

**DOĞRUSAL OLMAYAN GÖRELİ TÜREVSEL ETKİLEŞİMLERİN
⁴⁰Ca ÇEKİRDEĞİNE UYGULANMASI**

**Yüksek Lisans Tezi
Çağrı AKMAN**

**Fizik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Serbülent YILDIRIM**

2019

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOĞRUSAL OLMAYAN GÖRELİ TÜREVSEL ETKİLEŞİMLERİN
⁴⁰Ca ÇEKİRDEĞİNE UYGULANMASI

Çağrı AKMAN

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serbülent YILDIRIM

TEKİRDAĞ-2019

Prof. Dr. Serbülent YILDIRIM danışmanlığında, Çağrı AKMAN tarafından hazırlanan “DOĞRUSAL OLMAYAN GÖRELİ TÜREVSEL ETKİLEŞİMLERİN ⁴⁰Ca ÇEKİRDEĞİNE UYGULANMASI” isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı : Doç. Dr. Kutsal BOZKURT

İmza:

Üye: Doç. Dr. Dilek KAZICI

İmza:

Üye: Prof. Dr. Serbülent YILDIRIM

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu adına

Doç. Dr. Bahar UYMAZ

Enstitü Müdürü

*Ne efsunkâr imişsin ah ey didâr-ı çekirdek
Esîr-i fizik olduk gerçi kurtulduk esâretten*

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
DOĞRUSAL OLMAYAN GÖRELİ TÜREVSEL ETKİLEŞİMLERİN
 ^{40}Ca ÇEKİRDEĞİNE UYGULANMASI

Çağrı AKMAN
Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serbürent YILDIRIM

Bu tezde; bütün mertebelerde non-linear türevsel etkileşmeleri içeren Ortalama Alan Modeli, Thomas-Fermi yaklaşımında atom çekirdeğine uygulanmıştır. Literatürde nükleer madde için uygulanan bu model tez kapsamında küresel simetrik ^{40}Ca çekirdeğine uygulanarak mezon alanlarının, baryon alanlarının yarıçapa göre değişimi ve nükleon başına bağlanma enerjileri hesaplanmıştır. Ayrıca ele alınan çekirdeğin etkin yarıçapı, yüzey enerjisi ve spin-orbit etkileşim potansiyeli yarıçapın fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Sonuçlar lineer Walecka modeli ile karşılaştırılmıştır. Hesaplama sonucunda non-linear türevsel modelin kesme parametresi Λ enerji ve baryon sayısı sınırları dahilinde 896 MeV bulunmuştur. Bu değer nükleer madde için bulunan kesme değerinden (770 MeV) daha büyüktür.

Anahtar Kelimeler: Görelî kuantum hidrodinamik modeller, Walecka modeli, Non-linear görelî nükleer modeller, nükleer madde, sonlu çekirdekler

2019, 63 Sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis
Application of
Relativistic Non-linear Derivative
Interactions in ^{40}Ca Finite Nuclei

Çağrı AKMAN
Tekirdağ Namık Kemal University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Serbüent YILDIRIM

In this thesis; the relativistic Mean Field Theory, which includes non-linear derivative interactions in all orders, was applied to atomic nucleus in the Thomas-Fermi approach. In the literature this model was applied for nuclear matter calculations where in this thesis the model is applied to the spherical symmetrical ^{40}Ca nucleus for the calculation of the meson fields, the baryon fields as a function of nuclear radius and the nuclear energies per nucleon. Additionally we also calculated effective nuclear radius, surface energy and the spin-orbit interaction potential as a function of radius. The results were compared with the linear Walecka model. As a result of the calculations, the cut-off parameter of the non-linear derivative model Λ was found to be 896 MeV within the limits of energy and baryon number. This value is found to be greater than the cut-off value (770 MeV) for nuclear matter.

Keywords: Relativistic quantum hydrodynamic models, Walecka model, Non-linear relativistic nuclear models, nuclear matter, finite nuclei

2019, 63 Pages

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
KISALTMALAR	iv
SEMBOLLER	v
ÇİZELGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
1. Giriş	1
1.1 Tarihi Temeller ve Literatür Özeti.....	2
2. Materyal ve Yöntem	6
2.1 Relativistik Olan ve Relativistik Olmayan Modeller	6
2.2 Lineer Walecka Modeli	7
2.3 Ortalama Alan Yaklaşımı ve KHD-1	12
2.4 Non-lineer Etkileşmeler	15
2.5 Non-lineer Türevsel Model (NLD)	18
3. Araştırmalar ve Bulgular	22
3.1 NLD Modelinin Sonlu Çekirdeklere Uyarlanması	22
3.1.1 Sonuç ve Öneriler	30
KAYNAKLAR	31
Ek 1 Lineer Walecka Modelinde Euler-Lagrange Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi	35
Ek 2 NLD Modelinde Euler-Lagrange Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi	39
2.1 Dirac Denklemi	40
2.2 Mezon Denklemleri:	42
2.3 Akı Yoğunlukları.....	44
2.4 Enerji Momentum Tensörü	46
2.5 Nükleer Madde.....	48
Ek 3 Lagrange Çarpanı μ 'nün Elde Edilmesi.....	52
Ek 4 NLD Modelinde Mezon Alan Denklemlerinin Küresel Koordinatlarda Açılımı	55
Ek 5 Nümerik Tartışma.....	56
ÖZGEÇMİŞ	63

KISALTMALAR

RHD	: Relativistic Quantum Hydrodynamic
KHD	: Kuantum Hidrodinamik
HF	: Hartree-Fock
DDHF	: Density Dependent Hartree-Fock
YBHF	: Yoğunluğa Bağlı Hartree-Fock
KED	: Kuantum Elektrodinamik
OBEP	: One Boson Exchange Potential
TBDP	: Tek Bozon Değiş Tokuş Potential
MFT	: Mean Field Theory
EoS	: Equation of State

SEMBOLLER

A	: Kütle Numarası
N	: Nötron Sayısı
Z	: Proton Sayısı
B	: Baryon Sayısı
Ψ	: Dirac Spinörü
Λ	: Kesme Parametresi
\mathcal{L}	: Lagrange Yoğunluğu
μ	: Lagrange Çarpanı
σ	: Sigma Mezonu
ω	: Omega Mezonu
ρ	: Rho Mezonu
δ	: Delta Mezonu

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1: KHD Modelde Nükleer Madde Lagrange Yoğunluğunda Yer Alan Alanlar ve Karşılık Gelen Parçacıklar	12
Çizelge 2.2: Parametre Setleri 1	16
Çizelge 2.3: Parametre Setleri 2	16
Çizelge 3.1: ^{40}Ca çekirdeğinin etkin yarıçap çarpanının r_0 , yüzey enerjisinin, spin-orbit etkileşmesinin skaler mezon kütesine bağımlılığı.....	29

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1	: Lineer Walecka modelinde mezon ve baryon yoğunluklarının yarıçapa göre değişimi	27
Şekil 3.2	: NLD modelde ^{40}Ca Mezon Yoğunlukları.....	28
Şekil 3.3	: NLD modelde ^{40}Ca Baryon Yoğunluğu	28
Şekil 3.4	: $\Lambda \rightarrow \infty$ limitinde NLD denklemlerinden elde edilen mezon ve baryon yoğunluklarının yarıçapa göre değişimi	28
Şekil 3.5	: $\Lambda \rightarrow \infty$ NLD ve Lineer Walecka değerlerinin karşılaştırılması	29
Şekil 3.6	: Spin-orbit potansiyeli, $\alpha(r)$ 'nin çekirdek yarıçapına göre değişimi .	30
Şekil E.1	: $\mu = 4.7$ fm'de r 'ye bağlı baryon sayısı değişimi	61
Şekil E.2	: $r = 5.24504$ fm'de μ 'ye bağlı baryon sayısı değişimi.....	61
Şekil E.3	: $r = 5.245033$ fm'de $\mu = 4.7$ fm'de Λ 'ya bağlı baryon sayısı değişimi	62

ÖNSÖZ

Öncelikle beni öğrencisi olarak kabul eden Namık Kemal Üniversitesi'ndeki tez danışmanım Prof. Dr. Serbülent YILDIRIM hocama teşekkür etmek istiyorum. Üç yıl boyunca çocuk merakıyla sorduğum her soruyu itina ile yanıtladı ve eksik olduğum alanlarla ilgili her zaman yardımcı oldu. Fizik bölümünün kıymetli bütün hocalarına; yüksek lisans eğitimim boyunca, lisans öğrenimim farklı olduğundan dolayı, fizik disiplinini anlamam için gerek derslerde gerek ders dışındaki çalışmalarımda yardımlarını esirgemediklerinden minnetim sonsuzdur.

Eğitimim boyunca maddi manevi desteklerinden dolayı aileme sonsuz teşekkür ederim. Her zaman daha iyi bir eğitim almam için yanımdaydılar. Onlar olmasa hayallerimi gerçekleştirmeye cesaret edemezdim.

Fizik üzerine teorik çalışma romantik hayalimi, romantik yazarımız Namık Kemal'in adının verildiği üniversitede yapmam hoş bir tesadüf...

Nisan 2019

Çağrı AKMAN

1. Giriş

Evrendeki görünür kütleinin yüzde 99'u nükleer yapı içindedir. Bizi ve dünyamızı çevreleyen yakın evrenimizdeki elementlerin (periyodik tablo) çekirdekleri başta olmak üzere yıldızların ve yıldız evreleri sırasında ortaya çıkan kozmik yapıların tamamında nükleer yapı söz konusudur.

Nükleer yapının temel yapı taşı protonlar ve nötronlardır (nükleonlar). Her ne kadar standart model çerçevesinde nükleonların bir kuark iç yapısı olduğu bilinse de atom çekirdekleri ve yıldız yapıları açısından bu içsel hareket serbestisi kendini belirli bir enerji rejimine kadar belli etmez.

1911 yılında Rutherford'un atom çekirdeğini keşfinden günümüze hem deneysel hem de kuramsal anlamda çok yoğun olarak çalışılan nükleer yapıların tek bir formülasyon altında ifadesi mümkün olamamıştır. Bu durum nükleer etkileşmelerin doğasının zenginliğinden ve yapının az sayıda parçacıktan çok sayıda parçacığa doğru çeşitli seviyede yapılar içermesinden kaynaklıdır.

Ancak, görelî fizik, kuantum mekaniği ve alan teorilerinin birleşimi sonucu, 50'li yıllardan sonra tutarlı ve geliştirilebilir modeller öne sürülmüştür. 70'li yıllardan sonra bilgisayar kullanımıyla birlikte sayısal hesaplamalar modellerin öngördüğü sonuçların hesaplanmasını sağlamış ve modeller sonraki yıllarda daha da çeşitlenerek gelişmiştir.

Bu tezin amacı görelî kuantum hidrodinamik (Relativistic Quantum Hydrodynamic RHD) adı verilen ve 1973 yılında Walecka tarafından geliştirilen tezinin zaman içerisinde daha da geliştirilerek non-lineer formdaki son hallerinden birisinin simetrik sonlu sistemlere (^{40}Ca atom çekirdeğine) uygulanmasıdır.

Tez ana hatlarıyla üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde konunun kısa bir tarihi geçmişi ile literatür özeti verilecektir. Daha sonra materyal metod kısmında Walecka modeli ve onun non-lineer etkileşimleri içeren formlarının matematiksel formülasyonu belirli bir detayda sunulacak, son kısımda ise bu teze

konu olan non-linear türevsel model (non-linear derivative model NLD) detaylı olarak verilecektir. Tezin bu kısmında hesaplamalar ve bulunan sonuçlar yer alacaktır. Burada kullanılan model için elde edilen hareket denklemleri ve bunların atom çekirdeği için nümerik çözümü tartışılacaktır. Hesaplama ayrıntıları eklerde verilmiştir.

1.1 Tarihi Temeller ve Literatür Özeti

Teorik alt yapıyı Paul Dirac'ın relativistik kuantum mekaniği için formüle ettiği Dirac denkleminin kadar götürebiliriz. Tarihi derinliği izlemek bu çalışmanın konusu değildir; ama yine de tarihi önemi olan bazı gelişmelere değinmek geliştirilen görelî teoriyi anlamak açısından yardımcı olacaktır. Paul Dirac'ın elektron için yazdığı ve kuantum mekaniği ile özel görelîliği birleştirdiği Dirac denkleminin çözümlerinde antiparçacıkların varlığını kuramsal olarak ortaya koyması tek parçacık için yazılmış bir tezin özünde çok parçacıklı bir problemi içerdiğini ortaya koymuştur (Dirac 1928).

Kütlesiz fotonun, sonsuz erimli elektromanyetik etkileşimlerin taşıyıcı parçacığı olmasına istinaden Yukawa (1935)'nin sonlu nükleer etkileşimler için kütleli bir ara parçacığı olabileceği öngörüsü, "mezon" denilen nükleer kuvvet taşıyıcılarının temeli olarak kabul edilir. Yukawa'nın nötr bir skaler alanla etkileşime giren nükleonların üzerindeki çalışmasına ek olarak Proca (1936) tarafsız bir vektör alanını ve Kemmer (1938) diğer alanları tanımlamışlardır.

Baryonları ve nötr skaler mezon alanları içeren nükleer çok parçacıklı sistemin kuantum alan teorisi ilk olarak 1951'de Schiff (1951) tarafından incelenmiştir ve nükleer doyumluğun skaler alanın doğrusal olmayan kendi kendine etkileşimlerinden kaynaklanabileceğini öne sürmüştür. Schiff'in klasik bir skaler mezon alanına dayanan nükleer teorik fikrini, önemli ölçüde ilerleten Johnson ve Teller (1955), klasik yoğun skaler bir alanın yarattığı potansiyelde nükleonun hareketini ve çekirdek yapısının ampirik özelliklerinin çoğunu açıklayabileceğine dikkat çekmişlerdir. Johnson ve Teller modellerini nükleer özellikleri açıklamak için hıza bağlı bir potansiyel tanımlamışlardır ve fenomenolojik modeli; nükleer kuvvetlerin, yoğunluğun ve enerjinin doyumluğuna yol açtığı, yükten bağımsız olduğu düşünceleri üzerine kurmuşlardır. Çekirdek kabuk yapısını elde etmek için güçlü bir spin-orbit çiftlenimi var saymışlardır. Schiff'in non-linear teorisinin aksine lineer bir teori kullanmışlardır

ve nükleonların skaler alanla etkileşiminde kuvvetli bir hız bağımlılığı ekleyerek nükleer doymunluğu elde etmişlerdir.

Duerr (1956), Johnson-Teller modelini daha da geliştirmiştir ve spin-orbit etkileşimi ve nükleon optik potansiyelinin reel kısmının enerji bağımlılığı dahil olmak üzere sonlu çekirdeklerin özelliklerini, vektör ve skaler mezon alanlar ile elde edilebileceğini göstermiştir. Nükleer doymunluğun doğal olarak böyle bir modelde ortaya çıktığını da gözlemlemiştir. Relativistik alan teorisi üzerinden çalışmasını yürütmesine rağmen, nükleer yapı tartışmasında relativistik olmayan ve non-lineer skaler çiftlenimi kullanmıştır.

Bu çalışma üzerinde biraz durmak gerekiyor. Duerr, nükleer kuvvetlerin relativistik etkileri üzerine çalışmasında, Johnson ve Teller'in yazdığı yükten bağımsız bir nükleer yapı oluşturmak için proton ve nötronun arasındaki farkların özdeşliklerinden (Fermi istatistiklerinden) ve farklı yük durumlarından kaynaklanmadığını varsaymıştı. Nükleer yapıyı açıklamak için skaler mezon alan ve vektör mezon alan içeren kendi Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarını oluşturmuş, etkileşim terimlerini (skaler, mezon, tensör...) tanımlamış ve baryon yoğunluğunun normalizasyon koşulunun yazmıştır.

Marx (1956); sıfır etkileşim erimde klasik bir skaler alanla etkileşime giren baryon sorununu incelemiştir ve eğer relativistik olarak ele alınırsa, yalnızca bu etkileşimin nükleer doymunluğa yol açabileceğini belirtmiştir. Daha sonra Kalman (1974) skaler alan teorisini astrofizik problemlerini çözmek için kullanmıştır. Klasik bir vektör mezon alanıyla etkileşime giren durağan baryon problemi ilk kez Ze L'Dovich (1962) tarafından incelenmiştir ve böyle bir sistemin, yüksek yoğunluklarda sıkıştırılma altında katı (stiff) bir hal denklemine sahip olabileceğini gözlemlemiştir.

Sonraki yıllarda relativistik nükleer sistemlerde çok parçacık kuantum alan teorisi birçok kişi tarafından da geliştirilmiştir. Moravcsik ve Noyes (1961) mezon alışverişi fikrini iki nükleon etkileşimi çerçevesinde incelemişlerdir. Dover ve Lemmer (1968) iki parçacık etkileşimini bir adım daha ileri götürerek çoklu parçacıklar üzerine tartışmayı geliştirmişlerdir ve etkileşimlerin büyük parçacıkların değişiminden

kaynaklandığı Fermi sistemlerini incelemişlerdir, tartışmalarına değişik mezonları dahil etmişlerdir.

Nükleer yapının formülasyonunda relativistik modellerin yanı sıra relativistik olmayan nükleer modeller de çalışılmıştır. Bu çalışmalar ve gelişimleri hakkında kısaca söz etmek gerekirse; geleneksel nükleer yapı teorisi, relativistik olmayan çok parçacıklı Schrödinger denkleminde dayanmaktadır ve durgun haldeki nükleon-nükleon potansiyeli (iki parçacık saçılma) verileri ve döteronun bağlanma özellikleriyle belirlenir. Daha sonra üçlü nükleon sistemleri ve Faddeev (Payne ve ark. 1980) denklemleri kullanılır.

Nükleer madde, Coulomb etkileşiminin ihmal edilmesi ve elde edilen ve toplam nükleonlarının sayısının ($A=N+Z$) sonsuza gitmesine izin verilerek eşit sayıda nötron ve protonlu hipotetik tekdüze sistemin, yalnızca toplu bağlanma enerjisi ve doyma yoğunluğunun karakterize edilmesiyle ifade edilir.

Hartree-Fock teorisi (Negele 1982, Svenne 1979), relativistik olmayan çok parçacık probleminin hesaplanmasının temelini oluşturmuştur. Bu model; kabuk yapısını ve nükleonların diğer nükleonlarla etkileşerek kendinden tutarlı (self consistent) tek parçacık potansiyeli ile çekirdek içinde hareketini temel alarak relativistik olmayan çok parçacık problemini inceler. Sistemin taban durumu, değişken olarak belirlenen tek nükleon dalga fonksiyonlarının antisimetrik bir Slater determinantı olarak kabul edilirse sonuç, her parçacığın kendi kendine tutarlı Hartree-Fock potansiyelinde hareket ettiği bir tek parçacık dalga denklemleri setine dönüşür. Bu sonucun fiziksel sadeliğine rağmen denklemler; karmaşık, çiftlenimli, non-linear ve integrodiferansiyeldir.

Sonlu nükleer sistemler için bu Hartree-Fock hesaplamaları dikkate alınarak relativistik olmayan nükleer teoride büyük bir ilerleme kaydedilmiştir. Bu yaklaşımda ya nükleer maddenin özelliklerini doğru vermek üzere ayarlanan fenomenolojik iki parçacık potansiyeli ya da uygun yoğunlukta nükleer madde hesaplamalarına (G-matris elemanları) dayanan daha gerçekçi bir etkileşim kullanılır. Bu etkileşim, sonlu çekirdeklerin hesaplanması için temel bir kısıtlama olan gözlenen nükleer madde özelliklerini vermek için de ayarlanmalıdır. Tipik olarak, bu etkileşimler nükleer yoğunluğa açık bir bağımlılık içerir. Yoğunluğa bağlı Hartree-Fock

(YBHF) modellerinde periyodik tablodaki çekirdeklerin yük ve kütle yoğunluklarının hesaplanması oldukça başarılıdır (Harada 2005).

Nükleer yapının tek parçacık modelde açıklanması, nükleon saçılımının optik bir potansiyel yaklaşımında analiz edilmesine dayanır. Düşük enerjili nükleonlar için, bu potansiyelin reel kısmı temelde Fermi yüzeyine yakın Hartree-Fock sonucudur. Bununla birlikte, bu reel kısımda güçlü bir enerji bağımlılığı vardır ve birkaç yüz MeV enerjilerinde itici olur. Relativistik olmayan çok parçacık probleminde bu, iki parçacık etkileşimindeki yerellik dışı bir ilişkidir (Serot ve Walecka 1986). Polarize protonların saçılma deneyleri, optik potansiyelde güçlü bir spin bağımlılığı ortaya koymaktadır ve aynı şekilde bağıl durum spin-orbit etkileşimi gibi relativistik olmayan yaklaşım da spin-orbit etkilerin öngörülmesinde zorluklarla karşılaşmaktadır.

Relativistik olmayan çok parçacık formalizmin nükleer yapıyı statik iki nükleon potansiyeli açısından açıklamadaki başarısına rağmen, bu yaklaşım tam bir çekirdek anlayışı için yetersizdir.

2. Materyal ve Yöntem

2.1 Relativistik Olan ve Relativistik Olmayan Modeller

En temel nükleer teori düşük enerjilerde relativistik olmayan iki parçacık etkileşmeleri altında Fermiyonların oluşturduğu kuantum mekaniksel bir çok parçacık problemi üzerine kuruludur. Bu iki parçacık etkileşmesinin izole nükleonlar arasındaki mezon alışverişine dayandığı anlaşılmıştır. Dolayısıyla matematiksel formülasyon olarak noktasal nükleonların farklı tür mezonlarla etkileşimlerini içeren relativistik bir Lagrange yoğunluğu yazılması ile teori formüle edilir. Yazılan Lagrange yoğunluğunun parametreleri yapılan nükleon-nükleon saçılma hesaplamalarının var olan deneysel verilere uydurulması ile teori parametreleri tamamlanır (Nagels ve ark. 1978, Lacombe ve ark. 1980, Civitarese ve ark. 1987, Machleidt 1989).

Bu yaklaşımla elde edilen nükleon-nükleon etkileşmesi yakın mesafede çok itici olduğundan perturbasyon teknikleri ya da ortalama alan yaklaşımlarıyla ele alınamaz. Böylesi durumlar için Brueckner tipi bir hesaplama ile nükleer ortamı da hesaba katan bir etkin etkileşim (G-matris) formülasyonu gereklidir (Negele 1970).

Relativistik olmayan nükleer modellerde Brueckner teorisi etkin üç-parçacık kuvvetleri dahil edilmeden yeteri derecede tatmin edici çözümler vermezken (Carlson ve ark. 1983, Wiringa 1993) relativistik durumlarda Brueckner teorisi; ancak nükleer madde için uygulanabilmiştir (Anastasio ve ark. 1983, Horowitz ve Serot 1987, Müther ve ark. 1988, Brockmann ve Machleidt 1990). Dolayısıyla relativistik olmayan yaklaşımda çoğunlukla yoğunluk bağımlı enerji fonksiyoneli içeren varyasyonel hesaplamalara dayanan Hartree-Fock (HF) yaklaşımları yapılmaktadır. Bu yaklaşımların en ünlü ikisi Vautherin ve Brink (1972) ve Dechargé ve Gogny (1980) kuvvetlerini içeren modellerdir.

Walecka'nın yetmişli yıllarda tekrar ele aldığı orjini ellilerde Schiff (1951) ve Johnson ve Teller (1955), Duerr ve Teller (1956) dayanan relativistik model her aşamada mezon hareket serbestisini ve relativistik tutarlılığı sağlanarak tam bir

kuantum alan teorisi oluşturulmuştur (Serot ve Walecka 1986, Walecka 1974). Bu yaklaşımda da perturbatif işlemler yapılamamakla birlikte ortalama alan yaklaşımında nükleer madde ve sonlu çekirdeklerde oldukça tutarlı sonuçlar vermektedir. Bu yaklaşımda Lagrange parametreleri saçılma deneyi sonuçlarına değil, nükleer madde ve sonlu çekirdek özelliklerine fit edilmektedir. Bundan dolayı bu yaklaşımda nükleon-nükleon saçılma sonuçlarını tutarlı bir şekilde ortalama alan modellerinden teorinin bu halinde doğrudan türetmek pek olası değildir.

Yine de relativistik fenomenolojik model ile relativistik olmayan fenomenolojik model (HF) karşılaştırıldığında relativistik modellerin üstünlükleri vardır.

i) Yüksek enerji fiziğininde öngördüğü mezon hareket serbestisini dahil etmesinden dolayı daha temel fizik içermektedir.

ii) Formülasyon relativistik etkileri tam olarak içerdiğinden doğal olarak iki tip potansiyel içerir (skaler ve vektör), güçlü spin-orbit etkileşmesi ve anti parçacık çözümlerini barındırır.

iii) Hesaplama açısından relativistik olmayan yoğunluk bağımlı HF yaklaşımlarına oranla daha yapılabilir olmasıdır.

2.2 Lineer Walecka Modeli

Walecka'nın yetmişli yıllarda ortaya attığı kuantum hidrodinamik (KHD), sonraki yıllarda geliştirilen ve bu tezin de konusu olan non-lineer modellere kaynaklık ettiğinden ilk aşamada Lineer Walecka Modeli vermek iyi bir başlangıç basamağı olacaktır.

Walecka modelinin kuantum hidrodinamik 1 (KHD-1) ve kuantum hidrodinamik 2 (KHD-2) başlıkları altında fizik motivasyonu deneysel veriler ve matematiksel ayrıntılarının tamamını içeren bir toparlama makalesi Serot ve Walecka (1986) tarafından yayınlanmıştır. Biz burada Walecka modelinin nükleer madde ve sonlu sistemlere uygulandığı kısımlara yoğunlaşacağız.

Relativistik ve nonrelativistik modellerde kullanılan nükleer ortalama alan yaklaşımının temeli olan tek parçacık yaklaşımı, saçılmanın optik bir potansiyel (Wallace 1981) açısından analiz edildiğinde kendini gösteren bağlanmamış nükleonlara kadar uzanmaktadır. Düşük enerjili nükleonlar için, bu potansiyelin reel kısmı temelde

Fermi yüzeyine yakın Hartree-Fock sonucuyla uyumludur. Bununla birlikte, güçlü bir enerji bağımlılığı vardır ve yakın mesafelerde itici olmaktadır. Relativistik olmayan çok parçacık probleminde bu, iki parçacık etkileşmesindeki yerellik dışı bir ilişkiye karşılık gelir. Polarize protonlarla saçılma deneyleri, optik potansiyelde güçlü bir spin bağımlılığı ortaya çıkarmaktadır ve aynı şekilde bağlı durum spin-orbit etkileşimi gibi, relativistik olmayan yaklaşım da spin-bağımlı etkilerin öngörülmesinde zorluklarla karşılaşmaktadır.

Walecka ve Serot, kendilerinden önceki çalışmalarda yer alan, mezon değişimleri açısından nükleon-nükleon saçılmalarını ayrıntılı olarak incelemiştirler(Walecka 1974, Wallace 1981). Burada, relativistik iki-baryon problemin yaklaşık bir çözümüne dayanan ve birkaç farklı mezonun değişiminden kaynaklanan tek bozon değiş-tokuş potansiyeli (one boson exchange potential- OBEP) parametrelerinin elde edilmesini sağlamıştır. Bu yaklaşımla N-N saçılma faz kaymalarının 350 MeV'den düşük laboratuvar enerjileri için çok tatmin edici bir açıklaması elde edilebileceği gösterilmiştir. En önemli katkı σ , ω ve ρ mezonlarından geldiği gösterilmiştir. Diğer mezonlar da analizlere dahil edildiğinde daha az katkıları olduğu gözlemlenmiştir.

Çekirdeklerin daha eksiksiz ve tutarlı bir teorik çalışması için nükleer sistemdeki baryonların (N, Δ , ...) ve mezonların (π , σ , ω , ρ , ...) serbestlik derecelerinin daha da artırılması mümkündür. İlk etapta Δ , başlangıç olarak dahil edilebilir veya pion-nükleon dinamikleri sonucunda üretilebilir. Kuramın sadeliği açısından bu tezde bu tür etkileşimler dahil edilmemiştir.

Nükleer fiziğin çeşitli uygulamaları, aşırı koşullar altında (yüksek basınç, yüksek sıcaklık, yüksek nötron proton asimetrisi) nükleer maddenin davranışına bağlıdır. Örneğin nötron yıldızlarının özellikleri, sıradan çekirdeklerde gözlemlenenin aksine daha yüksek yoğunluklarda davranışı nötron madde denkleminin bağlıdır. Bu yüksek yoğunluklarda nötron maddesi durum denklemi, genel göreliliğin kütle çekimi ile nükleer basınç arasındaki dengeyi hesaplamak için gereklidir. Durum denklemi aynı zamanda hangi koşullar altında gravitasyon çekiminin, bir nötron yıldızının bir kara deliğe çökmesine neden olacağını belirler. Yıldız evlerinin son dönemlerinde oluşan süpernova patlamalarında, nükleer denkleminin hem yoğunluğun hem de sıcaklığın bir fonksiyonu olarak yazılması da gereklidir. Dolayısıyla kozmolojik nesnelere için nükleer fizikle genel göreliliğin birleştirilmesi gerekmektedir

ve lineer Walecka modeli bu hesaplamalara olanak sağlayan ilk modellerdendir (Serot ve Walecka 1986).

Transport teori açısından yüksek enerjili yoğunluklu ortamlarda hidrodinamik akışın ışık hızına yaklaştığı hızlarda Lineer Walecka modeli Lorentz kovaryantlığı koruyarak enerji momentum ilişkisini doğru bir şekilde tanımlar. Ayrıca kovaryant bir teori olarak anti parçacıkları ve bunların doğru bir şekilde relativistik probleme dahil edilmesini sağlar. Sanal N-N çifti üretiminin bir sonucu olarak kuantum mekaniksel vakum, dinamik bir nesne haline gelmektedir ve bu ekler de lineer Walecka modeli çerçevesinde hesaba katılması mümkündür.

Lineer Walecka modeli yüksek yoğunluklu nükleer maddenin yanı sıra çekirdeklerin relativistik etkilerini incelemesinde de başarılıdır. Relativistik kabul modelleri, kollektif uyarılmalar, nükleer deformasyonlar da Lineer Walecka modeli çerçevesinde ele alınabilir.

Ana motivasyonu kuantum elektro dinamikten (KED) alan, kuantum hidrodinamik de (KHD) renormalize edilebilir bir teori olmalıydı. Bu, KHD'nin sınırlı bir parametre seti (çiftlenim sabitleri ve kütleleri) ile karakterize edilebileceği anlamına gelmektedir. Bu parametreler uygun şekilde seğılmiş bir deneysel veri seti ile belirlendikten sonra, kalan tüm fiziksel nicelikler için tahminler; sonlu ve belirsizdir. Renormalize kısıtı, teorik tahminlerin sistematik olarak hesaplanabilmesini ve deneyle sınırlandırılmasını sağlamaktadır. Ayrıntılar Walecka ve Serot'un makalesinde (Serot ve Walecka 1986) verilmiştir.

Lineer Walecka modelinde nükleer sistemi model alan teori, ikiye ayırmışlardır. Birincisi, baryonlara ve nötr skaler ve vektör mezonlara dayanan KHD-I modeli. Vektör mezonlar minimum olarak korunan baryon akısına bağlanır. Walecka teorisi, skaler etkileşim ile KED'e benzer şekilde renormalize edilebilir. Kuramda alanlar; nükleonlar (n, p), σ ve ω mezonlarıdır. Walecka Lineer modeline ω mezunu ile kısa mesafedeki itmeyi ve σ mezunu ile büyük mesafelerde çekmek etkilerini dahil edilerek gözlemlenen nükleer kuvvetin baskın özelliklerini teorilerine yansıtmişlardır. Çekirdeğin bazı özellikleri (rneğin Fermi yüzeyine yakın iki çekirdekli durumun tayfi gibi), bir pion değişimi gibi daha ince detaylara bağlı olsa da güçlü spin ve izospin etkileşimi nedeniyle nükleer maddede esasen bağımlılığı sıfırdır. Bu özelliklerden

dolayı KHD-1, çekirdeklerin toplu ve tek parçacık özelliklerinin incelenmesi için oldukça iyi bir başlangıç noktası oluşturmuştur.

Doğası gereği KHD-1 güçlü nükleer çiftlenimler içerir ve yazılan Lagrange yoğunluğundan elde edilen hareket denklemlerinin çözmenin bir yolu olmadığından fazla bir ilerle sağlanmış olmaz. Walecka Lineer modelinde yüksek baryon yoğunluğunda skaler ve vektör alan operatörlerinin beklenen değerleri ile değiştirilebildiğinde baryonların hareket ettiği klasik, yoğunlaştırılmış alanlar olarak ele alınabileceği gösterilmiştir. Böylece "Ortalama Alan Teorisi" (MFT) ile hareket denklemleri çözülebilir hale gelmiştir. Relativistik Hartree yaklaşımı ile sonlu çekirdeklere daha gerçekçi bir yaklaşım elde edilmiştir. Burada mezon alanı denklemlerindeki alan kaynak terimleri, kuantum seviyeleri doldurulmuş baryon tek parçacık durumları üstünden toplamla belirlenmiştir. Baryon dalga fonksiyonları için Dirac denkleminin klasik, yoğunlaşmış mezon alanlarından çözülmüştür.

Klasik relativistik alan teorilerinde sistemleri oluşturan alanlar ve etkileşim terimlerini içeren hareket serbestileri q_j olarak tanımlarsak Lagrange yoğunluğu $\mathcal{L}(q, \partial_\mu q, t)$ şeklinde olan bir sistemin hareket denklemlerini elde etmek için varyasyonu aşağıdaki gibi olacaktır

$$\delta \int dt \mathcal{L} = \delta \int d^4x \mathcal{L}(q, \partial_\mu q, t) = 0. \quad (2.1)$$

Bu varyasyon ilkesinden Euler-Lagrange hareket denklemleri

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (2.2)$$

ve enerji momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_j)} \partial^\nu q_j \quad (2.3)$$

elde edilir. Metrik olarak (+, -, -, -) kullanılmıştır.

Enerji momentum tensörü süreklilik denklemini

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

sağlar.

Enerji momentum tensöründen dört-momentum denklemi

$$P^\nu = \int d^3r T^{0\nu} \quad (2.5)$$

olup sıfırcı bileşen enerji bileşenidir

$$P^0 = E = \int d^3r \mathcal{H}(r) \quad (2.6)$$

ve Hamiltoniyen yoğunluğu

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Minimal etkileşim içeren relativistik Lagrange yoğunlukları nükleon \mathcal{L}_N , mezon \mathcal{L}_M ve etkileşim \mathcal{L}_{etk} terimleri olarak üç kısma ayrılabilir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{etk}. \quad (2.8)$$

Lineer modelde Lagrange yoğunluğunda ifade edilen nükleon kısmı

$$\mathcal{L}_N = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \quad (2.9)$$

şeklinindedir ve burada m etkileşimde bulunulmayan, çıplak nükleon kütlesi ve Ψ Dirac spinörüdür.

Lagrange yoğunluğunda ifade edilen mezon kısımları en genel haliyle pion (π), sigma (σ), omega (ω), rho (ρ), delta (δ) mezonlarını ve fotonu içerecek halde

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - m_\pi^2 \vec{\pi}^2) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{L}_\omega = -\frac{1}{2} \left(\Omega_{\mu\nu} \Omega^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_\rho = -\frac{1}{2} \left(\vec{R}^{\mu\nu} \vec{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \right) \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}_\delta = \frac{1}{2}(\partial_\mu \delta \partial^\mu \delta - m_\delta^2 \delta^2) \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılır. δ dışında tüm mezonlar Walecka'nın ilk modellerinde yer almışken, δ mezonu ilk olarak Kubis ve Kutschera (1997) tarafından 1997 yılında dahil edilmiştir. Lagrange yoğunluğunda bulunan $m_\sigma, m_\pi, m_\omega, m_\rho, m_\delta$; mezonların durgun kütleleridir.

$$\Omega^{\mu\nu} = \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu \quad (2.16)$$

$$\vec{R}^{\mu\nu} = \partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu \quad (2.17)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.18)$$

sırasıyla ω , ρ mezonları ve foton için izospin uzayında vektörel form içeren alan tensörlerdir.

Çizelge 2.1 : KHD Modelde Nükleer Madde Lagrange Yoğunluğunda Yer Alan Alanlar ve Karşılık Gelen Parçacıklar

Alan	Tanım	Parçacık	Kütlesi	Çiftlenim Sabiti
Ψ	Baryon	p,n...	M	
Φ	Nötr Skaler Mezon	σ	m_σ	g_σ
V_m	Nötr Vektör Mezon	ω	m_ω	g_ω
Π	Yüklü psedoskaler Mezon	π	m_π	g_π
b_μ	Yüklü Vektör Mezon	ρ	m_ρ	g_ρ
a_0 (980)	İzovektör Skaler Mezon	δ	m_δ	g_δ

Nükleonlarla mezonların etkileşimini içeren \mathcal{L}_{etk} Lagrange yoğunluğu minimal çiftlenimler üzerinden ifadesi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{etk} = & -g_\sigma \bar{\Psi} \sigma \Psi - ig_\pi \bar{\Psi} \gamma_5 \vec{\tau} \vec{\pi} \Psi \\ & -g_\omega \bar{\Psi} \gamma_\mu \omega^\mu \Psi - g_\rho \bar{\Psi} \gamma_\mu \vec{\tau} \vec{\rho} \Psi + g_\delta \delta \bar{\Psi} \tau \Psi - e \bar{\Psi} \gamma_\mu A^\mu \Psi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Burada bulunan $g_\sigma, g_\omega, g_\pi, g_\rho, g_\delta$ katsayılar; çiftlenim sabitleridir. $\vec{\tau}$ Pauli izospin matrisidir. γ matrisleri Dirac matrisleridir. γ^5 matrisi $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ şeklinde tanımlıdır.

2.3 Ortalama Alan Yaklaşımı ve KHD-1

Lineer Walecka yaklaşımda basitlik açısından mezon alanları olarak sadece σ ve ω tutulmuştur.

KHD-1 için Lagrange yoğunluğunun açık hali

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s \phi)] \Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu + \delta \mathcal{L}_{etk} \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklindedir.

$F_{\mu\nu}$, ω mezonu alan tensörüdür

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu. \quad (2.21)$$

Euler-Lagrange denklemlerinden (2.2) alanlar için hareket denklemleri

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\phi = g_s \bar{\psi} \psi \quad (2.22)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\mu = g_v \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (2.23)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (M - g_s \phi)] \psi = 0 \quad (2.24)$$

elde edilir. Ayrıntılar Ek-1'de verilmiştir.

İlk denklem, kaynağında skaler yoğunluğu $\rho_s = \bar{\psi} \psi$ içeren Klein-Gordon denklemdir. İkinci denklem, kaynak teriminde baryon akısı $B^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ içeren Proca denklemdir. Üçüncü denklem, serbest Dirac denklemdir. Dirac denklemi içerisinde etkin kütle $M^* = (M - g_s \phi)$ olarak gösterilir. Skaler alan ϕ_0 böylece baryonların kütlesine çiftlenirken, vektör alan V_0 momentuma çiftlenir.

Enerji momentum tensörü 2.3 denkleminde

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[m_s^2 \phi^2 - \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + \frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} - m_v^2 V_\lambda V^\lambda \right] g_{\mu\nu} \\ & + \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + \partial_\mu V^\lambda F_{\lambda\nu} + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \end{aligned} \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilir. Enerji momentum tensörünün T_{00} elemanı enerji yoğunluğuna ve T_{ii} elemanları basınç yoğunluğunu verir.

Klein-Gordon ve Proca denklemlerinin kaynak kısmında çiftlenim sabitleri g_s ve g_v terimleri bulunmaktadır. Çiftlenim sabitleri büyüklük olarak birden çok büyük olduklarından dolayı perturbatif (perturbative) yaklaşımlarla bu denklemler çözülemez. Denklemleri çözmek için çeşitli yaklaşımlarda bulunulabilir. B sayıdaki baryonların tek düze sistemde (uniform system) V kutusu hacminde olduğunu göz önüne alırsak, nükleer yoğunluk arttıkça giderek geçerli hale gelen yaklaşık bir çözüm üretebilir. Baryon yoğunluğu arttıkça, eşitliklerin sağ tarafındaki terimler de artar. Kaynak terimler arttıkça mezon alan operatörleri beklenen değerleriyle yer değiştirilebilir. Çözüm için yapılan bu yaklaşıma Ortalama Alan Yaklaşımı (MFT) denir.

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0 \quad (2.26)$$

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0 \quad (2.27)$$

Durağan, tekdüze sistemler için ϕ_0 ve V_0 , uzay zamandan bağımsız sabit değerdedir. Rotasyonel simetriden dolayı V_μ 'nin uzaysal koordinatların ortalama değeri sıfır olur. Mezon alan denklemleri bu koşullar altında ϕ_0 ve V_0 için çözülebilir.

ϕ_0 ve V_0 mezon alanlarının büyüklükleri ortamdaki baryon alanı ile doğrudan ilgilidir. V_0 'ın kaynağı baryon yoğunluğudur ($\rho_B = B/V$). Burada baryon akısı ($\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$) korunumludur ve baryon sayısı

$$B \equiv \int_V d^3x B^0 = \int_V d^3x \psi^\dagger \psi \quad (2.28)$$

denklemleri ile verilir.

Ayrıca skaler ϕ_0 alanın kaynağı Lorentz skaler yoğunluğunun beklenen değeri $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \rho_s$ içermektedir. Zaman bağımlılığını içermeyen ve ortalama alan yaklaşımında hareket denklemleri şu hale gelir

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s \quad (2.29)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle \equiv \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B. \quad (2.30)$$

Düzgün nükleer madde (sonsuz nükleer madde) için sistemin taban durumu, dalga numarası \mathbf{k} ve spin-izospin dejenerasyonu γ olmak üzere bütün kuantum seviyelerinin Fermi seviyesi p_f 'ye kadar doldurmasıyla elde edilir. Nükleer madde için $\gamma = 4$ (nötronlar ve protonlar için spin aşağı-yukarı durumdadırlar) olur. Ortalama Alan yaklaşımı ile Hamiltoniyen matrisinin diagonal elemanları kolayca hesaplanır ve basınç, ψ ve Dirac denklemi sayesinde benzer şekilde hesaplanabilir.

Baryon yoğunluğu momentum uzayında

$$\begin{aligned} \rho_B &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \\ &= \frac{\gamma}{(6\pi)^2} k_F^3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

böyledir ve Enerji ve momentum denklemleri

$$\mathcal{H} = \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 + \frac{m_s^2}{2g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k (\mathbf{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (2.32)$$

$$\mathcal{P} = \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 - \frac{m_s^2}{2g_s^2} (M - M^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{\mathbf{k}^2}{(\mathbf{k}^2 + M^{*2})^{1/2}} \quad (2.33)$$

şeklinde elde edilir (Serot ve Walecka 1986).

2.4 Non-linear Etkileşmeler

Lineer Walecka modeli; içerdiği skaler alan etkileşimi g_s , vektör alan etkileşimi g_v ve ilgili mezonların kütleleri m_s ve m_ω için uygun (var olan deneysel limitler içinde) değerler seçilerek simetrik nükleer maddenin bağlanma enerjisi ve bu bağlanma enerjisine karşılık gelen Fermi momentumunu doğru şekilde verir. Ancak lineer model durum denklemi (Equation of State-EoS) sıkıştırabilirliği (compressibility) K_v^{-1} 540 MeV gibi yüksek bir değer vermektedir. Oysa deneysel veriler 210 ± 30 MeV (Blaizot 1980) olması gerektiğini ortaya koymaktadır. Lineer model simetri enerji a_4 olması gerektiği değerden (33.2 MeV) oldukça düşük (22.1 MeV) vermektedir. Ayrıca sonsuz nükleer maddeden sonlu atom çekirdeklerine doğru gidildikçe yüzey etkilerinin de önemli olduğu açıktır. Walecka modelini bu zorlukları da aşacak şekilde geliştirilmesinin matematiksel yollarından birisi (fiziksel gerekçeleri yeri geldiğinde yapılacaktır) etkileşimlere bir şekilde non-lineerlik katılmasıdır. Lineer Walecka modeli sadece σ ve ω mezonunu (izoskaler etkileşimler) içerdiğinden modeli geliştirmede izlenecek ilk yol mezon sayısının fiziksel gerekçeler doğrultusunda arttırmaktır, örneğin izovektör kanalını (ρ ve δ mezonlarının) dahil edilmesidir. Bu iyileştirmenin yetersiz olduğu durumlarda modeli geliştirmenin en basit yolu çok önceden bilindiği üzere skaler etkileşim σ mezonunun kendi kendisi ile (self-interaction) etkileşimini içeren non-linear etkileşimlerin dahil edilmesidir.

İlk olarak kübik ve kuartik yaklaşımlarla skaler mezonlara başarılı bir şekilde uygulanmıştır (Reinhard ve ark. 1986, Reinhard 1989, 1988, Sharma ve Ring 1992, Sharma ve ark. 1993, Lalazissis ve ark. 1997a).

Boguta ve Bodmer (1977) non-linear etkileşimi, kuadrik σ potansiyelini

$$U(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{3}g_2\sigma^3 + \frac{1}{4}g_3\sigma^4 \quad (2.34)$$

kütle terimi içerisine ekleyerek Walecka modelini geliştirmiştir.

g_2 ve g_3 non-linear etkileşim parametreleri, lineer modelle açıklanamayan sonlu çekirdekteki yüzey etkileşimi için eklenmiştir. Literatürde etkileşim sabitleri g_σ , g_ω , g_2 , g_3 için çok çeşitli değer setleri bulunmuştur (tablo 2.2, tablo 2.3; NL1 ve NL2 (Lee ve ark. 1986), NL3 (Lalazissis ve ark. 1997b), NLSH (Sharma ve ark. 1993), TM1 ve TM2 (Sugahara ve Toki 1994), PK1 ve PK1R (Long ve ark. 2004)). Görüldüğü üzere nükleer madde özellikleri olan ρ_0 ile E/A bütün etkileşim modellerinde birbirine

Çizelge 2.2 : Parametre Setleri 1

Parametreler	HS	NL1	NL2	NL3	NL-SH
M (MeV)	939.0	938.0	938.0	939.0	939.0
m_σ (MeV)	520.0	492.25	504.89	508.194	526.059
m_ω (MeV)	783.0	795.359	780.0	782.501	783.0
m_ρ (MeV)	770.0	763.0	763.0	763.0	763.0
g_σ	10.47	10.138	9.111	10.217	10.444
g_ω	13.8	13.285	11.493	12.868	12.945
g_ρ	4.035	4.976	5.507	4.474	4.383
g_2 (fm ⁻¹)		-12.172	-2.304	-10.431	-6.9099
g_3		-36.265	13.783	-28.885	-15.8337
ρ_0 (fm ⁻³)	0.148	0.151	0.146	0.148	0.146
E/A (MeV)	-15.731	-16.426	-17.018	-16.299	-16.346

Çizelge 2.3 : Parametre Setleri 2

Parametreler	NL3-2	TM 1	TM 2	PK 1	PK1R
M (MeV)	939.0	938.0	938.0	939.0	939.0
m_σ (MeV)	507.680	511.198	526.443	514.0891	514.0873
m_ω (MeV)	781.869	783.0	783.0	784.254	784.222
m_ρ (MeV)	763.0	770.0	770.0	763	763.0
g_σ	10.202	10.0289	11.4694	10.322	10.3219
g_ω	12.854	12.6139	14.6377	13.0131	13.0134
g_ρ	4.480	4.46322	4.6783	4.5297	4.55
g_2 (fm ⁻¹)	-10.391	-7.2325	-4.444	-8.1688	-8.1562
g_3	-28.939	0.6183	4.6076	-9.9976	-10.1984
ρ_0 (fm ⁻³)	0.149	0.145	0.132	0.148	0.148
E/A (MeV)	-16.280	-16.3	-16.2	-16.268	-16.274

yakınken çiftlenim sabitleri modelden modele çok değişiklik göstermektedir. Özellikle non-lineer etkileşim parametreleri g_2 ve g_3 rakamsal olarak farklılık gösterdiği gibi işaret farklılıkları da göstermektedir. Özellikle $U(\sigma)$ etkileşimi içeren modellerde σ mezonu hareket denklemi üçüncü dereceden kökler içerdiğinden matematiksel olarak baryon skaler yoğunluğunun düşük değerlerinde (ağır iyon çarpışmalarında gözlemlendiği üzere) kararsız (instable) olmaktadır. P.G. Reinhard bu sorunu çözmek için başka bir

non-linear form önermiştir(Reinhard 1988)

$$U(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \Delta m \left[\frac{\Delta \sigma^2}{2} \left[\log \left(1 + \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\Delta \sigma} \right)^2 \right) - \log \left(1 + \left(\frac{\sigma_0}{\Delta \sigma} \right)^2 \right) \right] + \sigma_0 \sigma \left(1 + \left(\frac{\sigma_0}{\Delta \sigma} \right)^2 \right)^{-1} \right]. \quad (2.35)$$

Burada Δm , σ ve σ_0 ; üç parametreyle karakterize edilen bir modeldir. Daha önceki σ alanı nükleer yoğunluğa bağlı iken, non-linear denklem içerisinde σ potansiyeli, σ mezonunun kütlesine yoğunluk bağımlı hale gelmiştir.

Etkileşim Lagrange'ını non-linear hale getirmek için sadece skaler mezonun yanı sıra vektör mezonların kullanıldığı modeller de vardır (Bodmer ve Price 1989, Bodmer 1991, Gmuca 1992a,b, Sugahara ve Toki 1994); fakat bu yaklaşımlar da yüksek yoğunluklarda sorun yaşamaktadır.

Mezonlara eklenen terimlerle non-linear yapma düşüncesinden sonra ele alınan en temel yaklaşım yoğunluk bağımlı modellerdir (Typel ve Wolter 1999). Typel'in bu çerçevede yazdığı non-linear Lagrange yoğunluğu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - \Gamma_\omega A_\mu^{(\omega)} - \Gamma_\rho \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{A}_\mu^{(\rho)} - e \frac{1 + \tau_3}{2} A_\mu^{(\gamma)} \right) - (m - \Gamma_\sigma \phi) \right] \Psi \\ & + \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\sigma^2 \phi^2 - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(\omega)} F^{(\omega)\mu\nu} + m_\omega^2 A_\mu^{(\omega)} A^{(\omega)\mu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\mu\nu}^{(\rho)} \cdot \mathbf{F}^{(\rho)\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{A}_\mu^{(\rho)} \cdot \mathbf{A}^{(\rho)\mu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(\gamma)} F^{(\gamma)\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

şeklinindedir. Burada baryon mezon çiftlenimleri Γ_σ , Γ_ω , Γ_ρ ; baryon alanlarının fonksiyonu olduğu var sayılmıştır.

Buradaki yoğunluk bağımlı çiftlenim sabitleri Dirac-Brueckner teorisinde olduğu gibi öz enerjilerinden hesaplanmaktadır.

$$\frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} = \frac{\Sigma}{\rho^s}. \quad (2.37)$$

$$\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} = \frac{\Sigma_0 + \Sigma_0^N}{2\rho}. \quad (2.38)$$

$$\frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} = \frac{\Sigma_0^P + \Sigma_0^N}{\rho_l}. \quad (2.39)$$

Typel'in modelinde sigma ve omega mezonları için yoğunluk bağımlı çiftlenim sabitleri şu şekilde seçilmiştir

$$\Gamma_i(\rho) = \Gamma_i(\rho_{sat})f_i(x) \quad \text{burada } i = \sigma, \omega. \quad (2.40)$$

Denklemler içerisinde

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2} \quad (2.41)$$

ve x değişkeni ρ/ρ_{sat} fonksiyonudur. Bu fonksiyonun farklı Dirac-Brueckner simetrik nükleer madde hesaplamalarından elde edilen normalize edilmiş çiftlenimleri başarıyla fit ettiği ifade edilmiştir (Typel ve Wolter 1999).

Asimetrik çekirdekler için ρ mezon (de Jong ve Lenske 1998) çiftlenimi yüksek yoğunluklarda çok küçük olacağından çiftlenim şu şekilde seçilmiştir

$$\Gamma_\rho(\rho) = \Gamma_\rho(\rho_{sat})exp[-a_\rho(x - 1)]. \quad (2.42)$$

σ ve ω mezonları için dört parametre mevcutken burada sadece bir a parametresi vardır.

2.5 Non-linear Türevsel Model (NLD)

Gaitanos ve ark. (2009) farklı türden non-linear Lagrange terimlerini tek bir form altında toplamak için kısaca NLD model adını verdikleri yeni bir Lagrange yoğunluğu önermişlerdir. Bu yeni Lagrange yoğunluğunda mezon alanlarıyla nükleon alanlarının etkileşimlerinin tüm non-linear türevsel terimleri dahil etmişlerdir. Bu modelde Lagrange yoğunluğu nükleon spinörlerinin kendisine, birinci türevine ve diğer tüm üst mertebeden türevlerine bağlıdır. Dolayısıyla teoride öncelikli olarak Euler Lagrange hareket denklemlerinin sonsuz türev terimler içeren Lagrange yoğunluğuna göre genelleştirilmeleri yapılmıştır.

NLD modelinde Lagrange yoğunluğu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - (i\partial^\mu\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi] - \bar{\Psi}\Psi m - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \\ & + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu - \frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{etk} \end{aligned} \quad (2.43)$$

ile verilir.

Burada serbest baryon terimi

$$L_B = \frac{1}{2}[\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - (i\partial^\mu\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi] - \bar{\Psi}\Psi m. \quad (2.44)$$

Serbest mezon terimi

$$L_M = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu\vec{\rho}^\mu - \frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Ve \mathcal{L}_{etk} teriminin açık hali

$$L_{etk} = \frac{g\sigma}{2}[\bar{\Psi}\vec{D}\Psi\sigma + \sigma\bar{\Psi}\vec{D}\Psi] - \frac{g\omega}{2}[\bar{\Psi}\vec{D}\gamma^\mu\Psi\omega_\mu + \omega_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{D}\Psi] - \frac{g\rho}{2}[\bar{\Psi}\vec{D}\gamma^\mu\vec{\tau}\Psi\vec{\rho}_\mu + \vec{\rho}_\mu\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma^\mu\vec{D}\Psi] \quad (2.46)$$

şeklindedir.

\mathcal{L}_{etk} teriminin içerisinde Ψ 'ın yüksek dereceden kısmi türevli nükleon alanlarını içeren Lagrange yoğunluğu etkileşimi bulunmaktadır. Buradaki D operatörü, kısmi türevli non-lineer fonksiyon olarak nükleon alanlarına etki eden operatördür. NLD modelinde D operatörünün nasıl bir formda olacağı önceden belirli değildir. Modelde D için olabilecek en basit formlardan birisi olan üstsel form seçilmiştir ve açık halleri

$$\vec{D} := \exp\left(\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}\right) \quad \vec{D} := \exp\left(\frac{i\vec{\partial}_\beta v^\beta + m}{\Lambda}\right) \quad (2.47)$$

şeklindedir.

Burada kısmi türev terimleri boyutsuz bir v^μ dört vektörü ile çarpılmıştır. Çarpım vektörünün ne olduğu fiziksel olarak belirli değildir. En basit formda dört boyutta nükleon hızı olarak seçilmiştir

$$v^\mu \equiv u^\mu := \frac{j^\mu}{\sqrt{j_\alpha j^\alpha}} \quad (2.48)$$

ya da mezonlara ait hız vektörü

$$v^\mu := \frac{\omega^\mu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} \quad (2.49)$$

olabilir.

Non-linear türev operatörü D içerisindeki Λ bir kesme (*cut-off*) parametresidir. Değeri yaklaşık olarak doğal hadronik skalası olan 1 GeV (Gaitanos ve ark. 2009) mertebesinde olması beklenir.

Oluşturulan Lagrange yoğunluğu global faz dönüşümleri altında değişmezdir; dolayısıyla elde edilen baryon sayısı korunumludur ve ötelemeler altında değişmezdir; dolayısıyla enerji momentum tensörü korunumludur.

Hareket denklemlerinin basit olması açısından lineer Walecka modelinde olduğu gibi mezon alanları olarak KHD-1 yaklaşımında olduğu gibi skaler (σ) ve vektörel (ω) mezon alanları için türetilmiştir. Detaylar Ek-2’de verilmiştir.

Lagrange yoğunluğu; içerdiği \vec{D} , \vec{D} operatörlerin açık hallerinin üstel formda olmalarından dolayı bir seri halinde açılabilir. Bilinen varyasyon analizinde Euler-Lagrange denklemleri sadece değişkenin kendisine ve birinci mertebeden türevine bağlı ifade içermektedir (2.2), bu yüzden yazılan yeni Lagrange yoğunluğundan hareket denklemlerini elde etmek için Euler-Lagrange denklemleri yüksek mertebeli türevleri içermelidir. Noether teoremi ile Euler-Lagrange denklemleri yüksek mertebeden türevleri içerecek şekilde genelleştirilmiştir (Gaitanos ve ark. 2009)

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \phi)} + \dots$$

$$+ (-)^n \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n})} \quad (2.50)$$

ve bu formda ele alınmıştır. Böylece seri ifadelerin içerisindeki yüksek mertebeli türevler hesaplamalara katılabilir.

(2.51) Euler-Lagrange denklemlerinden elde edilen hareket denklemleri

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma^\mu) - (m - \Sigma_s)] \psi = 0 \quad (2.51)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = \frac{1}{2} g_\omega \left[\bar{\psi} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^{\beta+m}}{\lambda}} \gamma^\nu \psi + \bar{\psi} \gamma^\nu e^{\frac{v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\lambda}} \psi \right] + \Omega_r^\nu \quad (2.52)$$

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \sigma + m_\sigma^2 \sigma = \frac{1}{2} g_\sigma \left[\bar{\psi} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^{\beta+m}}{\lambda}} \psi + \bar{\psi} e^{\frac{v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\lambda}} \psi \right] \quad (2.53)$$

şeklinindedir. Ayrıntılar Ek-2’de verilmiştir.

İlk denklem Dirac denklemidir. İçerisinde Lorentz-vektör ve Lorentz-skaler özenerjiler (selfenergies) vardır

$$\Sigma^\mu = g_\omega \omega^\mu e^{\frac{-v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\lambda}} + \Sigma_r^\mu \quad (2.54)$$

$$\Sigma^s = g_\sigma \sigma e^{\frac{-v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\lambda}}. \quad (2.55)$$

Vektör ve skaler öz enerjilerinin her ikisi de üstel bir fonksiyonla etkileşim terimleri içerir. Üstel fonksiyonun seri hali düşünüldüğünde serinin ilk terimi lineer Walecka modelindeki lineer terimleri verir. Bu seride yer alan ikinci ve daha üst kuvvetten terimlerin lineer Walecka modelinde olmayan kendi kendine etkileşimler (selfinteractions) terimlerine karşılık geleceği var sayılır. Vektör öz enerjide ayrıca bir Σ_r^μ yeniden düzenleme (rearrangement) terimi bulunur. Öz enerjiler yoğunluk bağımlı olduğu gibi dört momentum bağımlı hale de getirebilir (Gaitanos ve Kaskulov 2013).

İkinci denklem Proca denklemidir ve içerisinde KHD-1'de olmayan Ω_r^V yeniden düzenleme (rearrangement) terimi gelmiştir. Üçüncü denklem Klein-Gordon denklemidir.

Euler-Lagrange denklemlerinden sonsuz madde için elde edilen enerji momentum tensörü T^{00}

$$T^{00} \equiv \varepsilon = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 E \Psi \rangle + \frac{g_\omega}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} E \Psi \rangle \omega_0 - \frac{g_\sigma}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} E \Psi \rangle \sigma + \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma^2 - m_\omega^2 \omega_0^2)$$

şeklinde elde edilir.

NLD modelinin hareket denklemleri, enerji momentum tensörünün elde edilmesiyle ilgili detaylar Ek-2'de verilmiştir. Bu tezin konusu olan NLD modelinin sonlu çekirdeklere uyarlanması bundan sonraki bölümde ele alınacaktır.

3. Araştırmalar ve Bulgular

3.1 NLD Modelinin Sonlu ekirdeklere Uyarlanması

Bu bölümde nükleer madde için uygulanan NLD modeli, sonlu nükleer maddeye başka bir deyişle atom çekirdeklerine uygulanacaktır. Bu amaçla çekirdek yüzeyini, kütle ve yükün uzaysal dağılımlarını ifade etmek için hesaplamalar en basit form olan Thomas Fermi yaklaşımında yapılacaktır. Bu yaklaşımda sonlu sistem baryon sayısı sabit kalmak şartıyla enerji minimizasyonu veren mezon alanlarının uzaysal dağılımlarının bulunması amaçlanır. Simetrik nükleer maddeden hareketle hesaplama açısından kolaylık olması için izoskaler kanalda kalınacak, bunun için hesaplamalar ^{40}Ca ($p=20, n=20$) ekirdeği için yapılacaktır. Asimetrik çekirdeklerin inceleneceği durumlarda ilk olarak izovektör kanaldan (rneğin ρ mezonu) ve daha sonra δ mezonu dahil edilmelidir.

Thomas Fermi yaklaşımını uygulamak için enerji momentum tensrinden elde edilen enerji yoğunluğu ifadesindeki mezon alanlarının konum türevli terimleri dahil edilmelidir

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \langle \bar{\Psi} \gamma^0 E \Psi \rangle + \frac{g\omega}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \rangle \omega_0 - \frac{g\sigma}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} E \Psi \rangle \sigma \\ & + \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma^2 - m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{1}{2} ((\nabla \sigma)^2 - (\nabla \omega_0)^2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada mezon alanları, spinrler ve dolayısıyla enerji yoğunluğu; konumun bir fonksiyonudur.

Enerji yoğunluğu integral formunda yazılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 E + \frac{g\omega}{\Lambda} \left(\int_0^{p_f} d^3 p E e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \omega_0 - \frac{g\sigma}{\Lambda} \left(\int_0^{p_f} d^3 p E \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \sigma \\ & + \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma^2 - m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{1}{2} ((\nabla \sigma)^2 - (\nabla \omega_0)^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

elde edilir.

Buradaki ifadelerin açık hali

$$E = E^* + g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \quad (3.3)$$

$$M^* = M - g_\sigma \sigma e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \quad (3.4)$$

$$E^* = \sqrt{p^2 + M^{*2}} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

Hesaplanacak olan çekirdeğin toplam enerjisi, enerji yoğunluğunun uzay üzerinden integre edilmesiyle bulunur

$$E_{\text{çekirdek}} = \int d^3x \varepsilon. \quad (3.6)$$

Hareket denklemlerinden elde edilen baryon yoğunluğu

$$J^0 \equiv \rho_B = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle + \frac{g_\omega}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \rangle \omega_0 - \frac{g_\sigma}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \rangle \sigma \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. İlgili detaylar Ek-2'de verilmiştir. Baryon sayısı,

$$B = \int d^3x \rho_B \quad (3.8)$$

baryon yoğunluğunun uzay üzerinden integre edilmesiyle bulunur. Çekirdeğin nükleon başına bağlanma enerjisi

$$E_{\text{bağlanma}} = \left(\frac{E_{\text{çekirdek}} - BM}{B} \right) \quad (3.9)$$

ile ifade edilir.

Mezon alan denklemleri; vektör mezon için

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - m_\omega^2) \omega_0 &= -\frac{g_\omega \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Theta(p - p_F) \\ &= -g_\omega \rho_o \end{aligned} \quad (3.10)$$

skaler mezon için

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - m_\sigma^2) \sigma &= -\frac{g_\sigma \mathbf{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Theta(p - p_F) \\ &= -g_\sigma \rho_s \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Denklemlerdeki ρ_o ve ρ_s sırasıyla vektör yoğunluk ve skaler yoğunluğu göstermektedir.

ρ_0 yoğunluğunun üstel olarak açılımından elde edilen birinci mertebeden değeri, lineer Walecka modelinde ρ_B yoğunluğu ifadesi (Serot ve Walecka 1986)[3.122 nolu denklem] ile aynıdır.

Alan denklemlerinin üstel olarak yoğunluklarının birinci mertebeden değerleri, lineer Walecka modelindeki (Serot ve Walecka 1986) [3.119 ve 3.120 nolu denklemler] değerler ile aynıdır.

$$(\nabla^2 - m_\omega^2) \omega_0 = -\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p = -g_\omega \rho_\omega \quad [3.119] \quad (3.12)$$

$$(\nabla^2 - m_\sigma^2) \sigma = -\frac{g_\sigma \kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} = -g_s \rho_s \quad [3.120] \quad (3.13)$$

Dispersiyon bağlantısı

$$E^{*2} - p^2 = M^{*2} \quad (3.14)$$

$$\left(E[p] - g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right)^2 - p^2 = \left(M - g_\sigma \sigma e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right)$$

ve p_f için yazarsak

$$\left(E[p_f] - g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right)^2 - p_f^2 = \left(M - g_\sigma \sigma e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right) \quad (3.15)$$

olur.

Sistemin taban durumu toplam enerjisi, $E_{\text{çekirdek}}$ 'in yerel Fermi momentumuna (p_f 'ye) göre minimizasyonu ile elde edilir. Ancak enerji minimize edilirken sistemin toplam baryon sayısının (B 'nin) sabit kalması için varyasyona Lagrange çarpanı μ dahil edilmelidir

$$\delta E_{\text{çekirdek}} - \mu \delta B = 0. \quad (3.16)$$

Bu minimizasyon hesaplarının detayları Ek-3'te verilmiştir. Hesaplama sonucu μ ifadesi

$$\mu = \left(\sqrt{p_f^2 + M^{*2}} + g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \right) \left(1 + \frac{g_\omega}{\Lambda} \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} - \frac{g_\sigma}{\Lambda} \sigma \frac{M^*}{E^*[p_f]} e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right) \quad (3.17)$$

şeklinde bulunmuştur.

Elde edilen μ , hesaplamalar için oldukça karışıktır. μ 'yü, p_f 'ye bağlı bir ifade haline getirmek için burada bir yaklaşımda bulunabiliriz. μ değerinin içerisindeki

birden sonra gelen ve $1/\Lambda$ içeren terimler (Λ 'nın 1 GeV civarında olması beklenir) birden çok çok küçük olacağından μ 'yü ilk yaklaşım olarak

$$\mu \approx \sqrt{p_f^2 + M^{*2}} + g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \quad (3.18)$$

şeklinde olabilir. Bu değer denklem 3.15'den elde edilen $E[p_f]$ ile aynıdır. Bu denklemde $E[p_f]$ yerine μ yazılabilir

$$\left(\mu - g_\omega \omega_0 e^{-\frac{\mu-m}{\Lambda}}\right)^2 - p_f^2 = \left(M - g_\sigma \sigma e^{-\frac{\mu-m}{\Lambda}}\right). \quad (3.19)$$

Formülasyon gereği NLD modeli $\Lambda \rightarrow \infty$ limitinde lineer Walecka modeline indirgenmelidir. Bu durumu kontrol ettiğimizde $\Lambda \rightarrow \infty$ limit durumunda μ

$$\begin{aligned} \mu &= E[p_f] \\ &= E^*[p_f] + g_\omega \omega_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

olur. Bu sonuç lineer Walecka modeli ile aynıdır (Serot ve Walecka 1986) [sayfa 62 denklem 3.121]. Görüldüğü gibi kesme (*cut off* Λ) terimi sonsuza yaklaştıkça, modelin ön gördüğü şekilde Walecka denklemleri elde edilmektedir.

Küresel simetrik sonlu bir yapının çözümü için ikinci dereceden diferansiyel denklemlerdeki integraller küresel koordinatlarda açılmalıdır. Küresel koordinatlarda mezon alan denklemleri

$$(\nabla^2 - m_\omega^2) \omega(r) = -\frac{g_\omega \mathcal{K}r}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \quad (3.21)$$

$$(\nabla^2 - m_\sigma^2) \sigma(r) = -\frac{g_\sigma \mathcal{K}r}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \quad (3.22)$$

şeklinde olur. Ayrıntılar Ek-4'te verilmiştir.

Mezon alan denklemleri ikinci dereceden, çiftlenimli, non-lineer diferansiyel denklem sistemidir. Enerji açıkça p 'nin bir fonksiyonudur ve p_f (Fermi momentum) seviyesinde μ değerini almaktadır. Ayrıca mezon alanları aralarındaki ilişki dispersiyon bağıntısı ve μ denkleminde sağlanmaktadır. Bu denklem sistemi çiftlenimli olduğu için ayrı ayrı çözülemez. Mezon alan denklemleri, dispersiyon

bağıntısı ve p_f 'ye bağlı μ denklem sistemi

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - m_\omega^2) \omega(r) &= -\frac{g_\omega \kappa r}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}, \\
(\nabla^2 - m_\sigma^2) \sigma(r) &= -\frac{g_\sigma \kappa r}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}, \\
\mu &= \sqrt{p_f^2 + M^{*2}} + g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}}, \\
\left(E[p] - g_\omega \omega_0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}\right)^2 - p^2 &= \left(M - g_\sigma \sigma e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

aynı anda çözülmelidir.

3.23 denklem sisteminin çözümüne geçmeden önce tecrübe etmek ve karşılaştırma açısından aynı denklem sisteminin lineer Walecka modelini çözdük. Walecka modelinde mezon alan denklemleri ve μ denklemi

$$(\nabla^2 - m_s^2) \phi_0(r) = -g_s \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F(r)} d^3 k \frac{M^*(r)}{[\mathbf{k}^2 + M^{*2}(r)]^{1/2}} \tag{3.24}$$

$$(\nabla^2 - m_v^2) V_0(r) = -g_v \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F(r)} d^3 k \tag{3.25}$$

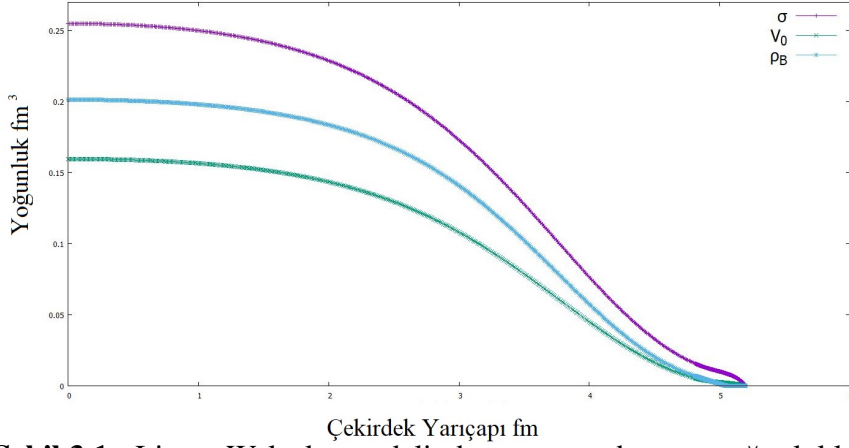
$$\mu = g_v V_0(r) + [p_F(r)^2 + M^{*2}(r)]^{1/2} \tag{3.26}$$

şeklinde (Serot ve Walecka 1986). Denklem sisteminde Fermi momentumu p_F 'de bilinmemektedir. İlk olarak p_F , μ 'nün fonksiyonu olarak

$$p_F(r) = \left[(\mu - g_v V_0(r))^2 - (M - g_s \phi_0(r))^2 \right]^{1/2} \tag{3.27}$$

yazıldıktan sonra nümerik olarak seçilen bir μ için çiftlenim denklem sistemi sayısal olarak çözülür. Çözüm sonucu elde edilen σ mezon alanı $\Phi_0(r)$ ve vektör mezon alanı $V_0(r)$ kullanılarak baryon yoğunluğu $\rho_0(r)$ elde edilir. Elde edilen baryon yoğunluğundan seçilen yarıçap kullanılarak toplam baryon sayısı ve nükleon başına bağlanma enerjisi elde edilir (denklem 3.8 ve 3.9). Baryon sayısının seçilen çekirdek için baryon sayısını sağlamadığı durumlarda μ ve yarıçap değiştirilerek yeni baryon sayısı ve nükleon başına bağlanma enerjisi elde edilir. Bu işlem nümerik olarak tutarlı sonuçlar elde edilene kadar tekrarlanır.

Walecka hesabı üzerinden tekrar yaptığımız hesap sonucu elde edilen mezon alanları ve baryon yoğunluğu dağılımı Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 : Linear Walecka modelinde mezon ve baryon yoğunluklarının yarıçapa göre değişimi

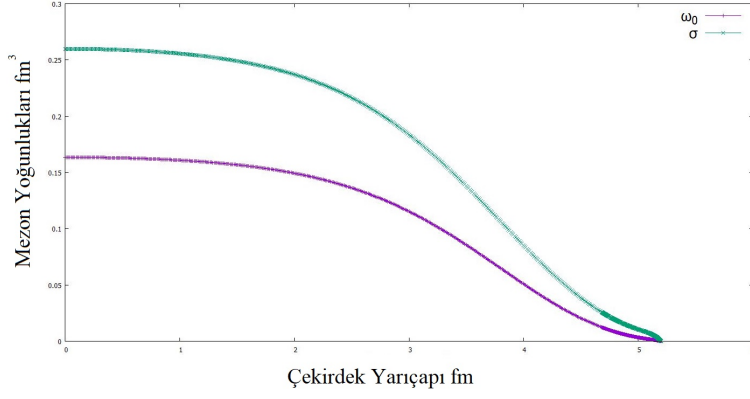
μ , 4.7 fm ve yarıçap r için 5.2 fm için baryon sayısı 40.02 bulunmuştur. İlgili referansta (Serot ve Walecka 1986) μ 'nün değeri verilmediğinden bir karşılaştırma yapılamamıştır; ancak mezon alanları ve baryon yoğunluğu Walecka sonuçları ile uyumludur. Linear model hesabı için kullanılan parametreler; $g_s = 8.4658$, $g_v = 10.8752$, $m_s = 485.884$ MeV, $m_v = 728.826$ MeV'dir.

NLD modelinde ^{40}Ca çekirdeğinin taban durumu çözümleri Şekil 3.2 ve 3.3'te verilmiştir. $r=5.20$ fm için baryon sayısı 40.01 hassasiyetini $\mu = 4.7$ fm sağlanmış ve nükleon başına bağlanma enerjisi -8.08 MeV hesaplanmıştır. Bu sonuçlar kesme parametresi $\Lambda = 896$ MeV için geçerli olup bu değer sonsuz nükleer madde değeri olan 770 MeV'den büyüktür; ayrıntılar Ek-5'te verilmiştir.

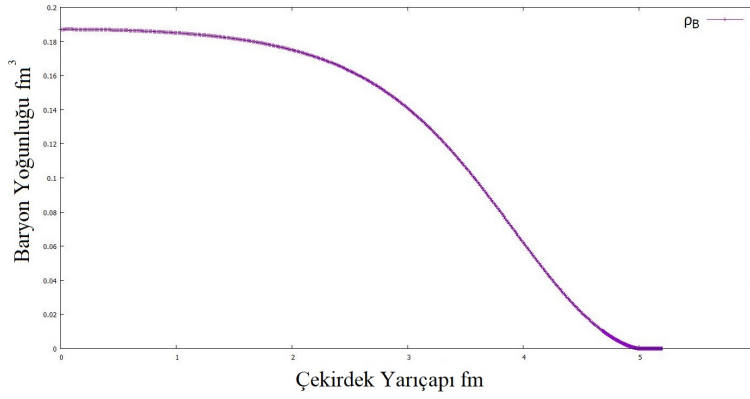
NLD modelinde çiftlenimli denklemlerin 3.23 denklem sistemi çözümünde linear Walecka modelinden farklı olarak integral ifadeleri yer almaktadır. Nümerik hesaplama sırasında momentum integrallerinde her bir momentum değeri için dispersiyon bağıntısını sağlayan enerji değeri integral içerisindeki üstel terimde yerine yazılarak sayısal integraller alınmıştır. İntegrallerin nümerik hesabı ile ilgili detaylar Ek-5'te verilmiştir.

NLD modelinin mezon dağılımları Şekil 3.2 gösterildiği gibi çekirdek merkezine doğru linear Walecka modeliyle çok benzer sonuçlar vermekteyken yüzey bölgesinde daha yumuşak bir inişe sahiptir.

NLD modelde çekirdek merkezinde baryon yoğunluğu (Şekil 3.3) Walecka linear modeline göre biraz daha düşük merkezi yoğunlukla başlamakta olup yüzey bölgesinde daha yumuşak bir iniş davranışı gösterir.

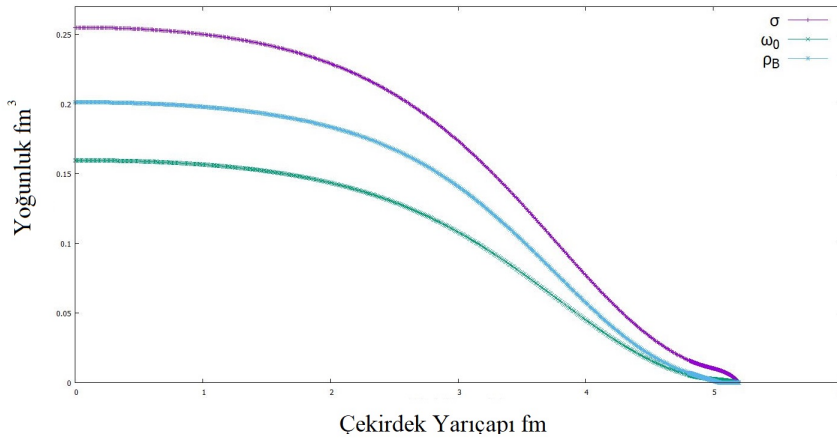


Şekil 3.2 : NLD modelde ^{40}Ca Mezon Yoğunlukları

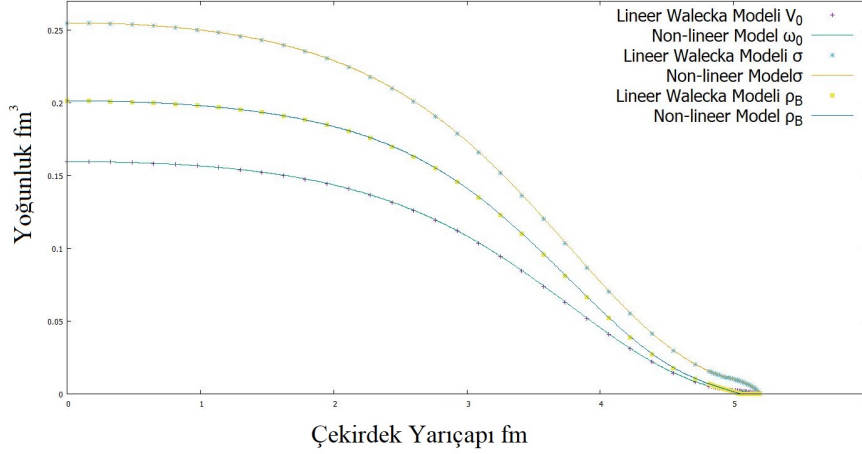


Şekil 3.3 : NLD modelde ^{40}Ca Baryon Yoğunluğu

NLD modelinin temelde öngördüğü üzere $\Lambda \rightarrow \infty$ limitinde alanlar lineer Walecka modeliyle aynı sonuca sahip olmalıdır. Bu sonucu test etmek için nümerik hesaplamalarda Λ 'yı yapay olarak çok yüksek bir değer olarak NLD denklemlerinin nümerik çözümleri Şekil 3.4' de ve lineer Walecka modeliyle karşılaştırılması Şekil 3.5'da verilmiştir.



Şekil 3.4 : $\Lambda \rightarrow \infty$ limitinde NLD denklemlerinden elde edilen mezon ve baryon yoğunluklarının yarıçapa göre değişimi



Şekil 3.5 : $\Lambda \rightarrow \infty$ NLD ve Lineer Walecka değerlerinin karşılaştırılması

Şekil 3.5'te görüldüğü üzere $\Lambda \rightarrow \infty$ limitinde NLD modelinin sonuçlarıyla lineer Walecka modeli sonuçları birebir örtüşmektedir.

^{40}Ca çekirdeğinin etkin yarıçapı (half-density radius) $R_{1/2} = r_0 B^{1/3}$ ve yüzey enerjisi $a_2 B^{2/3} = \varepsilon - B(938 - 16.95)\text{MeV}$ ifadesinin yarıçapın bir fonksiyonu olarak ve vektör mezounun skaler mezouna oranına bağlı değişimi Çizelge 3.1'de gösterilmiştir. r_0 ve a_2 'nin m_v/m_s oranı NLD model sonuçları, lineer Walecka modeli ve deneysel verilere yakındır. a_2/t oranı lineer Walecka modelinden biraz daha düşüktür; ancak deneysel veri olan 7.4'ten hala yüksektir. Lineer Walecka modelindeki değerler Serr ve Walecka (1978) makalesinden alınmıştır.

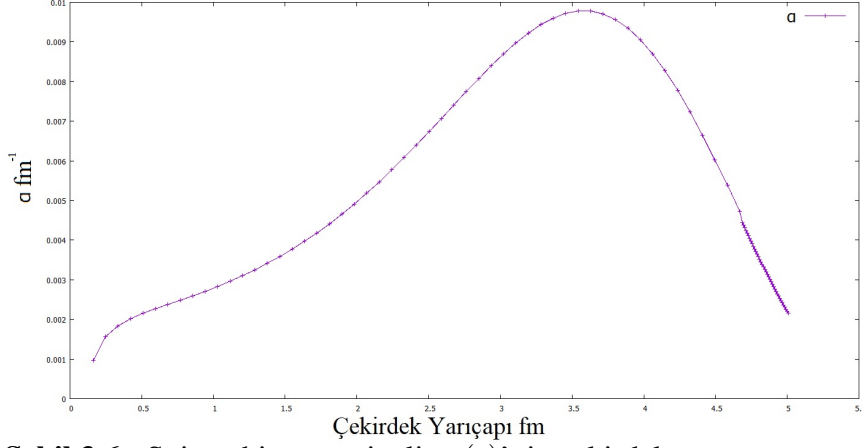
Çizelge 3.1 : ^{40}Ca çekirdeğinin etkin yarıçap çarpanının r_0 , yüzey enerjisinin, spin-orbit etkileşmesinin skaler mezoun kütlesine bağımlılığı

	m_v/m_s	$r_0(\text{fm})$	a_2/t (MeV/fm)	$\alpha_{maks}(\text{MeV})$	m_s/M
Lineer Walecka Modeli	1.5	1.03	13.1	1.91	0.518
NLD Model	1.5	0.9	12.62	1.93	0.518
Deneysel Veriler	1.42	1.07	7.4	1.80	0.586

Spin-orbit etkileşmesinin Foldy-Wouthuysen indirgemesine (Barker ve Chraplyvy 1953) göre tek parçacık Dirac denkleminde elde edilen ve skaler, vektör potansiyel alanları cinsinden ifade edilen spin-orbit etkileşiminin yarıçapa göre değişimi Şekil 3.6'a gösterilmiştir. Foldy-Wouthuysen indirgemesine göre spin orbit etkileşim potansiyeli

$$V_{s.o}(r) = \frac{1}{2M^2 r} \left(g_v \frac{dV_0}{dr} + g_s \frac{d\Phi_0}{dr} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} \equiv -\alpha(r) \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilir. α_r ile gösterilen spin-orbit potansiyelinin maksimum değeri 1.93 MeV olarak elde edilmiş olup lineer Walecka modeli ile uyumludur. Bu maksimum



Şekil 3.6 : Spin-orbit potansiyeli, $\alpha(r)$ 'nin çekirdek yarıçapına göre değişimi

değer aynı zamanda spin-orbit ayrışmasının (splitting) nükleer yüzeydeki değerini vermektedir.

3.1.1 Sonuç ve Öneriler

Bu tez çalışmasında olası tüm non-lineer türevsel etkileşimleri içermesi amacıyla geliştirilen NLD modeli atom çekirdeklerinin özelliklerini hesaplamak için kullanılmıştır. Kolaylık olması açısından küresel simetrik ^{40}Ca çekirdeği seçilerek Thomas-Fermi yaklaşımında taban durum enerji minimizasyonu yapılarak baryon alanları ve mezon alanları hesaplanmıştır. Hesaplama sonucunda nükleon başına bağlanma enerjisi -8.06 MeV bağlanma enerjisi hesaplamasında protonların Coulomb etkileşmesi ihmal edilmiştir, çekirdek yarıçapı 5.2 fm bulunmuştur. Ayrıca etkin yarıçap, yüzey enerji yoğunluğu ve spin-orbit etkileşim potansiyeli de hesaplanmıştır. Sonuçlar NLD'nin limit durumu olan Walecka modeli ile karşılaştırıldığında uyumlu bulunmuştur. Ayrıca hesaplama sonucunda non-lineer türevsel modelin kesme parametresi Λ enerji ve baryon sayısı sınırları dahilinde 896 MeV bulunmuştur. Bu değer nükleer madde için bulunan kesme değerinden (770 MeV) daha büyüktür.

Bu çalışma asimetrik çekirdeklere ve NLD modelinin daha da geliştirilmiş hali olan momentum bağımlı NLD modeli (Gaitanos ve Kaskulov 2013) içerecek şekilde geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

- Anastasio, M., Celenza, L., Pong, W., Shakin, C. (1983). Relativistic nuclear structure physics. *Physics Reports*, 100(6):327 – 392.
- Barker, W. A., Chraplyvy, Z. V. (1953). Conversion of an amplified dirac equation to an approximately relativistic form. *Phys. Rev.*, 89:446–451.
- Blaizot, J. (1980). Nuclear compressibilities. *Physics Reports*, 64(4):171 – 248.
- Bodmer, A. (1991). Relativistic mean field theory of nuclei with a vector meson self-interaction. *Nuclear Physics A*, 526(3):703 – 721.
- Bodmer, A., Price, C. (1989). Relativistic mean field theory for nuclei. *Nuclear Physics A*, 505(1):123 – 144.
- Boguta, J., Bodmer, A. R. (1977). Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nuclear Physics A*, 292:413–428.
- Brockmann, R., Machleidt, R. (1990). Relativistic nuclear structure. i. nuclear matter. *Phys. Rev. C*, 42:1965–1980.
- Carlson, J., Pandharipande, V., Wiringa, R. (1983). Three-nucleon interaction in 3-, 4- and many-body systems. *Nuclear Physics A*, 401(1):59 – 85.
- Cash, J. (2007). Algorithms for the solution of two-point boundary value problems. http://wwwf.imperial.ac.uk/~jccash/BVP_software/readme.php.
- Civitaresse, O., Faessler, A., Nojarov, R. (1987). Theoretical description of low-lying $K^\pi = 1^+$ states in deformed nuclei. *Phys. Rev. C*, 35:2310–2317.
- de Jong, F., Lenske, H. (1998). Asymmetric nuclear matter in the relativistic brueckner-hartree-fock approach. *Phys. Rev. C*, 57:3099–3107.
- Dechargé, J., Gogny, D. (1980). Hartree-fock-bogolyubov calculations with the $d1$ effective interaction on spherical nuclei. *Phys. Rev. C*, 21:1568–1593.
- Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. volume 117, page 610. Royal Society.
- Dover, C. B., Lemmer, R. H. (1968). Retarded interactions in fermi systems. *Phys. Rev.*, 165:1105–1123.
- Duerr, H.-P. (1956). Relativistic effects in nuclear forces. *Physical Review*, 103(2):496.
- Duerr, H.-P., Teller, E. (1956). Interaction of antiprotons with nuclear fields. *Phys. Rev.*, 101:494–495.
- Gaitanos, T., Kaskulov, M. (2013). Momentum dependent mean-field dynamics of compressed nuclear matter and neutron stars. *Nuclear Physics A*, 899:133 – 169.

- Gaitanos, T., Kaskulov, M., Mosel, U. (2009). Non-linear derivative interactions in relativistic hydrodynamics. *Nuclear Physics A*, 828(1):9 – 28.
- Gmuca, S. (1992a). Finite-nuclei calculations based on relativistic mean-field effective interactions. *Nuclear Physics A*, 547(3):447 – 458.
- Gmuca, S. (1992b). Relativistic mean-field parametrization of effective interaction in nuclear matter. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 342(4):387–392.
- Harada, T. (2005). Density-dependent hartree–fock calculations in hypernuclei. volume 754, pages 86 – 90.
- Horowitz, C., Serot, B. D. (1987). The relativistic two-nucleon problem in nuclear matter. *Nuclear Physics A*, 464(4):613 – 699.
- Johnson, M., Teller, E. (1955). Classical field theory of nuclear forces. *Physical Review*, 98(3):783.
- Kalman, G. (1974). Relativistic fermion gas interacting through a scalar field. i. hartree approximation. *Phys. Rev. D*, 9:1656–1669.
- Kemmer, N. (1938). N. kemmer, proc. roy. soc. a166, 127 (1938). *Proc. Roy. Soc.*, 166:127.
- Kubis, S., Kutschera, M. (1997). Nuclear matter in relativistic mean field theory with isovector scalar meson. *Physics Letters B*, 399(3):191 – 195.
- Lacombe, M., Loiseau, B., Richard, J. M., Mau, R. V., Côté, J., Pirès, P., de Tournelle, R. (1980). Parametrization of the paris $n - n$ potential. *Phys. Rev. C*, 21:861–873.
- Lalazissis, G. A., König, J., Ring, P. (1997a). New parametrization for the lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, 55:540–543.
- Lalazissis, G. A., König, J., Ring, P. (1997b). New parametrization for the lagrangian density of relativistic mean field theory. *Phys. Rev. C*, 55:540–543.
- Lee, S.-J., Fink, J., Balantekin, A. B., Strayer, M. R., Umar, A. S., Reinhard, P. G., Maruhn, J. A., Greiner, W. (1986). Relativistic hartree calculations for axially deformed nuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2916–2919.
- Long, W., Meng, J., Giai, N. V., Zhou, S.-G. (2004). New effective interactions in relativistic mean field theory with nonlinear terms and density-dependent meson-nucleon coupling. *Phys. Rev. C*, 69:034319.
- Machleidt, R. (1989). *The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Structure*, pages 189–376. Springer US.
- Marx, G. (1956). Relativistic effects in heavy nuclei. *Nuclear Physics*, 1(8):660.
- Moravcsik, M. J., Noyes, H. P. (1961). Theories of nucleon-nucleon elastic scattering. *Annual Review of Nuclear Science*, 11(1):95–174.
- Müther, H., Machleidt, R., Brockmann, R. (1988). Dirac-brueckner-hartree-fock approach in finite nuclei. *Physics Letters B*, 202(4):483 – 488.
- Nagels, M. M., Rijken, T. A., de Swart, J. J. (1978). Low-energy nucleon-nucleon potential from regge-pole theory. *Phys. Rev. D*, 17:768–776.
- Negele, J. W. (1970). Structure of finite nuclei in the local-density approximation. *Phys. Rev. C*, 1:1260–1321.

- Negele, J. W. (1982). The mean-field theory of nuclear structure and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 54:913–1015.
- Payne, G. L., Friar, J. L., Gibson, B. F., Afnan, I. R. (1980). Configuration space faddeev calculations. i. triton ground state properties. *Phys. Rev. C*, 22:823–831.
- Proca, A. (1936). Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *Journal de Physique et le Radium*, 7(8):347–353.
- Reinhard, P. G. (1988). The nonlinearity of the scalar field in a relativistic mean-field theory of the nucleus. *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, 329(3):257–266.
- Reinhard, P.-G. (1989). The relativistic mean-field description of nuclei and nuclear dynamics. *Reports on Progress in Physics*, 52(4):439–514.
- Reinhard, P. G., Rufa, M., Maruhn, J., Greiner, W., Friedrich, J. (1986). Nuclear ground-state properties in a relativistic meson-field theory. *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei*, 323(1):13–25.
- Schiff, L. (1951). Nonlinear meson theory of nuclear forces. ii. nonlinearity in the meson-nucleon coupling. *Physical Review*, 84(1):10.
- Serot, B. D., Walecka, J. D. (1986). The Relativistic Nuclear Many Body Problem. *Adv. Nucl. Phys.*, 16:1–327.
- Serr, F., Walecka, J. (1978). A relativistic quantum field theory of finite nuclei. *Physics Letters B*, 79(1):10 – 14.
- Sharma, M., Nagarajan, M., Ring, P. (1993). Rho meson coupling in the relativistic mean field theory and description of exotic nuclei. *Physics Letters B*, 312(4):377 – 381.
- Sharma, M. M., Ring, P. (1992). Neutron skin of spherical nuclei in relativistic and nonrelativistic mean-field approaches. *Phys. Rev. C*, 45:2514–2517.
- Sugahara, Y., Toki, H. (1994). Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear σ and ω terms. *Nuclear Physics A*, 579:557–572.
- Sugahara, Y., Toki, H. (1994). Relativistic mean-field theory for unstable nuclei with non-linear sigma and omega terms. *Nuclear Physics A*, 579(3):557 – 572.
- Svenne, J. (1979). Fourteen years of self-consistent field calculations: What has been learned. 11:179.
- Typel, S., Wolter, H. (1999). Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling. *Nuclear Physics A*, 656(3):331 – 364.
- Vautherin, D., Brink, D. M. (1972). Hartree-fock calculations with skyrme's interaction. i. spherical nuclei. *Phys. Rev. C*, 5:626–647.
- Walecka, J. (1974). A theory of highly condensed matter. *Annals of Physics*, 83(2):491 – 529.
- Wallace, S. J. (1981). High-energy proton scattering. 12:135.
- Wiringa, R. B. (1993). From deuterons to neutron stars: variations in nuclear many-body theory. *Rev. Mod. Phys.*, 65:231.

- Yukawa, H. (1935). H. yukawa, proc. phys. math. soc. jpn. 17, 48 (1935). In *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, volume 17, page 48.
- Ze L'Dovich, Y. B. (1962). The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations. *SOVIET PHYSICS JETP*, 14(5):1143.

Ek 1 Lineer Walecka Modelinde Euler-Lagrange Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

Euler- Lagrange hareket denklemlerinin $q_i = \phi$ için çözümü

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{2}{2} (\partial^\mu \phi) \right] - g_s \bar{\psi} \psi + \frac{2}{2} (m_s^2 \phi) &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \phi + m_s^2 \phi - g_s \bar{\psi} \psi &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \phi + m_s^2 \phi &= g_s \bar{\psi} \psi \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \phi &= g_s \bar{\psi} \psi\end{aligned}\tag{A.1}$$

şeklindedir. Skaler bir kaynak içeren Klein-Gordon denklemi elde edilmiştir.

$q_i = V_\mu$ için

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial V_\mu / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0\tag{A.2}$$

denklemi çözümlenmelidir. İçerisinde karmaşık terimler olduğu için ayrı ayrı incelemekte fayda vardır.

İki elektromanyetik tensörün çarpımı

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) (\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu) \\ &= \partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\mu V_\nu \partial^\nu V^\mu - \partial_\nu V_\mu \partial^\mu V^\nu + \partial_\nu V_\mu \partial^\nu V^\mu \\ &= 2 (\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\nu V_\mu \partial^\mu V^\nu)\end{aligned}$$

bu şekildedir.

Karışıklık olmaması için her iki türev ayrı alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial V_\mu / \partial x^\mu)} \right] &= -\frac{2}{4} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{(\partial_\mu V_\nu \partial^\mu V^\nu - \partial_\nu V_\mu \partial^\mu V^\nu)}{\partial_\mu \partial V_\nu} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [2\partial^\mu V^\nu - 2\partial^\nu V^\mu] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^\mu} [\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu] \\
&= -\partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu} &= \frac{\partial [\bar{\psi} [\gamma_\mu (-g_\nu V^\mu)] \psi + \frac{1}{2} m_\nu^2 V_\mu V^\mu]}{\partial V_\mu} \\
&= \frac{\partial [\bar{\psi} [\gamma_\mu (-g_\nu g^{\mu\eta} V_\eta)] \psi + \frac{1}{2} m_\nu^2 g^{\mu\eta} V_\mu V_\eta]}{\partial V_\mu} \\
&= \bar{\psi} [(-g_\nu g^{\mu\eta} \gamma_\mu)] \psi + \frac{1}{2} m_\nu^2 g^{\mu\eta} (V_\eta + V_\mu \delta_{\mu\eta}) \\
&= \bar{\psi} [(-g_\nu g^{\mu\eta} \gamma_\mu)] \psi + \frac{1}{2} m_\nu^2 g^{\mu\eta} 2V_\eta \\
&= -g_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + m_\nu^2 V^\mu \tag{A.4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuçları birleştirirsek

$$\begin{aligned}
-\partial_\mu F^{\mu\nu} + g_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi - m_\nu^2 V^\nu &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\nu^2 V^\nu &= g_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$q_i = V_\mu$ için çözümü elde etmiş oluruz. Sonuç, korunan baryon akısı ile KED'eye benziyor. Burada $B^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ baryon akısıdır.

$q_i = \bar{\psi}$ için Lagrange denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \bar{\psi} / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\
-\frac{\partial [\bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\nu V^\mu) - (M - g_s \phi)] \psi]}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\
[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\nu V^\mu) - (M - g_s \phi)] \psi &= 0 \tag{A.6}
\end{aligned}$$

şekindedir. Skaler ve vektör alanları ile Dirac denklemini elde edilir.

Enerji momentum tensörünü (2.3) elde etmek için her değişken için ayrı ayrı türevler alınacaktır. Denklem sistemleri karışık olduğu için parça parça ele alınarak sonradan birleştirilecektir.

$q_i = \phi$ için ikinci kısmın türevi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^\mu \phi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)}{\partial^\mu \phi} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial(g_{\mu\nu} \partial^\nu \phi \partial^\mu \phi)}{\partial^\mu \phi} \\
&= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \delta_\nu^\mu + g_{\mu\nu} \partial^\nu \phi) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + \partial_\mu \phi) \\
&= \partial_\mu \phi
\end{aligned} \tag{A.7}$$

şeklindedir. Sonuç

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi / \partial x_\mu)} = \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \tag{A.8}$$

elde edilir.

$q_i = V_\mu$ için

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial V_\mu / \partial x_\nu)} = \partial_\nu V_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^\nu V_\mu} \tag{A.9}$$

sonuç sıfırdır.

İkinci kısmın türevi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial^\nu V_\mu} &= \frac{\partial}{\partial^\nu V_\mu} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\
&= \left(-\frac{1}{4} (4) (\partial_\mu V^\nu - \partial^\nu V_\mu) \right)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial V_\mu / \partial x_\nu)} &= \partial_\nu V_\mu (\partial^\nu V_\mu - \partial_\mu V^\nu) \\
&= \partial_\nu V_\mu g^{\mu\lambda} (\partial_\lambda V_\mu - \partial_\mu V_\lambda) \\
&= \partial_\nu V^\lambda F_{\lambda\mu}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

bu şekildedir.

$q_i = \bar{\psi}$ için

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \bar{\psi} / \partial x_\mu)} = 0 \tag{A.12}$$

sonuç sıfırdır.

$q_i = \psi$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} &= \partial_\nu \psi \frac{\partial}{\partial^\mu \psi} (\bar{\psi} \gamma_\mu i \partial^\mu \psi) \\
&= i \partial_\nu \psi \bar{\psi} \gamma_\mu \\
&= i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi
\end{aligned} \tag{A.13}$$

bu şekilde elde edilir.

Artık enerji momentum tensörü yazılabilir

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x_\mu)} \\
&= -g_{\mu\nu} \left[\bar{\psi} [\gamma_\mu (i \partial^\mu - g_\nu V^\mu) - (M - g_s \phi)] \psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu \right] + \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + \partial_\nu V^\lambda F_{\lambda\mu} + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi. \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Lagrange hareket denklemleri elde edilirken **A.6** sonucunda ifadenin sıfıra eşit olduğu gösterilmişti. İfadeleri biraz daha düzenlenirse

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[m_s^2 \phi^2 - \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + \frac{1}{2} F_{\lambda\alpha} F^{\lambda\alpha} - m_v^2 V_\lambda V^\lambda \right] g_{\mu\nu} + \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi + \partial_\nu V^\lambda F_{\lambda\mu} \\
&\quad + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi
\end{aligned} \tag{A.15}$$

şeklinde sadeleştirilebilir.

Ek 2 NLD Modelinde Euler-Lagrange Hareket Denklemlerinin Elde Edilmesi

L_{etk} terimi

$$L_{etk} = \frac{g\sigma}{2} [\bar{\Psi}\vec{D}\Psi\sigma + \sigma\bar{\Psi}\vec{D}\Psi] - \frac{g\omega}{2} [\bar{\Psi}\vec{D}\gamma^\mu\Psi\omega_\mu + \omega_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{D}\Psi]. \quad (\text{A.1})$$

Gerekli terimler ihmal edilirse (rho mezunu ve foton denklemleri) Lagrange yoğunluğunun açık hali

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [\bar{\Psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\Psi - (i\partial^\mu\bar{\Psi})\gamma_\mu\Psi] - \bar{\Psi}\Psi m - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \\ & + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\sigma}{2} [\bar{\Psi}\vec{D}\Psi\sigma + \sigma\bar{\Psi}\vec{D}\Psi] \\ & - \frac{g\omega}{2} [\bar{\Psi}\vec{D}\gamma^\mu\Psi\omega_\mu + \omega_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\vec{D}\Psi]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Operatörlerin açık halleri

$$\vec{D} := \exp\left(\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}\right) \quad \bar{D} := \exp\left(\frac{i\vec{\partial}_\beta v^\beta + m}{\Lambda}\right) \quad (\text{A.3})$$

şekindedir.

Seri açılımları yapmadan önce örnek olması açısından $g_i \exp$ seri açılımları ikinci mertebeye kadar

$$\begin{aligned} & g_i \exp\left(\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta}{\Lambda}\right) \\ = & g_i - \frac{g_i}{\Lambda} v^\mu i\vec{\partial}_\alpha + \frac{1}{2!} \frac{g_i}{\Lambda^2} v^\mu v^\beta i\vec{\partial}_\alpha i\vec{\partial}_\beta \pm \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} & g_i \exp\left(\frac{i\vec{\partial}_\beta v^\beta}{\Lambda}\right) \\ = & g_i + \frac{g_i}{\Lambda} i\vec{\partial}_\beta v^\beta + \frac{1}{2!} \frac{g_i}{\Lambda^2} i\vec{\partial}_\beta i\vec{\partial}_\alpha v^\beta v^\alpha + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

açılımları bu şekildedir.

Böylece L_{etk} teriminin

$$\begin{aligned} L_{0.mertebe} = & \frac{g\sigma}{2} [\bar{\Psi}\Psi\sigma + \bar{\Psi}\Psi\sigma] \\ & - \frac{g\omega}{2} [\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\omega_\mu + \omega_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

birinci mertebeden açılımı

$$L_{1.mertebe} = \frac{g\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m}{\Lambda} \right) \Psi \sigma + \bar{\Psi} \left(-\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m}{\Lambda} \right) \Psi \sigma \right] - \frac{g\omega}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m}{\Lambda} \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(-\frac{v^\alpha i \vec{\partial}_\alpha + m}{\Lambda} \right) \Psi \right] \quad (\text{A.7})$$

ikinci mertebeden açılımı

$$L_{2.mertebe} = \frac{g\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \sigma + \bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\alpha i \vec{\partial}_\alpha + m) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \sigma \right] - \frac{g\omega}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \right] \quad (\text{A.8})$$

şeklinde olur.

Genelleştirilmiş Euler-Lagrange Denklemleri

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} + \partial_\alpha \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\beta \phi)} + \dots + (-)^n \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n})}. \quad (\text{A.9})$$

2.1 Dirac Denklemi

Dirac denklemini elde etmek için etkileşim Lagrange yoğunluğunun seri açılımlı ifadesinde $\bar{\Psi}$ alanı için Euler-Lagrange denklemini uygulanmalıdır. Etkileşim Lagrange yoğunluğunda ilk terim

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu} \frac{\partial v_\mu}{\partial \bar{\Psi}}, \quad v^\mu \equiv \frac{j^\mu}{\sqrt{j_\alpha j^\alpha}}, \quad j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \quad (\text{A.10})$$

olarak ele alınır. Parça parça alınarak sonradan birleştirilecektir. İlk kısım

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= \frac{1}{2} [i \gamma_\mu \partial^\mu \Psi] - \Psi m \\ &+ \frac{g\sigma}{2} [\Psi \sigma + \sigma \Psi] - \frac{g\omega}{2} [\gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \gamma^\mu \Psi] \\ &+ \frac{g\sigma}{2} \left[\left(-\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m}{\Lambda} \right) \Psi \sigma \right] - \frac{g\omega}{2} \left[\omega_\mu \gamma^\mu \left(-\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m}{\Lambda} \right) \Psi \right] \\ &+ \frac{g\sigma}{2} \left[\left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \sigma \right] \\ &- \frac{g\omega}{2} \left[\omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\mu i \vec{\partial}_\alpha + m) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \right] \pm \dots \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Seri toplamları yapılırsa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = \frac{1}{2} [i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi] - \Psi m + \frac{g\sigma}{2} \left[\Psi \sigma + e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \sigma \right] - \frac{g\omega}{2} \left[\gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \gamma^\mu e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \right] \quad (\text{A.12})$$

İlk terimin ikinci kısmı

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu} \frac{\partial v_\mu}{\partial \bar{\Psi}} &= \frac{g\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{i \vec{\partial}_\alpha}{\Lambda} \right) \Psi \sigma + \bar{\Psi} \left(-\frac{i \vec{\partial}_\alpha}{\Lambda} \right) \Psi \sigma \right] \frac{\partial v_\mu}{\partial \bar{\Psi}} \\ &\quad - \frac{g\omega}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{i \vec{\partial}_\alpha}{\Lambda} \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(-\frac{i \vec{\partial}_\alpha}{\Lambda} \right) \Psi \right] \frac{\partial v_\mu}{\partial \bar{\Psi}} \\ &\quad + \frac{g\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (i \vec{\partial}_\alpha) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \sigma \right. \\ &\quad + \bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\alpha i \vec{\partial}_\alpha + m) (i \vec{\partial}_\beta) \right) \Psi \sigma \\ &\quad + \bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (i \vec{\partial}_\alpha) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \sigma \\ &\quad \left. + \bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\alpha i \vec{\partial}_\alpha + m) (i \vec{\partial}_\beta) \right) \Psi \sigma \right] \frac{\partial v_\mu}{\partial \bar{\Psi}} \\ &\quad - \frac{g\omega}{2} \left[\bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (i \vec{\partial}_\alpha) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \right. \\ &\quad + \bar{\Psi} \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\alpha i \vec{\partial}_\alpha + m) (i \vec{\partial}_\beta) \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \\ &\quad + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (i \vec{\partial}_\alpha) (v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m) \right) \Psi \\ &\quad \left. + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} (v^\alpha i \vec{\partial}_\alpha + m) (i \vec{\partial}_\beta) \right) \Psi \right] \frac{\partial v_\mu}{\partial \bar{\Psi}} \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

şeklindedir. Seri toplamları yapılırsa

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{g\sigma}{2\Lambda} \left[\bar{\Psi} (i \vec{\partial}_\mu) e^{\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \sigma + \bar{\Psi} e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} (-i \vec{\partial}_\mu) \Psi \sigma \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{g\omega}{2\Lambda} \left[\bar{\Psi} (i \vec{\partial}_\mu) e^{\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \gamma^\beta \Psi \omega_\beta + \bar{\Psi} \gamma^\beta e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} (-i \vec{\partial}_\mu) \Psi \omega_\beta \right] \right\} \\ &\quad \times \left[\frac{\gamma^\mu \Psi}{\sqrt{j_\alpha j^\alpha}} - \frac{j^\mu j_\alpha \gamma^\alpha \Psi}{(\sqrt{j_\alpha j^\alpha})^3} \right] \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci terimin sonucu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = -\frac{1}{2} i \gamma_\mu \Psi + \frac{g\sigma}{2\Lambda} v^\mu i \Psi \sigma - \frac{g\omega}{2\Lambda} v^\mu i \gamma_\alpha \Psi \omega^\alpha. \quad (\text{A.15})$$

Üçüncü terimin sonucu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \bar{\Psi})} = \frac{g\sigma}{2} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2!} v^\mu v^\nu i i \Psi \sigma - \frac{g\omega}{2} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2!} v^\mu v^\nu i i \gamma_\alpha \Psi \omega^\alpha. \quad (\text{A.16})$$

Euler-Lagrange denklemlerini seri toplamı şeklinde yazarsak

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2} [i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi] - \Psi m + \frac{g\sigma}{2} \left[\Psi \sigma + e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \sigma \right] \\
& - \frac{g\omega}{2} \left[\gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \gamma^\mu e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \right] \\
& + \frac{1}{2} i\gamma_\mu \partial^\mu \Psi - \frac{g\sigma}{2\Lambda} v^\mu i \partial^\mu \Psi \sigma + \frac{g\omega}{2\Lambda} v^\mu i \gamma_\alpha \partial^\mu \Psi \omega^\alpha \\
& + \frac{g\sigma}{2} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2!} v^\mu v^\nu i i \partial^\mu \partial^\nu \Psi \sigma - \frac{g\omega}{2} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{1}{2!} v^\mu v^\nu i i \gamma_\alpha \partial^\mu \partial^\nu \Psi \omega^\alpha \\
& \pm \dots \\
& + \left\{ \frac{g\sigma}{2\Lambda} \left[\bar{\Psi} (i \vec{\partial}_\mu) e^{\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \sigma + \bar{\Psi} e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} (-i \vec{\partial}_\mu) \Psi \sigma \right] \right. \\
& \left. - \frac{g\omega}{2\Lambda} \left[\bar{\Psi} (i \vec{\partial}_\mu) e^{\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \gamma^\beta \Psi \omega_\beta + \bar{\Psi} \gamma^\beta e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} (-i \vec{\partial}_\mu) \Psi \omega_\beta \right] \right\} \\
& \times \left[\frac{\gamma^\mu \Psi}{\sqrt{j_\alpha j^\alpha}} - \frac{j^\mu j_\alpha \gamma^\alpha \Psi}{(\sqrt{j_\alpha j^\alpha})^3} \right] \\
0 = & (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \Psi \\
& + \frac{g\sigma}{2} e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \sigma - \frac{g\omega}{2} \gamma^\mu e^{-\frac{v^\beta i \vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \omega_\mu \\
& + \frac{g\sigma}{2} \left(1 - \frac{1}{\Lambda} v_\mu i \partial^\mu + \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} v_\mu v_\nu i i \partial^\mu \partial^\nu \mp \dots \right) \Psi \sigma \\
& - \frac{g\omega}{2} \gamma^\mu \left(1 - \frac{1}{\Lambda} v_\mu i \partial^\mu + \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} v_\mu v_\nu i i \partial^\mu \partial^\nu \mp \dots \right) \Psi \omega_\mu \\
& + \Sigma_r \Psi
\end{aligned} \tag{A.17}$$

elde edilir.

Σ_r tekrar düzeltme (rearrangement) terimidir. Böylece Dirac denklemi:

$$\begin{aligned}
0 = & \left[\left(i\gamma_\mu \partial^\mu - g\omega \omega_\mu \gamma^\mu e^{-\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\mu + m}{\Lambda}} \right) \right. \\
& \left. - \left(m - g\sigma e^{-\frac{v^\mu i \vec{\partial}_\mu + m}{\Lambda}} \sigma \right) \right] \Psi + \Sigma_r
\end{aligned} \tag{A.18}$$

şeklinde elde edilir. Daha bilindik halinde gösterimi

$$[\gamma_\mu (i \partial^\mu - \Sigma^\mu) - (m - \Sigma_\sigma)] \Psi + \Sigma_r = 0. \tag{A.19}$$

2.2 Mezon Denklemleri:

Sigma mezonu için değişken σ seçilir. Euler-Lagrange hareket denklemlerinin ilk terimi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = -m_\sigma^2 \sigma + \frac{g\sigma}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \Psi + \bar{\Psi} \vec{D} \Psi] \tag{A.20}$$

ikinci terimi:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \sigma)} &= \partial_\alpha \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma + \partial^\mu \sigma) \\ &= \partial^\nu \partial_\mu \sigma\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

şeklinde elde edilir.

Denklemden yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}-m_\sigma^2 \sigma + \frac{g_\sigma}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \Psi + \bar{\Psi} \vec{D} \Psi] - \partial^\nu \partial_\nu \sigma &= 0 \\ \partial^\nu \partial_{\mu\mu} \sigma + m_\sigma^2 \sigma &= \frac{g_\sigma}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \Psi + \bar{\Psi} \vec{D} \Psi]\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

elde edilir.

Omega mezonu için ω seçilir. Euler-Lagrange hareket denklemlerinin ilk terimi

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_m}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right] \\ &= [m_\omega^2 \omega^\mu]\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial L_{etk}}{\partial \omega^\mu} = \frac{\partial L_{etk}}{\partial \omega^\mu} + \underbrace{\frac{\partial L_{etk}}{\partial v_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \omega^\mu}}_{\omega_mezon} + \underbrace{\frac{\partial L_{etk}}{\partial v_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \omega^\mu}}_{\sigma_mezon}\quad (\text{A.24})$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{etk}}{\partial \omega^\mu} &= \frac{\partial}{\partial \omega^\mu} \left(-\frac{g_\omega}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{D} \Psi] \right) \\ &= -\frac{g_\omega}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \gamma^\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{D} \Psi]\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

omega mezon için

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{etk}}{\partial v_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \omega_\mu} &= -\frac{g_\omega}{2} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left[\bar{\Psi} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^\beta + m}{\Lambda}} \gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-\frac{v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \Psi \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \omega_\mu} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} \right] \\ &= -\frac{g_\omega}{2} \left[\bar{\Psi} \frac{i\vec{\partial}^\alpha}{\Lambda} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^\beta + m}{\Lambda}} \gamma^\mu \Psi \omega_\mu + \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-\frac{v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}} \frac{-i\vec{\partial}^\alpha}{\Lambda} \Psi \right] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} - \frac{\omega_\alpha \omega^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}^3} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.26})$$

sigma mezon için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_{etk}}{\partial v_\alpha} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \omega_\mu} &= \frac{g_\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left[\bar{\Psi} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^{\beta+m}}{\Lambda}} \Psi \sigma + \bar{\Psi} e^{\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta+m}{\Lambda}} \Psi \sigma \right] \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \omega_\mu} \left[\frac{\omega^\alpha}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} \right] \\
&= \frac{g_\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} \frac{i\vec{\partial}^\alpha}{\Lambda} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^{\beta+m}}{\Lambda}} \Psi \sigma + \bar{\Psi} e^{\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta+m}{\Lambda}} \frac{-i\vec{\partial}^\alpha}{\Lambda} \Psi \sigma \right] \\
&\quad \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} - \frac{\omega_\alpha \omega^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha{}^3}} \right] \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha \frac{\partial L_m}{\partial (\partial_\alpha \omega_\mu)} &= \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \omega_\mu)} \left[-\frac{1}{4} (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) (\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu) \right] \\
&= \partial_\mu F^{\mu\nu} \\
\partial_\alpha \frac{\partial L_{etk}}{\partial (\partial_\alpha \omega_\mu)} &= 0 \quad (\text{A.28})
\end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla Proca denklemi

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{(\omega)\mu\nu} + [m_\omega^2 \omega^\nu] &= \frac{g_\omega}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \gamma^\nu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\nu \vec{D} \Psi] + \Omega_r^\nu \\
\Omega_r^{(\omega)\nu} &= -\frac{g_\omega}{2\Lambda} \left[\bar{\Psi} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^{\beta+m}}{\Lambda}} \left(\frac{i\vec{\partial}^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} - \frac{i\vec{\partial}^\alpha \omega_\alpha \omega^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha{}^3}} \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \right. \\
&\quad \left. + \bar{\Psi} \left(\frac{-i\vec{\partial}^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} - \frac{-i\vec{\partial}^\alpha \omega_\alpha \omega^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha{}^3}} \right) \gamma^\mu e^{\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta+m}{\Lambda}} \Psi \omega_\mu \right] \\
&\quad + \frac{g_\sigma}{2\Lambda} \left[\bar{\Psi} e^{\frac{i\vec{\partial}_\beta v^{\beta+m}}{\Lambda}} \left(\frac{i\vec{\partial}^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} - \frac{i\vec{\partial}^\alpha \omega_\alpha \omega^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha{}^3}} \right) \Psi \sigma \right. \\
&\quad \left. + \bar{\Psi} \left(\frac{-i\vec{\partial}^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha}} - \frac{-i\vec{\partial}^\alpha \omega_\alpha \omega^\nu}{\sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha{}^3}} \right) \gamma^\mu e^{\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta+m}{\Lambda}} \Psi \sigma \right] \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.3 Akı Yoğunlukları

Baryon akı yoğunluğu

$$J_B^\nu = \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi$$

Skaler yoğunluk

$$\rho_s = \bar{\Psi} \Psi$$

$$\partial_\mu [J^\mu - T^{\mu\nu} \delta_{x\nu}] = 0 \quad (\text{A.30})$$

Burada J^μ açık hali

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \phi)} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \phi)} \mp \dots \right] \delta \phi_T \\
&+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \phi)} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \phi)} \pm \dots \right] \partial_\beta \delta \phi_T \\
&+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\xi \phi)} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\gamma \partial_\xi \phi)} \pm \dots \right] \partial_\gamma \partial_\xi \delta \phi_T + \dots \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Buradaki $\delta \Psi$ ve $\delta \bar{\Psi}$ ifadeleri

$$\delta \Psi = i\varepsilon \Psi \quad \delta \bar{\Psi} = -ie \bar{\Psi}. \quad (\text{A.32})$$

İlk üç terim seri olarak yazılırsa

$$\frac{J^\mu}{i\varepsilon} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \Psi)} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \Psi)} \mp \dots \right] \Psi \quad (\text{A.33})$$

$$+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \Psi)} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \Psi)} \pm \dots \right] \partial_\beta \Psi \quad (\text{A.34})$$

$$+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\xi \Psi)} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\gamma \partial_\xi \Psi)} \pm \dots \right] \partial_\gamma \partial_\xi \Psi \quad (\text{A.35})$$

$$- \bar{\Psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \bar{\Psi})} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \bar{\Psi})} \mp \dots \right] \quad (\text{A.36})$$

$$+ \partial_\beta \bar{\Psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \bar{\Psi})} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \bar{\Psi})} \pm \dots \right] \quad (\text{A.37})$$

$$+ \partial_\gamma \partial_\xi \bar{\Psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\xi \bar{\Psi})} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \partial_\gamma \partial_\xi \bar{\Psi})} \pm \dots \right] \quad (\text{A.38})$$

şeklinde olur.

J^μ seri açılımı

$$\frac{J^\mu}{i\varepsilon} = \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 + \dots + \mathcal{O}_n \quad (\text{A.39})$$

olarak yazılabilir.

L_{etk} serilerinden türev katkıları gelecektir. Birinci türevleri için L_1 teriminden katkı gelecektir, ikinci türevlerinden L_2 teriminden katkı gelecektir.

$$\mathcal{O}_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \Psi - \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) \quad (\text{A.40})$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\Psi} i \gamma_\mu \Psi - \frac{g_\sigma}{2} \bar{\Psi} \left(\frac{v^\mu i}{\Lambda} \right) \sigma \Psi + \frac{g_\omega}{2} \omega_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \left(\frac{v^{\alpha i}}{\Lambda} \right) \Psi \quad (\text{A.41})$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{\Psi} i \gamma_\mu \Psi - \frac{g_\sigma}{2} \bar{\Psi} \left(\frac{v^\mu i}{\Lambda} \right) \Psi \sigma + \frac{g_\omega}{2} \bar{\Psi} \left(\frac{v^\mu i}{\Lambda} \right) \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \quad (\text{A.42})$$

\mathcal{O}_0/i sıfırcı bileşeninin beklenen değeri

$$\frac{\mathcal{O}_0}{i} = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle + \frac{g\omega}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle \omega^0 - \frac{g\sigma}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \sigma \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= - \left(\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \Psi)} \Psi - \bar{\Psi} \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \bar{\Psi})} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \Psi)} \partial_\beta \Psi + \partial_\beta \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \bar{\Psi})} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_1}{i} &= -\frac{g\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \Psi \sigma + \frac{g\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \\ &+ \frac{g\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \Psi \sigma - \frac{g\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \\ &+ \frac{g\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \sigma \Psi - \frac{g\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \\ &+ \frac{g\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \Psi \sigma - \frac{g\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} i \partial_\beta v^\mu v^\beta \gamma^\mu \Psi \omega_\mu \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

\mathcal{O}_1/i sıfırcı bileşeninin beklenen değeri

$$\frac{\mathcal{O}_1}{i} = -\frac{g\omega}{\Lambda} \frac{2}{2!} \left\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \frac{E}{\Lambda} \Psi \right\rangle \omega^0 + \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{2}{2!} \left\langle \bar{\Psi} \frac{E}{\Lambda} \Psi \right\rangle \sigma \quad (\text{A.46})$$

n 'inci değerin sıfırcı bileşeninin beklenen değeri

$$\frac{\mathcal{O}_{n-1}}{i} = (-)^n \frac{g\omega}{\Lambda} \frac{n}{n!} \left\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \frac{E^{n-1}}{\Lambda^{n-1}} \Psi \right\rangle \omega^0 - (-)^n \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{n}{n!} \left\langle \bar{\Psi} \frac{E^{n-1}}{\Lambda^{n-1}} \Psi \right\rangle \sigma \quad (\text{A.47})$$

Sonuçları seri toplamı yapılırsa J^0 beklenen değeri

$$J^0 = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle + \frac{g\omega}{\Lambda} \left\langle \bar{\Psi} \gamma^0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \right\rangle \omega^0 - \frac{g\sigma}{\Lambda} \left\langle \bar{\Psi} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \right\rangle \sigma \quad (\text{A.48})$$

şeklinde elde edilir.

2.4 Enerji Momentum Tensörü

$T^{\mu\nu}$ tensörünün seri açılımı

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \phi)} + \partial_\beta \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \phi)} \mp \dots \right] \partial^\nu \phi \\ &+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \phi)} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \phi)} \pm \dots \right] \partial_\beta \partial^\nu \phi \\ &+ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\xi \phi)} - \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\xi \phi)} \pm \dots \right] \partial_\beta \partial_\xi \partial^\nu \phi + \dots \\ &- g^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

şeklindedir.

$T^{\mu\nu}$ seri toplami olarak

$$T^{\mu\nu} = \mathcal{T}_0^{\mu\nu} + \mathcal{T}_1^{\mu\nu} + \mathcal{T}_2^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{A.50})$$

yazılabilir.

Burada $\mathcal{T}_0^{\mu\nu}$

$$\mathcal{T}_0^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \partial^\nu \Psi - \partial^\nu \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} &= \frac{1}{2} (\bar{\Psi} i \gamma^\mu) - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma}{\Lambda} (\bar{\Psi} v^\mu i \sigma) + \frac{1}{2} \frac{g_\omega}{\Lambda} (\omega^\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu v^\mu i) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} &= -\frac{1}{2} (i \gamma^\mu \Psi) + \frac{1}{2} \frac{g_\sigma}{\Lambda} (v^\mu \Psi i \sigma) - \frac{1}{2} \frac{g_\omega}{\Lambda} (v^\mu i \gamma_\mu \Psi \omega^\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\bar{\Psi} i \gamma^\mu) \partial^\nu \Psi - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma}{\Lambda} (\bar{\Psi} v^\mu i \sigma) \partial^\nu \Psi + \frac{1}{2} \frac{g_\omega}{\Lambda} (\omega^\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu v^\mu i) \partial^\nu \Psi \\ &+ \frac{1}{2} \partial^\nu \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \Psi) - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma}{\Lambda} \partial^\nu \bar{\Psi} (v^\mu \Psi i \sigma) + \frac{1}{2} \frac{g_\omega}{\Lambda} \partial^\nu \bar{\Psi} (v^\mu i \gamma_\mu \Psi \omega^\mu) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

sıfır sıfır bileşeninin beklenen değeri ile yer değiştirilirse tirirsek:

$$\mathcal{T}_0^{00} = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 E \Psi \rangle + \frac{g_\omega}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 E \Psi \rangle \omega^0 - \frac{g_\sigma}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} E \Psi \rangle \sigma$$

elde edilir.

$\mathcal{T}_1^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^{\mu\nu} &= - \left(\partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \Psi)} \partial^\nu \Psi - \partial^\nu \bar{\Psi} \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \bar{\Psi})} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \Psi)} \partial^\nu \partial_\beta \Psi + \partial^\nu \partial_\beta \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\beta \bar{\Psi})} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{g_\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} i \partial_\beta \bar{\Psi} v^\mu v^\beta i \partial^\nu \Psi \sigma \\ &+ \frac{g_\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} i \partial_\beta \bar{\Psi} v^\mu v^\beta \gamma^\mu i \partial^\nu \Psi \omega_\mu \\ &+ \frac{g_\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} i \partial^\nu \bar{\Psi} i \partial_\beta \bar{\Psi} v^\mu v^\beta \sigma \\ &- \frac{g_\omega}{2} i \partial^\nu \bar{\Psi} v^\mu v^\beta \gamma^\mu i \partial_\beta \Psi \omega_\mu \\ &+ \frac{g_\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} v^\mu v^\beta i \partial^\nu i \partial_\beta \Psi \sigma \\ &- \frac{g_\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{\Psi} \gamma^\mu v^\mu v^\beta i \partial^\nu i \partial_\beta \Psi \omega_\mu \\ &+ \frac{g_\sigma}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} i \partial^\nu i \partial_\beta \bar{\Psi} v^\mu v^\beta \Psi \sigma \\ &- \frac{g_\omega}{2} \frac{1}{2!} \frac{1}{\Lambda^2} i \partial^\nu i \partial_\beta \bar{\Psi} \gamma^\mu v^\mu v^\beta \Psi \omega_\mu \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

sıfır sıfır bileşeninin beklenen değeri ile yer değiştirilirse tirirsek:

$$\mathcal{T}_1^{00} = -\frac{g\omega}{\Lambda} \frac{2}{2!} \left\langle \bar{\Psi} \gamma^0 \frac{E}{\Lambda} E \Psi \right\rangle \omega^0 + \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{2}{2!} \left\langle \bar{\Psi} \frac{E}{\Lambda} E \Psi \right\rangle \sigma \quad (\text{A.56})$$

elde edilir.

$-g^{\mu\nu} \mathcal{L}$ için sıfır sıfır bileşeninin beklenen değeri

$$-g^{00} \mathcal{L} = \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma^2 - m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{1}{2} (\nabla^2 \sigma^2 - \nabla^2 \omega_0^2).$$

Seri toplamı yapılırsa \mathcal{T}^{00} beklenen değeri

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} &= \left\langle \bar{\Psi} \gamma^0 E \Psi \right\rangle + \frac{g\omega}{\Lambda} \left\langle \bar{\Psi} \gamma^0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} E \Psi \right\rangle \omega^0 - \frac{g\sigma}{\Lambda} \left\langle \bar{\Psi} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} E \Psi \right\rangle \sigma \\ &+ \frac{1}{2} (m_\sigma^2 \sigma^2 - m_\omega^2 \omega_0^2) + \frac{1}{2} (\nabla^2 \sigma^2 - \nabla^2 \omega_0^2) \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

şeklinde elde edilir.

2.5 Nükleer Madde

Nükleer madde sıfır sıcaklıkta, homojen (eş dağılımlı), izotropik (eş yönlü) ve durağan (zamanla değişmeyen) bir sistem şeklinde tanımlanır . Bu simetrilere dolayı hareket denklemleri çok basitleşir, yoğunluklar konum ve zamanda sabit olurlar ve akıların sadece 0. bileşenleri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla mezon alanları sabit rakamlara dönüşür ve ω mezonun uzay bileşenleri sıfıra gider. Ortalama alan yaklaşımında tüm mezon alanları beklenen değerleri ile yer değiştirir. Ayrıca $v^\mu = \omega^\mu / \sqrt{\omega_\alpha \omega^\alpha} = (1, \vec{0})$ yada $v^\mu = j^\mu / \sqrt{j_\alpha j^\alpha} = (1, \vec{0})$ olur çünkü nükleon $j^\mu = \langle \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \rangle$ akısının uzay-bileşenleri durağan nükleer madde için ortalamada sıfıra gider.

Spinör alanlarının nükleer madde içindeki çözümleri düzlem dalga

$$\Psi(s, \vec{p}) = u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}$$

çözümleri olarak yazılabilir. Burada s spin ve $p^\mu = (E, \vec{p})$ nükleonun 4-momentumudur. Ayrıca, x^μ nükleonun uzay-zaman koordinatları ve u 'da pozitif

enerji durumların spinör alanlarıdır. Rearrangement terimlerinden birine bakarsak

$$\begin{aligned}
& \left[u^\dagger(s, \vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \frac{i\vec{\partial}_\beta}{\Lambda} e^{\frac{v^\mu i\vec{\partial}_{\alpha+m}}{\Lambda}} u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \sigma \right. \\
& \left. + u^\dagger(s, \vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} e^{-\frac{v^\mu i\vec{\partial}_{\alpha+m}}{\Lambda}} \left(-\frac{i\vec{\partial}_\beta}{\Lambda}\right) u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \sigma \right] \\
& = \left[u^\dagger(s, \vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} \frac{i\vec{\partial}_\beta}{\Lambda} e^{\frac{v^0 i\vec{\partial}_{0+m}}{\Lambda}} u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \sigma \right. \\
& \left. + u^\dagger(s, \vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} e^{-\frac{v^0 i\vec{\partial}_{0+m}}{\Lambda}} \left(-\frac{i\vec{\partial}_\beta}{\Lambda}\right) u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu} \sigma \right], \\
& = u^\dagger(s, \vec{p}) u(s, \vec{p}) e^{ip^\mu x_\mu} e^{-ip^\mu x_\mu} \sigma \left[\frac{-p^\beta}{\Lambda} e^{-\frac{p^0+m}{\Lambda}} + e^{-\frac{p^0+m}{\Lambda}} \left(-\frac{p^\beta}{\Lambda}\right) \right], \\
& = \sigma \left[\frac{-p^\beta}{\Lambda} e^{-\frac{p^0+m}{\Lambda}} + e^{-\frac{p^0+m}{\Lambda}} \left(-\frac{p^\beta}{\Lambda}\right) \right] = 2\sigma \left[\frac{-p^\beta}{\Lambda} e^{-\frac{p^0+m}{\Lambda}} \right]
\end{aligned} \tag{A.58}$$

ve $\frac{\partial v^\mu}{\partial \Psi} = 0$ olduğundan $\Sigma_r = 0$ 'dır. Dirac denklemi

$$\begin{aligned}
0 & = \left[\gamma_\mu \left[i\partial^\mu - g\omega A_\mu^{(\omega)} e^{-\frac{v^\mu i\vec{\partial}_{\alpha+m}}{\Lambda}} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(m - g\sigma e^{-\frac{v^\mu i\vec{\partial}_{\alpha+m}}{\Lambda}} \sigma \right) \right] \Psi, \\
0 & = \left[\gamma_\mu \left[i\partial^\mu - g\omega A_\mu^{(\omega)} e^{-\frac{i\vec{\partial}_{0+m}}{\Lambda}} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(m - g\sigma e^{-\frac{i\vec{\partial}_{0+m}}{\Lambda}} \sigma \right) \right] u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}, \\
0 & = \left[\gamma_\mu \left[i\partial^\mu - g\omega A_\mu^{(\omega)} e^{-\frac{-E+m}{\Lambda}} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left(m - g\sigma e^{-\frac{-E+m}{\Lambda}} \sigma \right) \right] u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}
\end{aligned} \tag{A.59}$$

foton alanını ihmal edelim ve mezon alanlarını beklenen değerleriyle yer değiştirelim

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\left[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma_0 A_0^{(\omega)} e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(m - g_\sigma e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \phi_0 \right) \right] u(s, \vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}, \\
\Rightarrow 0 &= \left[\hbar c \left[\gamma_\mu p^\mu - g_\omega \gamma_0 A_0^{(\omega)} e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(m - g_\sigma e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \sigma \right) \right] u(s, \vec{p}), \\
\Rightarrow 0 &= \left[\left[\gamma_0 \left(p^0 - g_\omega A_0^{(\omega)} e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(m + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - g_\sigma e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \sigma \right) \right] u(s, \vec{p}), \\
\Rightarrow 0 &= \left[\left[\gamma_0 \left(\underbrace{E - g_\omega A_0^{(\omega)} e^{\frac{-E+m}{\Lambda}}}_{E^*} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + \underbrace{m - g_\sigma e^{\frac{-E+m}{\Lambda}} \sigma}_{M^*} \right) \right] u(s, \vec{p}) \tag{A.60}
\end{aligned}$$

basitçe ifade edersek (birimleri bir tarafa bırakalım)

$$\gamma_0 E^* u(s, \vec{p}) = (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + M^*) u(s, \vec{p}) \tag{A.61}$$

burada spinör kısmın çözümü

$$\begin{aligned}
u(s, \vec{p}) &= N \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E^* + m^*} \phi_s \right), \phi_s \text{ spin özfonksiyonları ve} \\
\text{normalizasyon } N &= \sqrt{\frac{E^* + m^*}{2E^*}} \tag{A.62}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Spinör denklemi dispersiyon bağıntısını sağlar:

$$E^{*2} - \vec{p}^2 = M^{*2} \tag{A.63}$$

Ortalama alan kuramında mezon hareket denklemleri elde edilebilir. Klein-Gordon denklemi

$$\begin{aligned}
[\partial_\mu \partial^\mu \phi] + \left(\frac{m_\sigma c^2}{\hbar c}\right)^2 \phi &= \frac{g_\sigma}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \Psi + \bar{\Psi} \vec{D} \Psi], \\
\Rightarrow m_\sigma^2 \sigma &= \frac{g_\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} e^{\left(\frac{i\vec{\partial}_\beta v^\beta + m}{\Lambda}\right)} \Psi + \bar{\Psi} e^{\left(\frac{-v^\beta i\vec{\partial}_\beta + m}{\Lambda}\right)} \Psi \right], \\
\Rightarrow m_\sigma^2 \sigma &= \frac{g_\sigma}{2} \left[\bar{\Psi} e^{\left(\frac{-E+m}{\Lambda}\right)} \Psi + \bar{\Psi} e^{\left(\frac{-E+m}{\Lambda}\right)} \Psi \right], \\
\Rightarrow m_\sigma^2 \sigma &= g_\sigma \left[\underbrace{\langle \bar{\Psi} e^{\left(\frac{-E+m}{\Lambda}\right)} \Psi \rangle}_{\rho_s} \right], \\
\Rightarrow m_\sigma^2 \sigma &= g_\sigma [\rho_s], \tag{A.64}
\end{aligned}$$

$$\rho_s = \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{\left(\frac{-E+m}{\Lambda}\right)} \Theta(p - p_F). \tag{A.65}$$

Proca denklemi

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{(\omega)\mu\nu} + \left[\left(\frac{m_\omega c^2}{\hbar c}\right)^2 A^{(\omega)\nu}\right] &= \frac{g_\omega}{2} [\bar{\Psi} \vec{D} \gamma^\nu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\nu \vec{D} \Psi] + \underbrace{\Omega_r^\nu}_{sifir}, \\
\Rightarrow [m_\omega^2 A^{(\omega)0}] &= g_\omega \left[\underbrace{\langle \bar{\Psi} e^{\left(\frac{-E+m}{\Lambda}\right)} \gamma^0 \Psi \rangle}_{\rho_0} \right], \\
\Rightarrow [m_\omega^2 A^{(\omega)0}] &= g_\omega \rho_0, \tag{A.66}
\end{aligned}$$

$$\rho_0 = \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{\left(\frac{-E+m}{\Lambda}\right)} \Theta(p - p_F). \tag{A.67}$$

Ek 3 Lagrange Çarpanı μ 'nün Elde Edilmesi

3.16 eşitliği için çekirdeğin enerjisinin ve baryon sayısının p_f üzerinden minimizasyonunu yapmak gerekiyor. Çekirdek enerjisi ($E_{\text{çekirdek}}$) ve baryon sayısı uzay üzerinden integre edilerek bulunduğu için onlar yerine minimizasyonu integrallerin içerisine uygulayabiliriz.

İlk olarak Lagrange yoğunluğundan (2.43) elde edilen J^0 yani ρ_B denklemini ele alalım.

$$J^0 = \rho_B = \langle \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \rangle + \frac{g_\omega}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} \gamma^0 e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \rangle \omega_0 - \frac{g_\sigma}{\Lambda} \langle \bar{\Psi} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \Psi \rangle \sigma. \quad (\text{A.1})$$

Bu denklemi integral formunda yazarsak

$$\rho_B = \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 p + \frac{g_\omega}{\Lambda} \rho_o \omega_0 - \frac{g_\sigma}{\Lambda} \rho_s \sigma \quad (\text{A.2})$$

burada mezon yoğunlukları integral formundalar. İlk olarak integral formundaki her şeyi açık halinde yazmak gerekli. İlk integral Walecka modelinde ρ_B olan integral ve alınması kolay; ama mezon yoğunluk integralleri nümerik integraller oldukları için bu yol imkansız hale gelir. Bu yüzden sonsuz madde denklemleri içerisinde yer alan mezon değerleriyle yoğunlukları arasındaki ilişkiden faydalanarak bir yaklaşım yapmak gerekli.

Sonsuz madde için yazılan eşitlikler

$$\begin{aligned} m_\omega^2 \omega^0 &= g_\omega \rho_o \\ m_\sigma^2 \sigma &= g_\sigma \rho_s. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ρ_B içerisine yerleştirilip p_f yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned} p_f &= \left[\left(\rho_B - \frac{g_\omega}{\Lambda} \frac{m_\omega^2 \omega_0}{g_\omega} \omega_0 + \frac{g_\sigma}{\Lambda} \frac{m_\sigma^2 \sigma}{g_\sigma} \sigma \right) \frac{(2\pi)^3 3}{\kappa 4\pi} \right]^{1/3}, \\ &= \left[\left(\rho_B - \frac{m_\omega^2 \omega_0^2}{\Lambda} + \frac{m_\sigma^2 \sigma^2}{\Lambda} \right) \frac{(2\pi)^3 3}{\kappa 4\pi} \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

elde edilir.

Denklem 3.2'de p_f minimizasyonu yapmak için (3.16 yaklaşımı) her ifadenin p_f 'ye göre türevi alınacaktır. 3.2'te p_f 'ye bağlı sadece ilk üç terim vardır.

İlk terimin türevi

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 E \\
\frac{\partial A}{\partial p_f} &= \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 E[p] \right) \\
&= \frac{\kappa 4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\int_0^{p_f} p^2 E[p] dp \right) \\
&= \frac{\kappa 4\pi}{(2\pi)^3} p_f^2 E[p_f].
\end{aligned} \tag{A.5}$$

İkinci terimin türevi

$$\begin{aligned}
B &= \frac{g\omega}{\Lambda} \left(\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 E e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \omega_0 \\
\frac{\partial B}{\partial p_f} &= \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\frac{g\omega}{\Lambda} \left(\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 E e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \omega_0 \right) \\
&= \left(\frac{g\omega}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \omega_0 \right) \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\int_0^{p_f} d^3 E e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \\
&= \left(\frac{g\omega}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \omega_0 \right) \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\int_0^{p_f} p^2 E[p] e^{-\frac{E[p]-m}{\Lambda}} dp \right) \\
&= \left(\frac{g\omega}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \omega_0 \right) \left(p_f^2 E[p_f] e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Üçüncü terimin türevi

$$\begin{aligned}
C &= \frac{g\sigma}{\Lambda} \left(\frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int_0^{p_f} d^3 E \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \sigma \\
\frac{\partial C}{\partial p_f} &= \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \sigma \left(\int_0^{p_f} d^3 E \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \right) \right) \\
&= \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \sigma \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\int_0^{p_f} p^2 E[p] \frac{M^*}{E^*[p]} e^{-\frac{E[p]-m}{\Lambda}} dp \right) \\
&+ \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \sigma \int_0^{p_f} p^2 E[p] \frac{\partial}{\partial p_f} \left(\frac{M^*}{E^*[p]} \right) e^{-\frac{E[p]-m}{\Lambda}} dp.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Burada 3.3 ve 3.4 eşitlikleri göz önüne alınırsa açıkça p_f 'ye bağlı değildir ve integralin içerisindeki türev değeri *sıfır* olur.

$$\frac{\partial C}{\partial p_f} = \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \sigma \left(p_f^2 E[p_f] \frac{M^*}{E^*[p_f]} e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right). \tag{A.8}$$

3.16'deki baryon yoğunluğunun minimize edilmesi

$$\begin{aligned}
\delta B &= \frac{\partial}{\partial p_f} \rho_B \\
&= \frac{\kappa}{(2\pi)^3} p_f^2.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Böylece eşitlik

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa 4\pi}{(2\pi)^3} p_f^2 E[p_f] + \frac{g\omega}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \omega_0 \left(p_f^2 E[p_f] e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \right) \\
& - \frac{g\sigma}{\Lambda} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \sigma \left(p_f^2 E[p_f] \frac{M^*}{E^*[p_f]} e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right) - \mu \frac{\kappa}{(2\pi)^3} p_f^2 = 0 \\
E[p_f] + \frac{g\omega}{\Lambda} \omega_0 \left(E[p_f] e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \right) - \frac{g\sigma}{\Lambda} \sigma \left(E[p_f] \frac{M^*}{E^*[p_f]} e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right) - \mu & = 0 \\
E[p_f] + \frac{g\omega}{\Lambda} \omega_0 \left(E[p_f] e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \right) - \frac{g\sigma}{\Lambda} \sigma \left(E[p_f] \frac{M^*}{E^*[p_f]} e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right) & = \mu
\end{aligned} \tag{A.10}$$

haline gelir.

Eşitliği $E[p_f]$ parantezine alabiliriz. $E[p]$ tanımını 3.5'te verilmişti.

$$\mu = \left(\sqrt{p_f^2 + M^{*2}} + g\omega \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \right) \left(1 + \frac{g\omega}{\Lambda} \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} - \frac{g\sigma}{\Lambda} \sigma \frac{M^*}{E^*[p_f]} e^{-\frac{E[p_f]-m}{\Lambda}} \right).$$

Burada sadeleştirme yapabiliriz. Λ ; sonsuz nükleer madde için 700 (MeV) seçilmiştir (Gaitanos ve ark. 2009), sonlu nükleer madde içinse biraz daha büyük olacaktır. Böylece $1/\Lambda$ içeren terimler çok küçük bir sayı ile çarpılacaktır. Ayrıca exp çarpanı da $(E[p_f])$, baryon kütlesi M^* 'ye yakın olacaktır ve Λ 'ya bölünecektir) bu ifadelere azaltıcı katkı yapacaktır. Bu iki ifade birbirinden çıkartıldığı için birden çok çok küçük bir katkı sağlayacaktır. Bu yüzden sadeleştirme için $1/\Lambda$ içeren iki terim ihmal edilebilir.

Böylece μ

$$\begin{aligned}
\mu & \approx \left(\sqrt{p_f^2 + M^{*2}} + g\omega \omega_0 e^{-\frac{E[p_f]-M}{\Lambda}} \right) \\
\mu & = E[p_f]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

olarak elde edilir.

Ek 4 NLD Modelinde Mezon Alan Denklemlerinin Küresel Koordinatlarda Açılımı

Problemi çözmek için küresel koordinatlarda açılımı yapılarak, üç boyutlu diferansiyel operatörü ∇ 'yı tek boyuta indirebiliriz. Böylece yoğunlukların değişimi çekirdeğin yarıçapına bağlanmış olur. Problem sınır değer problemine dönüşecektir.

Vektör mezon

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 - m_\omega^2) \omega_0 &= -\frac{g_\omega \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - m_\omega^2 \right) \omega_0 &= -\frac{g_\omega \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}, \quad \omega_0 = \frac{\omega(r)}{r} \\
 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - m_\omega^2 \right) \frac{\omega(r)}{r} &= -\frac{g_\omega \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m_\omega^2}{r} \right) \omega(r) &= -\frac{g_\omega \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} - m_\omega^2 \right) \omega(r) &= -\frac{g_\omega \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \left(\frac{d^2}{dr^2} - m_\omega^2 \right) \omega(r) &= -\frac{g_\omega \mathcal{K} r}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Skaler mezon

$$\begin{aligned}
 (\nabla^2 - m_\sigma^2) \sigma &= -\frac{g_\sigma \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - m_\sigma^2 \right) \sigma &= -\frac{g_\sigma \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}, \quad \sigma = \frac{\sigma(r)}{r} \\
 \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - m_\sigma^2 \right) \frac{\sigma(r)}{r} &= -\frac{g_\sigma \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m_\sigma^2}{r} \right) \sigma(r) &= -\frac{g_\sigma \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \frac{1}{r} \left(\frac{d^2}{dr^2} - m_\sigma^2 \right) \sigma(r) &= -\frac{g_\sigma \mathcal{K}}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \\
 \left(\frac{d^2}{dr^2} - m_\sigma^2 \right) \sigma(r) &= -\frac{g_\sigma \mathcal{K} r}{(2\pi)^3} \int_0^{P_f} d^3 p \frac{M^*}{E^*} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}}. \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

Böylece diğer ifadeler ve μ sabiti:

$$E = E^* + g_\omega \frac{\omega}{r} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \tag{A.3}$$

$$M^* = M - g_\sigma \frac{\sigma}{r} e^{-\frac{E-m}{\Lambda}} \tag{A.4}$$

$$\mu = \sqrt{p_f^2(r) + M^{*2}(r)} + g_\omega \frac{\omega(r)}{r} e^{-\frac{\mu-m}{\Lambda}}. \tag{A.5}$$

Ek 5 Nümerik Tartışma

İkinci dereceden çiftlenimli diferansiyel denklem sistemini çözmek için genel bir nümerik metot bulunmamaktadır, aslında hiçbir nümerik metot bizlere kesin bir çözüme ulaşacağımızı garanti etmemektedir.

Walecka'nın çalışmasını temel aldığımız zaman NLD denklemleri içerisinde ayrıca nümerik integral, her momentum seviyesinde bir tane E değerini içermesi, p_f seviyesinde E 'nin μ değerini alması; bu problemin doğasını daha karmaşık hale getirmektedir.

Prensipite basit duran sıfır civarında Taylor seri açılımı yapıp *Newton Rapson* yöntemi ile kök arama metodu; çalışmamızın içerisinde büyük matrisler barındırması, parametrelerdeki en ufak değişimde çözümün hemen başka köklere kayması veya sonuç üretmemesi gibi sorunlar yüzünden bizleri daha önce yazılmış, içerisinde çeşitli düzeltme metotlarının olduğu hazır kodlara yöneltti.

Mezon alan denklemleri ikinci dereceden diferansiyel denklem olduklarından nümerik olarak çözmek için birinci dereceden iki diferansiyel denkleme dönüştürebiliriz. Böylece elimizde birinci dereceden dört tane diferansiyel denklem olur. Newton-Raphson kök arama yöntemleri gibi kök arama yöntemleriyle birinci dereceden dört diferansiyel denklemi çözebiliriz.

İlk olarak Newton-Raphson kök arama yöntemini denedik. Denklemleri küresel simetride açtığımız için çekirdeğin merkezinde ve sonunda mezon değerleri sıfır olacaktır. Böylece denklemlerimizi sınır değer problemine dönüştür. Sabit bir adım aralığı için (h) tahmini bir μ değerinde ve yarıçapı değiştirerek nümerik algoritmayı yazdık.

Bu nümerik çözümdeki sorun teşkil eden en büyük zorluk matrislerdi. Adım aralığı arttıkça matrisler büyümekte ve matrisin tersini almak zorlaşmaktaydı. Tez çalışmasından önceki çalışmalarda, özellikle matris işlemlerinde, benzer örneklerde farklı yöntemlerin farklı sonuçlar verdiğine şahit olduk.

Newton-Raphson yönteminde başlangıç için tahmini olarak mezon değerlerini sıfır girdik. Algoritma, belirli bir tolerans değerinde sonuç üretene kadar sürekli çalışacaktı ve her seferinde büyük matrislerin tersi alınmak durumunda kalacaktı. Her döngüde matrislerin tersinin yaklaşık olarak doğru alındığı konusunda emin olmalıydık. Her döngüde matrisinin tersinin doğru alındığı bir çözüm maalesef elde edemedik. Adım aralığını arttırmak veya azaltmak nümerik olarak bizleri doğru bir sonuca götürmedi.

Daha önce yapılan çözümlerin aksine (Serot ve Walecka 1986) denklemleri aynı anda çözmek istedik. Bu yüzden düzeltme (correction) algoritmalarına ihtiyaç duyuldu. İkinci dereceden çiftlenimli diferansiyel denklemlerin sınır değer yaklaşımı ile çözen ve Runga-Kutta kök arama yöntemi ile sabit olmayan aralıklar için düzeltme algoritmasının da olduğu "twpbvpc" kodlarını (Cash 2007) kullandık.

Mezon yoğunluklarını elde ettikten sonra ρ_B 'yi, baryon sayısını, T^{00} 'ı ve bağlanma enerjisini kendi yazdığımız kodlarla türettik. Enerji yoğunluğunun (T^{00})

içerisindeki, integraller için "yamuk" (trapezoid) yaklaşımını kullandık ve birinci dereceden türev değerleri için "üç nokta" yaklaşımını kullandık.

İkinci dereceden çiftlenimli sınır değer problemimizi çözmemizi sağlayan kodların algoritması üzerinde herhangi bir değişiklik yapmadık; fakat programın çalışması için bizden istenilen girdileri hazırlarken çeşitli problemler baş gösterdi. Ayrıca NLD denklemlerdeki integral formunda çözümler üretmek için nümerik integral ve nümerik integrallerin alınması için E 'nin hesaplanmasında kök arama nümerik yöntemleri yazdık. Nümerik işlem içinde ayrıca nümerik işlemler barındırması ve çalışmamızın doğasındaki non-lineerlik, çözümümüzde hata seviyesini arttırmaktadır.

Bu kısımda, hazır kodları kullanırken karşılaştığımız sorunlara ve çözmek için kullandığımız yöntemlere değineceğiz. Nümerik çözümlerle ilgilenenler, nümerik sorunlarla karşılaşanlar; türettiğimiz değerleri tekrar elde etmek isteyenler ve çözümün sınanabilirliğini görmek için açıkça her noktaya değinmeye çalışacağız.

Denklemlerden çözüme ulaşmamıza en büyük engel teşkil eden nokta p_f eşitliğidir. Bu eşitliği dispersiyon bağıntısından 3.15'ten, r 'ye bağlı şekilde yazarsak

$$p_f = \sqrt{\left(\mu - g_\omega \frac{\omega(r)}{r} e^{-\frac{\mu-M}{\Lambda}}\right)^2 - \left(M - g_\sigma \frac{\sigma(r)}{r} e^{-\frac{\mu-M}{\Lambda}}\right)^2} \quad (\text{A.1})$$

şeklinde olur.

Burada Fortran kodları ilk değer olarak *sıfır* değerini mezonların tahmini çözümleri olarak atamaktadır. Tahmini değerler ilk olarak sıfır olmasa dahi problemimizin r 'ye bağlı olduğu için sınır değer problemine dönüşmekte ve ilk değer (merkezde) ve son değer (çekirdeğin yarıçapında) sıfır olmakta. Bir de skaler mezon (σ) vektör mezondan (ω) sonra sıfıra ulaştığı için μ değeri baryon kütesinden küçük olmalıdır. ω mezonu ve haliyle p_f 'nin sıfır olduğu durumda μ değerinin baryon kütesinden küçük olduğunu görebiliriz

$$\begin{aligned} p_f &= \sqrt{\left(\mu - g_\omega \frac{\omega(r)}{r} e^{-\frac{\mu-M}{\Lambda}}\right)^2 - \left(M - g_\sigma \frac{\sigma(r)}{r} e^{-\frac{\mu-M}{\Lambda}}\right)^2} \\ 0 &= \sqrt{\left(\mu\right)^2 - \left(M - g_\sigma \frac{\sigma(r)}{r} e^{-\frac{\mu-M}{\Lambda}}\right)^2} \\ \mu &= M - g_\sigma \frac{\sigma(r)}{r} e^{-\frac{\mu-M}{\Lambda}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Burası denklem sistemleri için en kırılgan nokta diyebiliriz. Mezon değerleri türetilirken eklenen düzeltme terimleri p_f 'nin içerisini negatif yaptığında çözüm üretilemez.

İlk olarak kareköklü ifadenin içerisini mutlak değer olarak tanımladık. Sınırlarda üretilen değerler r 'den bağımsız olduğu zaman başlangıç değerinde (çekirdeğin merkezinde) türev sıfır olduğu için (düz bir çizgi, bu durumu deneysel gözlemlerden biliyoruz) bir sonraki değerleri çözüm kabul edebiliriz ve son değerde (skaler mezonun sıfır olduğu değer) bütün değerler sıfıra gideceği için sıfır kabul edebiliriz. Böylece karekök içerisini sıfır almak, başlangıç ve son değerde bizim çözümümüzü etkilememektedir. Mezon değerleri türetildikçe karekök içerisinin negatif olma özelliği ortadan kalkacaktır. Bu iki sebepten dolayı karekök içerisini mutlak değer içerisine aldık.

Walecka denklemlerinden çözüm elde etmek bizim için zor olmadı. Fortran kodları mezonlar için ilk olarak *sıfır* değerini atasa dahi düzeltme terimi üretilen ilk döngüde negatiflik durumu ortadan kalktı.

Nümerik çözümde asıl sıkıntının başladığı yer NLD denklemleri içerisinde mutlak değer prensibinin yerleştirilmesindeydi. Walecka denklemlerindeki yoğunluk integralleri analitik olarak alındığı için denklemlerin analitik formlarının türevleri kolaylıkla alınabildi. NLD denklemlerindeki yoğunluk integralleri nümerik integraller olduğu için ve her p değerinde bir tane E hesaplanması nümerik bir kök arama işlemi olduğu için türevi; integrleri analitik olarak çözmeden, integrallerin türevi şeklinde aldık.

İntegrali anatik olarak alıp türevini almakla integralin türevini almak arasında matematik olarak bir fark yoktur; ama p_f içerisindeki karekök ifadesinin mutlak değer almak bir takım nümerik hataları beraberinde getirdi.

Şimdi bunları tek tek ele alarak inceleyeceğiz. Bu inceleme için Λ 'nın sonsuza giderken (limit durumunda) NLD denklemlerinin Walecka denklemlerine dönüştüğü prensibinden hareketle limit durumda iki denklem sisteminin karşılaştırmasına bakacağız.

Fortran için denklemlerin karşılıkları;

Z1: Vektör mezon,

F2: Vektör mezonunun ikinci dereceden türevi,

Z3: Skaler mezon,

F4: Skaler mezonunun ikinci dereceden türevi.

Walecka modeli çalışılırken Fortran programına yazılan vektör mezonu denklemi (içerisindeki integral analitik olarak alınıp türevi sonra alınmıştır)

$$\frac{\partial F2}{\partial Z1} = m_v^2 - \frac{2g_v r}{3\pi^2} \left(\frac{3}{2}\right) [(\mu - g_v \frac{V(r)}{r})^2 - (M - g_s \frac{\phi(r)}{r})^2]^{1/2} 2(\mu - g_v \frac{V(r)}{r}) \left(-\frac{g_v}{r}\right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Z3} = -\frac{2g_v r}{3\pi^2} \left(\frac{3}{2}\right) [(\mu - g_v \frac{V(r)}{r})^2 - (M - g_s \frac{\phi(r)}{r})^2]^{1/2} (-2)(M - g_s \frac{\phi(r)}{r}) \left(-\frac{g_s}{r}\right). \quad (\text{A.4})$$

NLD için Fortran programına yazılan vektör mezonunu denklemi (içerisindeki integralin türevi alınmıştır)

$$\frac{\partial F2}{\partial Z1} = m_\omega^2 - \frac{2g_\omega r}{\pi^2} p_f^2 \frac{-g_\omega E[p_f]}{r p_f} e^{(-\frac{\mu-M}{\Lambda})} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Z1} = m_\omega^2 - \frac{2g_\omega r}{\pi^2} p_f^2 \frac{-g_\omega E[p_f]}{r p_f} e^{(-\frac{\mu-M}{\Lambda})}. \quad (\text{A.6})$$

Bu denklemler sadeleştirme yapıldığında ve limit durumunda birbirine eşittir

$$\frac{\partial F2}{\partial Z1_W} = m_v^2 + \frac{2g_v^2}{\pi^2} k_f E, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Z1_{NLD}} = m_\omega^2 + \frac{2g_\omega^2}{\pi^2} p_f E [p_f], \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Z3_W} = -\frac{2g_v g_s}{\pi^2} k_f M^*, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Z3_{NLD}} = -\frac{2g_\omega g_\sigma}{\pi^2} p_f M^*. \quad (\text{A.10})$$

$$(\text{A.11})$$

Görüldüğü gibi denklemler birbirine eşittir ve nümerik algoritma içerisinde aynı sonucu döndüreceklerdir.

Burada NLD denklemlerinde E , p_f 'deki değeriyle Walecka'daki E 'nin aynı ifadesidir ve içerisinde μ barındırır. k_f ile p_f aynı ifadelerdir sadece iki çalışamdaki farklı gösterimlerdir.

Walecka modeli çalışılırken Fortran programına yazılan skaler mezonu denklemi (içerisindeki integral analitik olarak alınıp türevi sonra alınmıştır)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F4}{\partial Z1} &= -\frac{g_s \gamma M^* r}{4\pi^2} \left(\left(\left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_f} 2E \left(-\frac{g_v}{r} \right) \right) E + k_f \left(-\frac{g_v}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. - M^* \left(\frac{k_f + E}{M^*} \right)^{-1} \left(\left(\left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_f} 2E \left(-\frac{g_v}{r} \right) + \left(-\frac{g_v}{r} \right) \right) M^* \frac{1}{M^{*2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Tam olarak sadeleştirme yapmadan Walecka değerlerini türetmek için Fortran programına yazdığımız denklem budur. Şimdi bir sadeleştirme yaparsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial F4}{\partial Z1} &= -\frac{g_s M^* r}{\pi^2} \left(\left(\frac{1}{k_f} E^2 \left(-\frac{g_v}{r} \right) \right) + k_f \left(-\frac{g_v}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. - M^{*2} \left(\frac{1}{k_f + E} \right) \left(\frac{1}{k_f} E \left(-\frac{g_v}{r} \right) + \left(-\frac{g_v}{r} \right) \right) \right) \\ &= -\frac{g_s M^* r}{\pi^2} \left(-\frac{g_v}{r} \right) \left(\left(\frac{1}{k_f} E^2 \right) + k_f - M^{*2} \left(\frac{1}{k_f + E} \right) \left(\frac{1}{k_f} E + 1 \right) \right) \\ &= \frac{g_s g_v M^*}{\pi^2} \left(\frac{E^2 + k_f^2}{k_f} - M^{*2} \left(\frac{1}{k_f + E} \right) \left(\frac{E + k_f}{k_f} \right) \right) \\ &= \frac{g_s g_v M^*}{\pi^2} \left(\frac{E^2 + k_f^2}{k_f} - \frac{M^{*2}}{k_f} \right) \\ &= \frac{g_s g_v M^*}{\pi^2} k_f \left(\frac{E^2 + k_f^2}{k_f^2} - \frac{M^{*2}}{k_f^2} \right) \\ &= \frac{g_s g_v M^*}{\pi^2} k_f \left(\frac{E^2 + k_f^2 - M^{*2}}{k_f^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

burada k_f^2 dispersiyon bağıntısından $k_f^2 = E^2 - M^{*2}$ eşit olduğu görülebilir. Bu eşitliği denkleme yazmadan önce Fortran kodlarının çalışma prensibinde ilk olarak mezon değerlerine *sıfır* atadığı için bu eşitlik sağlanmayacaktır. Aslında eşitliği yerine yazarsak elde edilmesi gereken sonuç aşağıdaki gibi olmalıdır

$$\frac{\partial F4}{\partial Z1} = \frac{g_s g_v M^*}{\pi^2} k_f^2. \quad (\text{A.14})$$

NLD modeli çalışılırken Fortran programına yazılan skaler mezonu denklemi (içerisindeki integral analitik olarak alınıp türevi sonra alınmıştır)

$$\frac{\partial F4}{\partial Z1} = \frac{2g_\sigma r}{\pi^2} p_f^2 \left(\frac{g_\omega}{r} \right) \frac{M^*}{\sqrt{p_f^2 + M^{*2}}} \frac{E[p_f]}{p_f} e^{-2\left(\frac{\mu-M}{\Lambda}\right)}. \quad (\text{A.15})$$

Sadeleştirme yapıldığında ve limit durumda eşitliğin son hali

$$\frac{\partial F4}{\partial Z1} = \frac{2g_\sigma g_\omega}{\pi^2} p_f M^*. \quad (\text{A.16})$$

A.14 ile **A.16** aynı eşitlikler olduğu görülmektedir

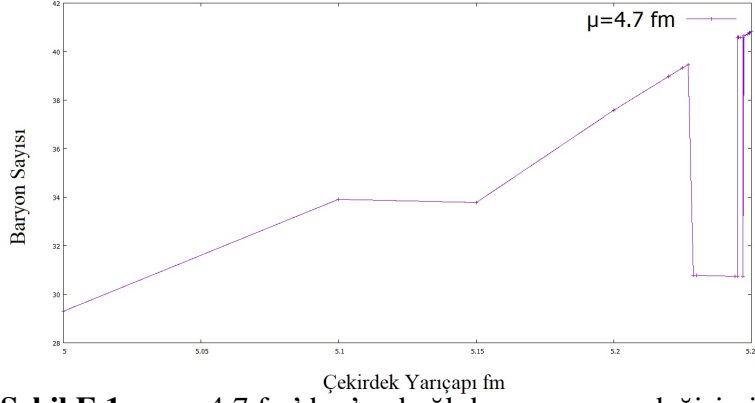
$$\begin{aligned} \frac{\partial F4}{\partial Z1_W} &= \frac{g_s g_v M^*}{\pi^2} k_f^2 \\ \frac{\partial F4}{\partial Z1_{NLD}} &= \frac{g_\sigma g_\omega M^*}{\pi^2} p_f^2. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Yukarı belirtildiği gibi NLD denklemlerinde sigma mezonunu denkleminin vektör mezona göre türevinde $(E^2 + k_f^2 - M^{*2})/(k_f^2)$ açık halde değildir sadece 2 olarak denklem içerisinde. Fortran kodu çalışırken burada bir seçim yapmak gerekli. Biz Walecka değerlerini elde ederken nümerik algoritma çalıştığı anda aynı değerlerin elde edilmesi için p_f içerisindeki karekökün negatif olduğu yerlerde *iki* sayısını $(E^2 + p_f^2 - M^{*2})/(p_f^2)$ olarak açtık. Gerçekten de mezon değerlerine sıfır verildiği zaman $(E^2 + k_f^2 - M^{*2})/(k_f^2)$ sonucu *iki* değil *sıfır* çıkmaktadır.

Benzer durumu sigma mezon denkleminin sigma mezona göre türevinde de yapmak gerekli; fakat sigma mezonu denklemindeki integralin analitik halinin türevi ile integralin türevi içerisindeki ifadelerde ortak bağ kurmak, yukarıda yaptığımız gibi kolay olmayacaktır. Ayrıca nümerik integral alınırken $E[p]$ değerlerinin hesaplanması da nümerik bir işlem olduğu için p_f içerisindeki karekökün negatif olduğu yerlerde karşılaştırma yaparak ifadeleri düzenlemek imkansızlaşacaktır.

Bu yüzden, mezon değerlerine sıfır verildiği nümerik hata koşulunda nümerik integrallerle çalışmak yerine nümerik hatalar açmazını nümerik integral yerine Walecka yaklaşımındaki gibi integralleri analitik olarak açıp, momentum seviyesine bakıp E değerini nümerik olarak bulmadan doğrudan analitik olarak ele alıp, sonra türevini almak; bir nebze olsun rahatlatacaktır. Aksi durumda çözümlerin başka bir sonuca yaklaşması kaçınılmazdır.

NLD modelinin çözümlerinde ikinci önemli nokta Λ parametresidir. Sonsuz nükleer madde için 770 MeV olan parametre sonlu nükleer madde için farklı olması beklenebilir. Yine de emin olmak için 770 MeV civarında sonuç aradık.

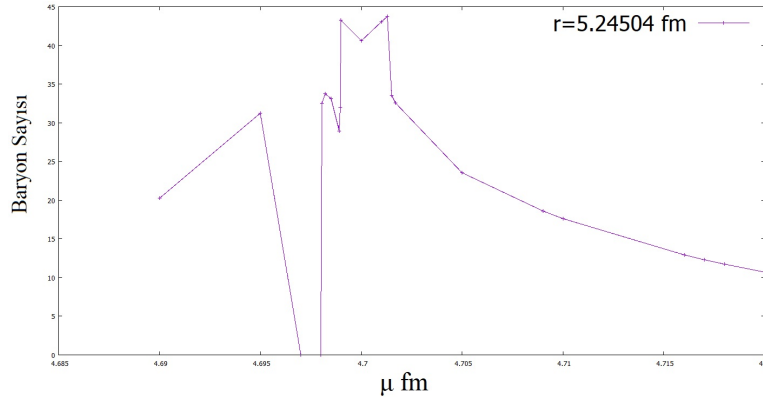


Şekil E.1 : $\mu = 4.7$ fm'de r 'ye bağlı baryon sayısı değişimi

İlk olarak μ değerini 4.7 fm'de sabit tutarak çekirdek yarıçapına göre baryon sayısının değişimini inceledik (tablo E.1).

5 fm'den itibaren baryon sayısında bir artış görünürken baryon sayısı kırka yaklaştıkça bir azalma mevcut. Bu azalmanın olduğu yerlerde mezon alanları eksiye inmektedir. Bu yüzden baryon sayısı otuz civarında çıkmaktadır. Baryon sayısını kırk verecek şekilde nümerik bir sonuç elde edilememektedir.

İkinci olarak r 'nin baryon sayısı kırka en yakın değeri olan 5.24504 fm'de μ değerinin değişimine göre baryon sayısını inceledik (tablo E.2).

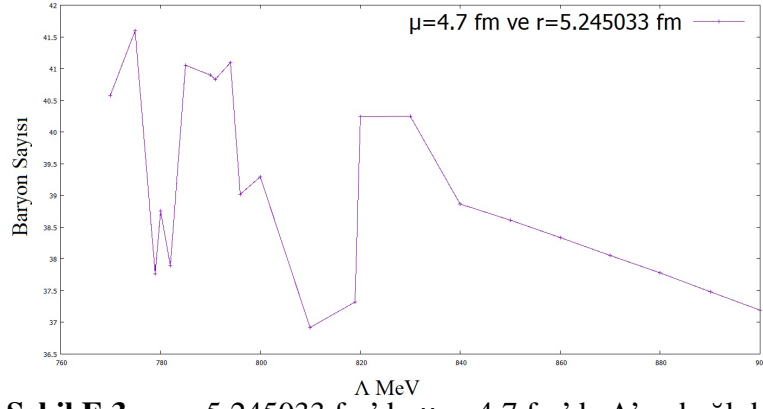


Şekil E.2 : $r = 5.24504$ fm'de μ 'ye bağlı baryon sayısı değişimi

$\mu = 4.69$ fm'den baryon sayısı üreten nümerik kod, 4.697 fm ve 4.698 fm değerlerinde bir sonuç üretmedi ve bu sonuç üretilmeyen değerler grafikte sıfır olarak gösterilmektedirler. Baryon sayısı yine kırk civarına yaklaştığında bir bozulma görülmektedir. $\mu = 4.7013$ fm'den sonra baryon sayısında bir azalma görülmektedir. Bu azalma düzgün gibi görünse de arada yine sonuç üretilmeyen veya nümerik olarak başka çözüme giden değerler olabilir, biz sadece kırk civarında en iyi çözümü elde etmeye çalıştık.

Bu iki grafiğin sonuçlarına göre baryon sayısının kırka yakın olduğu en yakın değerler $\mu = 4.7$ fm ve $r = 5.245033$ fm'dir. Son olarak Λ parametresini 770 MeV'den başlatarak değişimine göre baryon sayısını inceledik (tablo E.3).

Λ değerine bağlı olarak baryon sayısını kırk veren bir değer yoktur. Grafikte dalgalanmanın olduğu yerde kesme parametresi için uygun sonucu aramak yerine; çünkü E.2 ve E.1 grafiklerinde rahatça görüldüğü gibi baryon sayısı kırka yaklaştıkça



Şekil E.3 : $r = 5.245033$ fm'de $\mu = 4.7$ fm'de Λ 'ya bağlı baryon sayısı değişimi

doğru sonuç vermemekte grafiklerde bozulmalar meydana gelmektedir, düzgün azalmaya başladığı $\Lambda = 840$ MeV'den sonraki değerlerde arama yapılmıştır. Elde edilen en iyi Λ sonucu 896 MeV'dir.

ÖZGEÇMİŞ

27 Ekim 1991'de Tekirdağ'da doğdu. 2016 yılında Dumlupınar Üniversitesi Endüstri Mühendisliği bölümünü bitirdi. Fizik yüksek lisans eğitimini Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında tamamladı.