortak parantezler kullanılarak yeniden düzenlendiğinde

$$V_{i+1} \cdot (2 \cdot A_i + B_i \cdot h) + V_i \cdot (2 \cdot h^2 \cdot C_i - 2 \cdot h^2 \cdot D_i - 4 \cdot A_i) + V_{i-1} \cdot (2 \cdot A_i - B_i \cdot h) = 0 \quad (3.74)$$

elde edilir. Denklem (3.74)'te yer alan  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$  ifadeleri  $i$ 'inci zaman adımı için aşağıdaki takip eden denklemlerle verilirler.

$$A_i = 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot t_i^{2-2\alpha} \quad (3.75)$$

$$B_i = 2 \cdot R \cdot C_\alpha^2 \cdot (2 - 2\alpha) \cdot t_i^{1-2\alpha} \quad (3.76)$$

$$C_i = C_\alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot t_i^{-\alpha} \cdot \left( \frac{2R + R_P}{R_P} \right) \quad (3.77)$$

$$D_i = 2 \cdot \left( \frac{R_P + R}{R_P^2} \right) \quad (3.78)$$

Simülasyon için oluşturulan zaman değişkeni sayısı  $N+1$  olsun. Bu durumda  $i$  indisi 0'dan  $N+1$ 'e kadar değer alır. Bu durumda sayısal olarak değeri hesaplanacak nokta sayısı  $N-1$  olur. Değeri hesaplanacak noktaların indisi 1'den  $N$ 'e kadar değişmektedir. Çünkü yüklenme sonucu kondansatörün ulaşacağı gerilim  $V_N = V_{C_\alpha}(\tau)$ 'dur ve değeri bilinmektedir. Ayrıca başlangıçta kondansatör yüksüz olduğundan  $V_0 = V_{C_\alpha}(0) = 0$  Volt'tur.

Yöntemi kullanmak için önce az sayıda nokta seçilsin.  $N=6$  olsun. Bu durumda  $i=0$ 'dan 5'e kadar değişir. Yani 6 zaman değerinden sadece 4 tanesinin hesaplanması gerekmektedir. Elde edilen Denklem (3.74), ortadaki dört noktanın ( $i=1,2,3,4$  indislerine sahip olan noktaların) gerilimlerinin hesaplanması için kullanılabilir.

$i=1$  için;

$$V_0(2 \cdot A_1 - B_1 \cdot h) + V_1(2 \cdot h^2 \cdot C_1 - 2 \cdot h^2 \cdot D_1 - 4 \cdot A_1) + V_2(2 \cdot A_1 + B_1 \cdot h) = 0 \quad (3.79)$$

$i=2$  için;

$$V_1(2 \cdot A_2 - B_2 \cdot h) + V_2(2 \cdot h^2 \cdot C_2 - 2 \cdot h^2 \cdot D_2 - 4 \cdot A_2) + V_3(2 \cdot A_2 + B_2 \cdot h) = 0 \quad (3.80)$$

$i=3$  için;

$$V_2(2 \cdot A_3 - B_3 \cdot h) + V_3(2 \cdot h^2 \cdot C_3 - 2 \cdot h^2 \cdot D_3 - 4 \cdot A_3) + V_4(2 \cdot A_3 + B_3 \cdot h) = 0 \quad (3.81)$$

$i=4$  için;

$$V_3(2.A_4 - B_4.h) + V_4(2.h^2.C_4 - 2.h^2.D_4 - 4.A_4) + V_5(2.A_5 + B_5.h) = 0 \quad (3.82)$$

$V_0=0$  yerine konulursa

$$V_1(2.h^2.C_1 - 2.h^2.D_1 - 4.A_1) + V_2(2.A_1 + B_1.h) = V_0.(2.A_1 - B_1.h) \quad (3.83)$$

elde edilir.

Bu denklem 4 nokta için uygulandığında elde edilen bu denklem sistemi (bu dört denklem) matrisleri kullanarak yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} 2.h^2.C_1 - 2.h^2.D_1 - 4.A_1 & 2.A_1 + B_1.h & 0 & 0 \\ 2.A_2 - B_2.h & 2.h^2.C_2 - 2.h^2.D_2 - 4.A_2 & 2.A_2 + B_2.h & 0 \\ 0 & 2.A_3 - B_3.h & 2.h^2.C_3 - 2.h^2.D_3 - 4.A_3 & A_3.h + 2.B_3 \\ 0 & 0 & 2.B_4 - A_4.h & 2.h^2.C_4 - 2.h^2.D_4 - 4.A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2.A_1 - B_1.h).V_0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{C_\alpha}(\tau).(2.A_4 + h.B_4) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü bu optimizasyon probleminin  $N=6$  için sayısal çözümünü verecektir. Nokta sayısı  $N$  arttırılarak çözümün doğruluğu arttırılabilir.

$[0, \tau]$  zaman aralığı  $N$  parçaya ayrılırsa (yani  $N+1$  nokta için),  $(N-1)$ . Denklemden  $V_N=V_C(\tau)$  yerine konursa  $(N-1)$ .denklem:

$$V_{N-2}(2.A_{N-1} - B_{N-1}.h) + V_{N-1}(2.h^2.C_{N-1} - 2.h^2.D_{N-1} - 4.A_{N-1}) = -V_{C_\alpha}(\tau).(2.A_{N-1} + B_{N-1}.h) \quad (3.85)$$

olarak elde edilir.  $[0, \tau]$  zaman aralığı  $N$  parçaya ayrılırsa (yani  $N+1$  nokta için)  $V_0=0$  ve  $V_N=V_{C_\alpha}(\tau)$  alınır, tüme varım yöntemi kullanılarak  $R-C_\alpha//R_p$ 'den oluşan yüklenme devresinin denklemleri matrisleri kullanarak aşağıdaki denklem sistemi olarak ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot h^2 \cdot C_1 - 2 \cdot h^2 \cdot D_1 - 4 \cdot A_1 & 2 \cdot A_1 + B_1 \cdot h & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 2 \cdot A_2 - B_2 \cdot h & 2 \cdot h^2 \cdot C_2 - 2 \cdot h^2 \cdot D_2 - 4 \cdot A_2 & 2 \cdot A_2 + B_2 \cdot h & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 \cdot A_3 - B_3 \cdot h & 2 \cdot h^2 \cdot C_3 - 2 \cdot h^2 \cdot D_3 - 4 \cdot A_3 & A_3 \cdot h + 2 \cdot B_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot A_{N-1} - B_{N-1} \cdot h & 2 \cdot h^2 \cdot C_{N-1} - 2 \cdot h^2 \cdot D_{N-1} - 4 \cdot A_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-2} \\ V_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 \cdot h - 2 \cdot B_1) \cdot V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{C_\alpha}(\tau) \cdot (A_{N-1} \cdot h + 2 \cdot B_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Bu denklem sisteminin nasıl çözüleceğine dair gerekli bilgiler Bölüm 3.3'te verilecektir.

### 3.3. Gauss Eliminasyon Yöntemi ve Matlab'te Yazılan Fonksiyonu

Bu bölümde her iki yüklenme devresi için elde edilen denklem sistemlerinin çözümü ve devre simülasyonlarının yapılabilmesi için kullanılan Gauss eliminasyon yönteminin ve Matlab'te yazılan Gauss eliminasyon fonksiyonunun açıklaması yer almaktadır.

Yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan ve  $R-C_\alpha//R_p$ 'den oluşması sonucu elde edilen denklem sistemleri Thomas Algoritması veya Tridiagonal Matris Algoritması (TDMA) olarak bilinen Sayısal lineer cebirde tridiagonal denklem sistemlerini çözmek için kullanılan basitleştirilmiş bir Gauss eleme (Eliminasyon) yöntemi kullanılarak çözülecektir.  $n$  bilinmeyenli bir üç köşegenli/üç diagonalli (tridiagonal) sistem

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad (3.87)$$

olarak ifade edilir.  $a_1 = 0$  ve  $c_n = 0$ 'dır. Yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşması durumunda elde edilen denklem sistemi bu formüle göre değerlendirildiğinde  $a_i$  matrisin alt köşegenindeki elemanları ifade etmektedir ve

$$a_i = 2 \cdot B_i - A_i \cdot h \quad (3.88)$$

şeklinde tanımlanır.  $b_i$  matrisin ana köşegenindeki elemanları ifade etmektedir ve bu durumda

$$b_i = 2 \cdot h^2 \cdot C_i - 4 \cdot B_i \quad (3.89)$$

şeklinde tanımlanır.  $c_i$  matrisin üst köşegenindeki elemanları ifade etmektedir ve bu durumda

$$c_i = A_i \cdot h + 2 \cdot B_i \quad (3.90)$$

şeklinde tanımlanır.

Yüklenme devresinin  $R-C_\alpha//R_p$  'den oluşması durumunda elde edilen denklem sistemi Denklem (3.86)'da verilen denklem sistemi için bu elemanlar sırasıyla

$$a_i = 2 \cdot A_i - B_i \cdot h \quad (3.91)$$

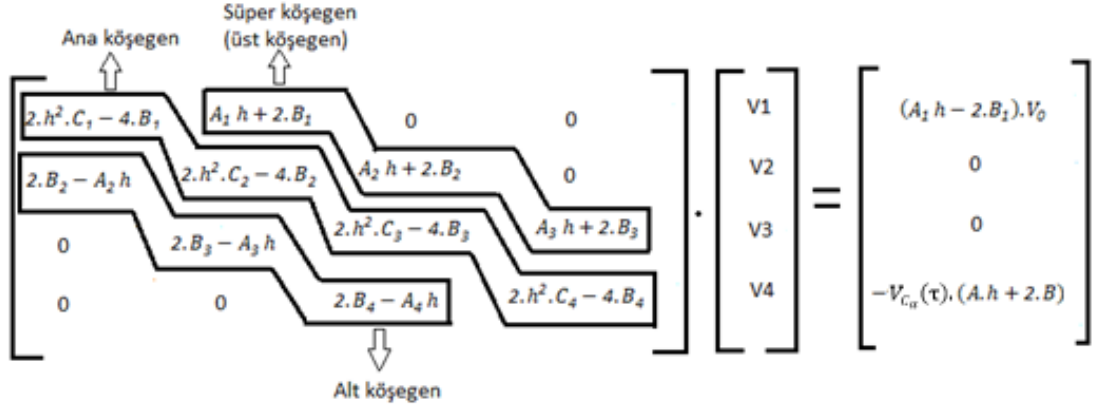
$$b_i = 2 \cdot h^2 \cdot C_i - 2 \cdot h^2 \cdot D_i - 4 \cdot A_i \quad (3.92)$$

$$c_i = 2 \cdot A_i + B_i \cdot h \quad (3.93)$$

olarak tanımlanır.

Şekil 3.3'te yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$  'dan oluşma durumunda ortadaki dört noktanın ( $i=1,2,3,4$ ) gerilimlerinin hesaplanması için oluşturulan ve Denklem (3.58)'de verilen katsayı matrisi üzerindeki matris köşegenleri gösterilmiştir.





Şekil 3.3. Oluşturulan katsayılar matrisinin köşegenlerinin gösterilmesi

Elde edilen üç köşegenli katsayılar matrisinde katsayılar matrisinin elemanlarının çoğu sıfırdan oluşmaktadır. Bu matris tipi için gereksiz işlemleri önlemek ve bilgisayar hafızasında daha az yer işgal etmesini sağlamak amacıyla  $(n \times n)$  boyutlarında bir katsayılar matrisi yerine  $(n \times 3)$  boyutunda bir katsayılar matrisi kullanılmıştır. Bunu sağlamak amacıyla elde edilen matriste bir düzenleme yapılması ve uygun bir çözüm algoritmasının kullanımı tercih edilmiştir (Lakshmi ve Muthuselvi, 2013).

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Gauss eliminasyon yönteminin temeli ana köşegenin altında kalan bütün elemanların sıfır olmasını sağlamaktır. Bu denklem sistemindeki ilk denklem  $a_2$  ile ikinci denklem de  $b_1$  ile çarpılıp, birinci denklem ikincisinden çıkarıldıktan sonra her iki tarafın  $b_1$  ile bölünmesiyle sırasıyla

$$a_2 b_1 x_1 + a_2 c_1 x_2 = a_2 d_1 \quad (3.95)$$

$$b_1 a_2 x_1 + b_2 b_1 x_2 + b_1 c_2 x_3 = b_1 d_2 \quad (3.96)$$

$$\left(b_2 - \frac{a_2 c_1}{b_1}\right)x_2 + c_2 x_3 = d_2 - \frac{d_1 a_2}{b_1} \quad (3.97)$$

denklemleri elde edilir. Böylece Denklem (3.96)'deki  $x_1$  bilinmeyeninin katsayısı yok edilmiş olur. Yani katsayılar matrisinde diyagonal elemanın altındaki katsayı sıfırlanır. Sadeleştirme amacıyla şu yeni katsayılar tanımlanabilir:

$$b'_2 = b_2 - \frac{a_2 c_1}{b_1} \quad (3.98)$$

$$d'_2 = d_2 - \frac{d_1 a_2}{b_1} \quad (3.99)$$

Denklem (3.97)'da bu yeni katsayılar kullanılarak yeniden yazılırsa:

$$b'_2 x_2 + b c_2 x_3 = d'_2 \quad (3.100)$$

elde edilir. Bu işlemler sonucu elde edilen denklem sistemi yeniden matrisleri kullanarak yazılırsa Denklem (3.100)'deki son şeklini alır.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b'_2 & c_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d'_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Uygulanan eliminasyon işlemi denklem sistemindeki ikinci ve üçüncü denklem arasında tekrarlanırsa, yani ikinci denklem  $a_3$  ile üçüncü denklem de  $b'_2$  ile çarpılıp bu sefer ikinci denklem üçüncüsünden çıkarılırsa, ikinci ve üçüncü denklemin her birinin  $b'_2$  ile bölünmesiyle sırasıyla

$$a_3 b'_2 x_2 + a_3 c_2 x_2 = a_3 d'_2 \quad (3.102)$$

$$b'_2 a_3 x_2 + b'_2 b_3 x_3 + b'_2 c_3 x_4 = b'_2 d_3 \quad (3.103)$$

$$\left( b_3 - \frac{a_3 c_2}{b'_2} \right) x_3 + c_3 x_4 = d_3 - \frac{d'_2 a_3}{b'_2} \quad (3.104)$$

denklemleri elde edilir. Sadeleştirme amacıyla şu yeni katsayılar tanımlanabilir:

$$b'_3 = b_3 - \frac{a_3 c_2}{b'_2} \quad (3.105)$$

$$d'_3 = d_3 - \frac{d'_2 a_3}{b'_2} \quad (3.106)$$

Denklem (3.104) bu yeni katsayılar kullanılarak yeniden yazılırsa:

$$b'_3 x_3 + c_3 x_4 = d'_3 \quad (3.107)$$

elde edilir. Denklem (3.107)'de  $x_2$  bilinmeyeninin katsayısı yok edilmiş olur. Benzeri işlemler daha sonraki denklemler için de tekrarlanarak bir genelleme yapılırsa  $i$ 'inci adım için şu yeni katsayılar tanımlanabilir:

$$b'_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{b'_{i-1}} \quad (3.108)$$

$$d'_i = d_i - \frac{d'_{i-1} a_i}{b'_{i-1}} \quad (3.109)$$

Bu yöntemi uygularken  $i=2,3,\dots,n$  değerlerini almaktadır. Yöntem tümüyle uygulandığında elde edilen denklem sistemi matrisleri kullanarak yazılırsa Denklem (3.110)'daki son şeklini alır.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b'_2 & c_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b'_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b'_i & c_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ \dots \\ d'_i \\ \dots \\ d'_n \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

Bu denklem sisteminde en sonuncu denklemden  $x_n$  bilinmeyeni

$$x_n = \frac{d'_n}{b'_n} \quad (3.111)$$

olarak hesaplanabilir. Bulunan  $x_n$  değeri bir önceki satırdaki denklemde yerine konursa

$$x_{n-1} = \frac{d'_{i-1} - c_{n-1}x_n}{b'_{i-1}} \quad (3.112)$$

elde edilir. Yapılan işlem  $i$ 'inci satır için genelleştirilirse:

$$x_i = \frac{d'_i - c_i x_{i+1}}{b'_i} \quad (3.113)$$

olarak çekilebilir.

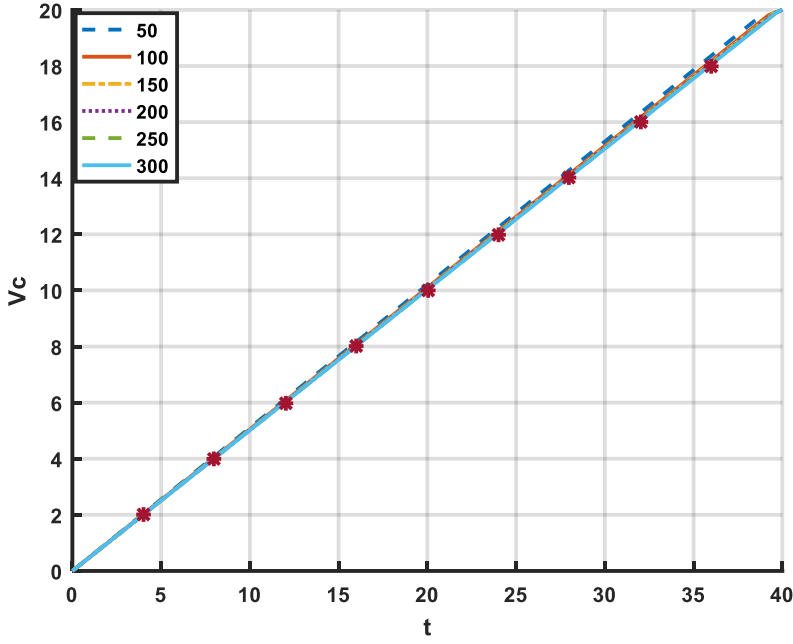
EK 3'te verilen Matlab'te yazılmış Gauss eliminasyon fonksiyonu bu işlemlerin gerçekleşmesini sağlamaktadır. Bu kodun iyi anlaşılması için gereken açıklamalar kodun içinde % işaretlerinden sonra verilmiştir. EK 4'te verilen Matlab'te yazılmış kod yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'den oluşma durumu için elde edilen denklem sisteminin çözümünü ve UKM kondansatör geriliminin simüle edilmesini sağlamaktadır. EK5'te yer alan Matlab'te yazılmış kod yüklenme devresinin  $R-C_\alpha//R_p$ 'den oluşma durumunda elde edilen denklem sisteminin çözümünü ve UKM kondansatör geriliminin simüle edilmesini sağlamaktadır. Bu kodun iyi anlaşılması için gereken açıklamalar kodun içinde % işaretlerinden sonra verilmiştir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Önceki bölümde UKM kondansatör ile modellenmiş darbe üreteçlerinin maksimum enerjisinin bulunması problemlerinin analitik çözümü olmadığı gösterilmişti ve bu yüzden bu problemlere Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak bir çözüm aranmıştı. Bu bölümde UKM kondansatör ile modellenmiş darbe üreteçlerinin maksimum enerjisinin bulunması problemlerinin sayısal çözümü sonucunda elde edilen maksimum faydalanma faktörüne karşılık gelen UKM kondansatör gerilimi olan  $V_{C_\alpha}$  farklı parametrelere bağlı olarak geçen bölümde yazılan Matlab kodları kullanılarak simüle edilmiştir. Simülasyon sonucu UKM kondansatör gerilimleri zamana bağlı olarak çizdirilmiştir. Farklı parametreler için bu varyasyonel problemlerin çözümleri yapılmıştır ve bu çözümlerin yakınsama durumu incelenmiştir. Elde edilen bulgular sunulmuş ve yorumlanmıştır.

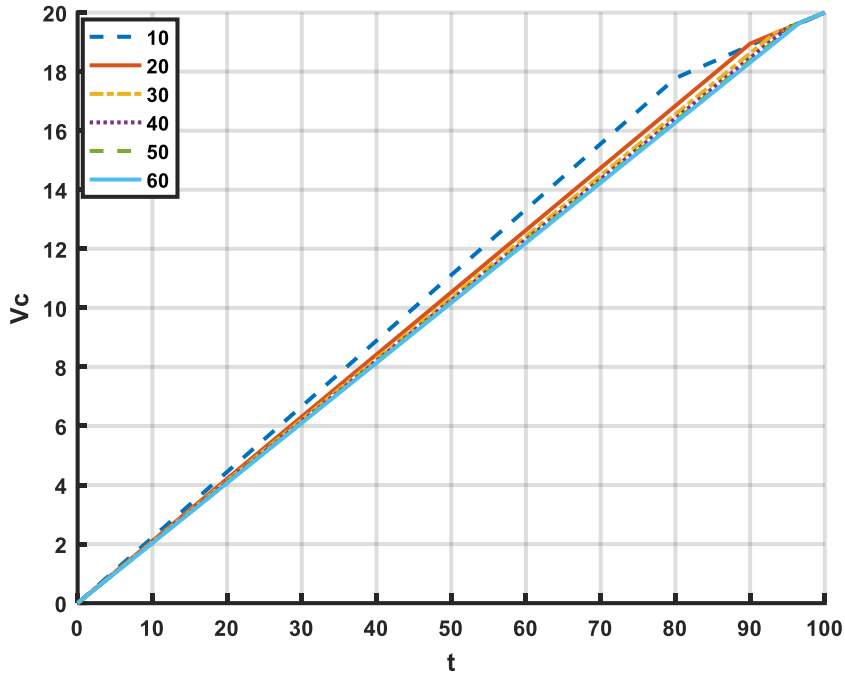
### 4.1. Yüklenme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C_\alpha$ 'dan Oluşma Durumu İçin Optimum Çözümlerin Simülasyonu

Yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşması durumunda maksimum faydalanma faktörünün gerçekleştiği değere karşılık gelen Denklem (3.60)'ta verilen denklem sisteminin EK4'te verilen Matlab kodu ile  $C_\alpha = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $\alpha=1$  ve  $\tau = 40 \text{ sn}$  yüklenme süresi için, adım sayısı,  $n$ , değerleri parametre alınarak simüle edilmiş ve  $V_{C_\alpha}$ 'nın zamana göre değişimi Şekil 4.1'de gösterilmiştir.  $\alpha=1$  alındığında simülasyon sonucu bulunan çözüm ilham alınan makaledeki  $R$ - $C$  yüklenme devresi için bulunan analitik çözümü vermelidir. Bundan dolayı yazılan Matlab kodunu test etmek amacıyla ilk olarak kesir mertebesi  $\alpha=1$  alınarak UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi incelenmiştir. İlham alınan çalışmada yer alan  $R$  ve  $C$  devresi için kondansatör geriliminin zamana göre değişimi bir doğrudur ve Şekil 4.1'de kırmızı renkli '\*' işareti kullanılarak çizilmiştir. Şekil 4.1'de görülen  $R$  ve  $C_\alpha$  devresi için elde edilen simülasyon sonuçları ilham alınan makaledeki  $R$ - $C$  devresinin çözümü ile karşılaştırıldığında  $n$  değeri artıkça  $R$  ve  $C_\alpha$  devresi için bulunan eğriler  $R$ - $C$  devresi için bulunan doğruya yakınsamaktadır. Böylece yazılan Matlab kodunun doğru çalıştığı gösterilmiştir.

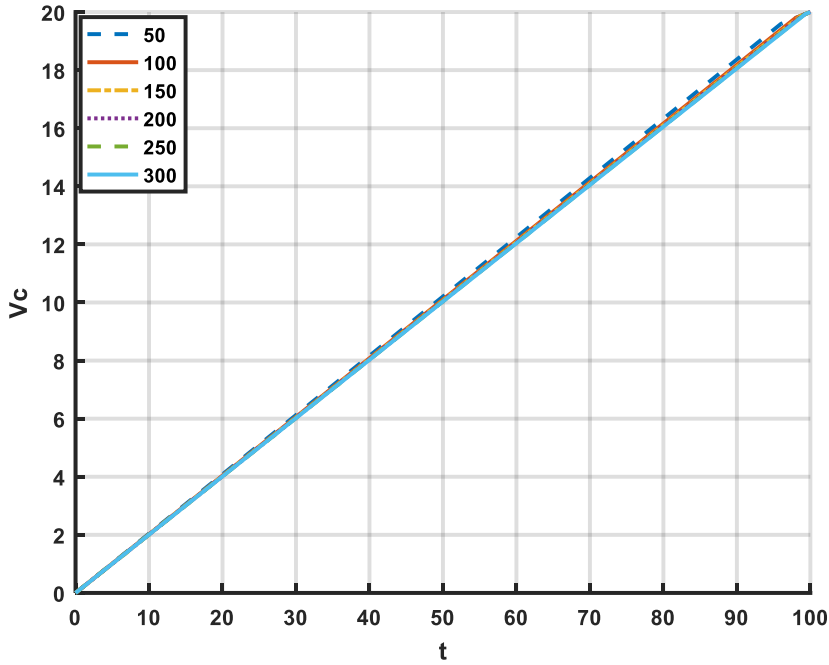


Şekil 4.1.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=40 \ \Omega$ ,  $\alpha =1$  ve  $\tau=40$  sn için ve  $n$  parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

$C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \ \Omega$  ve  $\alpha =1$  değerleri için UKM kondansatör gerilimi denklemini düşük  $n$  (adım sayısı) değerleri için çözüldüğünde Şekil 4.2'de yer alan parçalı doğrusal fonksiyonlara benzeyen eğriler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde  $n$  küçük seçildiğinde eğrilerde gerilimin üst sınır değerine yani  $V_{C_\alpha}(\tau)$ 'ya yaklaştıkça kırılmaların meydana geldiği görülmüştür.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \ \Omega$  ve  $\alpha =1$  değerleri için UKM kondansatör gerilimi denklemini, yüksek  $n$  (adım sayısı) değerleri için, çözüldüğünde Şekil 4.3'te yer alan neredeyse doğru şeklindeki eğriler elde edilir. Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'te yer alan grafikler incelendiğinde doğru bir sonuç elde edilebilmesi için  $n$  değerlerinin büyük seçilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır.

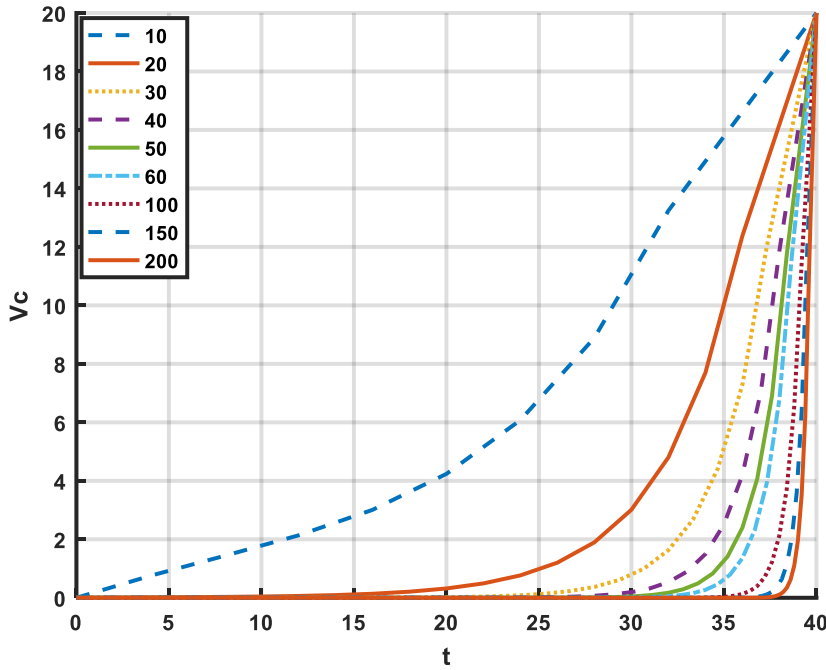


Şekil 4.2.  $C_\alpha = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \ \Omega$ ,  $\alpha =1$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi



Şekil 4.3.  $C_\alpha = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \ \Omega$ ,  $\alpha =1$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

Kodun doğru çalıştığının tespit edilmesinin ardından farklı  $\alpha$  (kesir mertebesi) değerleri için simülasyonlar yapılmıştır. Yükleme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşması durumunda  $C_\alpha = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $\tau = 40 \text{ sn}$ ,  $R=40 \text{ } \Omega$ ,  $\alpha =0,90$  için yüklenmenin maksimum faydalanma faktörünün gerçekleştiği değere karşılık gelen UKM kondansatör geriliminin yani  $V_{C_\alpha}$ 'nın farklı  $n$  değerleri için çizilmiş zamana göre değişimi Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Bu şekilde  $n=10$  için elde edilen eğri bir parabolü andırmaktadır. Ama adım sayısı değerleri ( $n$ ) artırıldığında eğrinin şekli parabol olmaktan sapmakta ve iletim bölgesinde çalışan bir diyodun karakteristiğine benzemektedir ve kondansatörün gerilimi en sağdaki eğriye yakınsamaktadır.  $n$  artarken gerilimin çok küçük değerlerde iken birden artmaya başladığı ve eğim açısının giderek yükselerek 90 dereceye yaklaştığı görülmektedir.

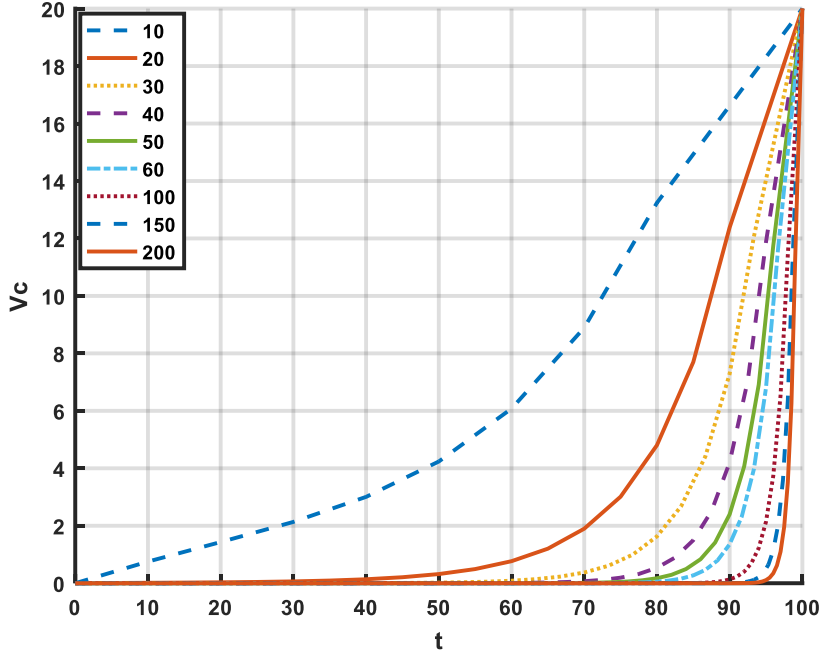


Şekil 4.4.  $C_\alpha = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R=40 \text{ } \Omega$ ,  $\alpha=0,90$  ve  $\tau = 40 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

$C_\alpha = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \text{ } \Omega$  için;  $\alpha =0,90$  değerlerinde farklı  $n$  değerleri için  $t$ 'ye bağlı denklem çözüldüğünde Şekil 4.5'te yer alan grafik elde edilir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'te  $n$  değerleri aynı seçilmiştir. Şekil 4.5'te yer alan grafik değerlendirildiğinde  $\alpha=0,90$  değeri için  $n$  değerleri artırıldığında gerilim eğrisinin şeklinin iletim bölgesinde çalışan bir diyodun karakteristiğine benzediği, kondansatörün geriliminin en sağdaki eğriye yakınsadığı, gerilimin

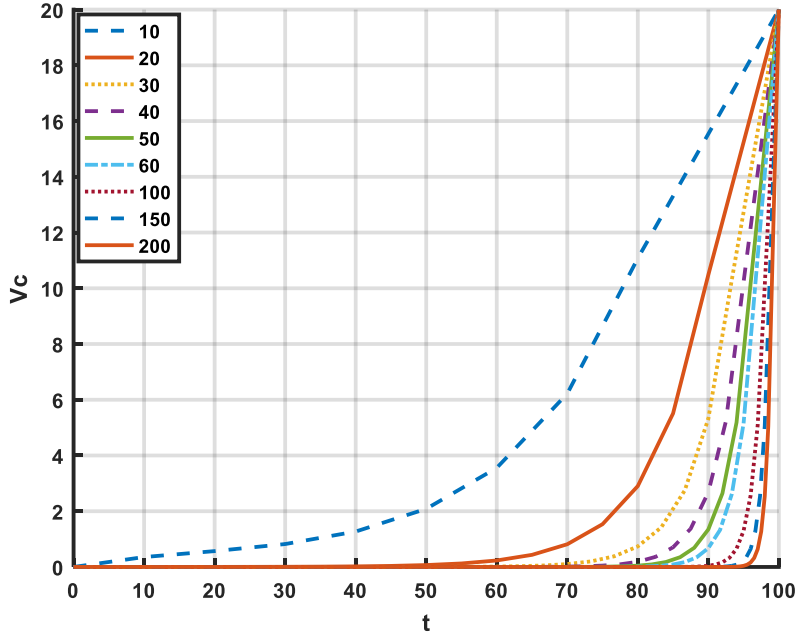


çok küçük değerlerde iken birdenbire artmaya başladığı ve eğim açısının 90 dereceye yakın bir şekilde yükseldiği görülmektedir.



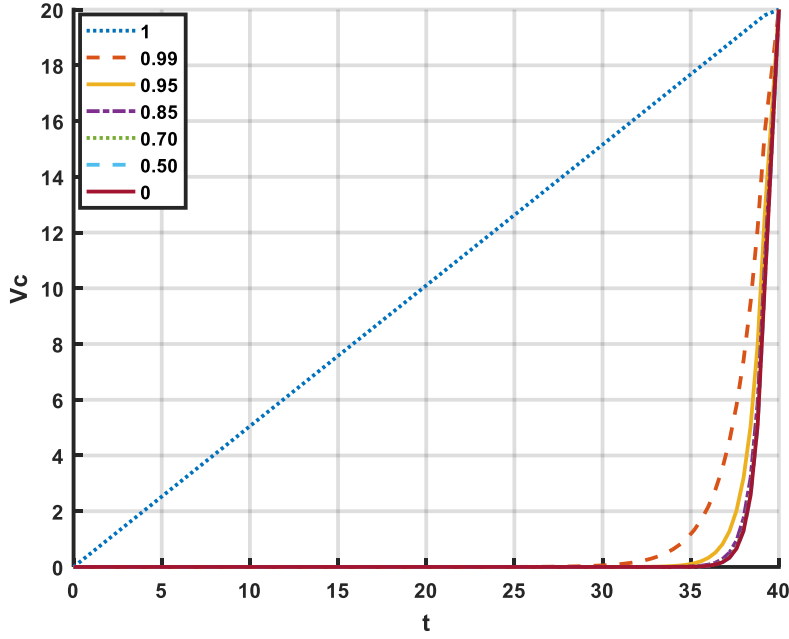
Şekil 4.5.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \Omega$ ,  $\alpha=0,90$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken UKM kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

Şekil 4.5'te kullanılan  $\alpha$  (kesir mertebesi) değeri azaltılarak,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \text{ Ohm}$ ,  $\alpha=0,50$  için; farklı  $n$  değerleri için  $t$ 'ye bağlı denklem çözüldüğünde kondansatör gerilimin zamana bağlı değişimi Şekil 4.6'da görülebilir. Şekil 4.6'da yer alan grafik değerlendirildiğinde  $\alpha=0,50$  değeri için  $n$  değerleri artırıldığında kondansatör geriliminin zamana göre değişiminin Şekil 4.5'te yer alan grafik ile benzer sonuçlar verdiği görülmüştür.  $n$  değerleri artırıldığında eğrinin şeklinin parabol olmaktan saptığı, eğrinin şeklinin iletim bölgesinde çalışan bir diyotun karakteristiğine benzediği, kondansatörün geriliminin en sağdaki eğriye yakınsadığı, gerilimin çok küçük değerlerde iken birdenbire artmaya başladığı ve eğim açısının 90 dereceye yakın bir şekilde yükseldiği görülmektedir.



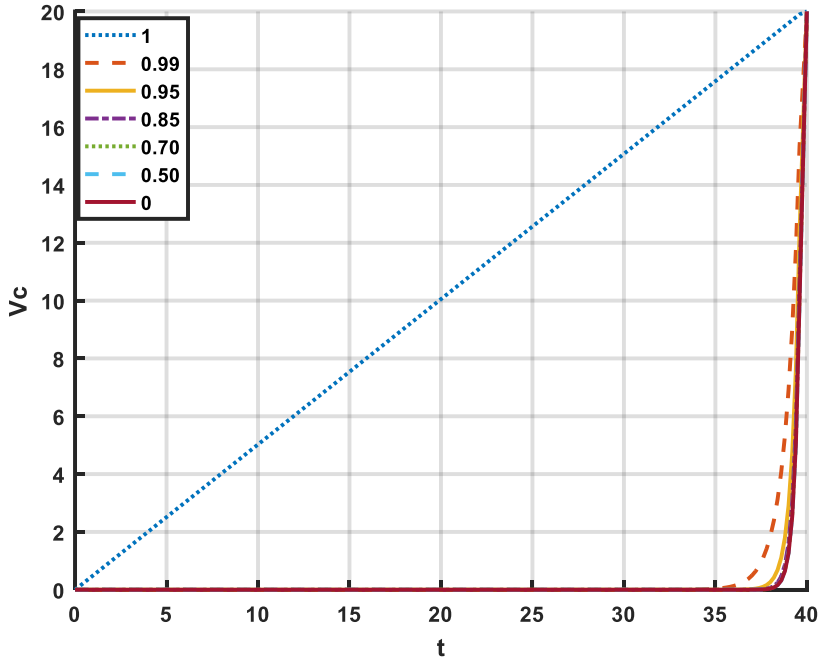
Şekil 4.6.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \Omega$ ,  $\alpha =0,50$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

$C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=40 \Omega$  için;  $n=100$  değerlerinde farklı  $\alpha$  değerleri için  $t$ 'ye bağlı denklem çözüldüğünde Şekil 4.7'de yer alan grafik elde edilir. Bu grafik değerlendirildiğinde  $\alpha=1$  değeri için grafik ilham alınan makalede elde edilen doğruya yakınsamaktadır.  $\alpha$  değeri azaldıkça eğrinin şekli doğru olmaktan saptmakta ve iletim bölgesinde çalışan bir diyodun karakteristiğine benzemektedir. Gerilimin çok küçük değerlerde iken birdenbire artmaya başladığı ve eğim açısının 90 dereceye yakın bir şekilde yükseldiği görülmektedir.



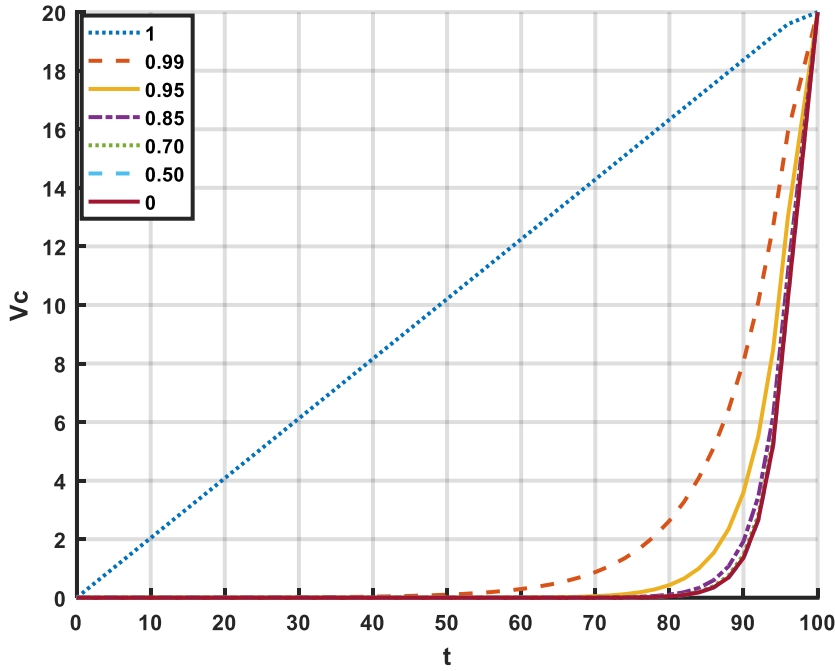
Şekil 4.7.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=40 \Omega$ ,  $n=100$  ve  $\tau = 40 \text{ sn}$  için ve  $\alpha$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

$C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=40 \Omega$  için;  $n=200$  değerlerinde farklı  $\alpha$  değerleri için  $t$ 'ye bağlı denklem çözüldüğünde Şekil 4.8'de yer alan grafik elde edilir. Şekil 4.7'de yer alan grafikte seçilen  $n$  değeri  $n=100$  iken, Şekil 4.8'de artırılarak  $n=200$  seçilmiş ve kondansatör gerilimin zamana bağlı değişimi bu grafikte incelenmiştir.  $n$  daha büyük seçildiğinde  $\alpha$  değeri azaldıkça eğrinin şeklinin doğru olmaktan saptığı ve gerilimin çok küçük değerlerde iken çok daha hızlı bir şekilde artmaya başladığı ve eğim açısının neredeyse 90 derece olacak şekilde yükseldiği görülmektedir.



Şekil 4.8.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=40 \Omega$ ,  $n=200$  ve  $\tau = 40 \text{ sn}$  için ve  $\alpha$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

$C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \Omega$  için;  $n=50$  değerlerinde farklı  $\alpha$  değerleri için t'ye bağlı denklem çözüldüğünde Şekil 4.9'da yer alan grafik elde edilir. Şekil 4.8'de yer alan grafikte seçilen  $n$  adım sayısı değeri azaltılarak ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için kondansatör gerilimin zamana bağlı değişimi bu grafikte incelenmiştir. Farklı  $\alpha$  (kesir mertebesi) değerleri için kondansatör gerilimin zamana bağlı değişimi incelendiğinde  $\alpha$  değeri azaldıkça çözümden elde edilen gerilimin aniden ve yüksek eğimle arttığı ve eğrinin şeklinin doğru olmaktan saptığı ve iletim bölgesinde çalışan bir diyotun karakteristiğine benzediği görülmektedir.

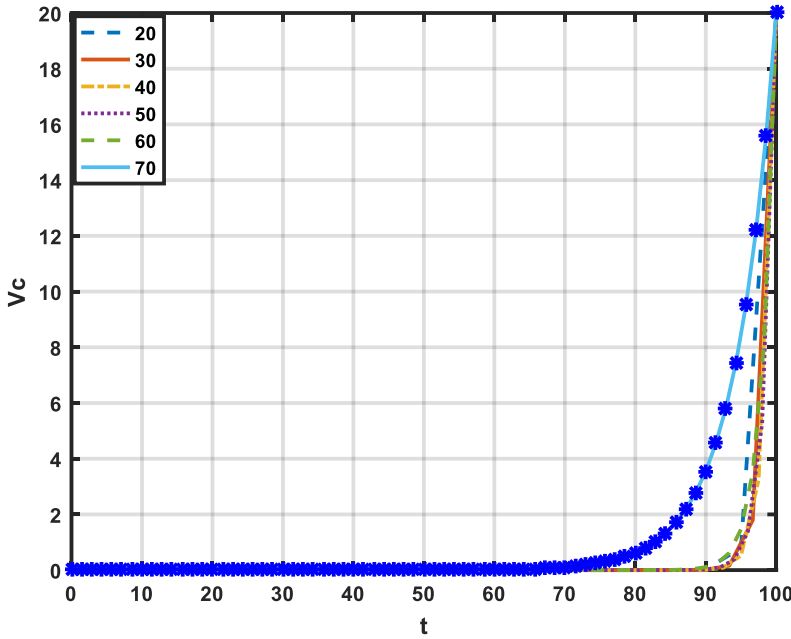


Şekil 4.9.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R=100 \ \Omega$ ,  $n =50$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $\alpha$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

## 4.2. Yükleme Devresinin $R-C_\alpha//R_p$ 'dan Oluşma Durumu İçin Optimum Çözümlerin Simülasyonu

Yükleme devresinin  $R-C_\alpha//R_p$ 'dan oluşması durumunda maksimum faydalanma faktörünün gerçekleştiği değere karşılık gelen Denklem (3.85) ifadesinin EK5'te verilen Matlab kodu ile  $R \cdot R_p^{-1}=100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $\alpha=1$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  yüklenme süresi için, adım sayısı,  $n$ , değerleri parametre alınarak simüle edilmiş ve  $V_{C_\alpha}$ 'nin zamana göre değişimi Şekil 4.10'da gösterilmiştir.  $\alpha=1$  alındığında simülasyon sonucu bulunan çözüm ilham alınan makaledeki  $R-C//R_p$  yükleme devresi için bulunan analitik çözümün eğrisini vermelidir. Bundan dolayı yazılan Matlab kodunu test etmek amacıyla ilk olarak kesir mertebesi  $\alpha=1$  alınarak kondansatör geriliminin zamana göre değişimi incelenmiştir. İlham alınan makaledeki  $R-C//R_p$  devresinin çözümü Şekil 4.10'da mavi renkli '\*' işareti kullanılarak çizilmiştir. Şekil 4.10'da görülen  $R-C_\alpha//R_p$  devresi için elde edilen simülasyon sonuçları ilham alınan makaledeki  $R-C//R_p$  devresinin çözümü ile karşılaştırıldığında  $n$  değeri arttıkça  $R-C_\alpha//R_p$  devresi için bulunan eğrilerin şekli  $R-C//R_p$  devresi için iletim bölgesinde çalışan bir diyotun karakteristiğini andıran ilham alınan makaledeki eğriye yakınsamaktadır  $n=70$  için sayısal çözüm ile ilham alınan

makaledeki çözümün üst üste bindiği görülebilir. Böylece yazılan Matlab kodunun doğru çalıştığı gösterilmiştir.

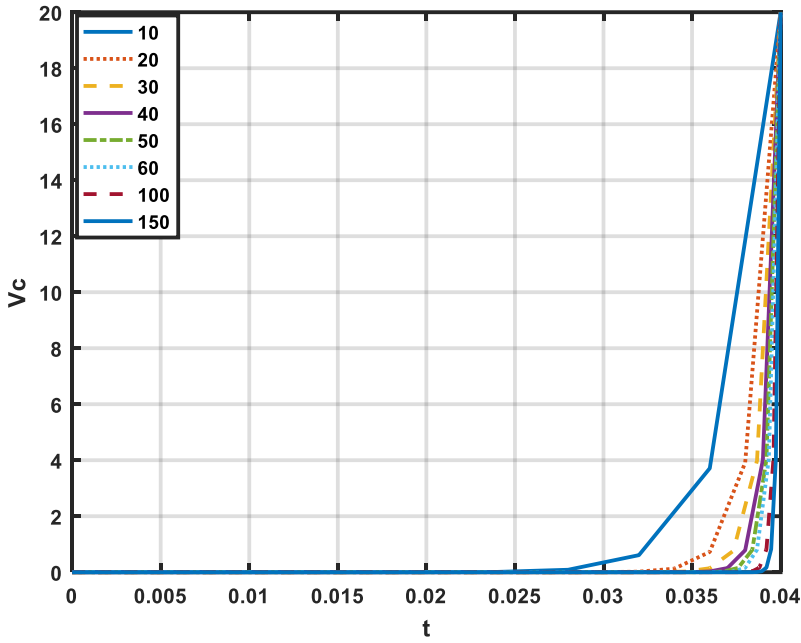


Şekil 4.10.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R.R_p^{-1}=100$ ,  $\alpha =1$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

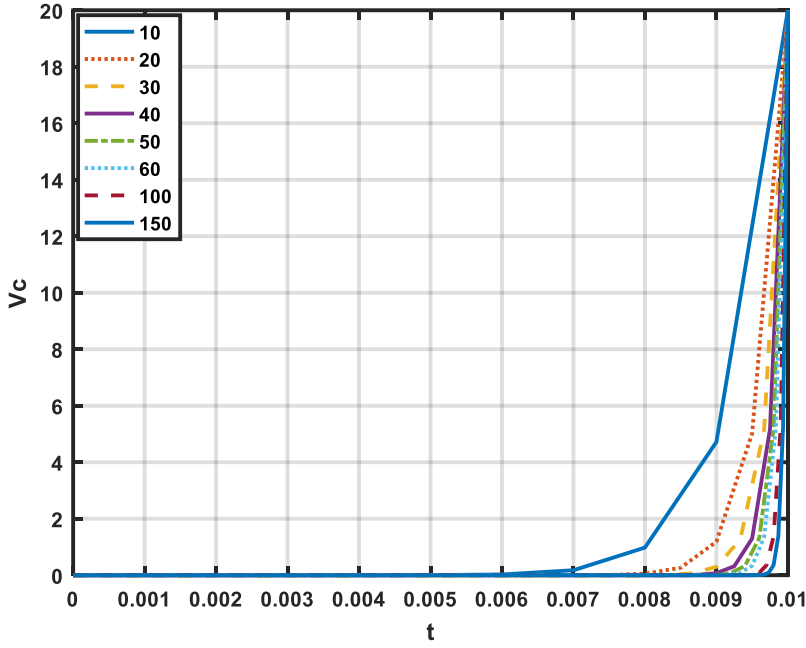
Kodun doğru çalıştığının tespit edilmesinin ardından farklı  $\alpha$  (kesir mertebesi) ve  $n$  (adım sayısı) değerleri için simülasyonlar yapılmıştır.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R.R_p^{-1}=0,04$ ,  $\alpha =0,95$  ve  $\tau = 0,04 \text{ sn}$  için  $V_{C_\alpha}$ 'nın farklı  $n$  değerleri için değişimi Şekil 4.11'de gösterilmiştir. Burada  $R.R_p^{-1}=0,04$  değeri seçilirken ilham alınan makaledeki değer referans alınmıştır. Yüklenme devresinin  $R-C_\alpha//R_p$ 'dan oluşma durumunda Denklem (3.85) ifadesinin farklı  $n$  değerleri için elde edilen sonuçların farklılık gösterdiği gözlemlenmiştir. UKM kondansatör geriliminin zamana bağlı değişimi incelendiğinde  $n$  değeri arttıkça grafiğin en sağdaki eğriye yakınsadığı gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde adım sayısı küçük seçildiğinde grafiklerde kırılmaların meydana geldiği görülmüştür.

$C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R.R_p^{-1}=0,01$ ,  $\alpha =0,99$ ,  $\tau = 0,01 \text{ sn}$  için  $V_{C_\alpha}$ 'nın farklı  $n$  değerleri için çizilmiş zamana bağlı değişimi Şekil 4.12'de gösterilmiştir. Burada  $R.R_p^{-1}=0,01$  değeri seçilirken yine ilham alınan makaledeki değer referans alınmıştır. Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de sırasıyla  $n$  parametre iken ve iki farklı  $R.R_p^{-1}$  değeri için  $V_{C_\alpha}$ 'nın zamana göre değişimi görülmektedir. Her iki durumda da eğrinin şekli iletim bölgesinde çalışan bir diyotun

karakteristiğine benzemektedir ve  $n$  (adım sayısı) değerleri artırıldığında eğrinin eşik zamanı diye isimlendirilebilecek hızlıca tırmanışa geçtiği noktası sağa doğru kaymaktadır. Gerilim grafiği küçük  $n$  değerlerinde parçalı doğrusal bir fonksiyona benziyor iken  $n$  değerleri artırıldığında pürüzsüz bir eğriye benzemeye başlamaktadır. Tüm  $n$  değerleri için, gerilim eğrisinin genel eğilimi gerilimin çok küçük değerlerde iken belirli bir eşiğin civarına geldiğinde birdenbire artmaya başlamasıdır. Şekil 4.11'den ayrıca gerilimin eğim açısının giderek yükselerek 90 dereceye yaklaştığı görülmektedir.



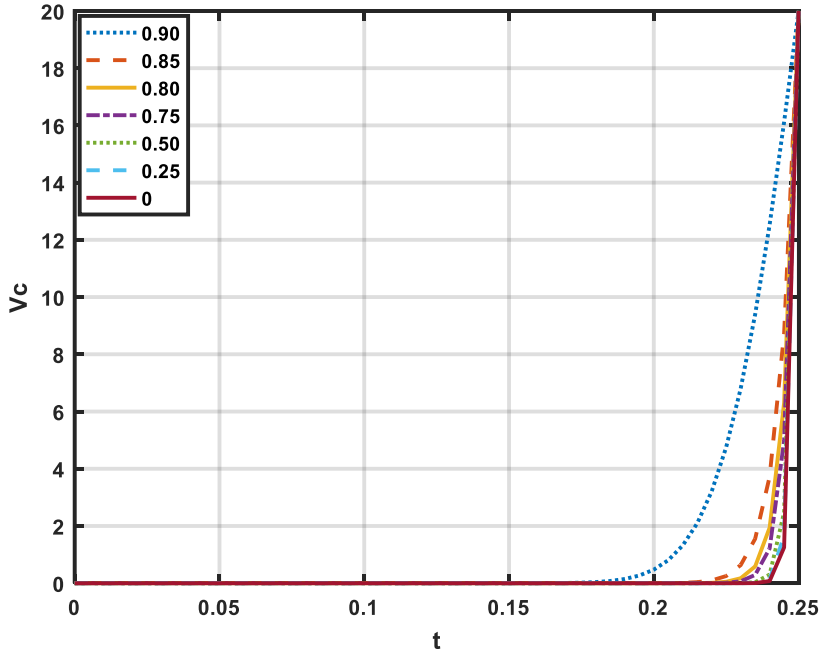
Şekil 4.11.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $\alpha=0,95$ ,  $\tau = 0,01 \text{ sn}$  ve  $R_p^{-1}=0,04$  değeri için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi



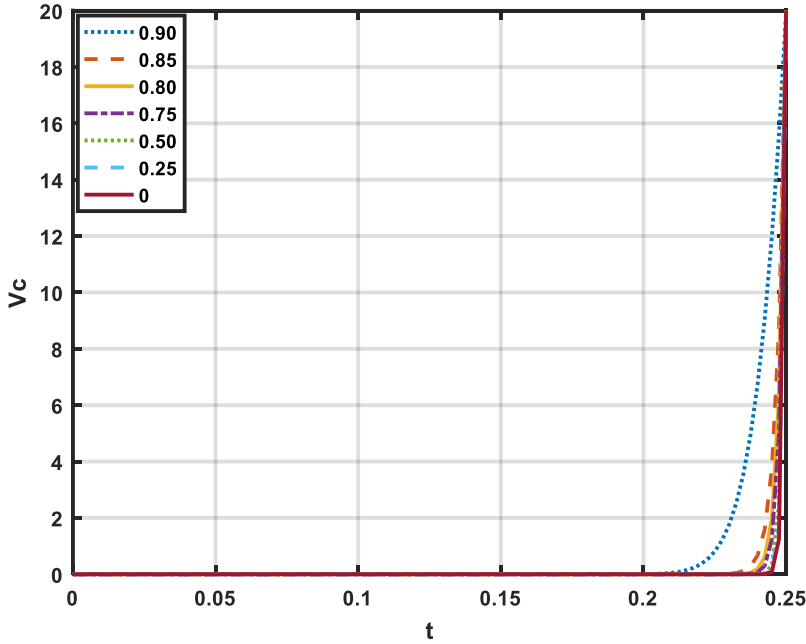
Şekil 4.12.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $\alpha=0,99$ ,  $\tau = 0,01 \text{ sn}$  ve  $R.R_p^{-1}=0,01$  değeri için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

$C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R.R_p^{-1}=0,25$ ,  $\tau = 0,25 \text{ sn}$ ,  $n=50$  ve farklı  $\alpha$  değerleri için  $V_{C_\alpha}$ 'nın zaman bağlı değişimi Şekil 4.13'te gösterilmiştir. Burada  $R.R_p^{-1}=0,01$  değeri seçilirken yine ilham alınan makaledeki değer referans alınmıştır.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $R.R_p^{-1}=0,25$ ,  $\tau = 0,25 \text{ sn}$ ,  $n=100$  ve farklı  $\alpha$  değerleri için  $V_{C_\alpha}$ 'nın zaman bağlı değişimi Şekil 4.14'te gösterilmiştir. Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 incelendiğinde kondansatör gerilimin zamana bağlı değişimi,  $\alpha=0$  ve  $\alpha=0,25$  değerleri hariç, iletim bölgesinde çalışan bir diyotun karakteristiğini andıran pürüzsüz bir eğriye benzemektedir.  $\alpha$  değeri azaldıkça UKM kondansatörün gerilimin artış hızının arttığı görülebilir. Tüm eğrilerde gerilimlerin çok küçük değerlerde iken aniden ve yüksek eğimle arttığı görülmektedir.  $\alpha=0$  ve  $\alpha=0,25$  değerleri için ise grafiğin parçalı doğrusal bir fonksiyona dönüştüğü görülmektedir. Bunun nedeni uygun seçilmeyen zaman adımı olabilir.





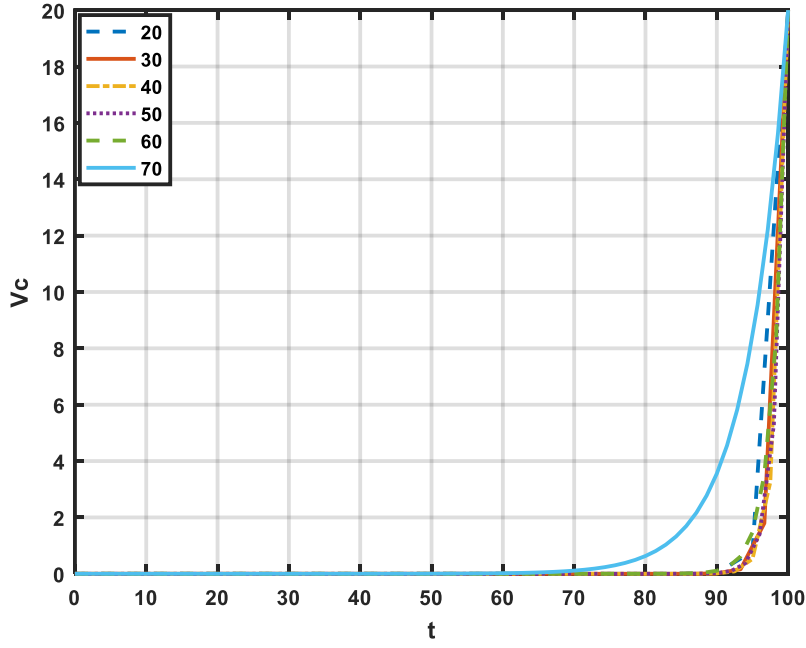
Şekil 4.13.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $n=50$ ,  $\tau = 0,25 \text{ sn}$  ve  $R_p^{-1}=0,25$  değerleri için ve  $\alpha$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi



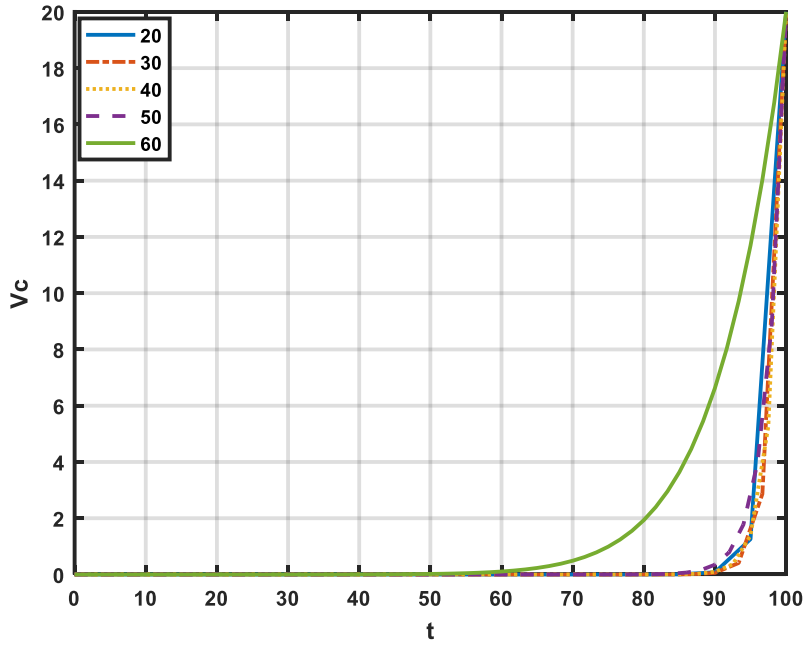
Şekil 4.14.  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $n=100$ ,  $\tau = 0,25 \text{ sn}$  ve  $R_p^{-1}=0,25$  değeri için ve  $\alpha$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

Çalışmada yüklenme devresinin  $R-C_{\alpha}/R_p$ 'dan oluşması durumunda maksimum faydalanma faktörünün gerçekleştiği değere karşılık gelen Denklem (3.85) ifadesinin EK5'te verilen Matlab kodu ile simule edilmesi aşamasında ilk yüklenme devresinde karşılaşılmayan farklı bir durum ile karşılaşılmıştır. Seçilen her  $R/R_p$  değeri için  $V_{C_{\alpha}}$ 'nın umulduğu gibi monoton artış gösteren bir eğriye yakınsamadığı gözlemlenmiştir.  $\alpha$  değerinin 1'den küçük olduğu durumlarda referans alınan makaledeki  $R \cdot R_p^{-1}$  ve  $\tau$  değerlerinin seçilmesi durumunda ilham alınan makaledeki verilen şekillere benzeyen eğriler elde edilmiştir. İlham alınan çalışmada yer alan  $R/R_p$  değerlerinden farklı değerler seçildiğinde ise  $n > 70$  için devrelerin farklı davranışlar sergilediği ve UKM kondansatör gerilimi  $V_{C_{\alpha}}$ 'nın monoton artmak yerine osilasyon yaptığı ve kondansatör gerilimi  $V_{C_{\alpha}}$ 'nın megavolt seviyelerine çıktığı gözlenmiştir. Yapılan bu gözlem sonuçlarının yeni yapılacak bir çalışmaya konu olabileceği ve farklı tez ve makale konuları için kullanılabilirliği düşünülmektedir.

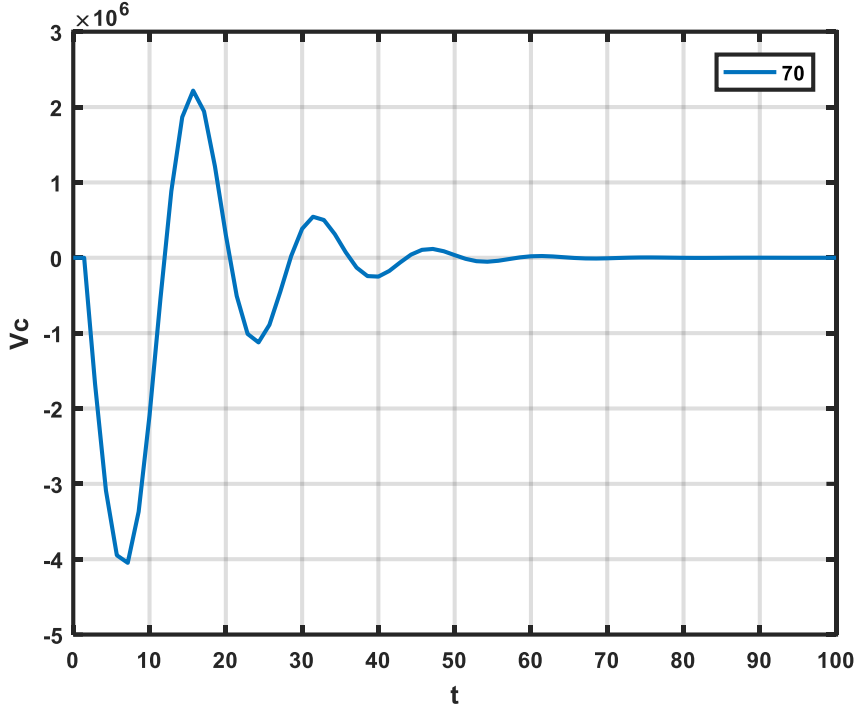
$C_{\alpha} = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R \cdot R_p^{-1}=100$ ,  $\tau = 100 \text{ sn}$ ,  $\alpha=1$  ve farklı  $n$  değerleri için  $V_{C_{\alpha}}$ 'nın zaman bağlı değişimi Şekil 4.15.a'da gösterilmiştir.  $C_{\alpha} = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R \cdot R_p^{-1} = 100$ ,  $\tau = 100 \text{ sn}$   $\alpha=0,95$  için farklı  $n$  değerleri için  $V_{C_{\alpha}}$ 'nın zaman bağlı değişimi Şekil 4.15.b'de gösterilmiştir. Şekil 4.15.a ve Şekil 4.15.b'de görüldüğü gibi  $C_{\alpha} = 1 \text{ F}/sn^{1-\alpha}$ ,  $R \cdot R_p^{-1} = 100$ ,  $\tau = 100 \text{ sn}$ ,  $\alpha=1$  ve  $\alpha=0,95$  değerleri için  $n$  değerleri  $n < 70$  olacak şekilde seçildiğinde elde edilen her iki eğri ilham alınan makaledeki eğrilerin şekillerine benzerdir. Fakat  $n=70$  değeri için simülasyon yapıldığında UKM kondansatör geriliminin monoton bir şekilde artmadığı ve osilasyon yaptığı Şekil 4.16'da gözlemlenmiştir. Devrede endüktör bulunmadığı için UKM kondansatör geriliminin negatife gitmesi mümkün değildir. Ayrıca bu osilasyonun genliği Megavoltlar mertebesindedir. Bu istenmeyen osilasyonun nedeni zaman adımının yanlış seçilmesi olabilir. Maalesef araştırdığımız kadarıyla literatürde böyle bir problem için zaman adımının nasıl seçilmesi gerektiğine dair bir kriter bulunmamaktadır.



Şekil 4.15.a.  $\alpha = 1$ ,  $R_p R_p^{-1} = 100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $\tau = 100 \text{ sn}$  için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi.

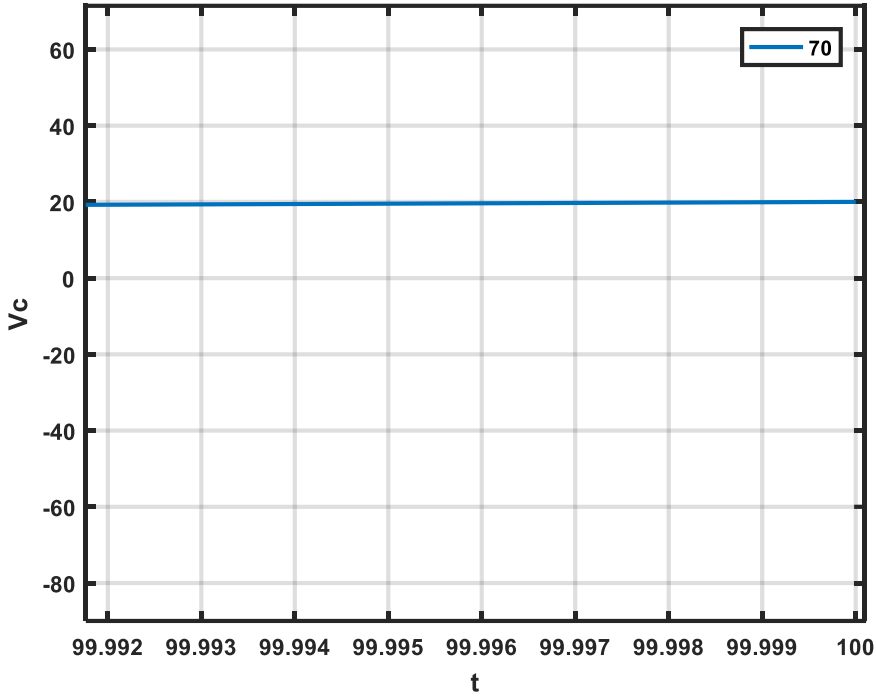


Şekil 4.15.b.  $\alpha = 0,95$ ,  $R_p R_p^{-1} = 100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $\tau = 100 \text{ sn}$ , için ve  $n$  parametre iken kondansatör geriliminin zamana göre değişimi



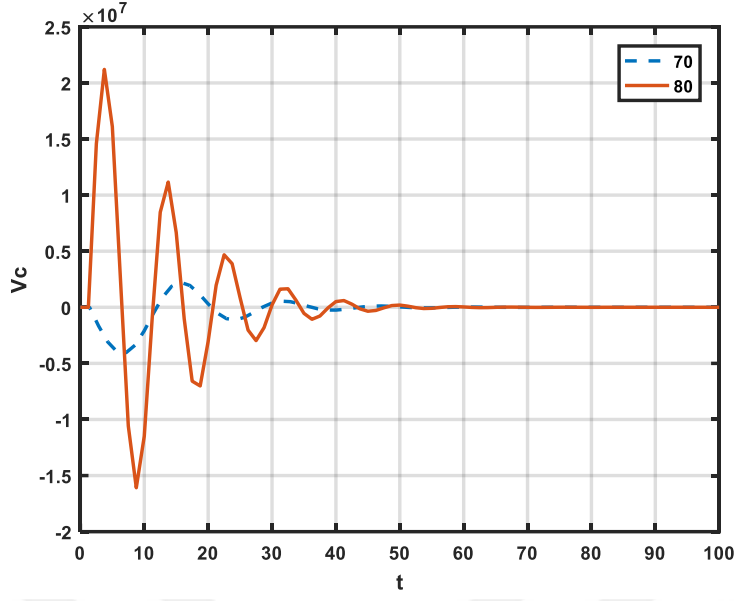
Şekil 4.16.  $\alpha = 0,95$ ,  $R \cdot R_p^{-1} = 100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $n=70$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için kondansatör geriliminin zamana göre değişimi

Şekil 4.16'da yer alan gerilim eğrisi büyütüldüğünde Şekil 4.17'de yer alan grafik elde edilmiş olup, UKM kondansatör gerilimi osilasyon yapsa bile, gerilimin varyasyonel problem için verilen sağ sınır değerine  $V_{C_\alpha}(\tau)$  değerine yakınsadığı görülmüştür.

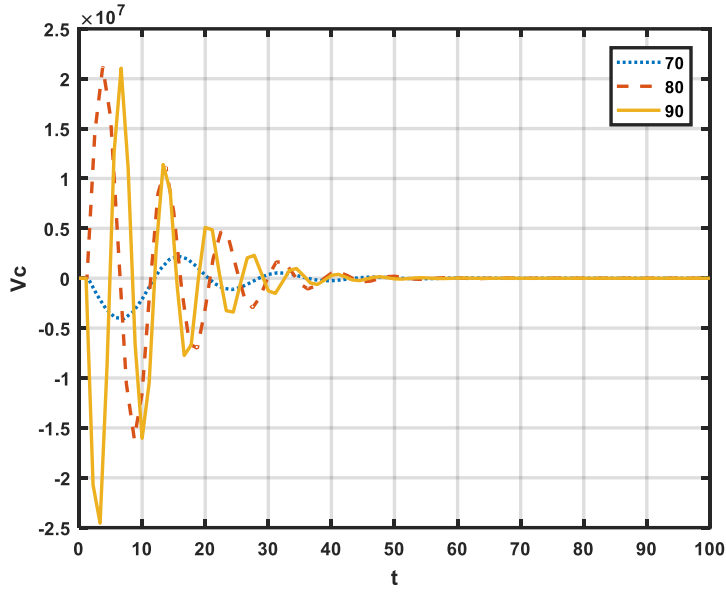


Şekil 4.17.  $\alpha = 0,95$ ,  $R_p^{-1} = 100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $n=70$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için büyütülerek incelenen kondansatör geriliminin sağ sınırdaki değeri

$R_p^{-1} = 100$ ,  $\alpha = 0,95$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $\tau = 100 \text{ sn}$  ve  $n > 70$  için yapılan simülasyon sonuçları Şekil 4.18 ve Şekil 4.19'da görülebilir. Yine bu grafiklerde kondansatör geriliminin monoton bir şekilde artmadığı ve osilasyon yaptığı görülmektedir. Bu osilasyon bir kondansatörden beklenmeyen bir davranıştır. Kondansatör gerilimi monoton bir artış göstermelidir. Bu ve benzeri varyasyonel problemlerde zaman adımının ( $h$ )  $\alpha$ 'ya bağlı olarak nasıl seçileceği ayrı bir araştırma konusu olabilir.



Şekil 4.18.  $\alpha = 0,95$ ,  $R.R_p^{-1} = 100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $n=70-80$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için kondansatör geriliminin zamana göre değişimi



Şekil 4.19.  $\alpha = 0,95$ ,  $R.R_p^{-1} = 100$ ,  $C_\alpha = 1 \text{ F/sn}^{1-\alpha}$ ,  $n=70-80-90$  ve  $\tau = 100 \text{ sn}$  için kondansatör geriliminin zamana göre değişim

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma ile fonksiyonelin zayıf ekstremumu kullanılarak standart kondansatör yerine uyumlu kesirli mertebeye türev ile modellenmiş kondansatörlü darbe üretici yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşması ve  $R-C_\alpha//R_p$ 'dan oluşma durumlarında darbe üreteçlerinin maksimum enerjisini elde etmeyi amaçlayan varyasyonel problem çözülmüştür.

İncelenen devre topolojilerinin her birisi için; UKM kondansatörün gerilimine, UKM kondansatörün geriliminin türevine ve yüklenme devrelerinin parametrelerine bağlı olarak oluşturulan devrenin çektiği enerjinin fonksiyoneli Euler-Langrange denklemi kullanılarak optimizasyon problemine dönüştürülmüştür ve bulunan denklemler analitik olarak çözülmeye çalışılmış fakat çözülememiştir. WolframAlpha gibi sembolik olarak matematiksel hesap yapan programlarla da çözüm denenmiş ama bu programlar kullanılarak bu problemler analitik olarak çözülememiştir. Bundan dolayı Sonlu Farklar sayısal yöntemi kullanılarak bu varyasyonel problemlerin çözümüne ulaşılabilmektedir. Sayısal yöntem ile çözümlerin yapılabilmesi için gerekli Matlab kodları yazılmış ve bu kodları kullanarak her bir yüklenme devresi için simülasyonlar yapılmıştır. Simülasyonlardan elde edilen UKM kondansatör gerilimleri incelenmiştir. Farklı  $n$  (adım sayısı) ve  $\alpha$  (kesir mertebesi) değerleri için devrelerdeki UKM kondansatör gerilimleri simule edilmiştir. Yüklenme devresinin seri bağlı  $R$  ve  $C_\alpha$ 'dan oluşması durumunda simülasyonda ilk olarak UKM kondansatör gerilimi farklı  $n$  değerlerinde  $\alpha=1$  için simule edilmiş ve grafiklerin ilham alınan çalışmadaki çözümler ile yakınsadığı gözlemlenmiştir. Kesir mertebesi değiştirilerek farklı adım sayısı değerlerinde UKM kondansatör gerilimi simule edilmiş ve  $n$  değerleri artırıldığında grafiklerin daha iyi yakınsadığı gözlemlenmiştir. Çalışmanın devamında ise, yapılan simülasyonlarla,  $n$  sabit tutularak ve farklı  $\alpha$  değerlerinde UKM kondansatör geriliminin aldığı şekil incelenmiştir.

Çalışmada yüklenme devresinin  $R-C_\alpha//R_p$ 'dan oluşma durumunda, kesir mertebesi olan  $\alpha$  değerinin 1'den küçük olduğu durumlarda, ilham alınan makaledeki aynı  $R.R_p^{-1}$  değerleri seçildiğinde ve buna bağlı olarak belirlenen  $\tau$  değerinde elde edilen sonuçların yakınsadığı görülmüştür. Farklı  $R.R_p^{-1}$  değerleri seçildiğinde ise  $\alpha$  değerinin 1'den küçük olduğu durumlarda  $n > 70$  değeri için kondansatör geriliminin farklı bir davranış sergilediği yani  $V_{C_\alpha}(t)$  kondansatör geriliminin monoton artmak yerine osilasyon yaptığı gözlemlenmiştir. Bu osilasyonun nedeninin ve bu problemler için zaman adımının nasıl uygun seçilebileceğinin yeni yapılacak tez ve makale çalışmalarında konu olabileceği sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada kullanılan uyumlu kesirli mertbe türev yerine farklı kesirli mertbe türev yaklaşımları kullanılarak da bu çalışma tekrarlanabilir ve bu da farklı bir araştırma konusu olabilir. Buna ek olarak, analitik olarak çözülemeyen ve sayısal yöntemlerle çözümüne devam edilen varyasyonel problemlerin seriye açılarak çözümünün bulunmasının da matematik bölümünde yapılan bir tezin veya makalenin konusu olabileceği sonucuna varılmıştır.





## KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics* ,279,57-66
- Alisoy, H.Z., Alisoy, G.T., Keleş, C., Deniz, F.N., Işık, İ. ve İçel, Y. Darbe generatörünün maksimum enerjisi hakkında varyasyonel problem. İnönü Üniversitesi Malatya
- Atangana, A. ve Secer, A. (2013). A note on fractional order derivatives and table of fractional derivatives of some special functions. *Abs.Appl.Analysis*, vol.
- Badur, S.(2018). Uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin nonlinear çözümleri (Yüksek Lisans Tezi), *Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Batman*
- David, S.A., Linares, J.L. ve Pallone, E.M.J.A (2011). Fractional order calculus: historical apologia,basic concepts and some application. *Rev.Bras.Ensino Fis*,vol.33, no.4,
- Weisstein, Eric W. Euler-Lagrange differential equation. *MathWorld*.
- Freeborn, T.J., Elwakil, A.S. ve Allagui A (2018). Supercapacitor fractional-order model discharging from polynomial time-varying current . *IEEE*,
- Gomez ve Aguilar, J. F. (2016).Behavior characteristics of a cap-resistor,memcapacitor,and a memristor from the response obtained of RC and RL electrical circuits described by fractional differential equations. *Turk J Elec Eng & Comp Sci*,1421-1433,
- Hazewinkel, Michiel. (2001). Lagrange equations (in mechanics). *Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers*,
- Karagöz, İ. (2001). Sayısal analiz ve mühendislik uygulamaları
- Karris, S.T.(2004). Numerical analysis using matlab and spreadsheets, *Orchard Publications*.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. A new definition of fractional derivative. *J.Comput.Appl.Math*.2014,264,65-70.
- Kopka, R. (2017). Estimation of supercapacitor energy storage based on fractional differential equation. *Nanoscale research letters*,12(1),636.

- Lewandowski, M, Orzyłowski, M. (2017). Fractional-order models: The case study of the supercapacitor capacitance measurement. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, 65(4), 449-457
- Lakshmi R, Muthuselvi, M (2013). Numerical solution for boundary value problem using finite difference method. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, vol.2, 5305-5313
- Martinez, L., Rosales, J.J., Carreno, C.A. ve Lozano J.M (2018). Electrical circuits described by fractional conformable derivative. *International Journal of Circuit Theory and Application*, 46(5), 1091-1100
- Mohammed, A.A.H.A., Kandemir, K. ve Mutlu, R. (2020). Analysis of parallel resonance circuit consisting of a capacitor modelled using conformal fractional order derivative using simulink. *European Journal of Engineering and Applied Sciences*, 3(1), 13-18.
- Osler, T.J. (1970). Leibniz rule for fractional derivatives generalized and an application to infinite series. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.18, 658-674,
- Palaz, U. ve Mutlu, R. (2021). Analysis of a capacitor modelled with conformable fractional derivative under dc and sinusoidal signals. *Celal Bayar University Journal of Science*, vol.17, Issue 2, 193-198.
- Palaz, U. ve Mutlu, R. (2021). Two capacitor problem with a LTI capacitor and a capacitor modelled using conformal fractional order derivative. *European Journal of Engineering and Applied Sciences*, 4(1), 8-13.
- Piotrowska, E. (2019). Analysis of fractional electrical circuit with sinusoidal input signal using Caputo and conformable derivative definition. *Poznan University of Technology Academic Journals, Electrical Engineering*
- Piotrowska, E. (2018). Analysis the conformable fractional derivative and Caputo definitions in the action of an electric circuit containing a supercapacitor. In *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments. International Society for Optics and Photonics*.
- Tariboon, J. ve Ntouyas, S.K. (2016). Oscillation of impulsive conformable fractional differential equation. *Open Mathematics*, 14(1), 497-508.
- Zhao, D. ve Luo, M. (2017). General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, 53(3), 903-917.

## EKLER

### EK 1. Euler-Lagrange Denklemi

Euler-Lagrange diferansiyel denklemi, varyasyon hesabının temel denklemidir. Varyasyon hesabı, belirli bir fonksiyonun sabit bir değere sahip olduğu (fiziksel problemlerde genellikle minimum veya maksimum olan) yolu, eğriyi, yüzeyi bulmaya çalışır. Euler-Lagrange denklemi 1750'lerde İsviçreli matematikçi Leonhard Euler ve Fransız matematikçi Joseph-Louis Lagrange tarafından geliştirilmiştir (Hazewinkel, 2001; Weisstein). Euler tarafından 1766'da ortaya atılan bir terim olan varyasyon hesabına ulaşılmıştır (Hazewinkel, 2001).

Euler-Lagrange denklemi klasik mekanikte, Newton'un hareket yasalarına eşdeğerdir ancak herhangi bir genel koordinat sisteminde aynı formu alması ve genellemelere daha uygun olması avantajına sahiptir. Euler-Lagrange denklemi, optimizasyon problemlerini çözmek için yararlıdır.

Denklem (E1.1)'de sınır koşulları verilen bir fonksiyonel yer almaktadır.

$$J = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) \cdot dx \quad (E1.1)$$

Bu integralin ekstremum değerlerini bulmak için integralin varyasyonu alınır ve Hamilton prensibi uygulanır. Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{dF}{df} - \frac{d}{dx} \left( \frac{dF}{df'} \right) = 0 \quad (E1.2)$$

olarak bulunur.

## EK 2. Sınır Değer Problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemi Kullanılarak Nümerik Çözümü

Geçmiş çok eski zamanlara dayanan nümerik algoritmalar ile ilgili ilk çalışmalar eski Mısırdan başlamıştır. Matematiksel modellemenin fiziksel gerçekliğe uygulanmasıyla Newton ve Leibniz öncülüğünde nümerik hesaplamaların büyük bir kısmı keşfedilmiştir. Matematiksel modeller açık bir şekilde çözülmediğinde sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur (Karagöz, 2001; Karris, 2004).

Bu çalışmada elde edilen Euler-Lagrange denklemlerinin açık bir şekilde çözülmediği ve sayısal yöntemlere ihtiyaç duyulduğu anlaşılmıştır. Sınır değerleri verilen bu problemlerin çözümünde sonlu farklar yönteminden yararlanılarak nümerik çözüm elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu çalışma için gerekli sonlu farklar yöntemi Şekil E2.1 kullanılarak açıklanacaktır. Bu şekilde  $t$  bağımsız değişken,  $y$  bağımlı değişkendir. Yani  $y$  değişkeni  $t$  değişkeninin fonksiyonudur:  $y=f(t)$  olarak kabul edilmiştir.

$t$  değişkeni sonlu farklar yöntemi uygulandığında  $t(1), t(2), \dots, t(i), \dots, t(N)$  gibi değerler almaktadır.  $N+1$  problem çözülürken kullanılan toplam nokta sayısıdır.  $i$  jenerik  $t$  değişkeni indeksidir.  $i$  0'dan  $N+1$ 'e kadar değerler almaktadır.  $t$  bağımsız değişken olduğundan problem çözülmesi için gereken değerleri bilinmektedir.  $i$ 'inci adımdaki  $t(i)$  değeri

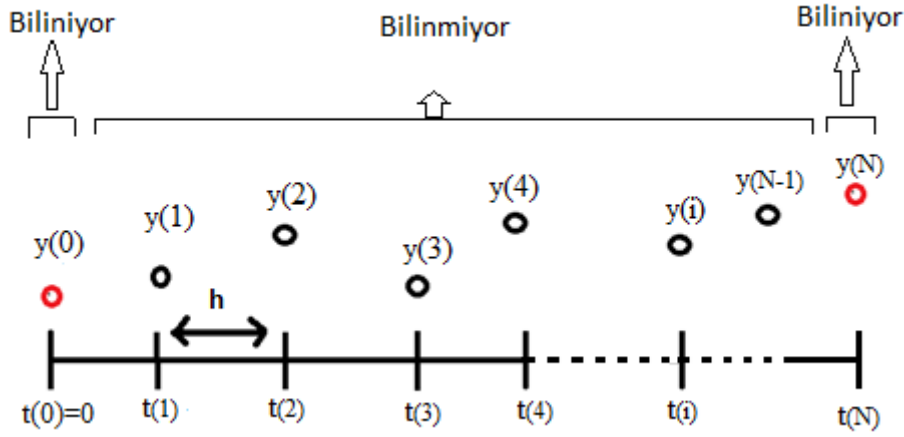
$$t(i)=t(0)+h(i-1) \quad (E2.1)$$

olarak hesaplanır  $h$  burada adım aralığıdır ve

$$h=(t(N)-t(0))/N \quad (E2.2)$$

olarak hesaplanır.

$y(0)$  ve  $y(N)$  fonksiyonun yani bağımlı değişkenin sınır değerleridir ve bilinmektedir.  $i$ 'nin 1'den  $N-1$ 'e kadar değerleri için fonksiyonun değerleri bilinmemektedir.  $y(i)$  sonlu farklar uygulandığında  $i$ 'inci adımdaki bulunacak fonksiyon değeridir.



Şekil E2.1. Sonlu Farklar Yönteminin Açıklanması

Sonlu farklar yönteminde türevler sonlu fark ifadeleri kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır. Birinci dereceden türevin Euler merkezi farklar yöntemi formülü

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{y(t+h) - y(t-h)}{2h} \quad (\text{E2.3})$$

olarak tanımlanmaktadır. İkinci dereceden türevin Euler merkezi farklar yöntemi formülü ise

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cong \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} \quad (\text{E2.4})$$

olarak tanımlanmaktadır.

Şimdi Denklem (E2.5)'te yer alan örnek problem üzerinden sonlu farklar yöntemi açıklanacaktır. Sonlu farklar yöntemi ile çözümü istenen diferansiyel denklem

$$y'' + y = 1 \quad (\text{E2.5})$$

olsun. Denklem (E2.5)  $t$  değişkenine bağlı olarak

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = 1 \quad (\text{E2.6})$$

şeklinde de yazılabilir. Bu problem  $y(0)=0$  ve  $y(1)=1$  sınır şartları için çözülsün. Denklem (E2.6)'ya Euler merkezi farklar yöntemi uygulandığında

$$\frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} + y(t) = 1 \quad (\text{E2.7})$$

elde edilir. Denklem (E2.7) düzenlendiğinde

$$y(t-h) - (2-h^2)y(t) + y(t+h) = h^2 \quad (\text{E2.8})$$

elde edilir. Bu yöntemi kullanmak için önce az sayıda nokta seçilsin. Problemdeki toplam nokta sayısı  $N=5$  olsun. Bu durumda aralık sayısı:

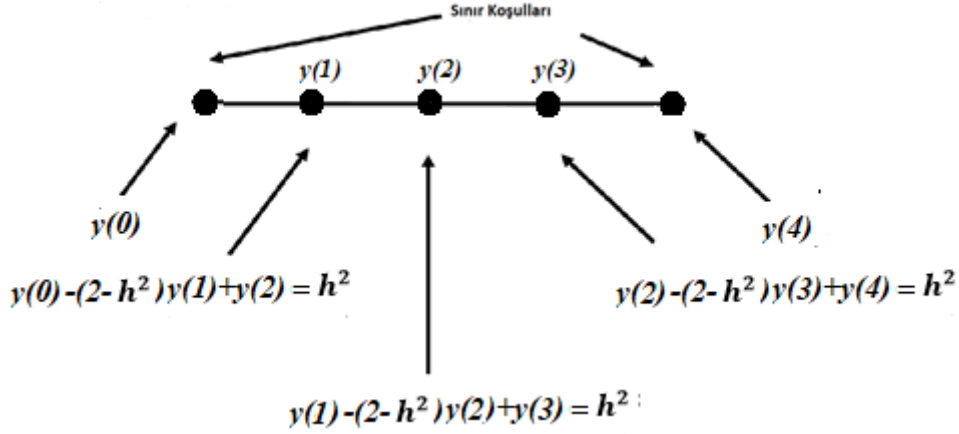
$$N - 1 = 4 \quad (\text{E2.9})$$

olarak hesaplanır. Zaman adımı

$$h = \frac{\max(t) - \min(t)}{N} = \frac{1 - 0}{5} = 0,2 \quad (\text{E2.10})$$

bulunur.

Bu durumda  $i=0$ 'dan  $4$ 'e kadar değişir. Sınır değerleri belli olduğundan  $5$  zaman değerinden sadece  $3$  tanesinin hesaplanması gerekmektedir. Elde edilen Denklem (E2.8), ortadaki üç noktanın ( $i=1,2,3$  indislerine sahip olan noktaların) bilinmeyen fonksiyon değerlerin hesaplanması için kullanılabilir. Şekil E2.2'de sınır değerleri  $y(t(0))=y(0)=0$  ve  $y(t(4))=y(4)=1$  olarak verilen örnek problem için sonlu farklar yöntemi kullanılarak istenilen değerlerin belirlenmesi için  $3$  noktada yazılan denklemler ve bu noktaların yeri gösterilmiştir.



Şekil E2.2. Sınır değeri verilen problem için sonlu farklar yöntemi kullanılarak istenilen değerlerin belirlenmesi

Elde edilen denklemler, matrisleri kullanarak Denklem (E2.11)'de verilen denklem sistemi olarak yazılmıştır. Bu denklem sistemi Lineer cebirdeki uygun herhangi bir çözüm yöntemi kullanılarak çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} -(2-h^2) & 1 & 0 \\ 1 & -(2-h^2) & 1 \\ 0 & 1 & -(2-h^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 \\ h^2 \\ h^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E2.11})$$

Bu örnek problemdekine benzer işlemler 5. Bölümde bu tezdeki darbe jeneratörlerinin varyasyonel problemlerinin çözümüne uygulanacaktır.

### EK 3. Gauss Eliminasyon Fonksiyonu İçin Matlab Kodu

```
function x=gauss (A,D,C,B)
%Input    - A, sonuç matrisinin alt köşegenidir
%         - D, sonuç matrisinin ana köşegenidir
%         - C, sonuç matrisinin süper köşegenidir
%         - B, doğrusal sistemin sabit vektörüdür
%         - Çıktı- x çözüm vektörü

M=length (B) ;
for n=2:M
    mult=A (n-1) /D (n-1)
    D (n)=D (n) -mult*C (n-1) ;
    B (n)=B (n) -mult*B (n-1) ;
end
x (M)=B (M) /D (M) ;
for n=M-1:-1:1
    x (n) = (B (n) -C (n) *x (n+1) ) /D (n) ;
end
```



#### EK 4. Yükleme Devresinin Seri Bağlı $R$ ve $C_\alpha$ 'dan Oluşma Durumunda Sonlu Farklar Yöntemi Kullanılarak Sınır Değer Probleminin Çözümü İçin Matlab Kodu

```
%Denklem  $A \cdot Vc'(t) + B \cdot Vc''(t) + C \cdot Vc(t) = 0$ 
R=100;           %direnc
C1=1;           %condansatör
tau=R*C1;       %tau hesabı
xx=0;           %başlangıç noktası
yy=tau;         %son nokta
teta=0;         %başlangıç değeri
beta=20;        %son noktadaki değer
alpha=1;        %kesir mertebesi
n=20;           %adım sayısı
h=(yy-xx)/n;    %adım aralığı
t=zeros(1,n+1); %zaman aralığı
V=zeros(1,n-1); % Üç-köşegenli matris oluşumu için boş matris
oluşturulması
a=zeros(1,n-2);
b=zeros(1,n-1);
c=zeros(1,n-2);
d=zeros(1,n-1);
t=xx+h:h:xx+h*(n-1); % t zaman aralığı
A=(4*R*C1*(1-alpha)*(t.^(1-2*alpha))).*ones(1,n-1); %gerilimin birinci
türevinin katsayısı
B=(2*R*C1*(t.^(2-2*alpha))).*ones(1,n-1); %gerilimin ikinci türevinin
katsayısı
C=((1-alpha)*(t.^(-alpha))).*ones(1,n-1); % gerilimin katsayısı
V=linspace(xx+h,yy,n);
a=zeros(1,n-1);
a(1:n-2)=2*B(2)-A(2)*h; % eş-verimli matrisin alt köşegeni
b=(2*h*h*C)-4*B; % eş etkili matrisin ana köşegeni
d=zeros(1,n-1);
d(2:n-1)=A(1,2:n-1)*h+2*B(1,2:n-1); % doğrusal sistemin sabit vektörü
c(1)=(A(1)*h-2*B(1))*teta;
c(2:n-2)=0;
```

```
c(n-1)=- (2*B(n-1)+A(n-1)*h)*beta;    % C,eş etkili matrisin üst
köşegeni (sonuç matrisi)
V=gauss(a,b,c,d);                      %çözüm fonksiyonu
tt=[xx t-h yy];
VV=[teta V beta];
out=[tt' VV'];
disp(out);
plot (tt,VV);
grid on
```

**EK 5.** Yükleme Devresinin  $R-C_\alpha//R_p$ 'dan Oluşma Durumunda Sonlu Farklar Yöntemi Kullanılarak Sınır Değer Problemi Çözümü İçin Matlab Kodu

```
%Denklem  $A*V_c'(t) + B*V_c''(t) + (C-D)*V_c(t) = 0$ 

R=10;
Rp=40;
C1=1;
tau=(R/Rp)*C1;
xx=0;
yy=tau;
teta=0;
beta=20;
alpha=0.99;
n=50;
h=(yy-xx)/n;
t=zeros(1,n+1);
V=zeros(1,n-2);
a=zeros(1,n-2);
b=zeros(1,n-1);
c=zeros(1,n-2);
d=zeros(1,n-1);
t=xx+h:h:xx+h*(n-1);
A=(2*R*C1*C1*(t.^(2-2*alpha))).*ones(1,n-1);
B=(2*R*C1*C1*(2-2*alpha)*(t.^(1-2*alpha))).*ones(1,n-1);
C=((2*R)+Rp)/Rp*C1*((1-alpha)*(t.^(-alpha))).*ones(1,n-1);
D=2*((Rp+R)/(Rp*Rp));
V=linspace(xx+h,yy,n);
a=zeros(1,n-1);
a(1:n-2)=2*A(2)-B(2)*h;
b=(2*h*h*C)-(2*h*h*D)-4*B;
d=zeros(1,n-1);
d(2:n-1)=(A(1,2:n-1)*2)+(h*B(1,2:n-1));
c(1)=(A(1)*2-h*B(1))*teta;
c(2:n-2)=0;
c(n-1)=- (2*A(n-1)+B(n-1)*h)*beta;
```

```
V=gauss(a,b,c,d);  
tt=[xx t yy];  
VV6=[teta V beta];  
out=[tt' VV6'];  
disp(out);  
plot (tt,VV6);  
grid on  
xlabel('ZAMAN');  
ylabel('Vc-Kondansatör Gerilimi');
```

