



**DÜZLEM İÇİ YÜK ETKİSİNDEKİ POLİMER
MATRİSLİ KOMPOZİT KİRİŞLERİN
ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ**

Emre YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

**Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışmanı: Doç. Dr. Bahar UYMAZ**

2021

T.C.
TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DÜZLEM İÇİ YÜK ETKİSİNDEKİ POLİMER MATRİSLİ KOMPOZİT
KİRİŞLERİN ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ**

Emre YILMAZ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Danışmanı: Doç. Dr. Bahar UYMAZ

TEKİRDAĞ - 2021

Her hakkı saklıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜZLEM İÇİ YÜK ETKİSİNDEKİ POLİMER MATRİSLİ KOMPOZİT KİRİŞLERİN ELASTO-PLASTİK GERİLME ANALİZİ

Emre YILMAZ

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışmanı: Doç. Dr. Bahar UYMAZ

Kompozit kirişler, yapılarda ve makine elemanlarında farklı yükleme şartlarında kullanılan, en az iki malzeme türünden oluşan ve çeşitli konstrüksiyonlarda üretilebilen yapısal elemanlardır. Bu çalışmada, polimer matrisli sürekli fiber takviyeli kompozit kirişin düzlem içi yük etkisinde elasto-plastik gerilme analizi 5. dereceden üniform olmayan bir polinom olarak önerilen Airy Gerilme Fonksiyonu ile elastisite probleminin çözümü sağlanmıştır. Kiriş malzemesi olarak Cr-Ni çelik fiberlerle güçlendirilmiş polietilen matrisli kompozit alınmış ve malzeme ideal elasto-plastik kabul edilmiştir. Elasto-plastik çözüm için Tsai-Hill Akma Kriteri kullanılmıştır. Basit destekli ve ankastre kiriş olmak üzere iki farklı sınır koşulunda fiber açısının sonuçlara etkisi incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Elasto-Plastik Gerilme, Tsai-Hill Teorisi, Airy Gerilme Fonksiyonu, Düzlem İçi Yük, Kiriş Gerilme Analizi, Kompozit Kiriş

2021, 43 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

**ELASTO-PLASTIC STRESS ANALYSIS OF POLYMER MATRIX COMPOSITE BEAMS
UNDER IN-PLANE LOAD EFFECT**

Emre YILMAZ

Tekirdağ Namık Kemal University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bahar UYMAZ

Composite beams are durable elements that can be produced in various structures, consisting of at least two material systems, in different loading installations in structures and machine elements. In this study, the solution of elasticity problem is provided by Airy Stress Function proposed as a 5th order non-uniform polynomial for elasto-plastic stress analysis of polymer matrix continuous fiber reinforced composite beam under in-plane load. Polyethylene matrix composite reinforced with Cr-Ni steel fibers was taken as the beam material and the material was accepted as ideal elasto-plastic. Tsai-Hill Yield Criterion was used for the elasto-plastic solution. The effect of fiber angle on the results was investigated in two different boundary conditions, simply supported and fixed beam.

Key words: Elasto-Plastic Stress, Tsai-Hill Theory, Airy Stress Function,
In-Plane Load, Beam Stress Analysis, Composite Beam

2021, 43 pages

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÇİZELGE DİZİNİ	iv
ŞEKİL DİZİNİ	v
SİMGELER	vii
TEŞEKKÜR	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	4
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM	9
3.1. Farklı Malzeme Türleri için Gerilme-Şekil Değişirme Bağlılıkları	9
3.1.1. Ortotropik Malzeme	10
3.1.2. İzotropik Malzeme.....	12
3.2. İki Boyutlu Elastisite Teorisi Problemlerinin Çözüm Prensipleri	13
3.2.1. Rijitlik ve Esneklik Matrislerinin Mühendislik Sabitleri ile İlişkisi.....	15
3.3. Açılı Lamina için Hasar Teorileri.....	19
3.3.1. Maksimum Gerilme Hasar Teorisi	19
3.3.2. Maksimum Şekil Değişirme Hasar Teorisi	19
3.3.3. Tsai-Hill Hasar Teorisi	19
3.3.4. Tsai-Wu Hasar Teorisi.....	22
3.4. Airy Gerilme Fonksiyonu ile Elasto-Plastik Gerilme Analizi.....	24
3.4.1. Sınır Koşulları	26
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	40
KAYNAKLAR	41

ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 3.1. Cr-Ni sürekli fiber takviyeli polietilen matrisli kompozit kirişin mekanik özellikleri.....	27
Çizelge 3.2. Polietilen izotropik kirişin mekanik özellikleri.....	27
Çizelge 3.3. Basit destekli ve ankastre kirişin yük ve boyut özellikleri.....	27
Çizelge 4.1. $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm olan polietilen izotropik kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri.....	35
Çizelge 4.2. $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm olan polietilen izotropik kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri.....	35
Çizelge 4.3. 0° , 30° , 45° , 60° ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri.....	36
Çizelge 4.4. 0° , 30° , 45° , 60° ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri.....	37

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 1.1. Kompozit malzemenin genel yapısı.....	1
Şekil 1.2. Akma noktasının ötesinde yüklenmiş ve ardından üzerindeki yük kaldırılmış sünek bir malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği.....	2
Şekil 1.3. İlk akmayı takiben yeniden yüklenmiş sünek malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği.....	3
Şekil 1.4. İdeal elasto-plastik malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği.....	4
Şekil 3.1. Ortotropik bir malzemeye örnek olarak dikdörtgen dizilimli fiberleri bulunan tek yönlü lamina.....	10
Şekil 3.2. Ortotropik malzemedan yapılmış kübik elemanın deformasyonu	11
Şekil 3.3. Açılı anizotropik malzemede global ve lokal eksenler.....	16
Şekil 3.4. Düzlem içi yük etkisindeki basit destekli kiriş.....	26
Şekil 3.5. Düzlem içi yük etkisindeki ankastre kiriş.....	26
Şekil 4.1. Esendemir (2004) çalışmasının Ansys gerilme analizi sonucu.....	31
Şekil 4.2. Polietilen izotropik malzemenin mekanik özelliklerinin Ansys malzeme kütüphanesine tanımlanması.....	31
Şekil 4.3. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu.....	32
Şekil 4.4. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu.....	32
Şekil 4.5. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu.....	32
Şekil 4.6. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu.....	33
Şekil 4.7. Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit malzemenin mekanik özelliklerinin Ansys malzeme kütüphanesine tanımlanması.....	33
Şekil 4.8. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu.....	34
Şekil 4.9. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu.....	34

Şekil 4.10. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu.....	34
Şekil 4.11. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu.....	35
Şekil 4.12. $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki artık gerilme değişim grafikleri.....	38
Şekil 4.13. $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki artık gerilme değişim grafikleri.....	39



SİMGELER

σ_x	: Normal gerilme
σ_p	: Plastik gerilme sınırı
σ_r	: Artık gerilme
τ	: Kesme gerilmesi
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
ν	: Poisson oranı
ε	: Birim şekil değiştirme
γ	: Kayma şekil değiştirmesi
X	: Boyuna akma dayanımı
Y	: Enine akma dayanımı
M	: Düzlem akma dayanımı
θ	: Fiber açısı
C	: Rijitlik matrisi
S	: Esneklik matrisi
T	: Dönüşüm matrisi
R	: Reuter matrisi
F	: Kütlesel kuvvet
ϕ	: Airy gerilme fonksiyonu
V	: Potansiyel fonksiyonu
∇	: Biharmonik denklem operatörü
ΔP	: Diferansiyel kuvvet
ΔA	: Diferansiyel alan
Q	: Kirişe etkiyen toplam yük
L	: Kiriş uzunluęu

b	: Kiriş yüksekliği
t	: Kiriş kalınlığı
$(\sigma_1^T)_{ult}$: 1 yönünde boyuna maksimum çekme mukavemeti
$(\sigma_1^C)_{ult}$: 1 yönünde boyuna maksimum basma mukavemeti
$(\sigma_2^T)_{ult}$: 2 yönünde enine maksimum çekme mukavemeti
$(\sigma_2^C)_{ult}$: 2 yönünde enine maksimum basma mukavemeti
$(\tau_{12})_{ult}$: 1-2 düzleminde kayma mukavemeti
$(\epsilon_1^T)_{ult}$: 1 yönünde boyuna maksimum çekme şekil değıştirmesi
$(\epsilon_1^C)_{ult}$: 1 yönünde boyuna maksimum basma şekil değıştirmesi
$(\epsilon_2^T)_{ult}$: 2 yönünde enine maksimum çekme şekil değıştirmesi
$(\epsilon_2^C)_{ult}$: 2 yönünde enine maksimum basma şekil değıştirmesi
$(\gamma_{12})_{ult}$: 1-2 düzleminde kayma şekil değıştirmesi

TEŞEKKÜR

Tez danışmanım ve aynı zamanda enstitü m¼d¼r¼m¼z Sayın Doç. Dr. Bahar UYMAZ Hocama değerli desteklerinden dolayı teőekk¼r ederim.

Őimdiye dek¼zerimde emeği geçen, beni bulunduğum bilgi ve birikimlere ulaştıran t¼m hocalarıma ve aileme teőekk¼r ederim.

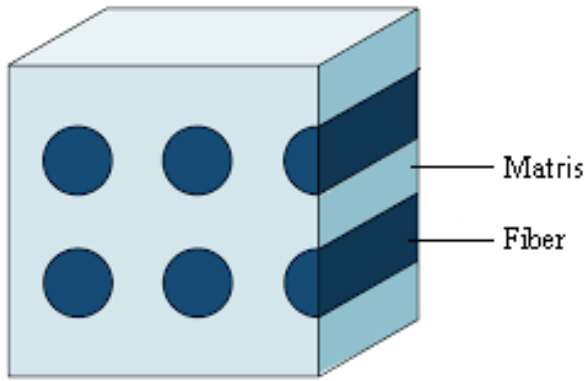
Anneme ithafen...

Temmuz, 2021

Emre YILMAZ
Makine M¼hendisi

1. GİRİŞ

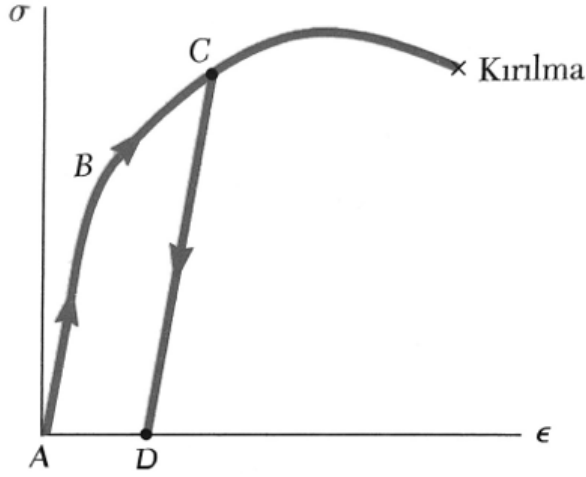
Kompozit malzeme, birbiri içerisinde çözünme özelliğine sahip olmayan iki veya daha çok malzemenin makroskobik olarak bir araya getirilmesiyle elde edilen yapı malzemesidir. Makroskobik düzeyde bir araya getirme olayı bileşenlerin en iyi özelliklerini tek malzemede toplamak amacıyla gerçekleştirilir. Kompozit malzemeyi oluşturan elemanlardan takviye fazı fiberler parçacık şeklinde olabilir. Matris fazı ise genelde sürekli dir. Şekil (1.1.)'de kompozit malzemenin genel yapısı bulunmaktadır.



Şekil 1.1. Kompozit malzemenin genel yapısı

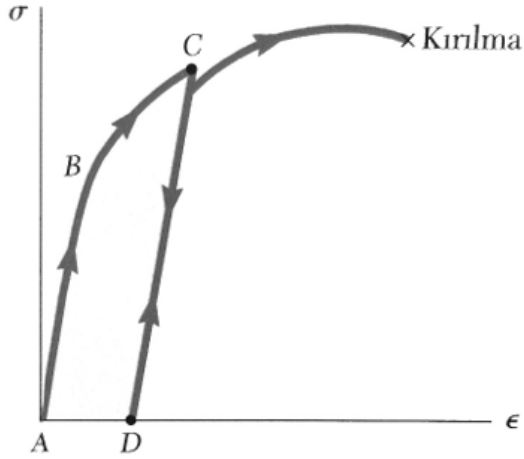
Kompozit malzeme üretilmesi sonucunda malzemede ağırlık başına yüksek dayanım, yüksek yorulma direnci, yüksek korozyon direnci, yüksek aşınma direnci, iyi termal ve ısı iletkenlik, estetiklik gibi özellikler sağlanmaktadır. Tüm bu özelliklerin oluşması için ideal matris ve takviye malzeme çifti, üretim tekniği ve bunların optimizesi gibi unsurlar önem teşkil etmektedir (Kaw, 2006).

Bir malzemeye yük uygulanmasıyla ortaya çıkan şekil değiştirmeleri, yük kaldırıldığında ortadan kalkıyorsa bu malzemeye elastik malzeme denir. Malzemenin en büyük gerilme değeri de malzemenin elastik limiti olarak tanımlanır.



Şekil 1.2. Akma noktasının ötesinde yüklenmiş ve ardından üzerindeki yük kaldırılmış sünek bir malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği (Beer vd., 2012)

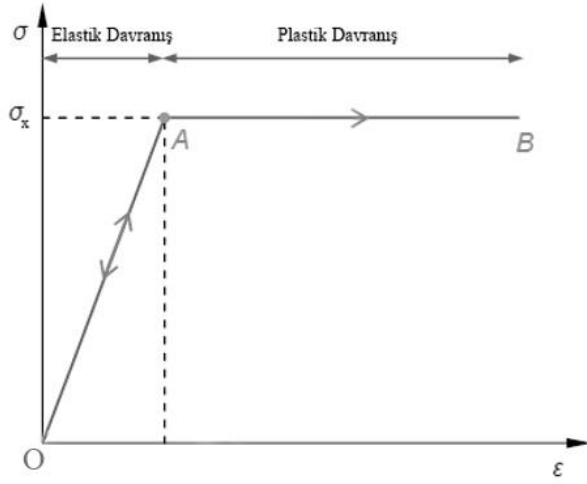
Bir malzeme, iyi tanımlanmış bir akma noktasına sahipse elastik limit, orantı limiti ve akma noktası temelde eşittir. Başka bir deyişle gerilme, akma noktasının (Şekil 1.2. B noktası) altında tutulduğu sürece malzeme lineer ve elastik davranır. Ancak akma noktasını geçerse akma durumu oluşur ve yük kaldırıldığı zaman gerilme ve şekil değiştirmesi, yük eğrisinin şekil (1.2.) AB doğru parçasına paralel şekil (1.2.) CD çizgisi boyunca lineer bir şekilde azalır. ϵ 'nin yük kaldırıldıktan sonra sıfıra inmemesi olgusu malzemede kalıcı deformasyon veya plastik deformasyon oluştuğunu gösterir. Çoğu malzemede plastik deformasyon, sadece gerilmenin ulaştığı maksimum değere değil, aynı zamanda yük kaldırılincaya kadar geçen süreye de bağlıdır. Plastik deformasyonun gerilmeye bağlı kısmına kayma, zamana bağlı (ki sıcaklıktan da etkilenen) kısmına ise sünme denir.



Şekil 1.3. İlk akmayı takiben yeniden yüklenmiş sünek malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği (Beer vd., 2012)

Malzeme, yüklenip yük kaldırıldıktan sonra (Şekil 1.3.) tekrar yüklenirse yeni yükleme eğrisi yaklaşık olarak C noktasına ulaşınca kadar önceki başlatma eğrisine yakın bir eğri olur ve daha sonra sağa doğru kıvrılır ve ilk gerilme-şekil değiştirme grafiğinin (Şekil 1.3.) eğri kısmı ile bitişir. Yeni yükleme eğrisinin doğru şeklindeki parçasının başlangıçtaki eğrinin karşı gelen kısmından daha büyük olduğunu işaret edelim. Böylece malzemenin ilk yüklenmesi sırasında ortaya çıkan şekil değiştirme sertleşmesinin bir sonucu olarak orantı limiti ve elastik limit artmaktadır. Bununla birlikte kırılma noktası değişmeden kaldığı için numunenin artık D noktasından ölçülmesi gereken sünekliği azalmıştır (Beer vd., 2012).

İdeal elasto-plastik olarak adlandırılan malzemenin ise akma noktasından önce tam elastik, akma noktasından sonra tam plastik özellik gösterdiği kabul edilir. Şekil (1.4.)’te ideal bir elasto-plastik malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği verilmiştir. A noktası malzemenin akma noktası olup, OA boyunca malzeme tam elastik, AB boyunca tam plastiktir. B noktası ise malzemenin kopma noktasıdır. Bu çalışmada kullanılan malzeme niteliği de ideal elasto-plastik malzemedir.



Şekil 1.4. İdeal elasto-plastik malzemenin gerilme-şekil değiştirme grafiği

1.1. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Kompozit kirişlerde gerilme analizi ile ilgili literatürdeki çalışmalar incelendiğinde Tsai-Hill Teorisi ve Airy Gerilme Fonksiyonu kullanılarak eğilme etkisindeki kirişlerin elasto-plastik gerilme analiziyle ilgili gerçekleştirilen çalışmalar görülmektedir. Bu çalışmada ise düzlem içi yük etkisindeki kompozit kirişin elasto-plastik gerilme analizi Airy Gerilme Fonksiyonu ile yapılarak farklı fiber açılarının sonuçlara etkisi incelenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Literatürde kirişlerin elasto-plastik gerilme analizinin gerilme tabanlı ve şekil değiştirme tabanlı yaklaşımlarla yapıldığı çeşitli çalışmalar mevcuttur.

Karakuzu ve Özcan (1996) çalışmalarında ankastre kirişte, elastik ve elasto-plastik gerilme analizi için metal matrisli kompozit malzeme, tekil ve uniform yayılı yük altında elastik analiz için Saint Venant Prensibi'ni, elasto-plastik analiz için ise Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak gerilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Her iki yükleme tipi için de elastik gerilmenin sabit uca gidildikçe arttığı, elasto-plastik gerilmenin ise kiriş boyunca sabit kaldığı, kirişin yüzeyinde kalıntı gerilmelerin sıfır olduğu sonuçlarına ulaşmışlardır.

Topcu ve Öndürücü (2000) çalışmalarında üniform yayılı çekme yükü etkisindeki belirli bölgesinde delik bulunan kompozit bir levhada sonlu elemanlar yöntemini kullanarak elasto-plastik gerilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Sonlu elemanlar yöntemiyle yaptıkları çalışmada mesh elemanı olarak dörtgen elemanlar kullanarak farklı delik tasarımları için gerilmeler incelenmiş ve artık gerilme değerinin delik çevresinde daha büyük olduğu, delikten uzaklaştıkça artık gerilmelerin sıfıra doğru yaklaştığı, yükleme miktarı arttıkça artık gerilmelerin de arttığı sonuçlarına ulaşmışlardır.

Sayman, Esendemir ve Öndürücü (2001) çalışmalarında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak, serbest ucundan tekil yük etkisindeki paslanmaz çelik takviyeli alüminyum ankastre kirişin gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. Artık gerilmelerin kirişin en üst ve en alt yüzeylerinde maksimum olduğu, artık gerilme bileşen yoğunluğunun 0° fiber açısı için en iyi seviyede olduğu, elastik analizde yer değiştirmelerin sıfır olduğu, elasto-plastik analizde yer değiştirmelerin 1 mm 'yi geçmediği sonuçlarına ulaşmışlardır.

Esendemir (2003) çalışmasında Tsai-Hill Kriteri'ni ve Airy Gerilme Fonksiyonu'nu kullanarak, iki ucundan destekli üniform yük etkisindeki polimer matrisli kompozit kirişin elasto-plastik gerilme analizini gerçekleştirmiştir. Plastik akmanın 0° ve 90° fiber açıları için kirişin orta noktasından aynı mesafelerde başladığı, σ_x artık gerilme bileşen yoğunluğunun üst ve alt yüzeylerde maksimum olduğu, fiber açısı arttıkça σ_x artık gerilme bileşen yoğunluğunun da arttığı sonuçlarına ulaşmıştır.

Esendemir ve Öndürücü (2003) çalışmalarında Von-Mises Akma Teorisi'ni kullanarak, üçgen yayılı yük etkisindeki 1045 karbon çeliğinden üretilen ankastre kirişin elasto-plastik gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. σ_x artık gerilmenin kirişin en üst ve en alt yüzeylerinde maksimumken x ekseninde sıfır olduğu, kirişin dayanımının artık gerilmelerle artırılacağı, malzeme özelliklerinin x eksenine göre simetrik oluşundan dolayı σ_x artık gerilme bileşeninin kirişin en alt ve en üst yüzeylerinde aynı olduğu sonuçlarına ulaşmışlardır.

Esendemir (2004) çalışmasında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak, orta noktasından yük etkisindeki basit mesnetli polimer matrisli kompozit bir kirişin farklı fiber açılarına göre elasto-plastik gerilme analizini gerçekleştirmiştir. σ_x artık gerilme bileşeninin kirişin en üst ve en alt yüzeylerinde maksimum değerde olduğu, plastik akmanın ilk kez 0° ve 90° fiber açılarında başladığı, plastik çökmenin 0° fiber açısında en büyük değerde olduğu sonuçlarına ulaşmıştır.

Altan, Atlıhan ve Topcu (2004) çalışmalarında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak, tekil kuvvet etkisindeki çelik fiber takviyeye sahip termoplastik kompozit kirişte elasto-plastik gerilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Artık gerilmelerin kirişin üst ve alt yüzeylerinde maksimum olduğu, akma başlangıcı 0° ve 45° fiber açılarında kirişin uç bölgesinden eşit uzaklıklarda beraber başladığı, 15° ve 30° fiber açılarında kirişteki akmanın ilk olarak kirişin üst yüzeyinde başladığı sonuçlarına ulaşmışlardır.

Esendemir (2004) çalışmasında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak, her iki ucundan mesnetli ve orta noktasından belirli yük etkisindeki metal matrisli kompozit kirişte elastik gerilme analizi gerçekleştirmiştir. Kayma gerilmelerin elastik gerilmelerden küçük olduğu, 0° ve 90° fiber açıları için akmanın en üst ve en alt kiriş yüzeylerinde eşit mesafede başladığı, 30° , 45° , 60° fiber açılarında akmanın en alt bölgede 0° ve 90° fiber açılarına göre daha erken başladığı sonuçlarına ulaşmıştır.

Tekin, Esendemir ve Öndürücü (2004) çalışmalarında Anizotrop Elastisite Teorisi'ni kullanarak, serbest ucundan tekil yük etkisindeki polimer matrisli kompozit ankastre kirişin elastik ve elasto-plastik gerilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Fiber açısı arttıkça kirişte plastik bölgenin daha küçük x uzaklıklarında başladığı, maksimum elastik gerilmelerin serbest uca olduğu, kirişin dayanımının kalıntı gerilmelerle artırılacağı, kirişin en üst yüzeyinde oluşan artık gerilme bileşeninin kirişin en alt yüzeyindeki artık gerilme bileşeninden daha büyük olduğu sonuçlarına ulaşmışlardır.

Ding, Haung ve Wang (2006) çalışmalarında Airy Gerilme Fonksiyonu'nu ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak düzgün yayılı yük etkisindeki iki ucundan ankastre kirişin gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. Kirişin farklı kesit oranları için elde edilen sonuçları grafiksel olarak karşılaştırmalı incelemişlerdir. Elde edilen analitik çözüm sonuçlarının sonlu elemanlar yöntemi sonuçlarıyla uyumlu olduğu yargısına ulaşmışlardır.

Rastgoo ve Amirian (2007) çalışmalarında Airy Gerilme Fonksiyonu'nu kullanarak parabolik yükleme etkisindeki ankastre bir kirişin farklı kesit oranlarına göre gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. Sonuçları sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırarak analitik çözümde kabul edilebilir değerler yakalandığı ifadesine varmışlardır.

Esendemir ve Öndürücü (2009) çalışmalarında İzotrop-Anizotrop Elastisite Teorisi'ni kullanarak, izotrop malzeme olarak elastik polyester malzeme, kompozit malzeme olarak cam fiberle takviyelendirilmiş elastik polyester malzeme; yük olarak düzgün yayılı ve üçgen yayılı yük sınır koşullarında ankastre kiriş için gerilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Üçgen yayılı yük etkileyen kirişte σ_x gerilmesinin kirişin en üst ve en alt yüzeylerinde aynı değerde olduğu, düzgün yayılı yük etkileyen kirişte σ_x gerilmesinin kirişin üst yüzeyinde alt yüzeyine göre daha yüksek olduğu, 30° fiber açısı için her iki yükleme tipi için de σ_x gerilme değerleri maksimumken 90° fiber açısında minimum değere sahip olduğu, kirişe uygulanan yük arttıkça gerilme değerlerinin arttığı sonuçlarına ulaşmışlardır.

Aykul ve Kaya (2010) çalışmalarında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak serbest ucundan tekil yük etkisindeki çelik fiberlerle güçlendirilmiş düşük yoğunluklu homojen bir polietilen termoplastik ankastre kiriş için analitik bir elastik-plastik gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. Fiber açısı arttıkça plastik bölgenin daha küçük uzaklıklarda başladığı, σ_x artık gerilme bileşen yoğunluğunun kirişin üst ve alt yüzeylerinde maksimum olduğu, plastik çökmenin farklı fiber açıları için farklı kiriş mesafelerinde meydana geldiği sonuçlarına ulaşmışlardır.

Özben ve Solmaz (2010) çalışmalarında orta bölgesinde elipsel deliğe sahip ankastre kirişin tek eksenli gerilme etkisinde gerilme yığılması faktörünü sonlu elemanlar metoduyla incelemişlerdir. Elips deliğinin büyük yarıçapındaki boyunun artışın gerilme değerlerinin artışına olan etkisi delik eğiminin etkisine göre daha fazla olduğu, elips genişliği/plaka oranının artışı ile elips kenarında meydana gelen maksimum gerilme değeri ve plaka yüzeyindeki

gerilme alan dağılımını önemli ölçüde bir değişikliğe yol açmadığı, plaka üzerinde en büyük gerilme dağılımı alanı $\theta = 45^\circ$ delik yönlenmesinde elde edildiği sonuçlarına ulaşmışlardır.

Sayman ve Esendemir (2002) çalışmalarında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak düzgün yayılı yük etkileyen basit destekli metal matris kompozit kirişin gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. Plastik akmanın alt yüzeyde daha erken başladığı, σ_x artık gerilme bileşen büyüklüğünün alt ve üst yüzeylerde maksimum olduğu sonuçlarına ulaşmışlardır.

Kurşun, Çetin ve Aykul (2014) çalışmalarında Tsai-Hill Kriteri'ni kullanarak, düzgün yayılı yük etkisindeki çelik elyaf takviyeli termoplastik kirişin elastik gerilme analizini gerçekleştirmişlerdir. Maksimum gerilme değerlerinin kirişin en üst ve en alt yüzeylerinde olduğu, gerilme değerinin 0° fiber açısı için kirişin üst yüzeyinde en yüksek değerde olduğu, en yüksek gerilme değerinin 22 MPa'yı geçmediği analiz sonuçlarına ulaşmışlardır.

Chu vd. (2015) çalışmalarında Airy Gerilme Fonksiyonu'nu kullanarak düzlem içi yük etkisindeki FGM kiriş için gerilme ve eğilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Eğilme momentine maruz kalan kirişin normal gerilmesinin doğrusal olmayan dağılım sergilediği, kiriş kalınlığı sıfıra yaklaştığında enine yer değiştirme uyumsuzluğunun birbirine bağlı iki farklı malzemenin arayüzünde gerçekleştiği, normal gerilmenin gradyan indeksine ve poisson oranına bağlı olduğu sonuçlarına ulaşmışlardır.

Zhan ve Liu (2015) çalışmalarında düzgün yayılı yük etkisindeki, bir ucundan ankastre, iki ucundan ankastre ve basit destekli kirişlerin Airy Gerilme Fonksiyonu ve bilgisayar destekli sonlu elemanlar yöntemiyle gerilme analizlerini incelemişlerdir. Sonuçları grafiksel olarak karşılaştırmalı incelemişler, analitik çözümün bilgisayar destekli çözüm sonuçlarına en iyi şekilde yaklaştığı sonucunu elde etmişlerdir.

Karakılçık, Özbay ve Adin (2016) çalışmalarında sonlu elemanlar yöntemini kullanarak, tek eksenli gerilme etkisindeki düzlemsel yüklenmiş ve ortasında delik bulunan levhalarda gerilme analizi gerçekleştirmişlerdir. Fiber açısı arttıkça artık gerilme yığılmalarının düştüğü, levha delik çapının büyüdükçe gerilme yığılmalarının hızla arttığı, optimum gerilme yığılması için levha delik çapının levha genişlik boyutunun maksimum 2/5'i kadar olması gerektiği sonuçlarına ulaşmışlardır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Farklı Malzeme Türleri için Gerilme-Şekil Değişirme Bağlıları

Tek noktada 21 bağımsız elastik sabit içeren malzemeye anizotropik malzeme denir. Bu sabitler özel bir nokta için bir kez elde edildikten sonra gerilme-şekil değişirme bağıntısı o noktada geliştirilebilir.

Malzeme homojen niteliğe sahip değilse bu sabitler noktadan noktaya değişkenlik gösterebilir. Bununla beraber birçok doğal ve sentetik malzeme, malzeme simetrisine sahiptir. Bu durumda elastik özellikler simetrik doğrultularda benzerdir, iç yapıda simetri mevcuttur. Bu simetri 6x6'lık esneklik ve rijitlik matrislerindeki sabitlerin bazılarını sıfırlayarak veya birbirleriyle ilişkilendirerek bağımsız elastik sabitlerin sayısını azaltır.

Anizotropik bir malzemenin gerilme-şekil değişirme ilişkisi izotropik malzemenin daha karmaşıktır. En genel halde gerilme-şekil değişirme bağıntısı genelleştirilmiş Hooke Kanunu'na göre üç boyutlu bir malzeme için 1-2-3 koordinat sisteminde şöyle ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Burada $[C]$ rijitlik matrisidir.

Genelleştirilmiş Hooke Kanunu şekil değişirme-gerilme ilişkileri cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

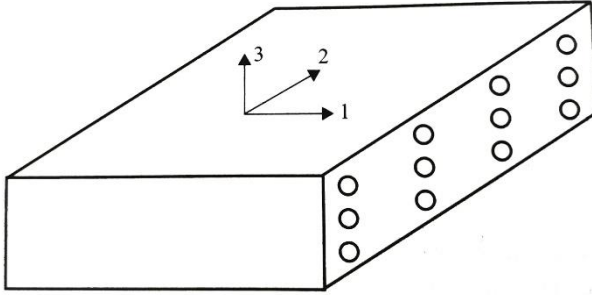
Burada $[S]$ esneklik matrisi olarak adlandırılır ve rijitlik matrisinin tersidir, $[S] = [C]^{-1}$.

3.1.1. Ortotropik Malzeme

Bir malzemede karşılıklı olarak birbirine dik üç malzeme simetri düzlemi varsa rijitlik matrisi aşağıdaki gibidir.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Malzeme simetrisinin karşılıklı üç dik düzlemi aynı zamanda elastik simetrisinin karşılıklı üç dik düzlemini ifade eder. 9 bağımsız elastik sabit mevcuttur ve bu yaygın olarak bulunan malzeme simetrisidir. Ortotropik malzemeye örnek olarak dikdörtgen dizilime sahip sürekli fiber takviyeli tek bir lamina (Şekil 3.1.) tahta çubuk ve haddelenmiş çelik verilebilir.



Şekil 3.1. Ortotropik bir malzemeye örnek olarak dikdörtgen dizimli fiberleri bulunan tek yönlü lamina

Ortotropik malzemede esneklik matrisi aşağıdaki forma indirgenir.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Ortotropik malzeme için elastik simetriyi ifade etmek için ortotropik malzemeden alınan bir kübik elemanı (Şekil 3.2.) göz önüne alalım. Burada 1, 2 ve 3 asal yönlerdir veya 1-2, 2-3 ve 3-1 simetrisinin olduğu karşılıklı üç ortogonal düzlemlerdir. Normal gerilme σ_3 'ü kübik elemana uygularsak,

$$\varepsilon_1 = S_{13}\sigma_3 \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_2 = S_{23}\sigma_3 \quad (3.6)$$

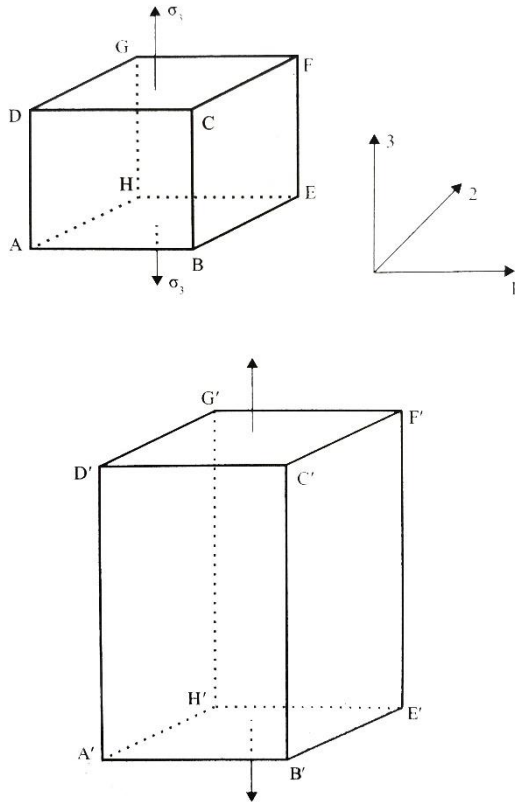
$$\varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3 \quad (3.7)$$

$$\gamma_{23} = 0 \quad (3.8)$$

$$\gamma_{31} = 0 \quad (3.9)$$

$$\gamma_{12} = 0 \quad (3.10)$$

elde edilir.



Şekil 3.2. Ortotropik malzemeden yapılmış kübik elemanın deformasyonu

Küp, normal şekil değiştirme eşitliklerinde belirlendiği gibi her yönde deforme olacaktır. Bununla birlikte tüm düzlemlerde kayma şekil değiştirmeler sıfırdır yani eleman bu düzlemlerde şekil değiştirmez. Böylece asal yönlerde etki eden herhangi normal yükte küpte çarpılma olmayacaktır. Bu durum, küpün altı yüzünden ikisinin şeklinin değiştiği monoklinik malzemeye benzemez.

3.1.2. İzotropik Malzeme

Ortotropik bir cisimde tüm yüzeyler özdeşse bu niteliğe sahip malzemelere izotropik malzemeler adı verilir. Bu malzemeye ait rijitlik matrisi aşağıda verilmiştir.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

İzotropi, aşağıdaki ek eşitlikleri getirir.

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{12} = C_{23}, \quad C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \quad (3.12)$$

Bu, aynı zamanda malzemede sonsuz sayıda simetri düzlemi olduğu anlamına gelir. İki bağımsız sabit mevcuttur. En yaygın olan malzeme simetri durumudur. Sonsuz sayıda simetri düzlemi malzemenin her doğrultuda aynı davranacağı anlamına gelir.

Burada,

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.13)$$

$$C_{12} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.14)$$

$$\frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (3.15)$$

dir.

Esneklik matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Mühendislik sabitleriyle esneklik matrisinin doğrudan ilişkili bileşenleri izotropik malzeme için şöyledir:

$$S_{11} = \frac{1}{E} = S_{22} = S_{33} \quad (3.17)$$

$$S_{12} = -\frac{\nu}{E} = S_{13} = S_{21} = S_{23} = S_{31} = S_{32} \quad (3.18)$$

$$S_{44} = \frac{1}{G} = S_{55} = S_{66} \quad (3.19)$$

Geri kalan S_{ij} 'ler sıfırdır.

3.2. İki Boyutlu Elastisite Teorisi Problemlerinin Çözüm Prensipleri

Elastisite Teorisi'nde bir problemin çözümü, gerilme bileşenlerinin diferansiyel denge denklemlerini, gerilme bileşenlerinin uygunluk koşullarını ve gerilme ile genleme bileşenlerinin sınır koşullarını sağlamasından oluşur. Sonuç olarak Düzlemsel Elastisite Teorisi'nin gerilme problemi şu matematik problemin çözümüne indirgenmiş olmaktadır: belirli bir diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyon aranmaktadır; bu fonksiyonun tarif ettiği bölgenin çevresinde, kendi değeri ve normal türevinin değeri verilmiştir. Teorik fiziğin hemen her dalında rastlanan bu tür problemlere “sınır değer problemleri” denir.

Bir elastisite problemi, en genel hali olan üç boyutlu halden iki boyutlu hale indirgenebiliyorsa bu tür problemlere iki boyutlu elastisite veya düzlemsel elastisite problemi denir. İki boyutlu elastisite, elastisitenin metot bakımından en çok geliştirilmiş bölümüdür.

İki boyutlu elastisite, bir cisme etki eden gerilmelerin ve kütleli kuvvetlerin, koordinat eksenlerinin birinden bağımsız olması sonucu ortaya çıkar (burada bu eksen z alınmıştır).

İki boyutlu elastisitenin iki genel türevi vardır: düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme. Düzlem gerilmeye, gerilmelerden σ_z , τ_{xz} ve τ_{yz} gerilmeleri ile z yönündeki kütleli kuvvetler sıfır kabul edilir. Düzlem şekil değiştirme halinde ise τ_{xz} ve τ_{yz} gerilmeleri ile z doğrultusundaki kütleli kuvvet sıfır kabul edilir ancak σ_z gerilmesi, σ_x ve σ_y gerilmelerinden hesaplanır.

İki boyutlu elastisite problemlerinde denge denklemleri,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (3.21)$$

olarak verilir. Burada F_x ve F_y kütle kuvvetleridir ve bu çalışmada sıfır alınmıştır.

Ortotropik bir malzeme için gerilme-şekil değiştirme ilişkileri esneklik matrisi cinsinden Hooke Kanunu ile aşağıdaki verilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Denklem (3.27)'nin tersi alınarak gerilme-şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Buradaki Q_{ij} rijitlik katsayıları şöyledir:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad (3.24)$$

$$Q_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad (3.25)$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \quad (3.26)$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (3.27)$$

3.2.1. Rijitlik ve Esneklik Matrislerinin Mühendislik Sabitleri ile İlişkisi

Tek yönlü lamina için esneklik ve rijitlik katsayıları mühendislik sabitleri cinsinden aşağıdaki gibidir.

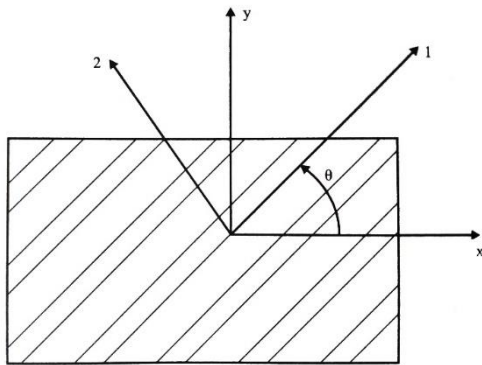
$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (3.28)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{21}\nu_{12}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{21}\nu_{12}}, Q_{66} = G_{12} \quad (3.29)$$

Burada E_1 boyuna Young Modülü, E_2 enine Young Modülü, ν_{12} majör poisson oranı ve G_{12} düzlem kayma modülüdür.

Tek yönlü lamina özel ortotropik tabakadır. $Q_{16} = Q_{26} = S_{16} = S_{26} = 0$ 'dır ve 1-2 yönündeki normal gerilmeler, 1-2 düzleminde kayma şekil değişimine yol açmaz. Aynı zamanda 1-2 düzleminde uygulanan kayma gerilmeleri 1-2 yönünde herhangi bir normal şekil değişimine yol açmaz.

Açılı lamina için kullanılan koordinat sistemi şekil (3.3.)'teki gibidir. 1-2 koordinat sisteminde bulunan eksenlere malzeme eksenleri veya lokal eksenler denir. 1 yönü fiberlere paralel olup 2 yönü ise fiberlere diktir.



Şekil 3.3. Açılı anizotropik malzemedeki global ve lokal eksenler

Açılı anizotropik malzemede global ve lokal gerilmelerin birbirleriyle ilişkisi fiber açısı θ aracılığıyla yapılır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Burada $[T]$ dönüşüm matrisi olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2(\theta) & s^2(\theta) & 2s(\theta)c(\theta) \\ s^2(\theta) & c^2(\theta) & -2s(\theta)c(\theta) \\ -s(\theta)c(\theta) & s(\theta)c(\theta) & c^2(\theta) - s^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2(\theta) & s^2(\theta) & -2s(\theta)c(\theta) \\ s^2(\theta) & c^2(\theta) & 2s(\theta)c(\theta) \\ s(\theta)c(\theta) & -s(\theta)c(\theta) & c^2(\theta) - s^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Burada $c = \cos(\theta)$ ve $s = \sin(\theta)$ 'dir.

Lokal eksenlerdeki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi şöyledir:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Global ve lokal şekil değiştirmeler, dönüşüm matrisi aracılığıyla ilişkilendirilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Reuter Matrisi ile düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

elde edilir. Burada Reuter Matrisi şöyledir:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Denklem (3.35) denklem (3.33)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Denklem (3.37)'de ilk beş matris $[\bar{Q}]$ ile gösterilirse,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Burada \bar{Q}_{ij} dönüştürülmüş indirgenmiş rijitlik matrisi $[\bar{Q}]$ 'nin elemanları olup,

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \quad (3.39)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \quad (3.40)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \quad (3.41)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \quad (3.42)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s \quad (3.43)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \quad (3.44)$$

şeklindedir.

Denklem (3.38)'in tersi alınırsa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Burada \bar{S}_{ij} dönüştürülmüş indirgenmiş esneklik matrisinin elemanlarıdır ve

$$\bar{S}_{11} = S_{11}c^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}s^4 \quad (3.46)$$

$$\bar{S}_{12} = S_{12}(s^4 + c^4) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})s^2c^2 \quad (3.47)$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}s^4 + (2S_{12} + S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4 \quad (3.48)$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})s^3c \quad (3.49)$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})s^3c - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})sc^3 \quad (3.50)$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4) \quad (3.51)$$

şeklindedir (Kaw, 2006).

Şekil değiştirme-yer değiştirme denklemleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.52)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.53)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.54)$$

İki boyutlu elastisitede yer değiştirmelerin sürekli olduğunu gösteren uygunluk denklemi aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.55)$$

3.3. Açılı Lamina için Hasar Teorileri

3.3.1. Maksimum Gerilme Hasar Teorisi

Laminanın global eksenlerdeki gerilme ve şekil değiştirmelerden faydalanarak malzeme eksenlerindeki (lokal eksenler) gerilmeler denklem (3.30) kullanılarak bulunur. Aşağıdaki şartlar aşıldığında laminanın hasara uğrayacağı kabul edilir (Kaw, 2006).

$$-(\sigma_1^C)_{ult} < \sigma_1 < (\sigma_1^T)_{ult} \quad (3.56)$$

$$-(\sigma_2^C)_{ult} < \sigma_2 < (\sigma_2^T)_{ult} \quad (3.57)$$

$$-(\tau_{12})_{ult} < \tau_{12} < (\tau_{12})_{ult} \quad (3.58)$$

3.3.2. Maksimum Şekil Değiştirme Hasar Teorisi

Bu teori izotropik malzemelere uygulanan Maksimum Kayma Gerilme Teorisi'ni ve Maksimum Normal Şekil Değiştirme Teorisi'ni temel alır. Laminaya uygulanan şekil değiştirmeler, lokal eksenlerdeki şekil değiştirmelere dönüştürülür. Laminanın lokal eksenlerindeki kayma ve normal gerilmelerden herhangi biri o eksenlere ait maksimum şekil değiştirmeye eşit olur veya aşarsa laminada hasar tahmini yapılır. Aşağıdaki eşitsizlikler ihlal edildiğinde lamina hasara uğrar.

$$-(\varepsilon_1^C)_{ult} < \varepsilon_1 < (\varepsilon_1^T)_{ult} \quad (3.59)$$

$$-(\varepsilon_2^C)_{ult} < \varepsilon_2 < (\varepsilon_2^T)_{ult} \quad (3.60)$$

$$-(\gamma_{12})_{ult} < \gamma_{12} < (\gamma_{12})_{ult} \quad (3.61)$$

3.3.3. Tsai-Hill Hasar Teorisi

Çarpılma enerjisi, cisimdeki toplam şekil değiştirme enerjisinin bir parçasıdır. Şekil değiştirme, hacimdeki değişime bağlı dilatasyon enerjisi ve şekil değişimine bağlı çarpılma distorsiyon enerjisi olmak üzere iki bölümden oluşur. Bu teoride, hasar çarpılma enerjisi çarpılma enerjisinden küçük olduğunda malzemede hasarın meydana geldiği kabul edilir. Hill, Çarpılma Enerjisi Teorisi'ne dayanarak aşağıda bulunan eşitsizliğin aykırılığında laminanın hasara uğrayacağını belirtmiştir.

$$(G_2 + G_3)\sigma_1^2 + (G_1 + G_3)\sigma_2^2 + (G_1 + G_2)\sigma_3^2 - 2G_3\sigma_1\sigma_2 - 2G_2\sigma_1\sigma_3 - 2G_1\sigma_2\sigma_3 + 2G_4\tau_{23}^2 + 2G_5\tau_{31}^2 + 2G_6\tau_{12}^2 < 1 \quad (3.62)$$

Hasar mukavemetine bağımlı mukavemet kriteri elemanları olan G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 ve G_6 aşağıdaki gibi bulunabilir.

1. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = (\sigma_1^T)_{ult}$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır. Bu durumda denklem (3.62) aşağıdaki gibi yazılır.

$$(G_2 + G_3)(\sigma_1^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.63)$$

2. Tek yönlü laminaya $\sigma_2 = (\sigma_2^T)_{ult}$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır. Bu durumda denklem (3.62) aşağıdaki gibi yazılır.

$$(G_1 + G_3)(\sigma_2^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.64)$$

3. Tek yönlü laminaya $\sigma_3 = (\sigma_3^T)_{ult}$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır. Bu durumda denklem (3.62) aşağıdaki gibi yazılır.

$$(G_1 + G_2)(\sigma_3^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.65)$$

4. Tek yönlü laminaya $\tau_{12} = (\tau_{12})_{ult}$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır. Bu durumda denklem (3.62) aşağıdaki gibi yazılır.

$$2G_6(\tau_{12})_{ult}^2 = 1 \quad (3.66)$$

3.63, 3.64, 3.65, 3.66 numaralı denklemlerden aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$G_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{[(\sigma_2^T)_{ult}]^2} - \frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \quad (3.67)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \quad (3.68)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{[(\sigma_1^T)_{ult}]^2} \right) \quad (3.69)$$

$$G_6 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{[(\tau_{12})_{ult}]^2} \right) \quad (3.70)$$

Tek yönlü laminanın düzlem gerilme halinde olduğu varsayıldığı için $\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{23} = 0$ 'dır. Bu durumda denklem (3.62)'nin indirgenmiş hali şöyledir (Kaw, 2006):

$$\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_1^T)_{ult}} \right]^2 - \left[\frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma_1^T)_{ult}^2} \right] + \left[\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^T)_{ult}} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{(\tau_{12})_{ult}} \right]^2 < 1 \quad (3.71)$$

Denklem (3.71)'de sadece çekme gerilmeleri kullanılmıştır. Tek eksenli bir kompozit laminada çekme ve basma mukavemetleri arasında farklılıklar söz konusudur. Bu yüzden basma mukavemeti değeri de kullanılmak istenirse Tsai-Hill Teorisi düzlem gerilme için aşağıdaki gibi modifiye edilebilmektedir.

$$\left[\frac{\sigma_1}{X_1} \right]^2 - \left[\left(\frac{\sigma_1}{X_2} \right) \left(\frac{\sigma_2}{X_2} \right) \right] + \left[\frac{\sigma_2}{Y} \right]^2 + \left[\frac{\tau_{12}}{S} \right]^2 < 1 \quad (3.72)$$

Burada,

$$\sigma_1 > 0 \text{ ise } X_1 = (\sigma_1^T)_{ult} \quad (3.73)$$

$$\sigma_1 < 0 \text{ ise } X_1 = (\sigma_1^C)_{ult} \quad (3.74)$$

$$\sigma_2 > 0 \text{ ise } X_2 = (\sigma_1^T)_{ult} \quad (3.75)$$

$$\sigma_2 < 0 \text{ ise } X_2 = (\sigma_1^C)_{ult} \quad (3.76)$$

$$\sigma_2 > 0 \text{ ise } Y = (\sigma_2^T)_{ult} \quad (3.77)$$

$$\sigma_2 < 0 \text{ ise } Y = (\sigma_2^C)_{ult} \quad (3.78)$$

$$S = (\tau_{12})_{ult} \quad (3.79)$$

dir.

Bu çalışmada elasto-plastik çözüm Tsai-Hill Hasar Teorisi ile yapılmıştır.

3.3.4. Tsai-Wu Hasar Teorisi

Bu hasar teorisi Tsai-Hill Teorisi'nden daha geneldir. Tsai-Wu'ya göre aşağıdaki eşitsizlik ihlal edilirse laminanın hasara uğradığı kabul edilir.

$$H_1\sigma_1 + H_2\sigma_2 + H_6\tau_{12} + H_{11}\sigma_1^2 + H_{22}\sigma_2^2 + H_{66}\tau_{12}^2 + 2H_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1 \quad (3.80)$$

H sabitleri beş mukavemet parametresi kullanılarak aşağıdaki gibi bulunabilir.

1. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = (\sigma_1^T)_{ult}$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = 0$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır.

Bu durumda,

$$H_1(\sigma_1^T)_{ult} + H_{11}(\sigma_1^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.81)$$

2. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = -(\sigma_1^C)_{ult}$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = 0$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır.

Bu durumda,

$$-H_1(\sigma_1^C)_{ult} + H_{11}(\sigma_1^C)_{ult}^2 = 1 \quad (3.82)$$

Denklem (3.81) ve denklem (3.82)'den,

$$H_1 = \frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (3.83)$$

$$H_{11} = \frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}} \quad (3.84)$$

3. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = (\sigma_2^T)_{ult}$, $\tau_{12} = 0$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır.

Bu durumda,

$$H_2(\sigma_2^T)_{ult} + H_{22}(\sigma_2^T)_{ult}^2 = 1 \quad (3.85)$$

4. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -(\sigma_2^C)_{ult}$, $\tau_{12} = 0$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır.

Bu durumda,

$$-H_2(\sigma_2^C)_{ult} + H_{22}(\sigma_2^C)_{ult}^2 = 1 \quad (3.86)$$

Denklem (3.85) ve denklem (3.86)'dan,

$$H_2 = \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}} - \frac{1}{(\sigma_2^C)_{ult}} \quad (3.87)$$

$$H_{22} = \frac{1}{(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}} \quad (3.88)$$

elde edilir.

5. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = (\tau_{12})_{ult}$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır.

Bu durumda,

$$H_6(\tau_{12})_{ult} + H_{66}(\tau_{12})_{ult}^2 = 1 \quad (3.89)$$

6. Tek yönlü laminaya $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{12} = -(\tau_{12})_{ult}$ uygulanırsa lamina hasara uğrayacaktır.

Bu durumda,

$$-H_6(\tau_{12})_{ult} + H_{66}(\tau_{12})_{ult}^2 = 1 \quad (3.90)$$

Denklem (3.89) ve denklem (3.90)'dan

$$H_6 = 0 \quad (3.91)$$

$$H_{66} = \frac{1}{(\tau_{12})_{ult}^2} \quad (3.92)$$

elde edilir.

7. Tek yönlü laminaya iki malzeme eksenini boyunca eşit çekme yükü uygulanır. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ ve

$\tau_{xy} = 0$ yükünde lamina hasara uğruyorsa denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

$$(H_1 + H_2)\sigma + (H_{11} + H_{22} + 2H_{12})\sigma^2 = 1 \quad (3.93)$$

Eğer $\sigma_x = \sigma$ ise $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2}$, $\sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$, $\tau_{12} = -\frac{\sigma}{2}$ 'dir.

Denklem (3.90)'da yazılırsa,

$$H_{12} = \frac{2}{\sigma^2} - \frac{(H_1 + H_2)}{\sigma} - \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22} + H_{66}) \quad (3.94)$$

bulunur (Kaw, 2006).

3.4. Airy Gerilme Fonksiyonu ile Elasto-Plastik Gerilme Analizi

İki boyutlu elastisite probleminin çözümü için denge denklemleri ile birlikte gerilmeler cinsinden verilen uygunluk denkleminin integrasyonu gereklidir. Bir elastisite probleminde dengeyi ve uygunluğu aynı zamanda sağlama konusu, dengeyi otomatik olarak sağlayacak bir fonksiyonun işe katılması ile önemli oranda kolaylaştırabilir. Bu durumda sadece geriye uygunluk denklemi kalır. Elastisite problemlerinde elastik bölgenin tüm sınırlarında gerilmeler verilmişse temel denklemlerin sadece gerilme bileşenleri cinsinden ifade edilebilir olması Beltrami-Michell Uygunluk Denklemleri ile mümkündür. Buna ek olarak G.B. Airy tarafından önerilen ve bugün en çok kullanılan Airy Gerilme Fonksiyonu şeklinde ifade edilen bir skaler fonksiyon elastisite probleminin çözümünü sağlamıştır (Yayla, 2014).

İki boyutlu elastisite probleminde diferansiyel gerilme denklemleri Airy Gerilme Fonksiyonu cinsinden şöyledir:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.95)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.96)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3.97)$$

Elastisite problemlerinin Airy Gerilme Fonksiyonu ile amaç hem (3.20) ve (3.21) ile verilen denge denklemlerini hem de (3.55) ile verilen uygunluk denklemlerini sağlayan bir gerilme fonksiyonunun bulunmasıdır. Buna göre denklem (3.95), (3.96), (3.97) ile verilen gerilme denklemleri ilk olarak denklem (3.45)'te ve ardından denklem (3.55) ile verilen uygunluk denkleminde yerine yazılarak aşağıdaki biharmonik denklem elde edilir (Lekhnitskii, 1981).

$$\bar{S}_{22} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2\bar{S}_{26} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} + (2\bar{S}_{12} + \bar{S}_{66}) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\bar{S}_{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} + \bar{S}_{11} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.98)$$

Bu durumda artık problem, (3.98) ile verilen denklemi ve sınır koşullarını sağlayan bir ϕ gerilme fonksiyonunun bulunmasına indirgenmiş olur.

Airy Gerilme Fonksiyonu olarak adlandırılan ϕ fonksiyonu; cebirsel fonksiyon, polinom fonksiyon, trigonometrik fonksiyon, kompleks veya fourier formunda fonksiyon olabilir. Bu çalışmada önerilen gerilme fonksiyonu polinom fonksiyondur. Önerilen polinom gerilme fonksiyonunun derecesi üniform olabilir denklem (3.99) veya üniform olmayıp farklı dereceden polinomlardan oluşan bir yapıya sahip olabilir (denklem (3.100)). Polinom derecesi 2'den başlar.

$$\phi = \phi_2, \phi = \phi_3, \phi = \phi_4, \phi = \phi_5 \dots \quad (3.99)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 \dots \quad (3.100)$$

Bu çalışmada Airy Gerilme Fonksiyonu, denklem (3.98)'i sağlayacak şekilde üniform olmayan 5.dereceden bir polinom olarak seçildi (Denklem 3.101).

$$\phi = \frac{x^2 y^3}{6} d + \frac{y^5}{20} f + \frac{xy^4}{12} e + \frac{x^2 y}{2} b + \frac{xy^2}{2} c \quad (3.101)$$

Böylece denklem (3.95), (3.96), (3.97) ile verilen gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi olur.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = dx^2 y + ndy^3 + mdxy^2 + cx \quad (3.102)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = d \frac{y^3}{3} + by \quad (3.103)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -dxy^2 - md \frac{y^3}{3} - bx - yc \quad (3.104)$$

Denklem (3.101)'de bulunan keyfi sabitler (d, f, e, b, c) biharmonik denklemi (Denklem 3.98) ve sınır koşullarını sağlama şartından bulunurlar.

Denklem (3.101), denklem (3.98)'de yerine yazılarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$e = \frac{2\bar{S}_{16}}{S_{11}} d \quad (3.105)$$

Burada $\frac{2\bar{S}_{16}}{S_{11}} = m$ alırsak

$$e = md \quad (3.106)$$

olur.

Bununla birlikte,

$$f = \frac{2\bar{S}_{16}m - 2\bar{S}_{12} - S_{66}}{3\bar{S}_{11}} d \quad (3.107)$$

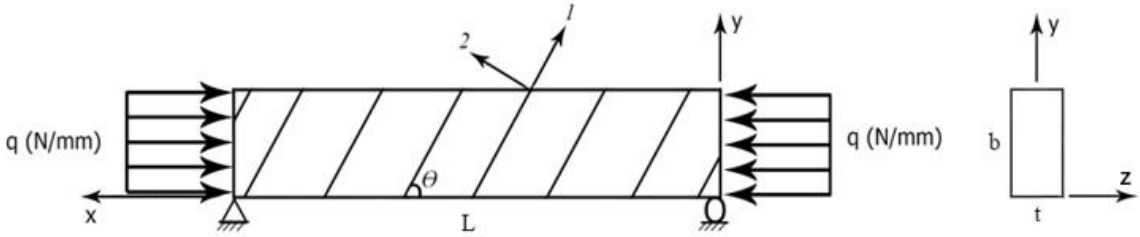
elde edilir. Burada $\frac{2\bar{S}_{16}m - 2\bar{S}_{12} - S_{66}}{3\bar{S}_{11}} = n$ alırsak,

$$f = nd \quad (3.108)$$

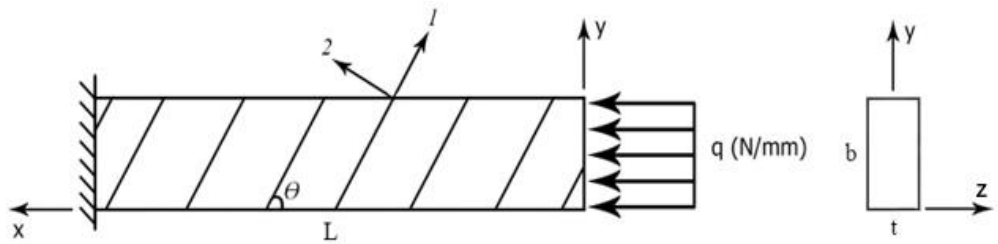
olur.

3.4.1. Sınır Koşulları

Bu çalışmada, düzlem içi üniform yük etkisindeki kiriş, basit destekli ve ankastre olmak üzere iki farklı sınır koşulu için incelenmiştir. Basit destekli kiriş şekil (3.4.) ve ankastre kiriş şekil (3.5.)'te verilmektedir.



Şekil 3.4. Düzlem içi yük etkisindeki basit destekli kiriş



Şekil 3.5. Düzlem içi yük etkisindeki ankastre kiriş

Burada θ fiber açısı olup 1 ve 2 ile gösterilen eksenler lokal eksenler (malzeme eksenidir).

İncelenen kirişin malzemesi Cr-Ni çelik sürekli fiberlerle güçlendirilmiş polietilen kompozittir. Polimer matrisli kompozitler yüksek özgül sertlik ve yüksek özgül mukavemet, geliştirilmiş kırılma dayanıklılığı, artırılmış darbe direncine sahiptir.

Çizelge (3.1.)’de Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin mekanik özellikleri, çizelge (3.2.)’de polietilen izotropik kirişin mekanik özellikleri, çizelge (3.3.)’te ise incelenen kirişin yük ve boyut özellikleri bulunmaktadır.

Çizelge 3.1. Cr-Ni sürekli fiber takviyeli polietilen matrisli kompozit kirişin mekanik özellikleri (Esendemir, 2003)

E₁ (MPa)	E₂ (MPa)	G₁₂ (MPa)	v₁₂	X (MPa)	Y (MPa)	M (MPa)
85000	74000	30000	0,3	230	24	48,9

Çizelge 3.2. Polietilen izotropik kirişin mekanik özellikleri (Schuster vd., 2007)

E (MPa)	σ (MPa)	G (MPa)	v
500	25	192	0,3

Çizelge 3.3. Basit destekli ve ankastre kirişin yük ve boyut özellikleri

q (N/mm)	L (mm)	b (mm)	t (mm)
250	300	10	5
			10

Kirişe yalnızca düzlem içi yükler etkimektedir ve düzlem dışı yük bulunmaması sebebiyle hem ankastre kirişte hem de basit destekli kirişte aynı mesnet tepkileri ve aynı gerilmeler oluşmaktadır. Bunun bir sonucu olarak kiriş boyunca oluşan gerilmeler de her kiriş türü için aynı değerde elde edilecektir. Dolayısıyla düzlem içi yük halinde analiz, ankastre ve basit destekli kiriş için aynıdır.

Böylece düzlem içi üniform yük etkisindeki ankastre ve basit destekli kompozit kiriş için sınır koşulları aşağıdaki gibidir (Lekhnitskii, 1981) (Esendemir, 2003).

$$y = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad (3.109)$$

$$y = 0 \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.110)$$

$$\int_0^y \sigma_x dA = -Q \quad (3.111)$$

$$\int_0^y \tau_{xy} dA = 0 \quad (3.112)$$

Burada dA kirişin en kesit alanıdır ve

$$dA = t dy \quad (3.113)$$

olarak ifade edilir.

Denklem (3.109)-(3.112) ile verilen sınır koşulları denklem (3.102)-(3.104) ile verilen gerilmeler ve denklem (3.105)-(3.108) ile verilen tanımlarla birlikte uygulandığında bilinmeyen sabitler (c, d, e, f) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$c = \frac{-4dxy - dy^2m + 2xy}{6} \quad (3.114)$$

$$d = \frac{-36Q}{12x^2y^2t + 9y^4nt + 10xy^3mt} \quad (3.115)$$

$$e = \frac{-36Qm}{12x^2y^2t + 9y^4nt + 10xy^3mt} \quad (3.116)$$

$$f = \frac{-36Qn}{12x^2y^2t + 9y^4nt + 10xy^3mt} \quad (3.117)$$

Bir kolon, düşey konumda olan ve bir aksenal yüke maruz bir kiriş gibi düşünülebileceğinden bu çalışmada kirişe uygulanan yükü belirlerken aşağıda verilen tanımlar dikkate alındı.

İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) tarafından her iki ucundan pim bağlantılı izotropik bir kolon için geliştirilen kritik burkulma yükü Euler Formülü olarak bilinir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{N}) \quad (3.118)$$

Euler bir ucu serbest diğer ucu ankastre izotropik bir kolon için kritik burkulma yükünü,

$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (\text{N}) \quad (3.119)$$

olarak tanımlamıştır ve formülü başka sınır koşulları için de uygulanmak üzere aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (\text{N}) \quad (3.120)$$

Burada L_e etkin uzunluk olarak tanımlanır ve formüle genelleştirilmiş Euler Formülü denir. Etkin uzunluk L_e her iki ucundan pimli kolon için L ve bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için $2L$ olarak verilir. Burada I kesitin alansal eylemsizlik momentidir ve bu çalışmada incelenen dikdörtgensel kesitli kiriş için

$$I = \frac{ty^3}{12} \quad (\text{mm}^4) \quad (3.121)$$

olarak elde edilir.

Kritik yüke karşı gelen gerilmenin değeri, kritik gerilme adını alır ve σ_{kr} ile gösterilir. Kritik gerilme benzer yolla,

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} \quad (3.122)$$

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{AL_e^2} \quad (3.123)$$

olarak elde edilir.

Elasto-plastik gerilme analizinde kompozit malzemenin tamamen plastik olduğu kabul edildi. Kütle kuvvetlerini ihmal ederek düzlem gerilme hali için verilen denklem (3.20) ve denklem (3.21) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.124)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3.125)$$

Çözümde Tsai-Hill Kriteri kompozit malzeme için akma kriteri olarak alındı. Tsai-Hill Kriteri'ne göre ana malzeme doğrultusundaki eşdeğer gerilme şu şekildedir:

$$\sigma^{-2} = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \frac{X^2}{Y^2}\sigma_2^2 + \frac{X^2}{S^2}\tau_{12}^2 = X^2 \quad (3.126)$$

Burada X, 1 malzeme doğrultusundaki akma noktası; Y, 2 malzeme doğrultusundaki akma noktası; S 1-2 düzlemindeki kayma akma dayanımıdır. Malzeme doğrultularındaki gerilme bileşenleri şu şekilde yazılır:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (3.127)$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (3.128)$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (3.129)$$

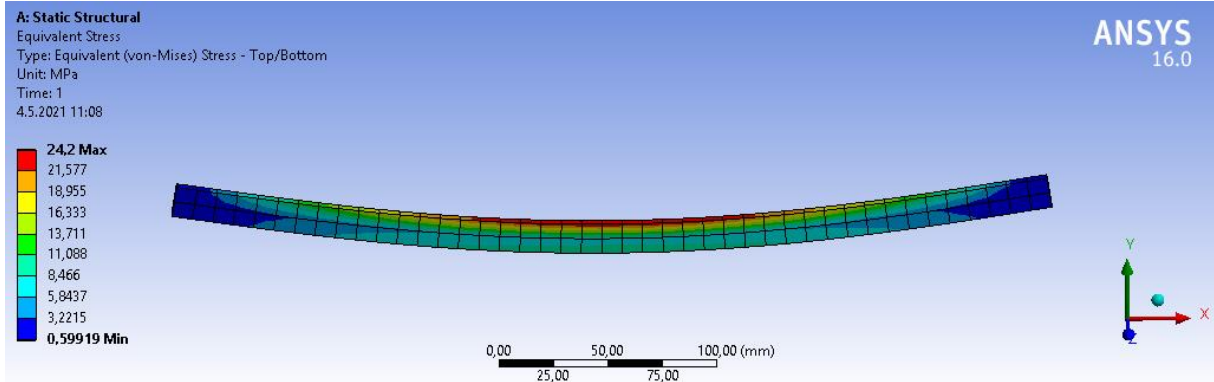
Ana malzeme doğrultularındaki gerilme bileşenleri ve kiriş sınır koşulları Tsai-Hill teorisi'ne uygulandığında akma gerilme dayanımını yani plastik gerilme sınırını veren denklem şöyle elde edilmiştir (Esendemir, 2003):

$$\sigma_{x(p)} = \frac{X}{\sqrt{\cos^4(\theta) - \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + ((X^2 \sin^4(\theta))/Y^2) + ((X^2 \sin^2(\theta)\cos^2(\theta))/M^2)}} \quad (3.130)$$

Belirli bir yük etkisindeki malzemede oluşan gerilmeler akma gerilme dayanımından küçükse yük kaldırıldıktan sonra malzemede bulunan gerilmeler de kalkar yani bu gerilme elastik gerilme olarak adlandırılır. Malzemede oluşan gerilmeler akma gerilme dayanımını geçerse plastik gerilmeler meydana gelir ve yük kaldırıldıktan malzemede artık gerilmeler kalır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Esendemir (2004) çalışmasında, $t=5$ mm, $h=14$ mm, $L=160$ mm, 0° fiber açısı ve orta noktasından 50 N yüklemeye sahip eğilme etkisindeki basit destekli kiriş sınır koşullarında analitik çözüm için elastik gerilme analiz sonucunu maksimum gerilme olarak 24,489 MPa olarak bulmuştur. Bu gerilme analizinin Ansys çözümü tarafımızca 24,200 MPa (Şekil 4.1.) olarak bulunup analitik çözüm sonucuyla doğrulanmıştır.

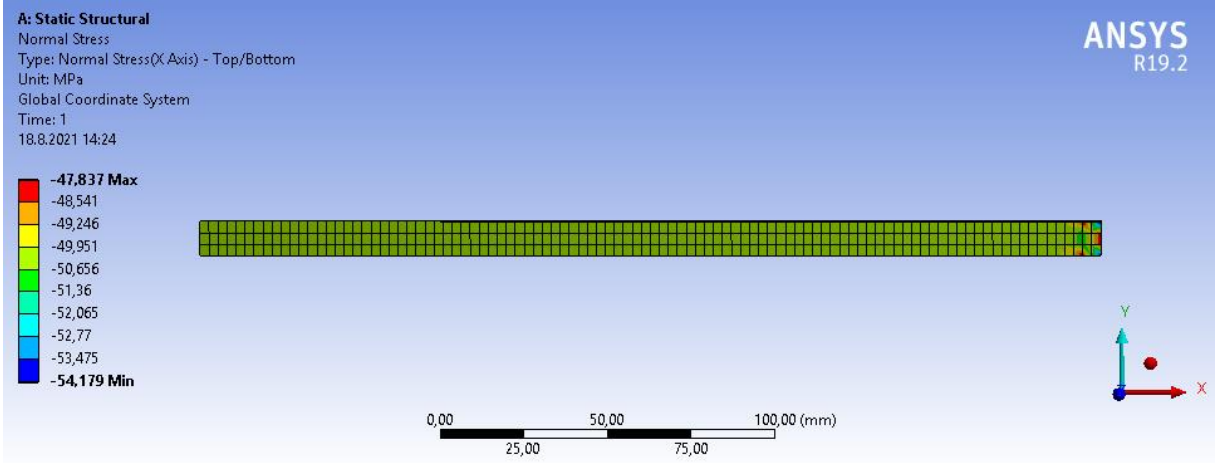


Şekil 4.1. Esendemir (2004) çalışmasının Ansys gerilme analizi sonucu

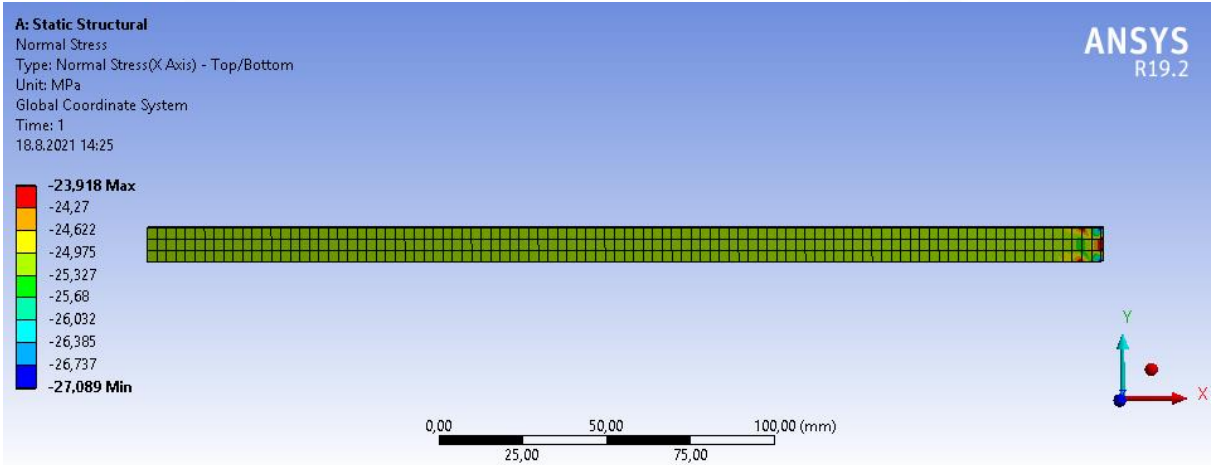
Şekil (4.2.) bu çalışmada incelenen polietilen izotropik malzemenin mekanik özelliklerinin Ansys kütüphanesine tanımlanmasını göstermektedir. Şekil (4.3.) ve şekil (4.4.)'te polietilen izotropik kirişin bu çalışmada incelenen yükleme ve sınır koşulları için Ansys normal gerilme analizi sonuçları; şekil (4.5.) ve şekil (4.6.)'da ise polietilen izotropik kirişin Ansys deformasyon analizi sonuçları bulunmaktadır.

Properties of Outline Row 5: Polyethylene isotropic material				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Isotropic Elasticity			
4	Derive from	Young's Modulu...		
5	Young's Modulus	500	MPa	
6	Poisson's Ratio	0,3		
7	Bulk Modulus	4,1667E+08	Pa	
8	Shear Modulus	1,9231E+08	Pa	
9	Tensile Yield Strength	25	MPa	
10	Compressive Yield Strength	25	MPa	

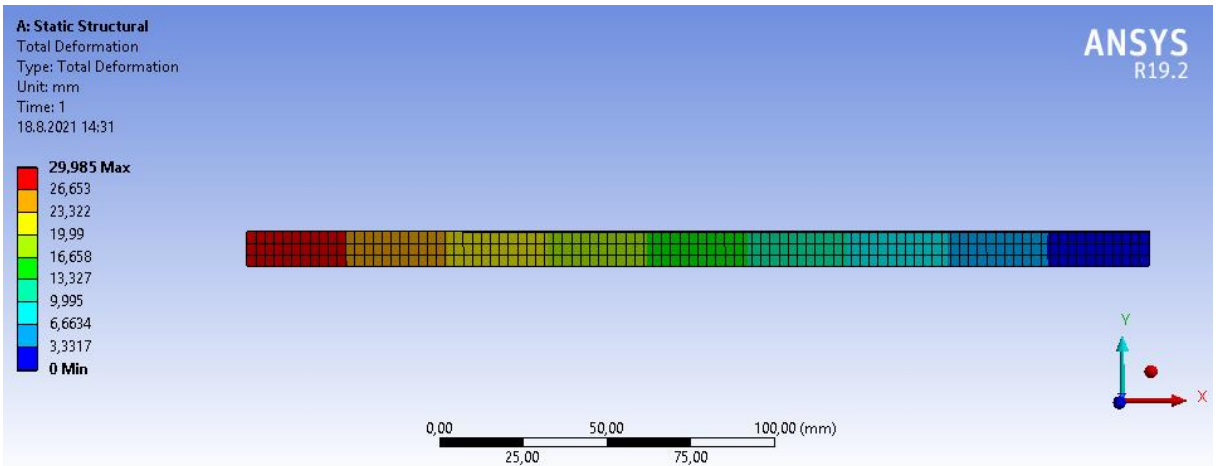
Şekil 4.2. Polietilen izotropik malzemenin mekanik özelliklerinin Ansys malzeme kütüphanesine tanımlanması



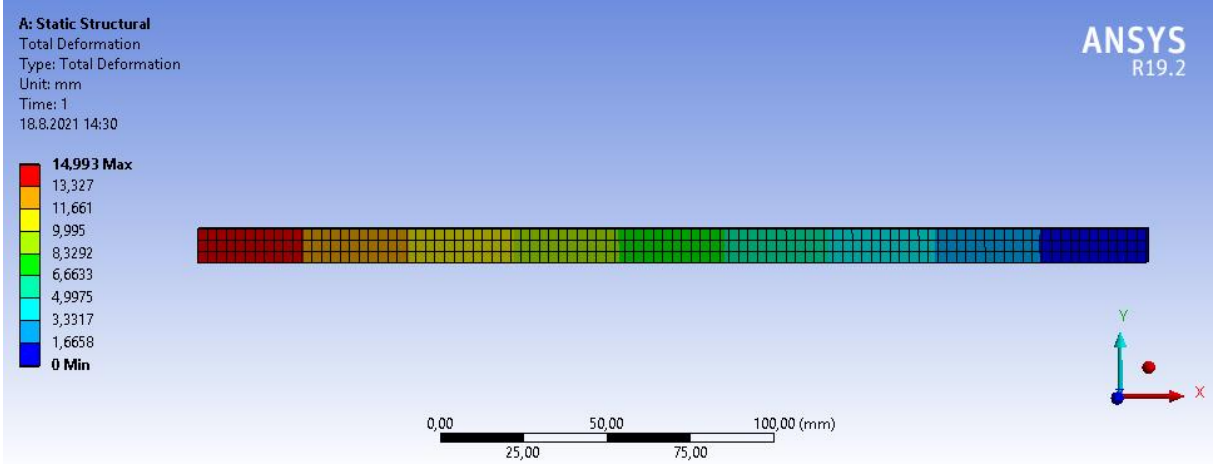
Şekil 4.3. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu



Şekil 4.4. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu



Şekil 4.5. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu

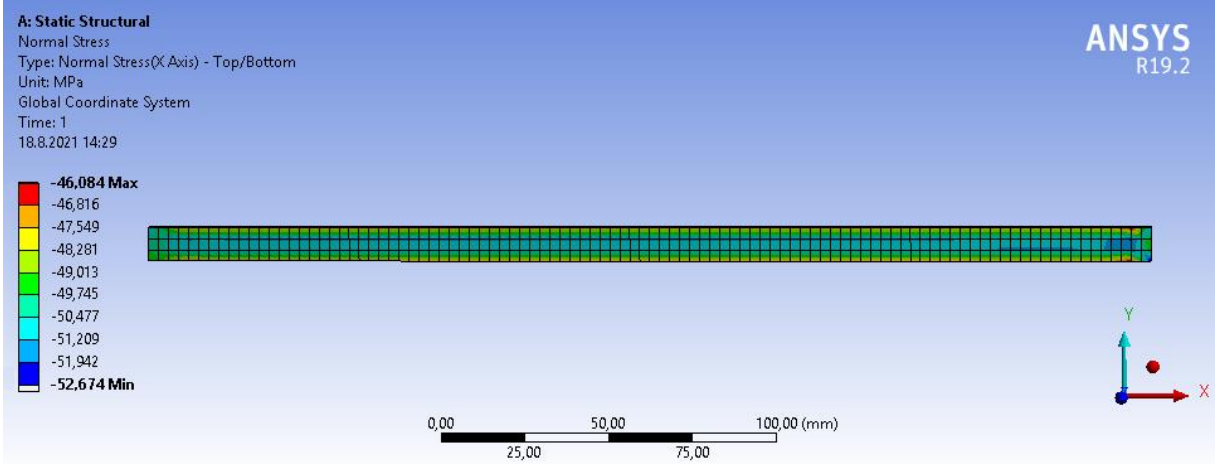


Şekil 4.6. $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip polietilen izotropik kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu

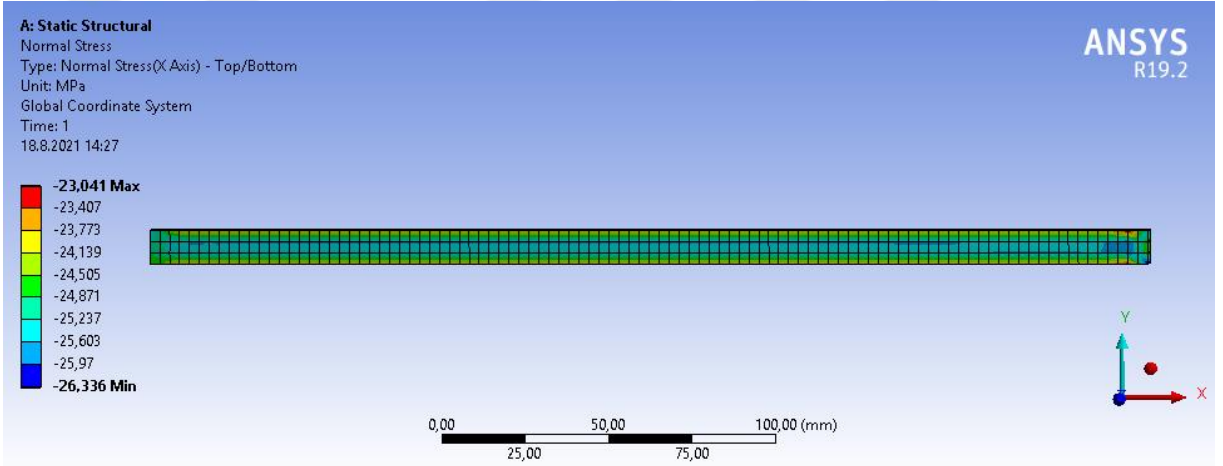
Şekil (4.7.) bu çalışmada incelenen Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit malzemenin mekanik özelliklerinin Ansys kütüphanesine tanımlanmasını göstermektedir. Şekil (4.8.) ve şekil (4.9.)’da Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin bu çalışmada incelenen yükleme ve sınır koşulları için Ansys normal gerilme analizi sonuçları; şekil (4.10.) ve şekil (4.11.)’de ise Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys deformasyon analizi sonuçları bulunmaktadır.

Properties of Outline Row 3: Cr-Ni fiber, polyethylene matrix composite material				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Material Field Variables	Table		
3	Orthotropic Elasticity			
4	Young's Modulus X direction	85000	MPa	
5	Young's Modulus Y direction	74000	MPa	
6	Young's Modulus Z direction	74000	MPa	
7	Poisson's Ratio XY	0,3		
8	Poisson's Ratio YZ	0,3		
9	Poisson's Ratio XZ	0,3		
10	Shear Modulus XY	30000	MPa	
11	Shear Modulus YZ	30000	MPa	
12	Shear Modulus XZ	30000	MPa	
13	Orthotropic Stress Limits			
14	Tensile X direction	230	MPa	
15	Tensile Y direction	24	MPa	
16	Tensile Z direction	24	MPa	
17	Compressive X direction	-230	MPa	
18	Compressive Y direction	-24	MPa	
19	Compressive Z direction	-24	MPa	
20	Shear XY	48,9	MPa	
21	Shear YZ	48,9	MPa	
22	Shear XZ	48,9	MPa	

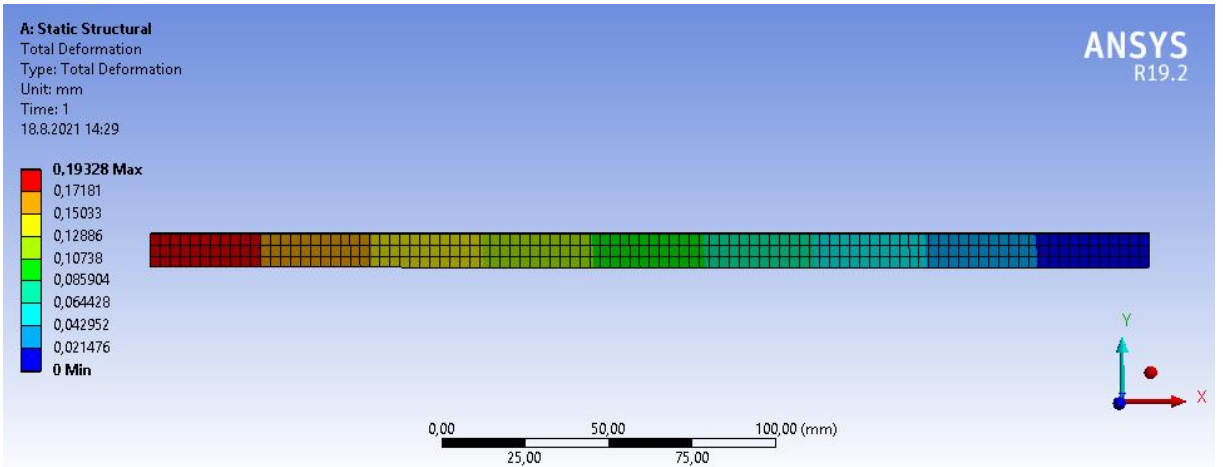
Şekil 4.7. Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit malzemenin mekanik özelliklerinin Ansys malzeme kütüphanesine tanımlanması



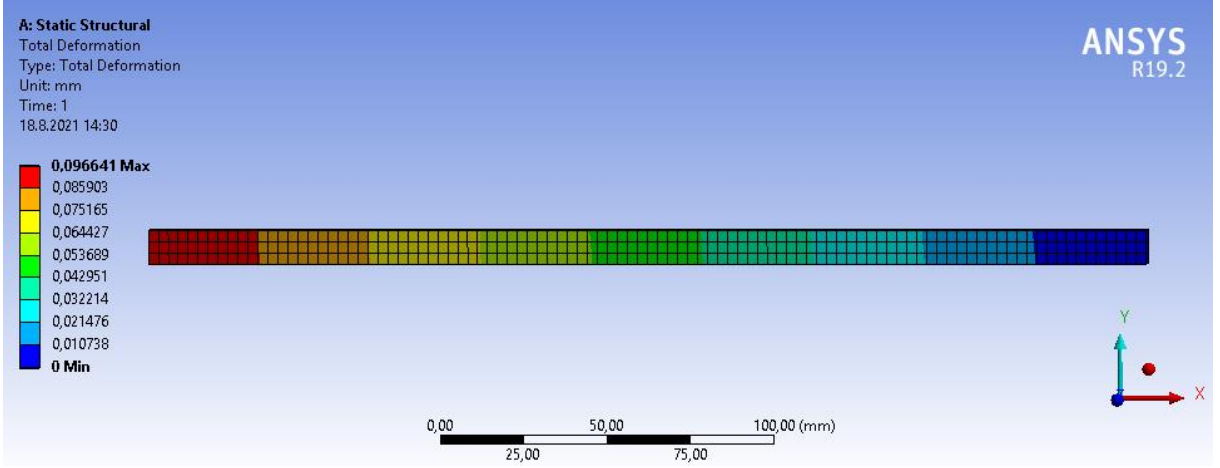
Şekil 4.8. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu



Şekil 4.9. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys normal gerilme analizi sonucu



Şekil 4.10. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu



Şekil 4.11. 0° fiber açısı, $q=250$ N/mm yük, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm sınır koşullarına sahip Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin Ansys deformasyon analizi sonucu

Düzlem içi yük etkisindeki kiriş için gerilme denklemleri kullanılarak gerçekleştirilen analitik çözüm sonuçları çizelge (4.1.)-(4.4.)’te, artık gerilme değişim grafikleri şekil (4.12.) ve şekil (4.13.)’te yer almaktadır.

Çizelge 4.1. $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm olan polietilen izotropik kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri

x (mm)	σ_x Ansys (MPa)	σ_x (MPa)	$\sigma_{x(p)}$ (MPa)	$\sigma_{x(r)}$ (MPa)
50	-50,000	-50,000	-25,000	-25,000
100	-50,000	-50,000	-25,000	-25,000
150	-50,000	-50,000	-25,000	-25,000
200	-50,000	-50,000	-25,000	-25,000
250	-50,000	-50,000	-25,000	-25,000
300	-54,719	-50,000	-25,000	-25,000

Çizelge 4.2. $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm olan polietilen izotropik kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri

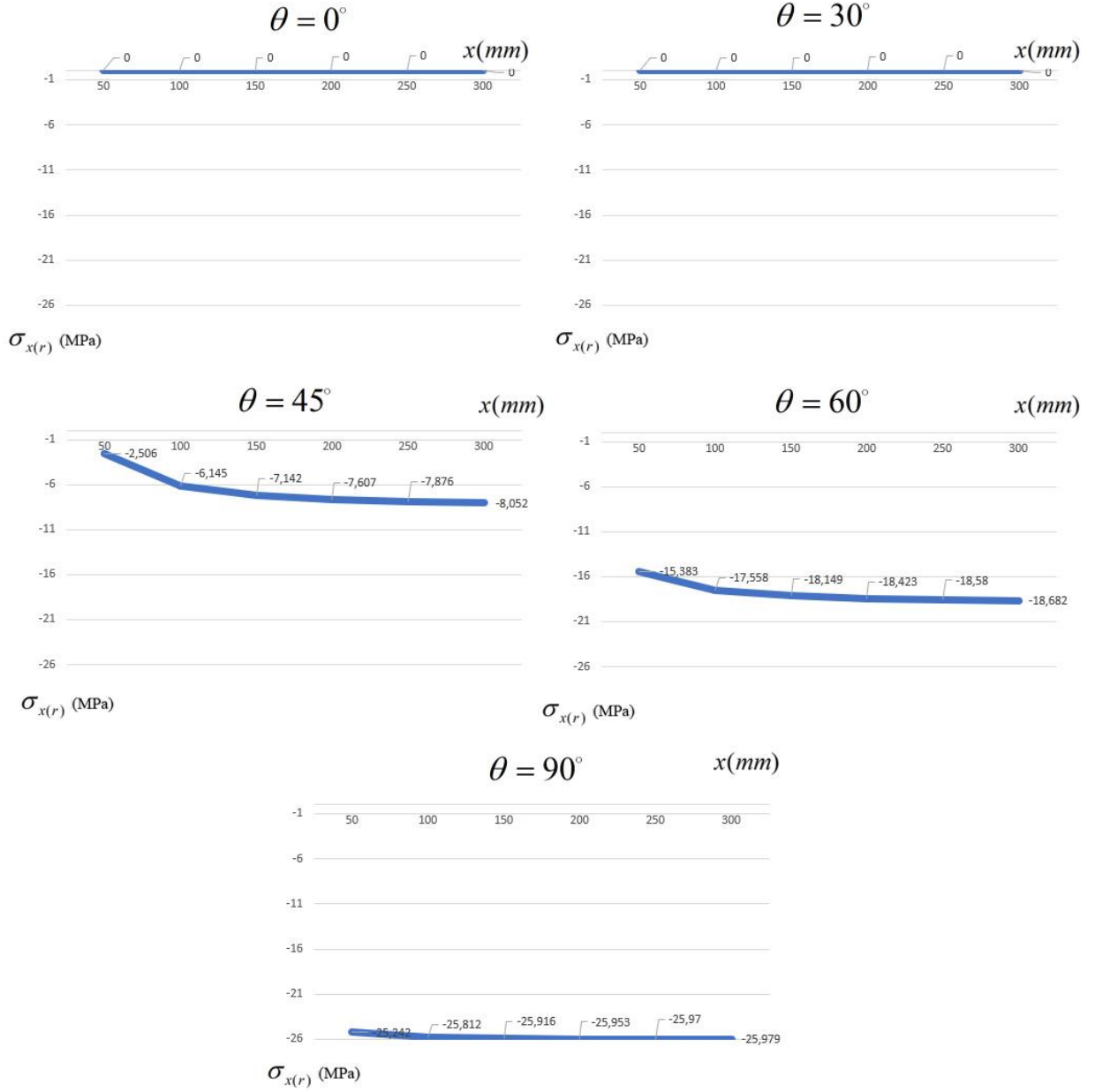
x (mm)	σ_x Ansys (MPa)	σ_x (MPa)	$\sigma_{x(p)}$ (MPa)	$\sigma_{x(r)}$ (MPa)
50	-25,000	-25,000	-25,000	0,000
100	-25,000	-25,000	-25,000	0,000
150	-25,000	-25,000	-25,000	0,000
200	-25,000	-25,000	-25,000	0,000
250	-25,000	-25,000	-25,000	0,000
300	-27,089	-25,000	-25,000	0,000

Çizelge 4.3. 0° , 30° , 45° , 60° ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri

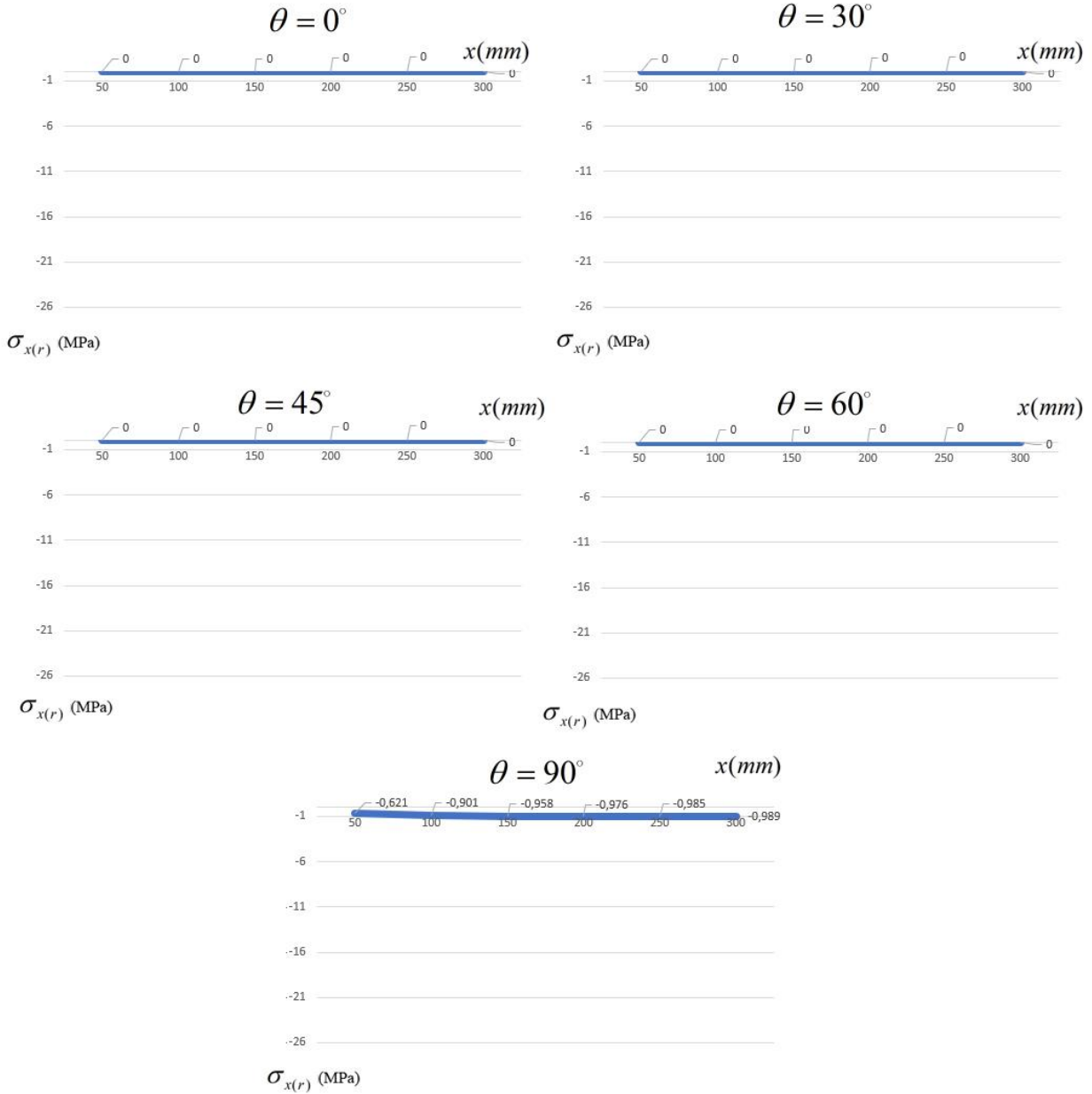
θ (Derece)	x (mm)	σ_x (MPa)	$\sigma_{x(p)}$ (MPa)	$\sigma_{x(r)}$ (MPa)	σ_x Ansys (MPa)
0°	50	-46,459	-230,000	-	-47,697
	100	-49,159	-230,000	-	-47,697
	150	-49,629	-230,000	-	-47,697
	200	-49,792	-230,000	-	-47,697
	250	-49,867	-230,000	-	-47,697
	300	-49,908	-230,000	-	-52,674
30°	50	-40,161	-71,839	-	
	100	-45,909	-71,839	-	
	150	-47,488	-71,839	-	
	200	-48,114	-71,839	-	
	250	-48,515	-71,839	-	
	300	-48,775	-71,839	-	
45°	50	-43,623	-41,117	-2,506	
	100	-47,262	-41,117	-6,145	
	150	-48,259	-41,117	-7,142	
	200	-48,724	-41,117	-7,607	
	250	-48,993	-41,117	-7,876	
	300	-49,169	-41,117	-8,052	
60°	50	-46,221	-30,838	-15,383	
	100	-48,396	-30,838	-17,558	
	150	-48,987	-30,838	-18,149	
	200	-49,261	-30,838	-18,423	
	250	-49,418	-30,838	-18,580	
	300	-49,520	-30,838	-18,682	
90°	50	-49,242	-24,000	-25,242	
	100	-49,812	-24,000	-25,812	
	150	-49,916	-24,000	-25,916	
	200	-49,953	-24,000	-25,953	
	250	-49,970	-24,000	-25,970	
	300	-49,979	-24,000	-25,979	

Çizelge 4.4. $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki gerilme değerleri

θ (Derece)	x (mm)	σ_x (MPa)	$\sigma_{x(p)}$ (MPa)	$\sigma_{x(r)}$ (MPa)	σ_x Ansys (MPa)
0°	50	-23,223	-230,000	-	-23,849
	100	-24,580	-230,000	-	-23,849
	150	-24,815	-230,000	-	-23,849
	200	-24,896	-230,000	-	-23,849
	250	-24,934	-230,000	-	-23,849
	300	-24,954	-230,000	-	-26,336
30°	50	-20,081	-71,839	-	
	100	-22,955	-71,839	-	
	150	-23,701	-71,839	-	
	200	-24,057	-71,839	-	
	250	-24,257	-71,839	-	
	300	-24,387	-71,839	-	
45°	50	-21,812	-41,117	-	
	100	-23,631	-41,117	-	
	150	-24,129	-41,117	-	
	200	-24,362	-41,117	-	
	250	-24,497	-41,117	-	
	300	-24,584	-41,117	-	
60°	50	-23,110	-30,838	-	
	100	-24,198	-30,838	-	
	150	-24,494	-30,838	-	
	200	-24,630	-30,838	-	
	250	-24,709	-30,838	-	
	300	-24,760	-30,838	-	
90°	50	-24,621	-24,000	-0,621	
	100	-24,901	-24,000	-0,901	
	150	-24,958	-24,000	-0,958	
	200	-24,976	-24,000	-0,976	
	250	-24,985	-24,000	-0,985	
	300	-24,989	-24,000	-0,989	



Şekil 4.12. 0° , 30° , 45° , 60° ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=5$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki artık gerilme değişim grafikleri



Şekil 4.13. $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ve 90° fiber açıları için $q=250$ N/mm yük etkisinde, $L=300$ mm, $b=10$ mm, $t=10$ mm olan Cr-Ni fiber polietilen matrisli kompozit kirişin x eksenine göre en üst yüzeyindeki artık gerilme değişim grafikleri

Ansys çözüm yaklaşımı şekil değiştirme tabanlıdır. Bu çalışmada kullandığımız analitik çözüm yaklaşımı ise gerilme tabanlıdır. Analitik çözüm ile Ansys çözüm sonuçları arasındaki küçük farklılıkların bu sebepten kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Bu farklılıklar kabul edilebilir değerler içerisinde yer almaktadır.

Analiz sonuçlarındaki $-$ işareti basma gerilmesini ifade etmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, düzlem içi yük etkisindeki polimer matrisli basit destekli ve ankastre kompozit kirişlerin farklı fiber açıları ve farklı b/t oranlarına göre Tsai-Hill Kriteri kullanılarak elasto-plastik gerilme analizi gerçekleştirilmiştir.

Analiz sonuçlarına göre;

- Plastik gerilme sınırı malzeme özelliklerine bağlı olduğundan farklı kiriş boyutları ve yükleme derecelerine bağlı olarak değişmediği,
- Kompozit kirişte fiber açısı arttıkça plastik gerilme sınırının azaldığı,
- Kompozit kirişin her iki b/t oranı için fiber açısı arttıkça normal gerilmelerin artış gösterdiği,
- Kompozit kirişin her iki b/t oranı için fiber açısı arttıkça artık gerilmelerin de arttığı,
- Kompozit kirişte kiriş kalınlığı iki katına çıkarıldığında 45° ve 60° fiber açıları için artık gerilmelerin sıfırlandığı, 90° için ise sıfıra yaklaştığı,
- Kompozit kirişte serbest ucundan sabitlenmiş ucuna yaklaştıkça normal gerilmelerin ve buna bağlı olarak artık gerilmelerin artış gösterdiği,
- Cr-Ni fiber takviyeli polietilen matrisli kompozit kirişte deformasyonun sıfıra yakın olduğu,
- Polietilen izotropik kirişte meydana gelen deformasyonun, Cr-Ni fiber takviyeli polietilen matrisli kompozit kirişte meydana gelen deformasyonun yaklaşık 150 katı değerinde olduğu bulunmuştur.

Literatürdeki eğilme etkisindeki kiriş için yapılan çalışmalar incelendiğinde fiber açısı arttıkça kirişteki gerilmelerin azaldığı görülmüştür. Düzlem içi yük etkisindeki kiriş için ise fiber açısının artması küçük değerlerde de olsa normal gerilmeleri artırmaktadır ve aynı zamanda plastik gerilme sınırını düşürmektedir. Bu da artık gerilmelerin artmasına yol açan olumsuz bir durum olmaktadır. Tek başına düzlem içi yük etki eden kirişte fiber dizilimleri yapılırken fiber açısının $\theta = 0^\circ$ olması uygundur. Tüm sınır koşulları sabitken kirişin kalınlığının artırılmasının gerilmeleri ve deformasyonu azaltma yönünde olumlu etkisi söz konusudur. Tek başına polietilen izotropik malzeme kullanmak yerine Cr-Ni fiberle güçlendirilmiş polietilen matrisli kompozit malzeme kullanımı malzemenin dayanımını büyük oranda artırmaktadır. Tüm bu veriler dikkate alınarak uygun kiriş konstrüksiyonu gerçekleştirilmelidir.

KAYNAKLAR

- Altan G., Atlıhan G., Topcu M. (2004). Tekil Kuvvetle Yüklenmiş Örgülü Çelik Fiber Takviyeli Termoplastik Kompozit Ankastre Kirişlerde Artık Gerilme Analizi, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi, 10(1), 119-125.
- Aycul H., Kaya S. (2010). An Elastic-Plastic and Residual Stress Analysis Steel Reinforced Thermoplastic Composite Cantilever Beam, Journal of Materials and Design, 31(7), 3474-3481.
- Beer F., Johnston E., Dewolf J., Mazurek D. (2012). Mechanics of Materials, McGraw-Hill.
- Chu P., Li X., Wu J., Lee K. Y. (2015). Two Dimensional Elasticity Solution of Elastic Strips and Beams Made of Functionally Graded Materials Under Tension and Bending, Acta mesh, 226, 2235-2253.
- Ding H., Haung D., Wang H. (2006). Analytical Solutions For Fixed-Fixed Anisotropic Beam Subjected to Uniform Load, Applied Mathematics and Mechanics, 27(10), 1305-1310.
- Esendemir Ü. (2003). An Elastic-Plastic Stress Analysis in a Polymer Matrix Composite Beam of Arbitrary Orientation Supported from Two Ends Under a Transverse Uniformly Distributed Load, 22(9), 833-848.
- Esendemir Ü., Öndürücü A. (2003). Üçgen Yayılı Yüke Maruz Ankastre Kirişlerde Elastik-Plastik Gerilme Analizi, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 9(3), 411-417.
- Esendemir Ü. (2004). Orta Noktasından P Yüküne Maruz her İki Tarafından Desteklenmiş Metal Matriksli Kompozit bir Kiriş için Elastik Gerilme Analizi, Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi, 10(1), 81-86.
- Esendemir Ü. (2004). An Elastic-Plastic Stress Analysis in a Polymer-Matrix Composite Beam of Arbitrary Orientation Supported from Two Ends Acted Upon with A Force at the Mid Point, Journal of Reinforced Plastics and Composites, 23(6), 613-623.

- Esendemir Ü., Öndürücü A. (2009). İzotrop ve Anizotrop Ankastre Kirişlerdeki Gerilme Analizlerinin İncelenmesine Yönelik Bir Uygulama, CBÜ Soma Meslek Yüksekokulu Teknik Bilimler Dergisi, 2(12), 1-13.
- Karakılçık S., Özbay M., Adin H. (2016). Dairesel Delikli Kompozit Levhalarda Gerilme Yığılımlarının İncelenmesi, Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi, 7(1), 113-128.
- Karakuzu R., Özcan R. (1996). Exact Solution of Elasto-Plastic Stresses in a Metal-Matrix Composite Beam of Arbitrary Orientation Subjected to Transverse Loads, Composites Science and Technology, 56, 1383-1389.
- Kaw A. (2006). Mechanics of Composite Materials, LLC.
- Kurşun A., Çetin M., Aykul H. (2014). Elastic Stres Analysis of Composite Cantilever Beam Loaded Uniformly, World Academy of Science Engineering and Technology International Journal of Mechanical, 8(2), 277-279.
- Lekhnitskii S. G. (1981). Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Mir Publishers.
- Özben T., Solmaz M. (2010). Ortasında Elips Delik Bulunan Ankastre Kirişin Tek Eksenli Yüklemede Gerilme Yığılıması Faktörünün Analizi, 2.Ulusal Tasarım İmalat ve Analiz Kongresi, 551-558, Balıkesir.
- Rastgoo A., Amirian A. (2007). Estimating The Stresses In Cantilever Beam Loaded By A Parabolically Distributed Load with Airy Stress Function, Int J Mech Mater Des, 3, 253-264.
- Sayman O., Esendemir Ü., Öndürücü A. (2001). An Exact Elasto-Plastic Solution of Metal Matrix Composite Cantilever Beam Loaded by a Single Force at its Free End, Pamukkale University Engineering College Journal of Engineering Sciences, 7(3), 313-321.
- Sayman O., Esendemir Ü. (2002). An Elastic Stress Analysis of Simply Supported Metal-Matrix Composite Beams Under a Transverse Uniformly Distributed Load, Journal of Composites Science and Technology, 62, 265-273.

- Schuster M., Turecek C., Kaiser B., Stampfl J., Liska R., Varga F. (2007). Evaluation of Biocompatible Properties of Reactive Diluents, *Journal of Macromolecular Science*, 44, 547-557.
- Tekin A., Esendemir Ü., Öndürücü A. (2004). Serbest Ucundan Tekil Bir Yüke Maruz Polimer Matriksli Kompozit Ankastre Bir Kiriş İçin Elasto-Plastik Gerilme Analizi, *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 3, 395-403.
- Topcu M., Öndürücü A. (2000). Dörtgen Delikli Kompozit Levhalarda Elasto-Plastik Gerilme Analizi, *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 6(1), 13-19.
- Yayla P. (2014). *Uygulamalı Elastisite Teorisi*, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- Zhan C., Liu Y. (2015). Plane Elasticity Solutions For Beams With Fixed Ends, *Journal of Zhejiang University*, 16(10), 805-819.