



**AKTİF - RC TABANLI DOĞRUSAL OLMAYAN ELEKTRONİK
DEVRELERİN NÜMERİK ANALİZİ**

Numan Derda ÖZKUTLU

Yüksek Lisans Tezi

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hafız ALİSOY

2021

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AKTİF - RC TABANLI DOĞRUSAL OLMAYAN ELEKTRONİK
DEVRELERİN NÜMERİK ANALİZİ**

Numan Derda ÖZKUTLU

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hafız ALİSOY

TEKİRDAĞ-2021

Her hakkı saklıdır.



Bu tez (TÜBİTAK / SANTEZ / NKÜBAP vb.)
tarafından numaralı proje ile
desteklenmiştir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
AKTİF - RC TABANLI DOĞRUSAL OLMAYAN ELEKTRONİK
DEVRELERİN NÜMERİK ANALİZİ

Numan Derda ÖZKUTLU
Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hafız ALİSOY

Teknolojinin hızlı gelişimiyle beraber haberleşme sistemleri her geçen gün daha verimli ve daha az maliyetli hale gelmiştir. Böylelikle haberleşme ağlarına ve haberleşme sistemlerine var olan ilgi artmıştır. Elektronik ve yarı iletken teknolojilerinin de gelişmesiyle, tüm bu sistemlerin aralarındaki iletişim ve bağlantıların ortaya çıkartabileceği problemlere bir çözüm üretilmektedir. Bu sistemlerdeki dalga (sinyal) formlarını anlamak için simülasyon (benzetim) yöntemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında, aktif- RC tabanlı doğrusal olmayan elektronik devrelerde gerçekleşen transient olayların matematiksel modellerinin nümerik analizi için algoritmalar geliştirmektedir. Dolayısıyla, tezde elde edilen araştırma sonuçların, doğrusal olmayan devre elemanları içeren değişik elektronik devrelerin çalışma ve tasarım otomasyonunda ortaya çıkan problemlerin çözümüne teorik ve pratik katkı sağlamıştır. Elektronik devrede kullanılan çeşitli bileşenlerin (alan etkili transistör, bipolar transistör ve varistör) akım-gerilim karakteristiklerini (AGK) belirleyen mevcut bağlantılar analiz edilip, gerilim ve akım arasındaki matematiksel ilişkiler belirlenmiştir. Ayrıca, incelenen elektronik devrede, deneysel verilerinin analitik olarak belirlenmesine olanak sağlayan yaklaşım (aproksimasyon) fonksiyonları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Haberleşme Sistemleri, Matematiksel Modelleme, Benzetim, Analiz, Elektronik Devre

2021, 91 Sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR ELECTRONIC CIRCUITS BASED ON ACTIVE - RC

Numan Derda ÖZKUTLU

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electronics and Communications Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Hafız ALİSOY

With the rapid development of technology, communication systems have become more efficient and less costly day by day. Thus, the interest in communication networks and communication systems has increased. With the development of electronic and semiconductor technologies, a solution is produced to the problems that may arise from the communication and connections between all these systems. Simulation methods are widely used to understand wave (signal) forms in these systems. In this thesis, it is aimed to develop algorithms for numerical analysis of mathematical models of transient events in active RC-based nonlinear electronic circuits. Therefore, the research results obtained in the thesis made a theoretical and practical contribution to the solution of the problems arising in the operation and design automation of various electronic circuits containing nonlinear circuit elements. The current connections that determine the current-voltage characteristics (CVC) of various components (field effect transistor, bipolar transistor and varistor) used in the electronic circuit are analyzed and the mathematical relationships between voltage and current are determined. In addition, the approximation functions that allow the analytical determination of the experimental data in the examined electronic circuit have been determined.

Keywords: Communication Systems, Mathematical Modeling,
Simulation, Analysis, Electronic circuit

2021, 91 Pages

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGE DİZİNİ	v
ŞEKİL DİZİNİ	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR	vii
TEŞEKKÜR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	10
3.1. Deneysel Verilerin Aproximasyonu İçin İhtiyaç Duyulan Ampirik Formüllerin Oluşturulması	10
3.2. Doğrusal Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Cauchy Probleminin Sayısal Çözümü ve Runge-Kutta Yöntemi	12
4. LİNEER ELEKTRİK DEVRELERİNDE GEÇİŞ SÜREÇLERİ (TRANSİENT OLAYLAR)	14
4.1. Lineer Elektrik Devrelerinde Matematiksel Modeller	14
4.1.1. Lineer Elektrik Devrelerinde İki Kondansatörlü Sistem Analizi	16
4.1.2. Lineer Elektrik Devrelerinde Üç Kondansatörlü Sistem Analizi	20
4.1.3. Lineer Elektrik Devrelerinde Dört Kondansatörlü Sistem Analizi	22
4.1.4. Lineer Elektrik Devrelerinde n Kondansatörlü Sistem Analizi	25
4.2. Lineer Elektrik Devrelerinde Matematiksel Model Belirlenmesi ve Matematiksel Problemin Analitik Çözümü	27
4.3. Lineer Elektrik Devrelerinde Cauchy Problemin Fourier Serisi Cinsinden Analitik Çözümü	30
4.4. Lineer Elektrik Devrelerinde Matematiksel Problemin Analizi İçin Özel Durumların İncelenmesi	34
4.4.1. Akımın Periyodik Fonksiyon Olduğu Özel Durum	34
4.4.2. Akımın Birim Basamak Fonksiyon Olduğu Özel Durum	37
5. DOĞRUSAL OLMAYAN ELEMANLARIN AKIM-GERİLİM EĞRİSİNİ BELİRLEMEK İÇİN DENEYSEL VERİLERİN APROKSİMASYONU	40
5.1. Elektronik Devrelerde Deneysel Verilere Yaklaşmak İçin Kullanılan Fonksiyonlar	40
5.1.1. m. Dereceden Polinomu Kullanma Yöntemi	47
5.1.2. Üstel Fonksiyonu Kullanma Yöntemi	47
5.1.3. İkinci Dereceden Fonksiyonu Kullanma Yöntemi	49

5.1.4. Hiperbolik Bir Fonksiyonu Kullanma Yöntemi	50
5.2. Deneyin Sonuçlarından Yaklaşım (Aproksimasyon) Fonksiyonu Belirleme Yöntemi	52
5.3. Alan Etkili Transistörün Akım-Gerilim Özeğrisinin Yaklaşımının İncelenmesi	57
5.4. Bipolar Transistörün Akım-Gerilim Özeğrisinin Yaklaşımının İncelenmesi	59
5.5. Varistörün Akım-Gerilim Özeğrisinin Yaklaşımının İncelenmesi	60
6. DOĞRUSAL OLMAYAN ELEKTRİK DEVRELERİNİN NÜMERİK ANALİZİ	65
6.1. Doğrusal Olmayan Bir Elektronik Devrenin Analiz Probleminin Tanımlanması	65
6.2. Doğrusal Olmayan Bir Elektronik Devrenin Matematiksel Modeli	66
6.3. Matematiksel Problemin Çözüm Yöntemi	69
6.4. Problemin Çözüm Algoritması	71
7. SONUÇ ve ÖNERİLER	75
8. KAYNAKLAR.....	76
EKLER	80
ÖZGEÇMİŞ	91

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1. Bir Alan Etkili Transistörün I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar	57
Çizelge 5.2. Bipolar Transistörün I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar	59
Çizelge 5.3. Varistörün Giriş Değerlerine Bağlı Olarak I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar	62
Çizelge 5.4. Varistörün Çıkış Değerlerine Bağlı Olarak I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar	63

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1. İkinci Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi.....	16
Şekil 4.2. Üçüncü Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi	20
Şekil 4.3. Dördüncü Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi.....	23
Şekil 4.4. n. Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi.....	25
Şekil 4.5. Birinci Özel Durumda C_1 ve C_2 Kapasitörleri Üzerindeki $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ Gerilim Değişim Grafiği	36
Şekil 4.6. Birinci Özel Durumda $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ Akımlarının Zamana Göre Değişim Grafiği.....	36
Şekil 5.1. Alan Etkili Transistörün I-V Karakteristiği (Deneysel Verilerin Üstel Fonksiyon, İkinci Dereceden Fonksiyon ve m. Dereceden Fonksiyona Göre Hesaplanan Değerleri).....	58
Şekil 5.2. Bipolar Transistörün I-V Karakteristiği (Deneysel Verilerin Üstel Fonksiyon, İkinci Dereceden Fonksiyon ve m. Dereceden Fonksiyona Göre Hesaplanan Değerleri).....	60
Şekil 5.3. Doğrusal Olmayan Eleman İçeren Devren Şeması.....	61
Şekil 5.4. Doğrusal Olmayan Eleman İçeren Devrenin Eşdeğer Şeması.....	61
Şekil 5.5. Varistörün I-V Karakteristiği (Deneysel Verilerin Üstel Fonksiyon, İkinci Dereceden Fonksiyon ve m. Dereceden Fonksiyona Göre Hesaplanan Değerleri)	64
Şekil 6.1. $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği..	73
Şekil 6.2. $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z_1(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği	73
Şekil 6.3. $x_n(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği	74
Şekil 6.4. $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z_1(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği	74

SİMGELER ve KISALTMALAR

R	: Direnç
C	: Kapasitör
L	: Bobin
RC	: Direnç-Kapasitör
RL	: Direnç-Bobin
LC	: Bobin-Kapasitör
RLC	: Direnç-Kapasitör-Bobin
LSM	: En Küçük Kareler Yöntemi
AGK	: Akım Gerilim Karakteristiği
I-V	: Akım-Gerilim
NE	: Nonlinear Eleman
mA	: MiliAmper
μ A	: MikroAmper
μ F	: MikroFarad
k Ω	: KiloOhm

TEŞEKKÜR

Çalıőmam süresi boyunca bana verdiği desteklerden dolayı baőta aileme ve her konuda destekleriyle bana yardımcı olan danıőmanım Sayın Prof. Dr. Hafız ALİSOY'a ve Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Çorlu Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyelerine teőekkürlerimi sunarım.

Aralık 2021

Numan Derda ÖZKUTLU



1. GİRİŞ

Elektronik devrelerin tasarımında karşılaşılan hesaplamaların oldukça karmaşık yapıya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durum modern hesaplama olanaklarının kullanılmaması gerekli hale gelmiştir. Ayrıca, prototipleme devre tabanlı yöntemlerin etkisiz olduğu ortaya çıkmıştır ve bu yüzden geleneksel olarak ayrı elemanlardan bir araya getirilen entegre devreleri incelemek imkansız hale gelmiştir (Yerzhan ve Zauytbek, 2015). Bunun yanında, geliştirilmekte olan elektronik devrelerin karmaşıklığı ve sorumluluğu eski geleneksel yöntemleri terk etmeyi gerekli hale getirmiştir (Aroudi, Rodriguez ve Orabi, 2010; Lucia, Iordache ve Voicu, 2007; Sánchez-López, 2013; Sánchez-López, Fernández, Tlelo-Cuautle ve Tan, 2011).

Elektrik devreleri, belirli bir amaç için birleştirilir ve uygun bağlantılarla basit ya da karmaşık sistemler oluşturulur. Bu sistemlerin basitliğini ya da karmaşıklığını eski geleneksel yöntemleri kullanarak çözebilecek temel yasalar aynıdır. Bu yüzden, dinamik sistemlerin niteliksel teorisi, daha doğru gerekli yaklaşım için temel sağlamalıdır (Teor, 1984). Temeli sağlayacak yasalar ise Direnç-Ohm Yasası ve Kirchhoff Yasalarıdır. Bu yasalar kullanılarak da birçok teorem ve sonuca ulaşılabilir.

Elektrik devrelerinde bu yasa ve teoremleri kullanmak için üç tane temel devre elemanı vardır. Bunlar Direnç (R), Kapasitör (C) ve Bobin (L)'dir. Bu üç devre elemanı günümüzde yaygın şekilde kullandığımız radyo, televizyon, telefon, hesap makineleri ve bilgisayar gibi birçok cihaz oluşturulmuştur. Aynı şekilde evlerde kullanılan elektrik süpürgesi, çamaşır makinesi, bulaşık makinesi, buzdolabı ve diğer birçok küçük cihazlarda da bu üç temel elektrik devre elemanları kullanılmıştır. Direnç, herhangi bir devrede üzerinden elektrik akımı geçmesi haliyle devreye karşı bir zorluk gösterir. Bu zorluk seviyesi direncin değerine bağlı olarak az ya da çok olabilir. Kapasitör, iki iletkenin arasına yalıtkan bir malzeme konularak oluşturulmuş pasif elektrik elemanıdır. Bu iki iletken arasında bir elektrik alanı oluşur ve enerji depolanır. Bobin, dışı yalıtkan olup iletken bir telin üzerine sarılmasıyla oluşan bir devre elemanıdır. Bobinler üzerinden elektrik akımı geçtiği zaman sarılan iletken

halkalar arasında bir elektromanyetik alan oluşur ve bobin üzerinde daha sonra da kullanılabilir bir gerilim yüklenir.

Temel devre elemanlarının da kullanım şekilleri vardır. Bunlar RC Devreleri, RL Devreleri, LC Devreleri ve RLC Devreleri olarak adlandırılır. Elektrik mühendisliği, otomasyon ve elektronik ile ilgili çeşitli problemler, integral Laplace ve Fourier dönüşümleri kullanılarak başarıyla çözülür. Diferansiyel dönüşümlerin matematiksel formülleri ve kuralları, doğrusal ve doğrusal olmayan sistemleri çözmek için hem analitik hem de sayısal yöntemlerin oluşturulmasına izin verir (Pukhov, 1982). Bu devrelerde sistemi karakterize ederken cebirsel denklemler değil diferansiyel denklemlerden yararlanır. Evrensel aktif elemanların kullanılması, aktif cihazların davranışını diferansiyel özellikler veya giriş-çıkış katları ile modelleme olasılığını açar (Sánchez-López, 2013). Bu elemanlar arasında kapasitör ve bobin enerji depolama özelliğine sahipken devrede uyarıcı görev üstlenirler. Böylelikle devre üzerinde enerji depolanmışsa kaynak kullanılmadan da devre uyarılabilir. Devrede bir kaynak kullanılacaksa, devre elemanları bir kaynak tarafından enerji almaya zorlanacaktır.

RC devreleri filtre devreleri olarak kullanılmaktadır. Dijital filtreler için tasarım tekniklerine olan ilgi, tasarım problemine güçlü optimizasyon algoritmalarının uygulanması nedeniyle son birkaç yılda yenilenmiştir (Rabiner, 1971). Bununla birlikte teknolojideki hızlı gelişime bağlı olarak haberleşme sistemlerinde gün geçtikçe daha yaygın, daha fazla kullanılan, verimin yükselmesi ve maliyetin düşmesiyle Direnç – Kapasitör (RC) tabanlı devrelere/sistemlere büyük ilgi oluşturmuştur. RC tabanlı doğrusal olmayan sistemler çalışılan sistem üzerinde bir filtre devresi olarak kullanılır. Bu filtre devreleri herhangi bir haberleşme ağının bulunduğu ortamda birçok çeşitli sinyaller arasındaki karmaşıklığı çözmeye konusunda etkilidir.

Filtre devreleri Aktif ve Pasif Filtreler olarak ikiye ayrılır. Bu filtre devrelerinin kullanım yerlerine göre avantaj ve dezavantajları bulunur. Bunlar;

- Aktif filtre devre tasarımında bobin (L) kullanılmaz bundan dolayı sistem tasarımı kolay ve daha ucuz olur.

- Aktif filtrelerde devre giriş empedansı yüksek, çıkış empedansı küçüktür, giriş ve çıkışta elemanlar etkilenmez. Bu nedenle, aktif filtrelerin girişlerine veya çıkışlarına bağlanacak devre ya da devre elemanlarının etkilenmesi söz konusu değildir.

- Aktif filtrelerde frekanslarda herhangi bir zayıflama görünmez. Çünkü aktif filtre tasarımında kullanılan opamp, filtre edilen işaretleri yükselterek çıkışına aktarabilir.

- Pasif filtreler herhangi bir besleme kaynağına ihtiyaç duymazken aktif filtre besleme gerilimine ihtiyaç duyar.

- Aktif filtre tasarımında kullanılan opampların band genişlikleri sınırlı olduğundan her frekansta aktif filtre tasarlamak oldukça zordur.

- Aktif filtre devrelerinde tümdevre üretim teknolojilerinden kaynaklanan sınırlamalar nedeniyle bobin elemanı kullanılamaz. Bu eleman yerine negatif empedans dönüştürücülerden yararlanılarak kondansatörden elde edilebilir.

- Daha düşük maliyettedir. Aktif filtreler düşük frekanslı pasif filtreler için gerekli olan büyük indüktör ve kapasitörlere duyulan ihtiyacı ortadan kaldırır.

Bu filtrelere pratikte çok fazla alanda ihtiyaç duyulur. Gürültü azaltma, işaret biçimlendirme, işaret zayıflatmada ve güç faktörü düzenlemede kullanılır. Ayrıca filtre devreleri haberleşme sistemlerinin en önemli devrelerindedir. Çoğu haberleşme sisteminde kullanılır. Belirlenmiş bant aralığını önemser ve dışında kalan frekansları zayıflatır.

Günümüz koşullarında, bilgi iletişim sistemleri, bilgisayarlar ve elektronik ile ilgili diğer ekipmanların üretimi, bilimsel araştırmanın öncelikli alanlarından biri haline gelmiştir. Modern bilgi iletim sistemlerinde fiziksel büyüklüğü akım veya voltaj olan elektrik sinyalleri kullanılır. Bilgi aktarım araçları oldukça karmaşık elektronik devrelerini içerir (Driven, Signals, Ushida ve Chua, 1984; Rabiner, 1971; Sun ve Fidler, 1997).

Güçlü doğrusal olmayan durumu sergileyen devreler, örneğin çalışma bölgelerinin değiştirilmesi, cihaz fiziğinin ani değişiklikleri ve parçalı I-V özellikleri

gibi cihaz davranışındaki ani değişiklikleri ifade eder (Lucia ve diğerleri, 2007). Ayrıca, akım voltaj karakteristik eğrisi, boşluk deşarj durumunu tespit etmek ve izlemek için faydalıdır ve parametrelerin optimal kontrolünün işlenmesine yardımcı olur (Li, Bai, Ding ve Fan, 2015).

Sembolik analiz, bir devrenin davranışını sembolik parametreler açısından modellemek için kullanılan güçlü bir araçtır. Sembolik ifadeler sadece devrenin davranışı hakkında daha iyi fikir vermekle kalmaz, aynı zamanda sentez ve optimizasyon prosedürlerinde de kullanılabilir (Sánchez-López ve diğerleri, 2011). Ayrıca, iyi bilindiği gibi, bir bilgisayar destekli devre analizi paketi, analiz edilecek devrenin topolojik bir tanımını programın ikinci bölümünde çözülen bir dizi cebirsel diferansiyel denkleme çeviren bir derleyici olarak düşünülebilir (Genin, 1977).

Bu tezin amacı, aktif- RC tabanlı doğrusal olmayan elektronik devrelerde gerçekleşen transient olayların matematiksel modellerinin nümerik analizi için algoritmalar geliştirmektir.

Belirlenen amaca varmak için tez çalışmasında aşağıdaki problemlerin çözülmesi öngörülmektedir:

- Bir aktif RC tabanlı doğrusal olmayan elektronik devrede gerçekleşen geçici (transient) olayda çözümün kararlaşmış bileşeninde başlangıç anında oluşan değişiklikler incelenecektir. Bu nedenle öncelikle, matematiksel modelleme yöntemi yardımıyla problemin matematiksel tanımlanması yapılacak ve bu matematiksel modelden elde edilen çözüm analiz edilerek farklı özel durumlar incelenecektir.
- Doğrusal bir elektronik devresindeki geçici süreçlerin matematiksel modellemesinden elde edilen bir matematik probleminin analitik ve nümerik çözümü analiz edilecektir. Analitik ve nümerik çözümlerin avantajları ve dezavantajları belirlenecektir.
- Elektronik devrelerde kullanılan çeşitli bileşenlerin akım-gerilim karakteristiklerini (AGK) belirleyen mevcut bağlantılar analiz edilecek, elektrik devrelerinin

doğrusal olmayan elemanlarında gerilim ve akım arasındaki matematiksel ilişkiler belirlenecektir. Bu amaçla deneysel verilerin aproksimasyonu kullanılacaktır.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Kuo (1973), tarafından yapılan bu çalışma uzun mesafeli analog iletişim sistem tasarımında, doğrusal olmayan elektronik devrenin bozulma davranışını anlayarak literatürde bilinen yöntemlere dayalı olarak geliştirmek amaçlanmıştır. Ayrıca, frekans alanında doğrusal olmayan bir transistörün genlikleri ve fazları doğrusal devre karakteristikleri ve doğrusal olmayan yanlıklarla ilişkisi Taylor serisi katsayıları tarafından intermodülasyon kaynakları tarafından eşdeğer olarak temsil ettiği gösterilmiştir. Daha sonra, bu pratik amaçlar için doğru sonuçlar elde edebilmek adına ikinci ve üçüncü dereceden intermodülasyon yinmeleri yapılarak bozulmalar hesaplanmıştır ve bir algoritma geliştirilmiştir. Sonuç olarak, algoritmanın başarısının bipolar transistörlerin doğru bir doğrusal olmayan modeline büyük ölçüde bağlı olduğuna ulaşılmıştır ve bozulma vektörlerinin doğru bir şekilde ölçülmesinin çok zor olmasıyla birlikte, oluşturulan algoritma ile kolayca hesaplanabilir olduğu anlaşılmıştır.

Bussgang ve arkadaşları (1974), tarafından yapılan bu çalışma çoklu giriş sinyallerine verilen doğrusal olmayan tepkiyi hesaba katan iletişim alıcılarının analitik modellemesinin oluşturulması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda, doğrusal olmayan fonksiyonları Wiener-Volterra analizi ile gerçekleştirilmiş ve türetilmiş analitik ilişkilerin parametreleri tarafından belirtilen büyük devrelerin doğrusal olmayan transa fonksiyonlarını sağlayan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Sonuç olarak, doğrusal olmayan sistemleri tanımlama yöntemlerinin düşük dereceli Volterra bileşenleri ve devre davranışını yeterince modellenebildiği hafif doğrusal olmayan durumlar için en uygun olduğu bulunmuştur.

Leon ve Schaefer (1978), tarafından yapılan bu çalışma doğrusal olmayan devreleri ve sistemleri analiz etmenin iki yöntemi olan yineleme ve volterra serileri arasındaki ilişkiyi göstermeyi ve zaman alanında bu devre ve sistemleri analizlerini hesaplamayı amaçlamıştır. Sonuç olarak, volterra serisinin kısmi toplamı daha yüksek dereceli terimler içermezken, yineleme yöntemi n. dereceye kadar terim içerebileceğine ulaşılmıştır. Ayrıca, birçok durumda yineleme tanımlamasının daha

kolay bir yöntem olduğu ve bu yüzden sayısal sonuçlara ulaşmak için programlanmaya daha yaktın olduğu kanısına varılmıştır.

Chua ve Ushida (1981), tarafından yapılan bu çalışma doğrusal olmayan devrelerin iki veya daha fazla frekans giriş sinyali tarafından sürülen sistemlerin kararlı hal çözümlerini elde etmek için iki verimli algoritma geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu algoritmalarından ilki iki girişten büyük olduğu durumlar için diğeri ise iki giriş olduğu durum için tasarlanmıştır. Ayrıca, bu algoritmalar kararlı durum yanıtının periyodik olmadığı, periyodik olduğu ve periyodunun mevcut yöntemler için çok büyük olduğu durumlar için kullanışlı olduğu anlaşılmıştır. Bu nedenle, iki algoritma da doğrusal olmayan cebirsel ve diferansiyel denklemlerin örtük sistemi tarafından tanımlanan sistemler için formüle edilmiştir ve durum denklemlerini yazma ihtiyacını ortadan kaldırmıştır. Sonuç olarak, algoritmalar arasında ikinci algoritmanın yalnızca iki giriş frekansıyla sınırlı olduğu için birinci algoritmanın, yani iki girişten fazla alan algoritmanın önemli ölçüde daha verimli olduğuna ulaşılmıştır. Ayrıca, bu iki algoritma ile çok sayıda örnek başarıyla çözülmüş ve hesaplamaların iyi olmasının yanı sıra kalıcı hal çözümlerini bulmak için şu anda mevcut olan tek yöntem olduğu ileri sürülmüştür.

Sandberg (1983), tarafından yapılan bu çalışmada keyfi bir sonlu sayıda doğrusal olmayan eleman içeren belirli bir büyük doğrusal olmayan sistem sınıfının giriş ve çıkış ilişkisi için yakınsak bir seri temsilinin varlığını göstermek amaçlanmıştır. İletişim sistemi modellemesi alanında bulunan bir sistemi inceleyerek giriş ve çıkış ilişkisini yerel olarak serinin varlığını ilk kez gösteren bir sonuç elde edilmiştir. Sonuç olarak, bu tür sistemlerde sistemin lineer parçasının, sıklıkla ortaya çıkan ve kaçınılmaz olarak, karşılık gelen seri açılımlarındaki terimler için çok daha karmaşık ifadeleri matematiksel olarak daha geniş bir çözüme ulaştırmıştır.

Selçuk ve arkadaşları (2014), tarafından yapılan çalışmada Al / Maleik Anhidrit (MA) ve p-Si yapısının I – V ve C – V karakteristik özellikleri kullanılarak diyot parametreleri incelenmiştir. Bu çalışma son zamanlardaki optoelektronik gibi umut verici uygulamalardan ötürü polimer mikroelektronik cihazlara oluşan büyük ilgiden esinlenerek oluşturulmuştur. Sonuç olarak, organik materyalin doğudan p-Si substratına kaplanmasıyla oluşturulan Al / MA / p-Si yapısının elektriksel özellikleri

imal edilerek araştırılmıştır. p-Si substratı üzerindeki MA ince filminin iyi bir düzeltme davranışı gösterildiği kanısına varılmıştır. Yapının ileri I – V özelliği, standart termiyonik emisyon teorisi temelinde analiz edilmiştir. Ayrıca gerekli kapasitans – gerilim ve iletkenlik – gerilim durumlarına bakılarak Al / MA / p-Si yapısı, olası uygulamalar için iyi bir elektronik malzeme kombinasyonu olarak kullanılabilceği kararına varılmıştır.

Glowacki ve arkadaşları (2017), tarafından yapılan bu çalışma optoelektronik cihazların, özellikle organik ışık yayan diyotların performans üzerindeki etkisini analiz etmeyi amaçlamıştır. Ayrıca organik ince film transistörlerin çalışma prensiplerinin temel terimleri açıklanmıştır. Spesifik olarak, yakalama işlemlerinin nedeni ve bu tür durumlardaki elemanların kendini nasıl ortaya koydukları incelenmiştir. Daha sonra, optoelektronik cihazlarda deneysel olarak gözlemlenen ince film transistörlerin yakalama kökenlerine, mekanizmalarına ve bu rol üzerindeki bulunan en son teknolojiye bakılmıştır. Sonuç olarak, organik ışık yayan diyotların ve organik ince film transistörlerin yük taşıyıcı etkisi ile ilgili bu çalışmada organik elektroniğin temel fiziksel araştırmalarının önemi vurgulanmıştır.

Mustafa (2019), tarafından yapılan bu çalışmada laboratuvar görüntüleme programlamasını çalıştıran bir kaynak ölçer ile diyot ve direncin I – V karakteristik eğrisini belirlenmektedir. Elde edilen verilerle birlikte gerçek frekans ile diyot ve direncin teorik özellikleri karşılaştırılarak pratik ve deneysel uyumluluğa bakılmıştır. Her yarı iletken diyotun akım akışına direndiği bir diz voltajı vardır ve direnç, voltaj sağlandığında ohm yasasını izleyen bir düz çizgi verir. Gerilim bir sınıra kadar artırılabilir, mevcut akımı ölçülebilir ve ardında birkaç nokta için karakteristik eğri görülebilmektedir. Sonuç olarak, bu çalışmanın tüm deneysel sonuçları teori ile uyumlu çıkmıştır. İki farklı diyot ve direncin I – V karakteristiğine bakılmıştır. Bu işlemlerin doğruluğu neticesinde, cihazın daha kısa sürede çok sayıda nokta için verileri verimli hesaplayabileceği görülmüştür. Ayrıca, daha az hata ve daha fazla doğrulukta grafik verileri sağlayabilmektedir.

Budaev ve arkadaşları (2019), tarafından yapılan bu çalışmada PANI-polister ferroelektrik PVDF yarı iletken aracılığıyla şarj değişken taşıyıcılarının deneysel çalışmaların sonuçları sunulmaktadır. Yapısal doğru akım karakteristiği memristörler

için tipik bir forma sahip ve toplu hacimdeki bölgenin iç değişebilir alanındaki şarj taşıyıcının hareketleriyle açıklanabilir. Bu doğrultularla şarj taşıyıcılarının gizli salınım ve yakalama süreciyle bağlantılı doğru akım karakteristiği ölçüm döngüsünün dinlenmesi ile bulunmuştur. Sonuç olarak, deneysel çalışmaların PVDF-TrFE katmanının yapısal özellikleri ve ara yüz boyunca yüklü saf olmayan memristör benzeri I – V özelliklerine sahip yapı elde edilmiştir. Bu kompozit malzeme mikro bölgelerde anahtarlama işlemleri yanı sıra çeşitli tuzak türlerinden yük taşıyıcılarının yakalanması ve serbest bırakılması nedeniyle I – V özelliklerinden bir histerezise sahiptir. Anlatılan işlemlere bağlı olarak elde edilen kompozit malzemenin uzun vadeli bir gevşeme direncine sahip olduğu kanısına ulaşılmıştır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Deneysel Verilerin Aproksimasyonu İçin İhtiyaç Duyulan Ampirik Formüllerin Oluşturulması

Pratikte çoğu durumlarda fiziksel bir olayı karakterize eden bir modelde, bu olayın fiziksel mekanizmasını belirleyen parametreler arasındaki $y = f(x)$ ifadesine istinaden x_i ve y_i parametrelerin etki-tepki prensibine göre değişimini temsil eden deneysel gözlem sonuçları bir tablo şeklinde verilir. Bu değerler y parametresinin x parametresine bağlı olarak değişim eğrisini oluşturmak için kullanılabilir. Aynı bağımlılık, bazı ampirik $y = \varphi(x)$ formül ile yaklaşık olarak temsil edilebilir. Açıkçası, belirli bir ampirik formülün seçimi, belirli bir $\alpha \leq x \leq \beta$ değer aralığında $\varphi(x)$ ile $f(x)$ arasında en iyi yaklaşımın gereklilik koşulu ile belirlenir.

$y = f(x)$ fonksiyonu çeşitli ampirik formüllerle ifade edilebilir. Bazı problemlerde $\varphi(x)$ fonksiyonu olarak belirli bir $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında $d = \max|f(x) - \varphi(x)|$ niceliğın en büyük değeri, başka herhangi bir ampirik $\varphi_i(x)$ formül seçilmesi durumuna göre oluşan $d_i = \min|f(x) - \varphi_i(x)|$ nicelik değerinden daha az olacaktır. Deney sonuçlarına en iyi biçimde yaklaşımın edilebilmesi için seçilen ampirik formüldeki bilinmeyen parametrelerin belirlenmesi için en küçük kareler yöntemi kullanılır. Bu durumda en iyi yaklaşımı veren fonksiyon, aşağıdaki integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - \varphi(x)]^2 dx \quad (3.1)$$

değerinin en küçük değere sahip olduğunu sağlayan $\varphi(x)$ fonksiyondur. Bir başka deyişle fonksiyonun değerleri genellikle yalnızca belirli bir aralıktaki x_i 'nin bireysel değerleri için bilindiğinden, ihtiyaç duyulan ampirik $\varphi(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulun doyurulması gerekmektedir.

$$S = \sum_{i=0}^0 [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 dx \rightarrow \min \quad (3.2)$$

Çoğu durumlarda, incelenen fiziksel olayın değişim karakteri, bir kuvvet yasası, üstel fonksiyon veya bir polinom ifadeleri ile iyi bir şekilde aproksime edilebilir. Bilindiği üzere m . derece bir polinom aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + mx^n \quad (3.3)$$

Belirli koşullarda (3.3) ifadesi;

$$y - k = m(x - l)^2 \quad (3.4)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu ifade $n = 1$ için, geometrik olarak bir doğru ile temsil edilir, yani $y = mx$ veya $y = a + mx$, n 'nin tam ve birden büyük bir sayı olması durumunda, (3.3) ifadesi ile tanımlanan denklem, parabolik tipte bir eğriyi temsil eder. Bu denklemin özel biçimleri aşağıdaki biçimde verilir.

$$y = mx^n \quad (3.5)$$

$$y = a + mx^n \quad (3.6)$$

n 'nin sıfırdan küçük olması durumunda, (3.3) ifadesi ile tanımlanan denklem geometrik olarak bir hiperbolik eğriyi temsil etmektedir.

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (3.7)$$

(3.7)'deki denklem gibi olması durumunda, parametreler arasındaki fonksiyonel bağımlılığa uygun olarak $y = ab^x$ veya $y = ae^{bx}$ biçiminde fonksiyonlarla gösterilir. Daha karmaşık durumlarda,

$$\varphi(x) = a_1 e^{b_1 x} a_2 e^{b_2 x} + \dots \quad (3.8)$$

biçiminde ampirik bir ifadenin kullanılması, deneysel verilerle hesaplanan değerler arasında iyi bir uyum sağlar. Öte yandan, deneysel verilerin ölçümü üzerine etkiyen çeşitli hatalar nedeniyle, böyle bir tesadüf bazen formülün doğruluğunu azaltabilir. Dolayısıyla, tüm deney verilerin ampirik formülle tam olarak çakışması için çaba sarf etmeye gerek olmadığına dikkat edilmelidir.

3.2. Doğrusal Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Cauchy Probleminin Sayısal Çözümü ve Runge-Kutta Yöntemi

Bilindiği üzere, Runge - Kutta yöntemi değiştirilmiş ve düzeltilmiş bir Euler yöntemidir. Runge - Kutta algoritmalarının ana fikri, diferansiyel denklemin sağ tarafında bulunan ve belirlenmesi istenen bilinmeyen fonksiyonu bir yaklaşımla değiştirmektir. Eğer Cauchy problemi integral biçiminde ifade edilirse o halde aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t,y)dt \quad (3.9)$$

Sonraki aşamada, denklemin sağ tarafındaki integrali hesaplamak için çeşitli sayısal formüller kullanılarak, çeşitli derecelerde Runge - Kutta yöntemleri elde edilebilir. Bir h_n hesaplama adımı ile çeşitli doğruluk derecelerine sahip Runge - Kutta yöntemlerinin formüllerinin genel biçimi aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$y = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.10)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_{n+1} \sum_{i=1}^S b_i k_n^i \quad (3.11)$$

Burada $k_n^i = f\left(t_n + c_i h_{n+1}, h_{n+1} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_n^j\right)$ belirli doğruluk derecesine sahip Runge - Kutta yöntemi, belirli fonksiyonel ilişkileri karşılama gereken bir dizi b_i , c_i ve a_{ij} katsayıları belirler.

Sayısal algoritmalar oluştururken, incelenen diferansiyel problemin çözümü için varlık ve teklik koşullarını doyuran teoremlerin sağlandığı ve çözümün gerekli

süreklilik özelliklerine sahip olduğu varsayılır. Bu özelliklere sahip bir Cauchy problemi verilmiş olsun.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad a \leq x \leq b; \quad y(a) = y^0 \quad (3.12)$$

$h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere, homojen bir ağ oluşturulur.

$$x_i = a + ih, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.13)$$

$y(x_i) = y_i$ değişken değiştirmesi yaparak, dördüncü derece Runge-Kutta yöntemin matematiksel algoritmasını oluşturmak için ihtiyaç duyulan formüller aşağıdaki ifadelerle verilmiştir.

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (3.14)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_1}{2}\right) \quad (3.15)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_2}{2}\right) \quad (3.16)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \quad (3.17)$$

ve

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.18)$$

4. LİNEER ELEKTRİK DEVRELERİNDE GEÇİŞ SÜREÇLERİ (TRANSİENT OLAYLAR)

Bu tez çalışmasında temel amaç olarak ortaya konan problem, elektrik devrelerinde meydana gelen geçici süreçlerin (transient olayların) bilgisayar ortamında analizini içermektedir. Dolayısıyla, bu problemi çözmek için öncelikli olarak hedeflenen problem doğrultusunda ihtiyaç duyulacak matematiksel modellerin belirlenmesi gerekmektedir.

Öte yandan bir problemin matematiksel modelinin bu problemin fiziksel formülasyonuna ve devre elemanlarının özelliklerine bağlı olduğu bilinmektedir. Tez çalışmasının bu bölümünde, çeşitli lineer RC devrelerinde meydana gelen süreçlerin matematiksel modelleri ele alınmıştır. Lineer devrelerde, elemanlar sadece lineer bağımlılıklarla tanımlanan “Akım-Gerilim” özegrisine sahiptirler. Çalışmanın bu bölümünde, örnek olarak, bir elektrik devresindeki geçici süreçlerin uygun olarak analitik çözümü ve bir bilgisayar kullanılarak nümerik çözümü verilmiştir.

4.1. Lineer Elektrik Devrelerinde Matematiksel Modeller

Matematiksel modelleme, karşı karşıya gelinen problem durumlarının matematiksel olarak yorumlanabilmesi için gereken kavramsal yapılarıdır. Matematiksel modelleme, gerçek yaşamda karşı karşıya gelinen ve çözüm bekleyen problemlerin üstesinden gelme süreci olarak tanımlanır. Farklı bir görüşe göre de matematiksel modelleme süreci gerçek hayat problemlerini tercüme eden aynı zamanda matematiksel problemleri de gerçek yaşam problemlerine uyarlayan bir süreçtir. Ayrıca, matematiksel modellemeyi gerçek dünya durumunun bir bölümünü temsil edebilmek için kullanılan matematiksel oluşumlar ve bu oluşumlar arasındaki ilişkilerin birleşimi olarak da tanımlanabilmektedir (Albayrak ve Çiltaş, 2017).

Matematiksel modeller değişkenlerden oluşur. Fonksiyonlar, diferansiyel ve cebirsel eşitliklerle tanımlanır. Parametreler ile matematiksel eşitlikler oluşturulur. Matematiksel modeller için birden fazla sınıflandırma vardır. Bu sınıflandırma

arasında doğrusal ve doğrusal olmayan modellemeler RC devresi üzerinden oluşturulabilir.

Doğrusal ve doğrusal olmayan matematiksel modellemedeki eşitliklerde doğrusallık var ise sistem doğrusal olarak tanımlanır. Eğer doğrusallık yok ise doğrusal olmayan sistemler olarak isimlendirilir. Doğrusal olmayan sistemler, çok basit devrelerde de zorluk çıkartır. Doğrusal sistemler doğrusal olmayan sistemlere göre daha kolay model oluşturma eğilimi gösterir. Bu nedenle doğrusal olmayan sistemlerde problemi çözmek için eşitlikler doğrusal hale getirilir.

Doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler dışında üç tür sistem tanımlanır. İlk tür basit, ikincisini düzensiz karmaşıklık sistemleri ve üçüncüsü de organize karmaşıklık sistemleri olarak belirlenir. Basit sistemler nispeten az sayıda değişkenle tanımlanır ve model oluşturmak için standart matematiksel araçlar kullanılabilir. Fizikteki Newton sistemleri iyi örnekler sağlar. Karmaşık sistemler birçok değişkenle karakterize edilir ve kategori daha sonra alt bölümlere ayrılır. Düzensiz sistemler, birbirine güçlü bir şekilde bağımlı olmayan unsurlara sahiptir. Organize sistemler güçlü karşılıklı bağımlılıklara sahiptir. İnsanlar, beyinler, ekonomiler, şehirler, ekosistemler ve dil, hepsi organize sistemlere örnek teşkil eder. Organize sistemler ayrıca doğrusal olmayanların varlığı ile de karakterize edilir. Karmaşık mekansal sistemler, önemli mekansal yapılara sahip olanlardır (Wilson, 2002).

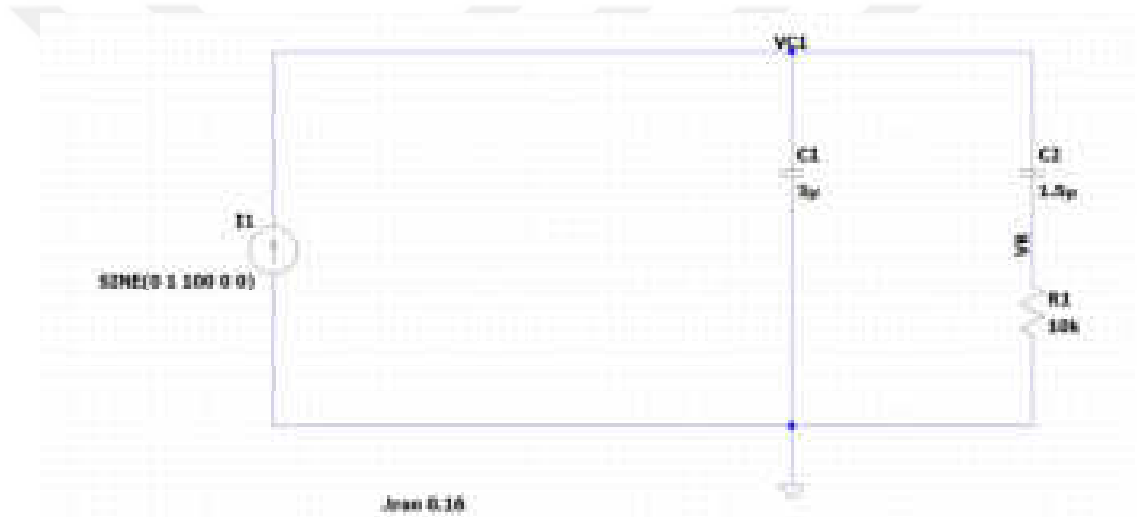
Bu paragrafta, lineer elektrik devreleri için matematiksel bir model oluşturmak için, çeşitli özel durumlar (iki, üç, dört ve n kapasitör içeren) elektrik devreleri için geçici süreçlerle ilgili problemlerin formülasyonu ele alınmıştır. Devredeki geçiş sürecinin, $t = 0$ anında devrenin içerdiği bir akım kaynağının etkisi altında gerçekleştiği varsayılmaktadır.

Devre elemanlarının akım-gerilim özelliklerinin lineer olduğu varsayılarak, incelenen problemlerin matematiksel modelleri oluşturulmuş ve matematiksel ifadeleri formüle edilmiştir. Burada lineer problemin analitik çözümünün karmaşıklığı, devrede yeterince fazla sayıda eleman ve bu problemlerin bir bilgisayarda nümerik çözümünün daha uygun olacağı gösterilmiştir.

Tez çalışmasının bu bölümünde kapasitörlerin paralel bağlandığı devreler tartışılmaktadır. Açıkçası, bu devrelerin başka konfigürasyonları da olabilir ve bu durumlarda incelenecek her bir devre için, lineer diferansiyel denklemler sistemi ile ilgili bir problem çözülmelidir.

4.1.1. Lineer Elektrik Devrelerinde İki Kondansatörlü Sistem Analizi

Başlangıçta, basit örnek olarak bir direnç elemanı R (Direnç) ve iki tane C_1 ve C_2 kapasitörden oluşan bir lineer RC elektrik devresini temsil eden ikinci Dereceden RC Devresi (Şekil 4.1) ele alınarak matematiksel modelleme aşağıdaki denklemlerle birlikte oluşturulmuştur.



Şekil 4.1. İkinci Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi

Herhangi bir devrenin matematiksel modelini oluşturmak ya da devrenin analizi yapmak için sıklıkla kullanılan kanunlar vardır. Bu kanunlardan bazıları Kirchoff'un Akım Yasası ve Kirchoff'un Gerilim Yasasıdır. Şekil 4.1 devresinde de bu kanunlardan yola çıkarak bir matematiksel model oluşturulmuştur.

Bu elektrik devresinin matematiksel modelini oluşturmak için (Şekil 4.1), aşağıdaki gösterimler kabul edilmiştir: i_1 , i_2 uygun olarak t zamanına bağlı olarak C_1 , C_2 – kapasitörleri üzerindeki akımları ve V_{C_1} , V_{C_2} ise bu kapasitörler üzerindeki voltajı göstermektedirler. Burada R , C_1 ve C_2 birer sabitler olarak kabul edilir.

Genelde bir devrenin durum denklemlerini oluşturmanın çeşitli yolları olduğu bilinmektedir. Burada bu yöntemlerden biri kullanılmaktadır. Ohm ve Kirchhoff yasalarından hareketle incelenen elektrik devresi için (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) gibi iyi bilinen formüller yazılabilir.

Kirchoff'un Akım Yasasına göre belirlenen bir düğüm noktasına giren akımlar toplamının çıkan akımlar toplamına eşit olması gerekir. Daha teknik bir dille ifadesi ise Ampere Yasası'nın diverjansı ve Gauss Yasası'nın birleşimiyle oluşur. Bu durum yük korunumunu açıklar. Denklem (4.1)'de Kirchoff'un bu yasası kullanılmıştır.

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (4.1)$$

Denklem (4.1)'deki ifade devrede bir akım olduğunu gösterir. Akım oluşu ise kondansatörün uçları arasındaki gerilimin farkının var olmasıyla alakalıdır. Eğer bu durum tersi yönde oluşursa bir süre sonra gerilim değişikliği olmayacağı için kondansatör dolar ve akım geçirmemeye başlar. Bu durum kondansatörün uçlarındaki gerilimin değişmesiyle bozulur ve yeniden akım akışına başlar. Tüm bu bilgilere bağlı olarak kondansatör akımı, uçları arasındaki gerilim değişikliğine bağlı olduğunu gösterir. Bu durumun zamana bağlı olarak gösterimi (4.2) ve (4.3) ile gösterilmiştir.

$$i_1(t) = C_1 \frac{dV_{C_1}(t)}{dt} \quad (4.2)$$

$$i_2(t) = C_2 \frac{dV_{C_2}(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Kirchoff'un diğer bir yasası olan Kirchoff Gerilim Yasası ise matematiksel modelini oluşturduğumuz devrede gerilim denklemlerini oluşturma olanağı sağlar. Bu yasaya iki farklı yolla bakılır. Birincisi seri bağlı devreler için geçerlidir. Bu tür devrelerde elemanlar üzerindeki gerilim toplamları giriş gerilimine eşit olmak zorundadır. İkinci bir durum ise paralel bağlı devrelerdir. Bu tür devrelerde ise eleman üzerinden geçen gerilimler giriş gerilimine eşit olmak zorundadır. Şekil 4.1'de kullandığımız sistem paralel bağlı bir devre olduğu için C_1 kapasitörü üzerindeki

gerilim giriş gerilimine eşit olmalıdır. Bu durum (4.4) ve (4.5) denklemleri ile gösterilmiştir.

$$V_x = V_{C_1} \quad (4.4)$$

$$V_x = V_{C_2} + V_{R_1} \quad (4.5)$$

(4.4) ve (4.5) denklemlerinden yola çıkarak eşitliğin iki tarafında da V_x değeri olduğu için bu iki denklem birleştirilir. Bu denklem (4.6) ile gösterilmiştir.

$$V_{C_1} = V_{C_2} + V_{R_1} \quad (4.6)$$

(4.6) denkleminde bulunan V_{R_1} ifadesini Ohm Yasası kullanarak tekrar yazılır. Yeni yazılan bu denklem daha sonra ki işlemlerde matematiksel modeli oluşturmada kolaylık sağlar. Bu denklem (4.7) ile gösterilmiştir.

$$V_{C_1} = V_{C_2} + i_2(t)R_1 \quad (4.7)$$

(4.7) denkleminde yola çıkarak $i_2(t)$ ifadesi yerine $i_2(t)$ 'nin eşitliği yazılmıştır.

$$V_{C_1} = V_{C_2} + C_2 \frac{dV_{C_2}(t)}{dt} R_1 \quad (4.8)$$

İlk olarak gerilimler bir araya getirilmiştir. Sonrasında, $\frac{dV_{C_2}(t)}{dt}$ denklemini yalnız bırakılacak şekilde işlem yapılmıştır.

$$V_{C_1} - V_{C_2} = C_2 \frac{dV_{C_2}(t)}{dt} R_1 \quad (4.9)$$

Sonuç olarak, (4.10) denklemini elde edilmiştir.

$$\frac{dV_{C_2}(t)}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R_1 C_2} \quad (4.10)$$

Yukarıdaki işlemlerle aynı mantıkla (4.1) denklemindeki eşitliğin yeri değiştirilmiştir ve (4.6) denkleminde yerine yazılmıştır. Bu işlemler sonucu oluşan yeni denklem (4.11) ile gösterilmiştir.

$$V_{C_1} = V_{C_2} + [i(t) - i_1(t)]R_1 \quad (4.11)$$

(4.9) analiziyle oluşturulan denklemde gerilimler bir tarafa toplanır, parantez içindeki değerler R_1 ile çarpılır ve $i_1(t)$ değerinin (4.2)'de bulunan eşitliği yerine yazılır.

$$V_{C_1} - V_{C_2} = i(t)R_1 - C_1 \frac{dV_{C_1}(t)}{dt} R_1 \quad (4.12)$$

Tüm taraflar R_1 bölünür. Gerekli basit matematiksel işlemler yapılarak da $\frac{dV_{C_1}(t)}{dt}$ denklemi yalnız bırakılır.

$$\frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{R_1} = i(t) - C_1 \frac{dV_{C_1}(t)}{dt} \quad (4.13)$$

Sonuç olarak, (4.14) denklemini elde edilir.

$$\frac{dV_{C_1}(t)}{dt} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{C_1 R_1} + \frac{i(t)}{C_1} \quad (4.14)$$

Burada $R - C_1$ ve $R - C_2$ uygun olarak zaman sabitleri olarak adlandırılır.

Komutasyonun ikinci yasasına göre $V_C(0^-) = V_C(0^+)$ olduğu bilinmektedir (İonkin, 1976;Sheles, 1988 ve Bessonov, 2016).

Genelliği kaybetmeden, basitlik için, zamanın ilk anında ($t = 0$) kapasitörlerdeki gerilimlerin sıfıra eşit olduğunu varsayabiliriz. Daha sonra (4.13) ve (4.14) ifadeleri ile tanımlanan diferansiyel denklemler sistemini çözmek için gerekli olan başlangıç koşulları aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$t = 0 \quad , \quad V_{C_1}(0) = 0 \quad , \quad V_{C_2}(0) = 0 \quad (4.15)$$

Böylece, incelenen lineer elektrik devresi için, (4.13), (4.14) ve (4.15) ifadeleriyle tanımlanan birinci merteye lineer diferansiyel denklem sistemini elde edilmiştir. (4.13), (4.14) ve (4.15) ifadeleriyle tanımlanan bu problem bir Cauchy problemidir.

4.1.2. Lineer Elektrik Devrelerinde Üç Kondansatörlü Sistem Analizi

Şimdi ise, üçüncü Dereceden RC Devresinin (Şekil 4.2) matematiksel modellemesi görüldüğü üzere bu devre bir önceki eşdeğer devreye (Şekil 4.1) bir daleklenerek aşağıdaki denklemlerle birlikte oluşturulmuştur.



Şekil 4.2. Üçüncü Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi

Bu durumda, Ohm ve Kirchhoff yasalarından hareketle incelenen (Şekil 4.2)'deki elektrik devresi için (4.2), (4.3), (4.16) ve (4.17) gibi iyi bilinen formüller yazılabilir.

Aşağıda oluşturulan analitik denklem ikinci dereceden lineer elektrik devresinde uygulanan yöntemlerle aynı doğrultuda gerçekleştirilmiştir. (4.1) denklemindeki adım uygulanarak ilk denklem elde edilmiştir.

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) \quad (4.16)$$

Böylelikle (4.16) analitik denkleminde yola çıkarak (4.2) ve (4.3) analitik denklemlerinden farklı olarak (4.17) analitik denklemi zamana bağlı olarak gösterilmiştir.

$$i_3(t) = C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} \quad (4.17)$$

Akım denklemleri bulunduğundan sonra (4.6) analitik denkleminde farklı olarak (4.18) denklemi elde edilir.

$$V_x = V_{C_3} + V_{R_2} \quad (4.18)$$

Elde edilen bu denklemle birlikte eşitlikler belirlenir. (4.7) denkleminde farklı olarak (4.19) analitik denklemi elde edilir.

$$V_{C_1} = V_{C_3} + i_3(t)R_2 \quad (4.19)$$

(4.19) denkleminde yola çıkarak $i_3(t)$ ifadesi yerine $i_3(t)$ 'nin eşitliği yazılmıştır.

$$V_{C_1} = V_{C_3} + C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} R_2 \quad (4.20)$$

Bu denklemde de (4.8) analitik denklemde yapıldığı gibi ilk olarak gerilimler bir araya getirilmiştir. Sonrasında, $\frac{dV_{C_3}(t)}{dt}$ denklemi yalnız bırakılacak şekilde işlem yapılmıştır.

$$V_{C_1} - V_{C_3} = C_3 \frac{dV_{C_3}}{dt} R_2 \quad (4.21)$$

Sonuç olarak ise (4.22) denklemi elde edilmiştir.

$$\frac{dV_{C_3}}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_3}}{R_2 C_3} \quad (4.22)$$

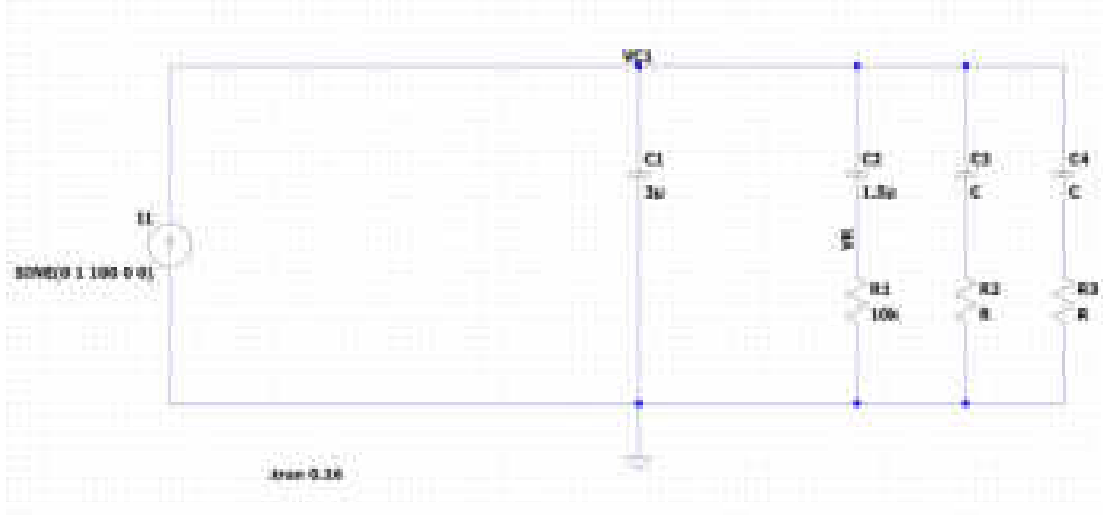
Bu formüllerden hareketle $V_{C_1}(t)$, $V_{C_2}(t)$ ve $V_{C_3}(t)$ fonksiyonları için (4.10), (4.14) ve (4.22) birinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilebilir.

Bu denklemler sistemini çözmek için ihtiyaç duyulan başlangıç koşullar, ikinci komutasyon yasasına göre $V_C(0^-) = V_C(0^+)$ belirlenebilir. Buna göre $t = 0$ anı için başlangıç koşulların aşağıdaki biçimde olduğu kabul edilmiştir.

$$V_{C_1}(0) = 0 \quad , \quad V_{C_2}(0) = 0 \quad , \quad V_{C_3}(0) = 0 \quad (4.23)$$

4.1.3. Lineer Elektrik Devrelerinde Dört Kondansatörlü Sistem Analizi

Dördüncü Dereceden RC Devresinin (Şekil 4.3) matematiksel modellenmesi aşağıdaki denklemlerle birlikte oluşturulmuştur.



Şekil 4.3. Dördüncü Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi

Bu durumda incelenen lineer elektrik devresini analiz etmek için, yukarıda incelenen durumlara benzer olarak bazı eşitlikler elde edilmiştir.

Aşağıda oluşturulan analitik denklem ikinci dereceden lineer elektrik devresinde uygulanan yöntemlerle aynı doğrultuda gerçekleştirilmiştir. (4.1) denklemindeki adım uygulanarak ilk denklem elde edilmiştir.

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \quad (4.24)$$

Böylelikle (4.24) analitik denkleminde yola çıkarak (4.2) ve (4.3) analitik denklemlerinden farklı olarak (4.25) analitik denklemi zaman domaininde gösterilmiştir.

$$i_4(t) = C_4 \frac{dV_{C_4}}{dt} \quad (4.25)$$

Akım denklemleri bulunduktan sonra (4.6) ve (4.18) analitik denklemlerinden farklı olarak (4.26) denklemi elde edilir.

$$V_x = V_{C_4} + V_{R_3} \quad (4.26)$$

Elde edilen bu denklemle birlikte eşitlikler belirlenir. (4.7) ve (4.19) denklemlerinden farklı olarak (4.27) analitik denklemi elde edilir.

$$V_{C_1} = V_{C_4} + i_4(t)R_3 \quad (4.27)$$

(4.27) denkleminden yola çıkarak $i_4(t)$ ifadesi yerine $i_4(t)$ 'nin eşitliği yazılmıştır.

$$V_{C_1} = V_{C_4} + C_4 \frac{dV_{C_4}}{dt} R_3 \quad (4.28)$$

Bu denklemde de (4.8) analitik denklemde yapıldığı gibi ilk olarak gerilimler bir araya getirilmiştir. Sonrasında, $\frac{dV_{C_4}(t)}{dt}$ denklemi yalnız bırakılacak şekilde işlem yapılmıştır.

$$V_{C_1} - V_{C_3} = C_4 \frac{dV_{C_4}}{dt} R_3 \quad (4.29)$$

Sonuç olarak ise (4.30) denklemi elde edilmiştir.

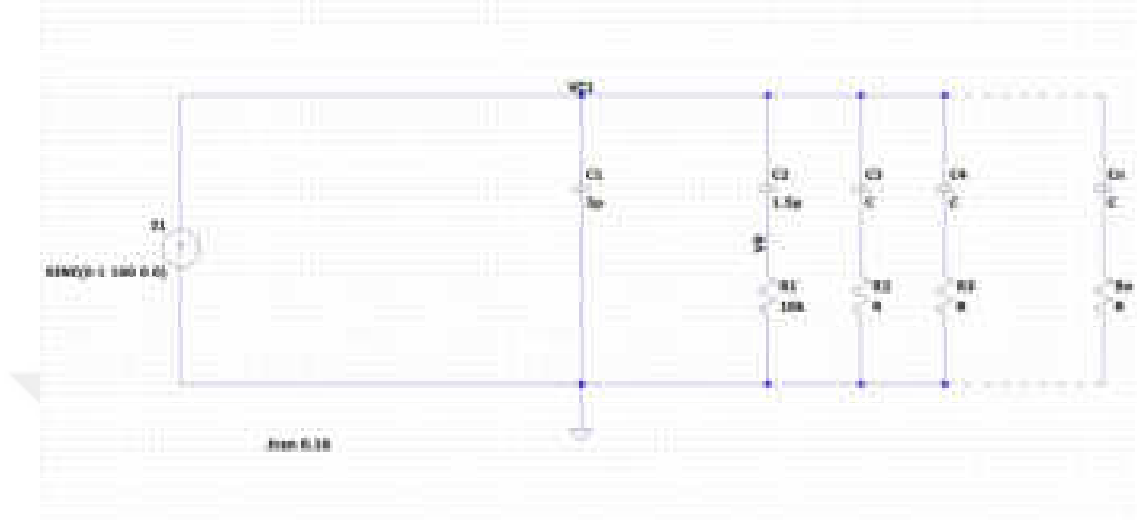
$$\frac{dV_{C_4}}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_4}}{R_3 C_4} \quad (4.30)$$

Bu ifadelerden hareketle yukarıdaki basit dönüşümler sonrası denklemler sistemini elde ederiz. Bu denklemler sistemini çözmek için ihtiyaç duyulan başlangıç koşulları $t = 0$ durumu için aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

$$V_{C_1}(0) = 0 \quad , \quad V_{C_2}(0) = 0 \quad , \quad V_{C_3}(0) = 0, \quad V_{C_4}(0) = 0 \quad (4.31)$$

4.1.4. Lineer Elektrik Devrelerinde n Kondansatörlü Sistem Analizi

n. Dereceden RC Devresi ile genel çözüm elde edilmiştir.



Şekil 4.4. n. Dereceden Lineer Eşdeğer Elektrik Devresi

Önceki durumlarda elde edilen matematiksel formüller, kapasitör sayısı n 'ye eşit olduğunda herhangi bir durum için genelleştirilebilir. Bu genel durum için ihtiyaç duyulan elektrik devresi, Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Burada, devreyi oluşturan elemanların parametreleri için aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır. i_k akım, V_{C_k} uygun olarak, k nolu daldaki C_k kapasitansı üzerindeki akımı ve voltajı, R_k ise yine incelenen elektrik devresinin k nolu dalındaki dirençli elemanının aktif direncini temsil etmektedirler. Görüldüğü üzere bu durumda devre, paralel bağlı n daldan oluşmaktadır.

Aşağıda oluşturulan analitik denklem ikinci dereceden lineer elektrik devresinde uygulanan yöntemlerle aynı doğrultuda gerçekleştirilmiştir. (4.1) denklemindeki adım uygulanarak ilk denklem elde edilmiştir.

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) + \dots + i_k(t) \quad (4.32)$$

Böylece (4.32) analitik denkleminde yola çıkarak (4.2) ve (4.3) analitik denklemlerinden farklı olarak (4.33) analitik denklemi zaman domaininde gösterilmiştir.

$$i_k(t) = C_k \frac{dV_{C_k}}{dt} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

Akım denklemleri bulunduktan sonra (4.6), (4.18) ve (4.26) analitik denklemlerinden farklı olarak (4.34) denklemi elde edilir.

$$V_x = V_{C_k} + V_{R_k} \quad (4.34)$$

Elde edilen bu denklemle birlikte eşitlikler belirlenir. (4.7), (4.19) ve (4.27) denklemlerinden farklı olarak (4.35) analitik denklemi elde edilir.

$$V_{C_1} = V_{C_k} + i_k(t)R_k \quad (4.35)$$

(4.35) denkleminde yola çıkarak $i_k(t)$ ifadesi yerine $i_k(t)$ 'nin eşitliği yazılmıştır.

$$V_{C_1} = V_{C_k} + C_k \frac{dV_{C_k}}{dt} R_k \quad (4.36)$$

Bu denklemde de (4.8) analitik denkleminde yapıldığı gibi ilk olarak gerilimler bir araya getirilmiştir. Sonrasında, $\frac{dV_{C_k}(t)}{dt}$ denklemini yalnız bırakılacak şekilde işlem yapılmıştır.

$$V_{C_1} - V_{C_k} = C_k \frac{dV_{C_k}}{dt} R_k \quad (4.37)$$

Sonuç olarak ise (4.38) denklemi elde edilir ve bu analitik denklem aynı zamanda denklemin genelleştirilmiş modelidir.

$$\frac{dV_{C_k}}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_k}}{R_k C_k} \quad , \quad k = 2, 3, \dots \quad (4.38)$$

İncelenen tüm durumlarda i_k akımları ve V_{C_k} gerilimleri t zaman bağımlı birer fonksiyonlardır. Önceki incelenen durumlar genelleştirilirse, bu durumda denklemler (4.33) ve (4.38) biçimde yazılabilir. Ayrıca, bu denklemlere ek olarak V_{C_1} denklemide genelleştirilir.

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\sum_{k=2}^n \frac{V_{C_k} - V_{C_1}}{R_k} + i(t) \right) \quad (4.39)$$

Böylece, $t = 0$ anı için, $V_{C_k} = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan (4.33) ifadesi ile tanımlanan denklemler sistemi, n kapasitörlü bir elektrik devresinde gerçekleşen geçici süreçlerin analizi probleminin matematiksel bir modelni oluşturur. Dolayısıyla, bir RC elektrik devresinin matematiksel modellemesinin sonuçlarına dayanarak bu devre için Cauchy problemini formüle edebiliriz. $0 < t < T$ aralığında, $V_{C_k} = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan (4.33) ifadesi ile tanımlanan denklemler sisteminin çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Burada T , geçici sürecin analiz edildiği zamanı ifade etmektedir.

4.2. Lineer Elektrik Devrelerinde Matematiksel Model Belirlenmesi ve Matematiksel Problemin Analitik Çözümü

Lineer olmayan iki kondansörlü devrede ilk çözüm olarak hesaplanan (4.10) ve (4.14) denklemlerinden yola çıkarak matematiksel model oluşturulmuştur. Oluşturulan bu model $t = 0$ anı için $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ gerilimlerinin başlangıç değerlerinin aynı şekilde sıfıra eşit olduğu gösterilmiştir. Bu işlemler serisini yaparken değişken değiştirme yöntemini kullanılarak özçözüm bulunmuştur.

(4.10), (4.14) ve (4.15) denklemler sistemi, yukarıda formüle edilen Cauchy problemi için çözümün varlığı ve tekliği ile ilgili teoremin tüm gerekliliklerini karşılar. Tanımlanan Cauchy problemini çözmeden önce, sonraki hesaplamalarda türetilcek matematiksel ifadelerin basitliği açısından aşağıdaki işaretlemeler (notasyonlar) tanımlanmıştır.

$$a = \frac{1}{R_2 C_1} \quad (4.40)$$

$$b = \frac{1}{R_2 C_2} \quad (4.41)$$

ve

$$f(t) = \frac{i(t)}{C_1} \quad (4.42)$$

Değişken değiştirme yöntemi yardımıyla eşitlikler denklem içindeki yerlerine yazılır. Bu notasyonlar dikkate alınarak, (4.10) ve (4.14) ifadeleri ile tanımlanan diferansiyel denklemlerin yeniden düzenlenmesiyle oluşturulan nihai sonuç (4.43) ve (4.44) denkleminde gösterilmiştir.

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = a(V_{C_2} - V_{C_1}) - f(t) \quad (4.43)$$

ve

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = b(V_{C_1} - V_{C_2}) \quad (4.44)$$

Eğer (4.43) ve (4.44) ifadelerinin ikinci denklemden V_{C_1} gerilimini V_{C_2} gerilimi cinsinden ifade edersek aşağıdaki denklem oluşur.

$$V_{C_1} = V_{C_2} + \frac{1}{b} \frac{dV_{C_2}}{dt} \quad (4.45)$$

Daha sonra (4.44) denklemindeki ifadeler (4.43) denklemini ile birleştirilerek denklem (4.45) elde edilir. Başlangıç durumunda bakılacak olan $t = 0$ durumu hem gerilimin denkleminin kendisinde hem de gerilim denkleminin türevinde analiz edilmiştir ve sonuç (4.46) ile gösterilmiştir.

$$\frac{d^2 V_{C_2}}{dt^2} + (b + a) \frac{dV_{C_2}}{dt} = b f(t) \quad (4.46)$$

Bu diferansiyel denklemi çözmek için başlangıç koşulları (4.47) ve (4.48) ile gösterilmiştir.

$$V_{C_2}(t|_{t=0}) = 0 \quad (4.47)$$

ve

$$\frac{dV_{C_2}(t|_{t=0})}{dt} = 0 \quad (4.48)$$

Tüm bu denklemler sonucu bir özçözüm elde etmemiz gerekmektedir. Elde edilen özçözüm devrede akıma bağlı olarak analitik bir sonuç verecektir. Oluşturulan özçözüm aşağıdaki denklemlerde gösterilmiştir.

$$V_{C_2}(t) = b \int_0^t z(x) e^{-(a+b)x} dx \quad (4.49)$$

ve

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + [z(t) e^{-(a+b)t}] \quad (4.50)$$

Hatırlanması gereken (4.49) ve (4.50) ifadelerindeki $z(t)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ile belirlenir.

$$z(t) = \int_0^t f(\xi) e^{(a+b)\xi} d\xi \quad (4.51)$$

Bu ifadeden de görüldüğü üzere eğer $f(t)$ fonksiyonu verilirse, yani $i(t)$ akımını belirleyen fonksiyon verilirse o halde, (4.49) ve (4.50) formülleri kullanılarak ilk önce C_1 ve C_2 kapasitörleri üzerindeki $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ voltajları ve daha sonra ise (4.1) ve (4.2) ifadeleri kullanılarak, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akım değerleri belirlenebilir.

Eğer (4.40), (4.41) ve (4.42) ifadesini kullanarak (4.49), (4.50) ve (4.51) ifadeleri devre parametreleri cinsinden ifade edilirse aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$V_{C_2}(t) = \frac{1}{R_1 C_2} \int_0^t z(x) e^{-\left(\frac{C_1+C_2}{R_2 C_1 C_2}\right)x} dx = \frac{1}{\tau_2} \int_0^t z(x) e^{-\alpha x} dx \quad (4.52)$$

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + \left[z(t)e^{-\left(\frac{C_1+C_2}{R_2C_1C_2}\right)t} \right] = V_{C_2}(t) + [z(t)e^{-\alpha t}] \quad (4.53)$$

ve

$$z(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(x)e^{\left(\frac{C_1+C_2}{R_2C_1C_2}\right)x} dx = \frac{1}{C_1} \int_0^t i(x)e^{\alpha x} dx \quad (4.54)$$

Yukarıda görülen analitik denklemler Fourier dönüşümü yapılarak çözülebilir. Fourier çözümü yapabilmek için bazı bağlantılara ihtiyaç duyulur. Bu formüllerde $\alpha = \frac{C_1+C_2}{R_2C_1C_2} = \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1}$ notasyonu yapılmış olup, uygun olarak τ_1 ve τ_2 devredeki C_1 ve C_2 kapasitörlerin zaman sabitlerini ifade etmektedir.

Böylece $i(t)$ akımındaki değişime bağlı olarak incelenen problemin analitik bir çözüm elde edilmiştir.

4.3. Lineer Elektrik Devrelerinde Cauchy Problemin Fourier Serisi Cinsinden Analitik Çözümü

Fourier Dönüşümü, herhangi bir sinyalin farklı genliği, frekansı ve fazı birleştirerek bir sinyal içinde gösterimini sağlar. Aynı zamanda Fourier Dönüşümü bu farklı değerlerdeki frekans, faz ve genliğe sahip sinyalleri ayrıştırma konusunda da oldukça önemlidir. Bu durum bize karmaşık sinyalleri ayrı sinyaller haline getirerek, gösterilecek olan sinyalleri daha kolay göstermede veya işlemi yapılacak karmaşık bir matematiksel problemi daha kolay bir hale getirmede yardımcı olur. Böylece sinyaller arasındaki farkı ve bu sinyallerin değerlerini bulma konusunda sonuca ulaşmamızı sağlar.

Fourier Serisi ise periyodik olan bir fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonun toplamına çevirir. Bu toplamlara çevrilen basit dalgalı fonksiyonları aynı zamanda üstel fonksiyon haline getirerek kompleks üstel fonksiyon şeklinde matematiksel işlemlerde kullanmamıza olanak sağlar.

Matematiksel modellemesini oluşturduğumuz Şekil 4.1'deki devrelerin akımlarının analitik analizi yapılmıştır. Yapılan bu analitik analiz ve Fourier denklemleriyle birlikte bazı parametrelerin teklik ve çiftlik kavramına bakarak değerleri bulunmuştur ve nihai sonuca varılmıştır.

Lineer problemleri çözmek için yaygın yöntemlerden biri Fourier serileri şeklinde bir çözüm bulmaktır. Fourier serilerinin trigonometrik fonksiyonlar cinsinden fonksiyonların bir açılımını veya farklı frekanslardaki harmoniklerin bir üst üste binmesini temsil ettiği bilinmektedir (Efimov, 1980). Bu anlamda, çoğu mühendislik problemlerinin daha detaylı incelenmesi için matematiksel modeller Fourier serileri kullanılarak tanımlanabilmektedir. Tez çalışmasının bu bölümünde Fourier serileri kullanılarak incelenen problemin analitik çözümü ele alınmıştır. Bu problemin elde edilen çözümü $i(t)$ fonksiyonuna bağlıdır. Burada $i(t)$ fonksiyonunun Dirichlet koşullarını sağladığı varsayılarak Fourier serisine açılımı aşağıdaki biçimde gösterilebilir (İonkin, 1976).

Fourier serisi $[0, T]$ aralığı için geliştirilen zaman domaininde akımın denklemi (4.55)'de gösterilmiştir.

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{\cos 2k\pi t}{T} + b_k \frac{\sin 2k\pi t}{T} \right) \quad (4.55)$$

Bu ifadenin içerdiği a_0 , a_k ve b_k katsayıları aşağıdaki formüller kullanılarak belirlenir (Shelest, 1988 ve Korn, 2014).

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^t i(t) dt \quad (4.56)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^t i(t) \frac{\cos 2k\pi t}{T} dt \quad (4.57)$$

ve

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^t i(t) \frac{\sin 2k\pi t}{T} dt \quad (4.58)$$

Bu koşullara bağlı olarak (4.55) denklemi dikkate alınarak (4.52), (4.53) ve (4.54) eşitlik ifadelerinin yeniden düzenlenmesiyle oluşan $z(t)$ denklemi (4.59)'de gösterilmiştir.

$$z(t) = \frac{1}{C_1} \left[Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \right] \quad (4.59)$$

$z(t)$ denklemi içinde bulunan bazı parametreler ise bu işlemlere bağlı olarak oluşturulmuş ve aşağıda analitik denklemleri verilmiştir.

$$Q_0 = \frac{a_0}{2} \int_0^t e^{\alpha x} dx = \frac{a_0(e^{\alpha t} - 1)}{2\alpha} \quad (4.60)$$

$$Q_k = a_k \int_0^t e^{\alpha x} \frac{\cos 2k\pi t}{T} dx = a_k \frac{e^{\alpha t}(\alpha(\cos 2k\pi t) + 2\pi k(\sin 2k\pi t)) - \alpha}{T(\alpha^2 + 4\pi^2 k^2)} \quad (4.61)$$

ve

$$G_k = b_k \int_0^t e^{\alpha x} \frac{\sin 2k\pi t}{T} dx = a_k \frac{e^{\alpha t}(\alpha(\sin 2k\pi t) - 2\pi k(\cos 2k\pi t)) + 2\pi k}{T(\alpha^2 + 4\pi^2 k^2)} \quad (4.62)$$

Fourier Serisi yardımıyla oluşan bu denklemler, zamana bağlı olarak bakıldığında $V_{C_1}(t)$ 'nin ve $V_{C_2}(t)$ 'nin genel ve genişletilmiş fonksiyonları belirlenebilir. Bu analitik denklemleri yapmak için öncelikle (4.60), (4.61) ve (4.62) ifadelerini kullanarak integral hesaplanır ve nihai sonuç aşağıda verilmiştir.

$$V_{C_2}(t) = \frac{1}{\tau_2 C_1} \int_0^t e^{-\alpha x} \left[Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k + \sum_{k=1}^{\infty} G_k \right] dx \quad (4.63)$$

$V_{C_2}(t)$ denkleminin genişletilmiş hali;

$$\begin{aligned} V_{C_2}(t) = \frac{1}{\tau_2 C_1} \left[\frac{1}{2\alpha^2(\alpha^2 + 4\pi^2 k^2)} e^{\alpha(-t)}(e^{\alpha t} - 1) \{ a_0(e^{\alpha t} - 1)T(\alpha^2 + 4\pi^2 k^2) + \dots \right. \\ \dots + 2\alpha b_k(e^{\alpha t}(\alpha \sin(2k\pi t) - 2k\pi \cos(2k\pi t)) + 2k\pi) + \dots \\ \left. \dots + 2\alpha a_k(e^{\alpha t}(\alpha \cos(2k\pi t) + 2k\pi \sin(2k\pi t)) - \alpha) \} \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

ve

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + [z(t)e^{-(a+b)t}] \quad (4.65)$$

$V_{C_1}(t)$ denkleminin genişletilmiş hali;

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + \left[\frac{e^{-\alpha t}}{C_1} \left\{ a_0 \frac{(e^{\alpha t} - 1)}{2\alpha} + \frac{a_k(e^{\alpha t}(\alpha \cos(2k\pi t) + 2k\pi \sin(2k\pi t)) - \alpha)}{T(\alpha^2 + 4\pi^2 k^2)} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \frac{b_k(e^{\alpha t}(\alpha \sin(2k\pi t) - 2k\pi \cos(2k\pi t)) + 2k\pi)}{T(\alpha^2 + 4\pi^2 k^2)} \right\} \right] \quad (4.66)$$

Sonucu bulunan $V_{C_1}(t)$ denklemini daha basit hale getirecek olursak;

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + \left\{ \frac{a_0}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2 \alpha}{(2k\alpha)^2 + (\alpha T)^2} \dots \right. \\ \left. \dots \left[\left(\frac{2k\pi}{\alpha T} + b_k \right) \frac{\sin 2k\pi t}{T} + \left(\frac{a_k - 2k\pi b_k}{\alpha T} \right) \frac{\cos 2k\pi t}{T} + e^{-\alpha t} \left(\frac{2k\pi}{\alpha T} b_k - a_k \right) \right] \right\} \frac{1}{C_1} \quad (4.67)$$

Elde edilen son denklem Fourier Serisi açılımı yapılarak çözümlenmiştir. İstenilen gerilimler, bu çözüm sonucu akım fonksiyonu olarak belirlenmiştir.

Böylece Fourier serisi yardımıyla $i(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak istenen $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ fonksiyonlarını belirlemeye olanak sağlayan (4.64) ve (4.67) ifadeleri belirlenmiştir. Sonraki aşamada ise t zamanına bağlı olarak devredeki akımların değişimini tanımlayan $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ fonksiyonları belirlenir. Bu amaçla aşağıdaki formüller kullanılır.

$$\begin{cases} i_2(t) = C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} \\ i_1(t) = i(t) - C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} \end{cases} \quad (4.68)$$

$i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımlarına uygun olarak incelenen devrede zamana bağlı akımları karakterize eder. Bu durum devredeki akım değişimi ile belirlenir. $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımlarını belirlemek için (4.1), (4.2) ve (4.3) denklemleri kullanılır. Böylece;

$$i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \left\{ \frac{a_0}{2\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2 \alpha}{(2k\alpha)^2 + (\alpha T)^2} \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots \left[\left(\frac{2k\pi a_k}{\alpha T} + b_k \right) \frac{\sin 2k\pi t}{T} + \left(\frac{a_k - 2k\pi b_k}{\alpha T} \right) \frac{\cos 2k\pi t}{T} - e^{-\alpha t} \right] \right\} \right\} \quad (4.69)$$

Böylece belirlenmiş (4.69) ifadesini (4.68) ifadesindeki ikinci denklemde yerine yazılarak, $i_1(t)$ fonksiyonu da belirlenir.

Sonuç olarak, yukarıda tanımlanan iki kapasitörlü lineer RC elektrik devresi için Cauchy probleminin çözümü Fourier Serileri cinsinden gerçekleştirilerek $V_{C_1}(t)$, $V_{C_2}(t)$, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ fonksiyonlarını belirlemeye olanak sağlayan formüller türetilmiştir.

4.4. Lineer Elektrik Devrelerinde Matematiksel Problemin Analizi İçin Özel Durumların İncelenmesi

Bu bölümde başlangıç olarak özel durumları incelemek için pratikte sıklıkla karşılaştığımız $i(t)$ akımının belirgin şekline sahip olduğumuzu varsayalım. Bu husus göz önüne alındığında $i(t)$ uyarıcı fonksiyonunun belirli biçimlere sahip olduğu özel durumları dikkate almak gerekir. Burada, uygulamada sıklıkla karşılaştığımız iki tür akım değişimini ele alacağız.

4.4.1. Akımın Periyodik Fonksiyon Olduğu Özel Durum

Akım $i(t)$ değişken olsun ve bunu tanımlamak için aşağıdaki periyodik fonksiyon kullanılır.

$$i(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.70)$$

denkleminde yararlanırız. Burada A genliği ifade ederken ω açısal frekansı karakterize eder. Akımın bu ifadesini belirlerken $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ formüllerindeki denklemler dikkate alınır. Bu denklemler (4.70) formülünü (4.64) ve (4.67) formüllerinde yerine yazılarak ve ayrıca;

$$\int_0^{\infty} \sin(\omega x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \left[e^{-\alpha t} \sin(\omega t) + \frac{\omega}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega t)) \right] \quad (4.71)$$

(4.71) denkleminde yararlanılır. Tüm bu denklemlerle birlikte $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ fonksiyonları için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$V_{C_2}(t) = \frac{A}{C_1 RC_2} (\alpha^2 + \omega^2) \left[\frac{\omega}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) - \sin(\omega t) + \frac{\alpha}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \right] \quad (4.72)$$

ve

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + \frac{A\alpha}{C_1(\alpha^2 + \omega^2)} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\alpha} (e^{-\alpha t} - \cos(\omega t)) \right] \quad (4.73)$$

$V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ bu şekilde matematiksel olarak ifade edilir. Gerilime ilave olarak birinci özel durum için $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımları da aşağıdaki ifade ile bulunur.

$$i_2(t) = \frac{A\alpha}{C_1 RC_2 (\alpha^2 + \omega^2)} \left[\sin(\omega t) + \frac{\omega}{\alpha} (e^{-\alpha t} - \cos(\omega t)) \right] \quad (4.74)$$

ve

$$i_1(t) = i(t) - i_2(t) \quad (4.75)$$

İncelenen durum için tanımlanan matematiksel problemin elde edilen analitik çözümü, belirli bir elektrik devresini tanımlayan parametrelerin çeşitli değerleri için nümerik bir analiz yapmayı mümkün kılar. İncelenen elektrik devresi için, devrenin içerdiği parametreler;

$$\begin{aligned} C_1 = 3\mu F \quad ; \quad C_2 = 1.5\mu F \quad ; \quad R = 10k\Omega \quad ; \quad f = 100Hz \quad ; \quad \alpha = 10 \\ \omega = 2\pi f = 200\pi \quad ; \quad A = 1 \quad ; \quad i(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi ft) \end{aligned} \quad (4.76)$$

olarak belirlenirse bu değerlere bağlı olarak $V_{C_1}(t)$, $V_{C_2}(t)$, $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ yaklaşık değerleri aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$V_{C_1}(t) \cong V_{C_2}(t) + 0.824 \cdot 10^3 [\sin(\omega t) + 20\pi(\cos(\omega t) - e^{-10t})] \quad (4.77)$$

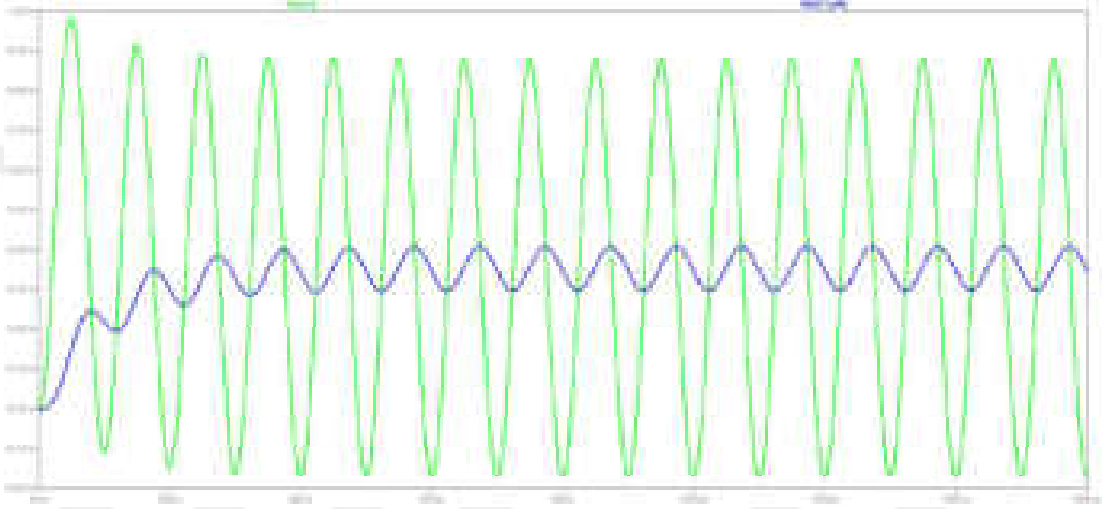
$$V_{C_2}(t) \cong 3.45 \cdot 10^4 \left[1 - e^{-10t} - \frac{1}{20\pi} \sin(\omega t) + \frac{1}{400\pi^2} (1 - \cos(\omega t)) \right] \quad (4.78)$$

$$i_1(t) \cong \sin(\omega t) - i_2(t) \quad (4.79)$$

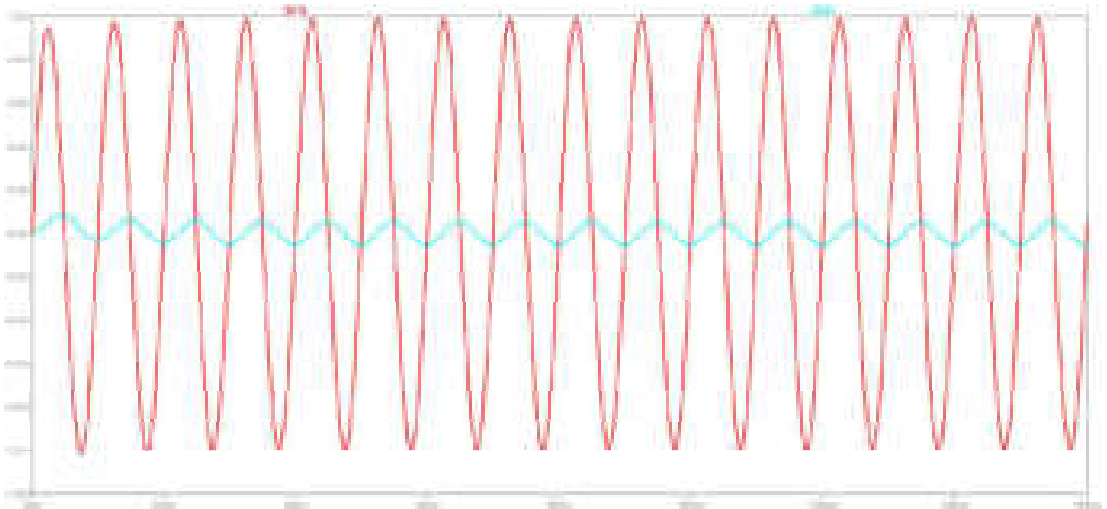
ve

$$i_2(t) \cong 0.55 \cdot 10^4 [\sin(\omega t) + 20\pi(e^{-10t} - \cos(\omega t))] \quad (4.80)$$

Birinci özel durumda hesaplamalar, $0 < t < 0.15$ zaman aralığı için $h = 0.001$ adımıyla Ek 1 kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu ifadelerden hareketle, C_1 ve C_2 kapasitörleri üzerindeki voltaj zamanla değişim grafikleri Şekil 4.5 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.5. Birinci Özel Durumda C_1 ve C_2 Kapasitörleri Üzerindeki $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ Gerilim Değişim Grafiği



Şekil 4.6. Birinci Özel Durumda $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ Akımlarının Zamana Göre Değişim Grafiği

Uygun olarak $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımlarının zamana göre değişimi ise yukarıdaki Şekil 4.6 ile gösterilmiştir.

4.4.2. Akımın Birim Basamak Fonksiyon Olduğu Özel Durum

Bu durumda $i(t)$ akımının devreye uygulanan bir birim basamak biçiminde sinyal olduğunu ve de incelenen elektrik devresindeki geçici (transient) olayın sebebi olduğunu kabul edelim.

$$i(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (4.81)$$

İkinci özel durumda $i(t)$ akımının Fourier Serisine genişletilmesi yapılır. Bu seri açılımı;

$$i(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{2\pi t}{T}}{1} + \frac{\sin \frac{6\pi t}{T}}{3} + \frac{\sin \frac{10\pi t}{T}}{5} + \dots \right) \quad (4.82)$$

şeklinde belirlenir. Bu serinin katsayıları (4.60), (4.61) ve (4.62) formüllerine uygun olarak belirlenmiştir.

$$a_0 = A \quad ; \quad a_k = 0 \quad ; \quad b_k = \frac{A}{k\pi} [1 - (-1)^k], k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.83)$$

İkinci özel durumda bu değerlere bağlı olarak $V_{C_1}(t)$ ve $V_{C_2}(t)$ gerilimlerinin sonuçları;

$$V_{C_2}(t) = \frac{1}{\tau_2 C_1} \left\{ \frac{A}{2\alpha} \left(t + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \dots \right. \\ \left. \dots \left[1 - \frac{\cos 2k\pi t}{T} - \frac{1}{\alpha} \frac{\sin 2k\pi t}{T} + \frac{2k\pi}{\alpha^2 T} (1 - e^{-\alpha t}) \right] \right\} \quad (4.84)$$

ve

$$V_{C_1}(t) = V_{C_2}(t) + \frac{1}{C_1} \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{AT^2 \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \dots \right. \\ \left. \dots \left[\frac{\sin 2k\pi t}{T} - \frac{2k\pi}{\alpha T} \left(\frac{\cos 2k\pi t}{T} - e^{-\alpha t} \right) \right] \right\} \quad (4.85)$$

şeklinde olacaktır. Aynı şekilde ikinci özel durumda (4.67) ve (4.68) denklemlerine bağlı olarak $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ akımları bulunur. Burada öncelikle $i_2(t)$ 'yi bulmak için $V_{C_2}(t)$ 'nin türevi alınır ve ardından C_2 kondansatörü ile çarpılır. $i_1(t)$ 'yi bulmak için ise (4.70)'deki analitik denklem kullanılır. Bu işlemler sonrası istenilen sonuca ulaşılmıştır.

$$i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{AT^2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \dots \right. \\ \left. \dots \left[\frac{2k\pi}{T} \sin(2k\pi t) - \frac{2k\pi}{\alpha T} \cos(2k\pi t) + \frac{2k\pi}{\alpha T} (e^{-\alpha t}) \right] \right\} \quad (4.86)$$

ve

$$i_1(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{2\pi t}{T}}{1} + \frac{\sin \frac{6\pi t}{T}}{3} + \frac{\sin \frac{10\pi t}{T}}{5} \right) - \frac{C_2}{\tau_2 C_1} \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{AT^2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \left[\frac{2k\pi}{T} \sin(2k\pi t) - \frac{2k\pi}{\alpha T} \cos(2k\pi t) + \frac{2k\pi}{\alpha T} (e^{-\alpha t}) \right] \right\} \quad (4.87)$$

şeklinde olacaktır.

Elde edilen çözümler, devrenin geçici moddaki durumunu belirler. Kararlı durumu belirlemek için aranan fonksiyonların $t = 1$ değerindeki değerlerinin belirlenmesi gerekmektedir.

İletkende dalgalar ve elektronlar biçimindeki elektrik yükleri akar ve iletken çevresinde oluşan elektromanyetik alan denilen şeyi oluşturabilir. Akım akışı için en az bir kapalı yolu olan basit bir elektrikli cihaz bir elektrik devresine bağlanır ve uygulanan kaynağın veya devre elemanlarının değiştirilmesiyle devre, dal akımının ve voltajın değiştirildiği bir durumdan diğerine geçebilir. Geçici olarak bilinen bir geçiş aşaması sırasında önceki değerleri yeni değerlerine dönüştürülür. Geçici olay geçtikten sonra devre kararlı durumdadır (Khader, Gómez-Aguilar ve Adel, 2021).

Örneğin mevcut $i_2(t)$ için;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} i_2(t) = \frac{C_2}{C_1 \tau_2} \left\{ \frac{A}{2\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) + \frac{AT^2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \dots \right. \\ \left. \dots \left[\left(\sin \frac{2k\pi t}{T} - \frac{2\pi k}{T\alpha} \cos \frac{2k\pi t}{T} \right) \right] \right\} \quad (4.88)$$

Denklem (4.88) düzenlenirse aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C_2}{C_1 \tau_2} \left\{ \frac{A}{2\alpha} + \frac{AT^2\alpha}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi k}{\alpha T} \right)^2} \sin \left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k \right) \right\} \quad (4.89)$$

Burada $\varphi_k = \arctg \frac{2k\pi}{\alpha T}$ olarak gösterilmiştir. Kararlaştırılmış rejimde ise $i_2(t) = i_2^0$ olacaktır. Bu eşitliklerle çıkacak $i_2^0(t)$ ve $i_1^0(t)$ denklem (4.90) ve (4.91) ile gösterilmiştir.

$$i_2^0(t) = \frac{C_2}{C_1 \tau_2} \left[\frac{A}{2\alpha} + \frac{AT}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] \sin \left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k \right)}{k[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2]} \right] \quad (4.90)$$

ve

$$i_1^0(t) = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{C_2}{C_1 \tau_2} \right) + \frac{A}{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \sin \frac{2\pi k t}{T} - \frac{\sin \left(\frac{2k\pi t}{T} - \varphi_k \right)}{\sqrt{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2}} \right) \right] \quad (4.91)$$

5. DOĞRUSAL OLMAYAN ELEMANLARIN AKIM-GERİLİM EĞRİSİNİ BELİRLEMEK İÇİN DENEYSEL VERİLERİN APROKSİMASYONU

Pratikte, genellikle elektronik devre elemanlarının Akım-Voltaj özelliklerinin (I-V) doğrusal olmaması ile ilgili bir problem ortaya çıkar. Etkiye karşı tepkileri (reaksiyonları) veya cevap fonksiyonları doğrusal olmayan elemanlar ihtiva eden herhangi bir elektronik devre, doğrusal olmayan devre olarak adlandırılır (İonkin, 1976 ve Alisoy, 2020). Devre elemanlarının akım-voltaj özellikleri genellikle yapılan deneyler sonucunda belirlenir. Literatürde (Bessonov, 2016), elektronik devrelerin çeşitli elemanlarının I –V özelliklerinin çok çeşitli grafikleri mevcuttur. Örneğin, nonlineer rezistif elemanlar (NE) için, karakteristikler, voltaj ve akımların anlık değerleri arasındaki ilişkiyi belirler ve doğrusal olmayan kapasitans elemanı, statik kapasitans ve diferansiyel kapasitans ile karakterize edilir.

Pratik hesaplamalarda grafiksel yöntemler yaygın olarak kullanılmaktadır (Bessonov, 2016). Bununla birlikte, teorik araştırma ve elektronik devrelerin pratik uygulaması, doğrusal olmayan elemanların (NE) akım-gerilim özelliklerinin analitik bir ifadesini gerektirir (Demirchyan, Neyman, Korovkin ve Checherin, 2003). Bu nedenle, çeşitli devrelerde akım ve gerilim arasındaki ilişkiyi açıklayan analitik formüllerin belirlenmesi önemli bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Başka bir deyişle, deneysel verilerin analitik fonksiyonlarla aproksimasyonu önem arz etmekte olup incelenmesi gereken problemler arasında yer almaktadır.

5.1. Elektronik Devrelerde Deneysel Verilere Yaklaşmak İçin Kullanılan Fonksiyonlar

Yukarıda belirtildiği gibi, bir elektronik devrede meydana gelen transient olayların matematiksel bir modelini geliştirmek için, akım-gerilim karakteristiklerinin (I-V) denklemlerinin matematiksel ifadelerinin belirlenmesi gerekir.

Genel durumda, bir elektronik devre, yalnızca yeterli doğruluk derecesi ile doğrusal olarak kabul edilebilecek elemanların yanı sıra, açıkça doğrusal olmayan elemanlar da içerir. Doğrusal olmayan R, L, C elemanlarının parametreleri, kendilerine

uygulanan voltajın bir fonksiyonu olması bakımından farklılık gösterir. Dolayısıyla, Kirchhoff yasalarına dayanan bu tür devrelerin denklemleri doğrusal olmayacaktır. Devrenin parametreleri arasındaki bu fonksiyonel ilişkiler, deneysel sonuçlarından hareketle belirlenir. Bununla birlikte, doğrusal olmayan elemanlara sahip elektronik devrelerin bilgisayar analizi için voltaj ve akım arasında analitik bir ilişki olması tavsiye edilir. Kural olarak, bu amaç için deneysel verilerin aproksimasyonu kullanılır. Literatürde (Dyakonov, 2012 ve Shelest, 1988), elektronik devre elemanlarının I - V karakteristiğinin doğrusal olmaması ile ilgili konuların ele alındığı, çeşitli türde aproksimasyon fonksiyonları önerilmiştir. Bu fonksiyonlar ve özellikleri hakkında bazı bilgiler vermek gerekir.

Tezin bu bölümünde, akım- voltaj arasındaki fonksiyonel bağımlılığı tanımlamak için kullanılan aproksimasyon fonksiyonların çeşitli varyantları analiz edilmiştir. Ayrıca, bu fonksiyonların içerdiği bilinmeyen parametrelerin belirlenmesi gerçekleştirilmiştir.

Bilindiği üzere, deneysel veya istatistiksel veriler, incelenen değişkenler (göstergeler) arasındaki analitik ilişkileri belirlemek için temel bilgilerdir. Deneysel verilerle iyi uyum içinde olan bu değişkenler arasında böyle bir ilişkiyi tanımlayan bir fonksiyonun belirlenmesi gerekmektedir. Bu fonksiyonların analizine geçmeden önce ilk aşamada, boyutsuz niceliklerin tanımlanmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bunu nedenini, boyutsuz niceliklerin kullanılmasının, hesaplamalarda ve incelenen sürecin modellenmesinde belirli kolaylıklar sağlamasıdır. Boyutsuz değişkenlere geçmek için verilen problem için karakteristik büyüklüklerin seçilmesi gerekir. Daha sonra, incelenen süreci tanımlayan büyüklüklerin onlara karşılık gelen karakteristik büyüklüklere oranları dikkate alınır. Bu, sonraki hesaplamalarda boyutsuz nicelikleri dikkate almamıza ve ardından boyutsal niceliklere geri dönmemize olanak sağlamaktadır.

Verilen problemde V_0 , verilen bileşen için karakteristik olan bir voltaj olsun. O zaman $\frac{V_0}{R}$, R direncinin sabit bir değeri için akımın karakteristik değeri olabilir. Bu durumda boyutsuz büyüklüklere geçiş aşağıdaki formüller kullanılarak gerçekleştirilir.

$$x = \frac{V}{V_0} , \quad y = \frac{iR}{V_0} \quad (5.1)$$

Burada x-boyutsuz gerilimi ve y- boyutsuz akımı temsil etmektedir. Bu formüller dikkate alınarak istenen aproksimasyon fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$i = \frac{V_0}{R} f(x) \quad (5.2)$$

veya

$$y = f(x) \quad (5.3)$$

Burada f(x)- boyutsuz akım ve boyutsuz gerilim arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyonu temsil etmektedir. Deneysel verilerin aproksimasyonu için mevcut yöntemlerin analizinden, pratikte aşağıdaki fonksiyonların sıklıkla kullanıldığı bilinmektedir (Shelest, 1988 ve Alisoy, 2020).

1. a ve b birer bilinmeyen parametreler olmak üzere, aşağıdaki biçimde tanımlanan doğrusal gibidir. Bu fonksiyon bir doğruyu ifade etmektedir.

$$y = ax + b \quad (5.4)$$

2. a, b ve c birer bilinmeyen parametreler olmak üzere, ikinci dereceden polinimal bir fonksiyondur. Bu fonksiyon bir parabol grafiği ifade etmektedir.

$$y = ax^2 + bx + c \quad (5.5)$$

3. a_n, \dots, a_0 birer bilinmeyen parametreler olmak üzere, m dereceden polinimal bir fonksiyondur.

$$y = a_n x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (5.6)$$

4. a bir bilinmeyen parametre olmak üzere üstel fonksiyondur.

$$y = a \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right] \quad (5.7)$$

5. a bir bilinmeyen parametre olmak üzere hiperbolik sinüs fonksiyonudur.

$$y = a \sinh \frac{x}{a} \quad (5.8)$$

İstatistiksel veya deneysel verilerin yaklaştırılması için doğrusal ve ikinci dereceden fonksiyonlar, bilimin birçok alanında uzun süredir ve başarıyla kullanılmaktadır.

Ayrıca elektronik devrelerde deneysel verilere yaklaşmak için eğri uydurma ve interpolasyon fonksiyonları kullanılır. Bu fonksiyonların kullanılma yönteminde iki farklı veri noktası x- eksenini ve y-ekseni üzerinde belirlenir ve o verilere en yakın eğri çizilerek oluşturulur.

İnterpolasyon fonksiyonlarında genellikle farklı mertebeli polinomlar kullanılır. Fakat üstel, logaritmik ve hiperbolik fonksiyonlar için özel fonksiyonlar kullanılır. Bu özel durumdaki fonksiyonlar eşit aralıklı dağılıma sahip olmadıkları için daha farklı yöntemler ile çözümlenir. İnterpolasyon polinomlarını çözmek için kullanılan yöntemler;

1. Bölünmüş Farklar Yöntemi
2. Eşit Aralıklı Nokta Dağılımları İçin Basit Farklar Yöntemi
3. Kubik Spline Eğri Yöntemi
4. Kısmi Kubik Spline Eğri Yöntemi
5. Bir Yüzey Üzerinde İnterpolasyon Yöntemi
6. En küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi, veri analizi için yaygın olarak kullanılan bir tekniktir. Bir dizi gözlem ile en iyi uyumu gösteren bir model fonksiyonunun parametrelerinin tahminine izin verir. (Solaguren-Beascoa Fernández, 2018)

Bu çalışmada I - V eğrisini belirlemek için en küçük kareler yöntemi kullanılacaktır. En küçük kareler yönteminin aksine diğer yöntemler daha düzgün dağılımlı veriler için uygundur. Fakat deneysel verilere bağlı olarak bir eğri oluşturulduğu için bu çalışmada kullanılması en doğru olan yöntem en küçük kareler yöntemidir.

En küçük kareler yönteminde, alınan deneysel veriler grafik üzerine yerleştirilir ve noktalar doğrusal olmayan bir eğriye sahip olur. Veri dağılımıyla oluşan bu grafiğe en uygun doğru çizimi en küçük kareler yöntemiyle yapılır. Doğru çizimine uzak olan veri noktaları hata olarak görünür. Fakat bu eğri veri noktalarına en yakın şekilde olacağı için doğru sayılır. Bu duruma hatayı en aza indirme yani minimuma getirme denir. Deneysel çalışmalarda ölçümler ortamdaki hususlara göre değişebileceği için bazı veriler pozitif iken bazı veriler negatif çıkabilir. Hatalar bu şekilde toplanırsa bazı değerler bazı değerleri götüreceği için toplam hata olması gerekenden daha küçük olur. Bu yüzden hatalar toplanmaz hataların kareleri toplanarak hata payı en küçük hale getirilir. Doğrusal olmayan denklemlerde en küçük kareler yöntemini uygulayabilmek için denklem önce doğrusal hale getirilir sonra çözüme gidilir. En küçük kareler yönteminin genel formülizasyonu aşağıdaki şekildedir.

Veri Dağılımı;

$$(x_k, y_k) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (5.9)$$

Uydurulacak Doğrular;

$$y(x) = a_0 + a_1x \quad (5.10)$$

Hatalar;

$$e_k = y_k - y(x_k) \quad (5.11)$$

Hata Kareleri;

$$e_k^2 = [y_k - y(x_k)]^2 = (y_k - a_0 - a_1x_k)^2 \quad (5.12)$$

Hata Karelerinin Toplamı;

$$E = \sum_{k=1}^N (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2 \quad (5.13)$$

Türev Eşitliği (E'nin minimum olması için türevin sıfır olması gerekir);

$$\frac{dE}{da_0} = \sum_{k=1}^N 2(y_k - a_0 - a_1 x_k)(-1) = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{dE}{da_1} = \sum_{k=1}^N 2(y_k - a_0 - a_1 x_k)(-x_k) = 0$$

Matris Formda Yazımı;

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{k=1}^N x_k \\ \sum_{k=1}^N x_k & \sum_{k=1}^N x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N y_k \\ \sum_{k=1}^N x_k y_k \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Doğrusal Olmayan Denklem;

$$y = ae^{bx} \quad (5.16)$$

Doğrusal Olmayan Denklemi Lineerleştirme;

$$\ln y = \ln a + b \ln e^x \quad (5.17)$$

Doğrusal Olmayan Denklemi Lineerleştirme Sonucu;

$$\ln y = \ln a + bx \quad (5.18)$$

Öte yandan, fonksiyonunun lineer elektronik devrelerde akım ve gerilim arasındaki fonksiyonel ilişkiyi belirlemek için kullanıldığını ve nonlinear elemanlar içeren devreler için ise bu aproksimasyon ifadesinin kullanılamayacağı açıkça bilinmektedir.

Genelde nonlinear elemanlar içeren elektronik devreler için, akım ve voltaj arasındaki fonksiyonel ilişki (5.5) denklemiyle verilen ikinci dereceden bir polinomla tanımlanır.

Bu durumda, a, b, c bilinmeyen parametrelerini belirlemek için genellikle üç denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemi çözülür. Hatırlayalım ki bu tür

problemlerde, yüksek dereceden bir polinomun kullanılması, daha yüksek hesaplama doğruluğu elde etmemize olanak sağlar. Ayrıca, m. dereceden polinomların kullanımı, çok sayıda bilinmeyenli bir denklem sisteminin çözümünü gerektirmekte olup belirli zorluklarla ilişkilidir

Yukarıda sözü edilen yaklaşım (aproksimasyon) fonksiyonlarının matematiksel ifadelerinin içerdiği bilinmeyen parametrelerin (katsayıların) değerleri, elektronik devrenin farklı bileşenleri için farklı olabilir. Bu bilinmeyen parametrelerin sayısal değerlerinin belirlenmesi için deneysel veriler ve iyi bilinen en küçük kareler yöntemi kullanılmaktadır.

Bir elektronik devrede örneğin, akım ve gerilim arasındaki fonksiyonel ilişkinin belirlenmesinde aproksimasyon fonksiyonu olarak üstel veya hiperbolik sinüs fonksiyonu seçmenin nedenlerinden biri, voltajının nispeten küçük değerleri için akım ve gerilim arasındaki doğrusal bağımlılığı karakterize eden Ohm kanununun doyurulmasıdır.

Gerçekten de, bu fonksiyonların $x = 0$ komşuluğundaki Taylor serisine açılımları aşağıdaki kuvvet serileri biçiminde gösterilebilir (Herbert, 1961).

$$a \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right] = x - \frac{x^2}{2!a} + \frac{x^3}{3!a^2} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{k!a^{k-1}} + \dots \quad (5.19)$$

ve

$$a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = x + \frac{x^3}{3!a^2} + \frac{x^5}{5!a^4} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!a^{2k-1}} + \dots \quad (5.20)$$

Bu genel çözüm yönteminden yola çıkarak deneyin veri noktaları için bakılacak fonksiyonlar belirlenmiştir. Yaklaşımı (aproksimasyonu) oluşturulacak denklemler, m. dereceden polinom denklemi, üstel denklem, ikinci dereceden denklem ve hiperbolik denklemdir.

5.1.1. m. Dereceden Polinomu Kullanma Yöntemi

Doğrusal bir fonksiyonda veriler uygun hale getirilebilir. Aynı zamanda m. dereceden bir polinom içinde aynı durum geçerlidir. Bu iki işlemde de aynı işlemler kullanılır. Denklem (5.12)'de kullanılan bağıntı kullanılarak kare alma işlemi yapılır. Bunu toplam şeklinde göstericek olursak yeni denklem aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E = \sum_{k=1}^N (y_k - y(x_k))^2 = \sum_{k=1}^N ((a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m) - y_k)^2 \quad (5.21)$$

Bu değeri (5.13) denklemiyle bağlantılı olarak minimum yapmak için türev eşitliğine $m + 1$ değişkenli fonksiyon yardımıyla yapılır. Böylece genel denklem oluşur. Genelleştirilmiş denklem (5.22)'de gösterilmiştir.

$$\frac{dE}{da_m} = \sum_{k=1}^N 2x_k^m (a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 + \dots + a_mx_k^m - y_k) = 0 \quad (5.22)$$

Böylelikle $m + 1$ tane çizgisel denklem elde edilir ve bu denkleme bağlı olarak bu problemin çözümü yapılır. Çizgisel denklemin genelleştirilmiş denklemi (5.23) ile gösterilmiştir.

$$a_0 \sum_{k=1}^N x_k^m + a_1 \sum_{k=1}^N x_k^{m+1} + a_2 \sum_{k=1}^N x_k^{m+2} + \dots + a_m \sum_{k=1}^N x_k^{m+m} - \sum_{k=1}^N x_k^m y_k = 0 \quad (5.23)$$

5.1.2. Üstel Fonksiyonu Kullanma Yöntemi

Aşağıdaki gibi bir denklem verildiğini varsayalım.

$$y = a \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right) \quad (5.24)$$

Bu ifadeyi en küçük kareler yöntemi uygulayacağımız için minimum hata için kare alınacaktır. Bu durumda denklem;

$$U(a) = \sum_{k=1}^N \left[\left(y_k - a \left(1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right) \right) \right]^2 \quad (5.25)$$

Burada x_k ve y_k deneysel verilerdir. N ise yaklaşımsal deney verileri sayıdır. Görüldüğü üzere $U(a)$ fonksiyonu tek bir a parametresine bağlıdır. Bu durumda minimum değer için yeter ve gerek koşul denklem (5.14) ile aynıdır ve (5.26)'de gösterilmiştir.

$$\frac{dU(a)}{da} = -2 \sum_{k=1}^N \left[\left(y_k - a \left(1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right) \right) \right] \left[1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) - \frac{x_k}{a} \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right] = 0 \quad (5.26)$$

Böylelikle basit dönüşümler yardımıyla (5.27) denklemi elde edilir.

$$\sum_{k=1}^N y_k \left[1 - \left(1 + \frac{-x_k}{a} \right) \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right] - a \sum_{k=1}^N \left[1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right] \left[1 - \frac{x_k}{a} \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right] = 0 \quad (5.27)$$

Bu ifadeler sonrasında değişken değiştirme yaparak aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$$P_1 = \sum_{k=1}^N y_k \left[1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right] \quad (5.28)$$

$$P_2 = \sum_{k=1}^N y_k \left[1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right]^2 \quad (5.29)$$

$$P_3 = \sum_{k=1}^N x_k y_k \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \quad (5.30)$$

ve

$$P_4 = \sum_{k=1}^N x_k \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \left[1 - \exp \left(-\frac{x_k}{a} \right) \right] \quad (5.31)$$

Bu işaretlemeler göz önüne alınarak yukarıdaki denklemler yeniden düzenlenir ve (5.32)'deki geçişi denklem elde edilir.

$$P_1 + P_4 - nP_2 - \frac{1}{a}P_3 = 0 \quad (5.32)$$

Görüldüğü üzere bu denklem a parametresine göre bir geçiş denklemdir. Dolayısıyla bu denklem analitik olarak çözülemez. Bu denklem iterasyon yöntemi ile çözülebilir. (5.32) denklemini iterasyon yöntemiyle çözmek için (5.33)'deki çözüm algoritması kullanılır.

$$a_i = \frac{\left[P_1(a_{i-1}) + P_4(a_{i-1}) - \frac{P_3(a_{i-1})}{a_{i-1}} \right]}{P_2(a_{i-1})} \quad (5.33)$$

Buradaki a_{i-1} parametresi $(i-1)$ iterasyon sonrası a parametresinin değerini ifade etmektedir. Bu bilgilerle bir çözüm algoritması geliştirilir ve bu algoritma aşağıdaki adımlarla çözülür.

1. x_k, y_k ; $k = 1, 2, \dots, N$ tanımlanması
2. a parametresinin yaklaşık değerinin seçilmesi
3. Yeni parametre olarak bir önceki adımda hesaplanan a değerinin yeni değerinin belirlenmesi
4. a_i parametresinin (5.32) denklemine göre yeni denkleminin belirlenmesi
5. $|a_{k+1} - a_k| \leq \epsilon$ kontrolünün sağlanması (Eğer bu şart sağlanmaz ise 3. adıma dönülür ve işlemler devam ettirilir.)
6. a parametresinin nihai değerinin belirlenmesi

5.1.3. İkinci Dereceden Fonksiyonu Kullanma Yöntemi

İkinci dereceden bir fonksiyonda da veriler uygun hale getirilebilir. Bu durum m . dereceden polinom çözümüyle aynıdır. Bu iki durumda da işlemlerin uygulanması aynıdır. Denklem (5.34)'de gösterilmiştir.

$$y = ax^2 + bx + c \quad (5.34)$$

Denklem (5.12)'de kullanılan bağıntıya denk gelecek şekilde (5.35) denklemine kare alma işlemi yapılır.

$$E = \sum_{k=1}^2 (y_k - y(x_k))^2 = \sum_{k=1}^2 ((c + bx_k + ax_k) - y_k)^2 \quad (5.35)$$

Bu değer (5.13) denklemiyle bağlantılı olarak minimum hataya ulaşmak adına türev eşitliğine bakılır. Bu denklem (5.36) denklemiyle gösterilmiştir.

$$\frac{dE}{da_2} = \sum_{k=1}^2 2x_k^2 (c + bx_k + ax_k^2 - y_k) = 0 \quad (5.36)$$

Böylelikle çizgisel denklem elde edilir. Buna bağlı olarak problemin çözümü yapılır.

$$c \sum_{k=1}^2 x_k^0 + b \sum_{k=1}^2 x_k^1 + a \sum_{k=1}^2 x_k^2 = 0 \quad (5.37)$$

5.1.4. Hiperbolik Bir Fonksiyonu Kullanma Yöntemi

Hiperbolik fonksiyonun denklem (5.38)'deki gibi olduğunu varsayalım.

$$y = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \quad (5.38)$$

Bu denklemde de minimize etme işlemi kullanılacağı için denklemin karesi alınacaktır. Bu durumda oluşacak denklem;

$$U(a) = \sum_{k=1}^N \left[y_k - a \sinh\left(\frac{x_k}{a}\right) \right]^2 \quad (5.39)$$

Burada $U(a)$ fonksiyonu tek bir a parametresine bağlıdır. Bu nedenle minimum değer için yeter ve gerek koşul (5.14) ve (5.26) denklemleriyle aynı mantıktadır.

$$\frac{dU(a)}{dt} = -2 \sum_{k=1}^N \left[y_k - a \sinh \left(\frac{x_k}{a} \right) \right] \left[\frac{x_k}{a} \cosh \left(\frac{x_k}{a} \right) - \sinh \left(\frac{x_k}{a} \right) \right] = 0 \quad (5.40)$$

Türev işlemi yapıldıktan sonra gerekli işlem ve dönüşümlerle (5.41) denklemi oluşacaktır.

$$\sum_{k=1}^N y_k \left[\sinh \left(\frac{x_k}{a} \right) - \frac{x_k}{a} \cosh \left(\frac{x_k}{a} \right) \right] \left[\frac{x_k}{a} \cosh \left(\frac{x_k}{a} \right) - \sinh \left(\frac{x_k}{a} \right) \right] = 0 \quad (5.41)$$

Bu ifadeler sonrasında değişken değiştirme yöntemi kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$S_1 = \sum_{k=1}^N y_k \sinh \left(\frac{x_k}{a} \right) \quad (5.42)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^N \sinh^2 \left(\frac{x_k}{a} \right) \quad (5.43)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^N x_k y_k \cosh \left(\frac{x_k}{a} \right) \quad (5.44)$$

ve

$$S_4 = \sum_{k=1}^N x_k \sinh \left(\frac{x_k}{a} \right) \cosh \left(\frac{x_k}{a} \right) \quad (5.45)$$

Bu işaretlemeler göz önüne alınarak yukarıdaki denklemler yeniden düzenlenir ve (5.46)'deki transendental denklem elde edilir.

$$S_1 + S_4 - aS_2 - \frac{1}{a}P_3 = 0 \quad (5.46)$$

Hiperbolik denklem için oluşan çözüm geçişi durumdadır. Dolayısıyla bu denklem sistemi analitik olarak çözülemez. (5.46)'daki denklem bu nedenle iterasyon yöntemi ile çözülebilir. Yeni oluşan denklem (5.47) ile gösterilmiştir.

$$a_i = \frac{[S_1(a_{i-1}) + S_4(a_{i-1}) - \frac{S_3(a_{i-1})}{a_{i-1}}]}{S_2(a_{i-1})} \quad (5.47)$$

5.2. Deneyin Sonuçlarından Yaklaşım (Aproksimasyon) Fonksiyonu Belirleme Yöntemi

Şimdi ise elektronik devrenin doğrusal olmayan bir elemanı için deneysel olarak ölçülen akım-gerilim karakteristiği verilerinden hareketle, bu eleman için akım ve gerilim arasındaki analitik ilişkiyi belirleyen bir aproksimasyon fonksiyonu belirleyelim. Bu amaçla, aşağıda iki tip transistör ve varistör için deneysel olarak ölçülmüş akım-gerilim karakteristikleri ele alınmıştır.

Bu durumda problemin çözümü aşağıda belirtilen iki adımdan oluşmaktadır.

1. Deneysel olarak belirlenmiş akım-gerilim karakteristiğini temsil edecek ve bilinmeyen parametre (veya parametreler) içeren yaklaşım fonksiyonunun genel biçiminin seçimi;
2. Seçilen aproksimasyon fonksiyonu ifadesinin içerdiği bilinmeyen parametrelerin sayısal değerlerinin belirlenmesi.

Genelde deneysel sonuçların matematiksel olarak işlenmesi için yaygın olarak en küçük kareler yöntemi (LSM) kullanılır (Alisoy, 1995). Bu yöntemin özü aşağıdaki gibidir. İlk olarak, değerleri hala bilinmeyen olarak kabul edilen bazı parametrelere bağlı olabilecek aproksimasyon fonksiyonunun genel biçimi seçilir. Daha sonra, aproksimasyon fonksiyonun grafiğinin deneysel verilere karşılık düşen noktalara çok yakın geçmesi koşulundan hareketle bu bilinmeyen parametrelerin değerleri belirlenir.

a, b, c,.. bilinmeyen bir dizi parametreler olmak üzere, aproksimasyon fonksiyonunun aşağıdaki biçimde verildiğini varsayalım.

$$y = f(a, b, c, \dots) \quad (5.48)$$

Eğer bu fonksiyonun içerdiği a, b, c,.. parametrelerin değerleri belirlenirse o halde ihtiyaç duyulan aproksimasyon fonksiyonu belirlenmiş olur. En küçük kareler yöntemine istinaden, aproksimasyon fonksiyonunun uygun değerleri ve deneysel olarak ölçülen değerler arasındaki farkın karelerinin toplamının minimize edilmesi gerekir.

$$U(a, b, c) = \sum_{k=1}^n [y_k - f(x_k, a, b, c, \dots)]^2 \rightarrow \min \quad (5.49)$$

Bu yöntemin ayırt edici bir özelliği, aproksimasyon fonksiyonunun değerleri ile deneysel veriler arasındaki farkları belirleyen sayısal verilerin işaretlerinin bu farkların toplamını etkilememesidir.

Bilindiği üzere (5.49) eşitliği ile tanımlanan ifadenin koşulsuz ekstremumu için gereklilik koşulu bu fonksiyonun ilgili parametreler cinsinden birinci mertebe kısmi türevlerinin sıfıra eşitlenmesiyle belirlenir (Alisoy, 2019).

$$\frac{dU}{da} = 0 \quad , \quad \frac{dU}{db} = 0 \quad , \quad \frac{dU}{dc} = 0; \dots \quad (5.50)$$

Sonraki aşamada ise (5.50) hareketle a, b, c,... bilinmeyen parametrelerin belirlenmesine olanak sağlayan bir cebirsel veya transandantal denklemler sistemi elde edilir. Genel olarak, bu denklemlerin analitik çözümleri yoktur. Bu tür denklemleri çözmek için mevcut sayısal yöntemleri kullanmak gerekir. Sonuç olarak burada iki özel durum ele alınacaktır.

Birinci Özel Durum : Deney sonuçlarının m. dereceden bir polinomla aproksimasyonu.

Eğer m. dereceden polinomlar aproksimasyon (yaklaşıklık) fonksiyonu olarak kullanılırsa, problemin çözümü $m + 1$ lineer cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenir. Yeterince büyük bir m değeri için, çok sayıda bilinmeyenli bir denklem sistemi çözümlenmelidir.

Aşağıdaki biçimde verilen m . dereceden polinomu, aproksimasyon fonksiyonu olarak seçelim.

$$y = b_1x^m + b_2x^{m-1} + \dots + b_mx + b_{m+1} \quad (5.51)$$

Bu ifade de $b_{(i)}$, $(i = 1, 2, \dots, m + 1)$ polinomun bilinmeyen katsayılarıdır.

Polinomun (5.51) bilinmeyen katsayılarını belirlemek için en küçük kareler yöntemini (LSM) kullanırsak, o halde;

$$U = \sum_{k=1}^n [b_1x^m + b_2x^{m-1} + \dots + b_mx + b_{m+1}]^2 \quad (5.52)$$

$U = U(b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, b_{m+1})$ fonksiyonu, $m + 1$ şeklinde bir parametreye sahip fonksiyondur.

Yukarıda belirtildiği gibi, (5.52) fonksiyonunun minimumu için gereklilik koşulu aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$\frac{dU}{db_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, m + 1 \quad (5.53)$$

(5.53) ifadesi daha açık biçimde ifade edilirse aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{dU}{db_i} = -2 \sum_{k=1}^n \left[y_k - \sum_{i=1}^{m+1} b_i x_k^{m+1-i} \right] x_k^{m+1-i} = 0 \quad (5.54)$$

Bu formülde $i = 1, 2, \dots, m + 1$ 'dir. Bu nedenle, denklem sayısı $m + 1$ 'e eşittir. Böylece, $m + 1$ adet bilinmeyen b_1, b_2, \dots, b_{m+1} parametrelerine sahip lineer cebirsel denklemler sistemi elde ederiz.

$$\sum_{j=1}^{m+1} a_{ij} b_j = a_{i \quad m+2} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m + 1 \quad (5.55)$$

Bu cebirsel denklem sisteminin katsayıları ve serbest terimleri aşağıdaki formüller kullanılarak belirlenir.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n x_k^{2m+2-i-j}, \quad a_{i \quad m+2} = \sum_{k=1}^n y_k x_k^{m+1-i}, \quad a_{m+1 \quad m+i} = n \quad (5.56)$$

Burada $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$, $j = 1, 2, 3, \dots, m+1$ (5.55) ifadesi ile tanımladığımız denklem sistemi aşağıdaki genişletilmiş biçimde yazılabilir.

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + \dots + a_{1,m+1}b_{m+1} = a_{1,m+2} \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 + \dots + a_{2,m+1}b_{m+1} = a_{2,m+2} \\ \vdots \\ a_{m+1,1}b_1 + a_{m+1,2}b_2 + a_{m+1,3}b_3 + \dots + a_{m+1,m+1}b_{m+1} = a_{m+1,m+2} \end{cases} \quad (5.57)$$

Hatırlayalım ki (5.57) ifadesi ile belirlenen lineer denklemler sisteminin çözümünün olması için, bu denklem sisteminin temel determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. Lineer cebirsel denklem sistemlerini çözmek için çeşitli yöntemler olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte, çok sayıda bilinmeyenli denklem sistemlerini çözmek, belirli hesaplama zorlukları oluşmaktadır. (3.57) ifadesi ile belirlenen lineer denklemler sistemini bilgisayar ortamında çözmek için Gauss- Jordan yöntemi daha yaygın olarak kullanılmaktadır (Alisoy, 1988).

Basitlik için, daha sonraki hesaplamalarda, aproksimasyon fonksiyonu olarak beşinci dereceden bir polinom kullanılmıştır.

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 + a_{14}b_4 + a_{15}b_5 + a_{16}b_6 = a_{17} \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 + a_{24}b_4 + a_{25}b_5 + a_{26}b_6 = a_{27} \\ \vdots \\ a_{61}b_1 + a_{62}b_2 + a_{63}b_3 + a_{64}b_4 + a_{65}b_5 + a_{66}b_6 = a_{67} \end{cases} \quad (5.58)$$

Bu sistem altı bilinmeyenli altı denklemden oluşur. Bu sistemin denklemlerinin katsayıları ve serbest terimleri aşağıdaki formüllerle belirlenir.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = \sum_{k=1}^n x_k^{10} \\ a_{12} = a_{21} \sum_{k=1}^n x_k^9 \\ a_{13} = a_{31} = a_{22} \sum_{k=1}^n x_k^8 \\ a_{14} = a_{23} = a_{32} = a_{41} \sum_{k=1}^n x_k^7 \\ a_{15} = a_{51} = a_{25} = a_{33} = a_{42} \sum_{k=1}^n x_k^6 \\ a_{16} = a_{61} = a_{25} = a_{34} = a_{43} = a_{52} \sum_{k=1}^n x_k^5 \\ a_{26} = a_{35} = a_{44} = a_{53} = a_{62} \sum_{k=1}^n x_k^4 \\ a_{36} = a_{45} = a_{54} = a_{63} \sum_{k=1}^n x_k^3 \\ a_{46} = a_{55} = a_{64} = \sum_{k=1}^n x_k^2 \\ a_{56} = a_{65} = \sum_{k=1}^n x_k^1 \\ a_{66} = n \end{array} \right. \quad (5.59)$$

(5.58) ifadesiyle tanımlanan lineer denklem sisteminin çözümü Gauss–Jordan yöntemiyle gerçekleştirilmiştir.

İkinci Özel Durum : Deney sonuçlarının geçici (transandant) fonksiyonla yaklaşımı (aproksimasyonu).

Transandantal fonksiyonlar hiperbolik sinüs veya üstel fonksiyon olarak seçilirse o halde, transandantal denklemin çözülmesi gerekir. Tez çalışmasının bu bölümünde, transandantal denklemleri çözmek için iterasyon yöntemi kullanılmıştır. İterasyon yönteminin seçimi, her şeyden önce, aşağıdaki koşullarla bağlantılıdır: ilk olarak, iterasyon yöntemi, bir denklemin çözümünün belirli bir doğrulukla belirlenmesine izin verir ve çoğu durumda bu kararlı bir yöntemdir; ikincisi, bu çözüm yöntemi için gerekli algoritmanın programlanması kolaydır.

Bu çalışmada, daha sonraki hesaplamalarda, bu tür transandant denklemleri çözmek için iterasyon yöntemi kullanılmıştır.

Burada aşağıdaki iki özel durum ele alınmıştır.

1. Deneysel verilerin aproksimasyonu için üstel fonksiyonun kullanılması durumu.
2. Deneysel verilerin aproksimasyonu için hiperbolik fonksiyonun kullanılması durumu.

Devre elemanlarının akım-gerilim özelliklerini tanımlamak için üstel fonksiyonun veya hiperbolik sinüs fonksiyonunun bir aproksimasyon fonksiyonu olarak

kullanılması, sırasıyla (5.32) ve (5.46) ifadeleri ile tanımlanan transandant denklemlerin çözümünü gerektirmektedir. Görüldüğü üzere bu denklemler aynı türdendir. Bu nedenle, (5.47) eşitliği ile tanımlanan tekrarlayan (recurrent) ifadenin çözüm algoritması, formül (5.33) kullanılarak önceki problemi çözme algoritmasıyla aynı olacaktır. Burada sadece P_1, P_2, P_3, P_4 fonksiyonları yerine S_1, S_2, S_3, S_4 fonksiyonları kullanılacaktır.

5.3. Alan Etkili Transistörün Akım-Gerilim Özgeğrisinin Yaklaşımının İncelenmesi

Burada doğrusal olmayan bir elemanın akım-gerilim özelliklerini belirlemek için alan etkili bir transistör dikkate alınmıştır. Bu transistör deneysel olarak ölçülen akım-gerilim verileri ise aşağıdaki Çizelge 5.1'in ilk iki satırında gösterilmiştir. Ayrıca bu çizelgede deneysel olarak ölçülen verilerin aproksimasyonunu en küçük kareler yöntemiyle bilinmeyen parametrelerini bularak belirlemeye olanak sağlayan fonksiyonlara göre hesaplanan değerler de verilmiştir. Bilinmeyen parametre değerleri; üstel fonksiyon için $a = 0.4187$, ikinci dereceden fonksiyon için $a = -0.0081$, $b = 0.111$, $c = 0.151$ ve m. dereceden fonksiyon için $a = 0.046$, $b = -0.086$, $c = 0.508$, $d = -1.148$, $e = 1.070$, $f = 0.005$ şeklindedir.

Çizelge 5.1. Bir Alan Etkili Transistörün I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar

$V_k, (V)$	$I_k, (mA)$	$I = a(1 - \exp(-\frac{V}{a}))$	$I = aV^2 + bV + c$	$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + fV + e$
0	0	0	0.151	0.005
0.1	0.115	0.889	0.162	0.101
0.25	0.195	0.188	0.179	0.208
0.5	0.317	0.291	0.205	0.311
1	0.352	0.380	0.254	0.352
2	0.377	0.415	0.340	0.376
5	0.422	0.418	0.501	0.421
10	0.462	0.419	0.445	0.438

(5.32) ifadesi ile tanımlanan transandantal denklemin çözümü, Çizelge 5.1'in ilk iki satırında verilen deneysel veriler kullanılarak iterasyon yöntemi ile gerçekleştir-

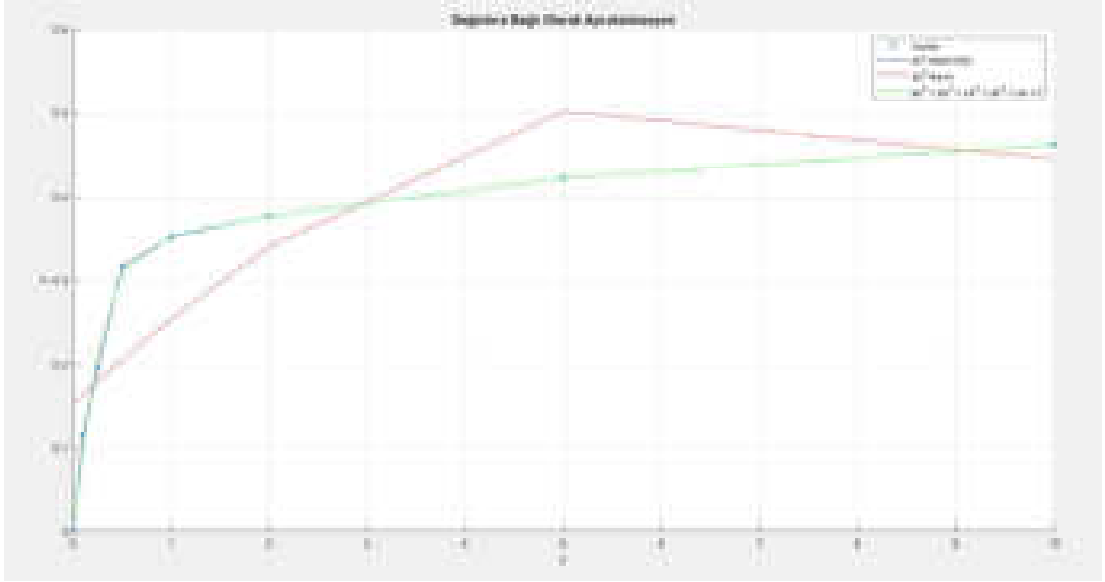
ilmiştir. Bu işlemler sonucu a - parametresinin değeri belirlenmiştir. Daha sonra ise, belirlenmiş a parametresinin dikkate alınmasıyla $I = a(1 - \exp(-V/a))$ ifadesinden hareketle incelenen durum için akım-gerilim öz eğrisi belirlenmiştir. Benzer işlemlerle incelenen durumda alan etkili transistörün akım-gerilim karakteristiğini aproksime etmek amacıyla seçilen 2. derece ve 5. derece polinom ifadelerinin parametreleri en küçük kareler yöntemine istinaden oluşturulan lineer cebrisel denklemler sistemine Gauss-Jordan yönteminin uygulanması sonucu uygun olarak aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

$$I = a \left(1 - e^{\left(-\frac{V}{a}\right)} \right) \quad (5.60)$$

$$I = aV^2 + bV + c \quad (5.61)$$

$$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + eV + f \quad (5.62)$$

Belirlenmiş bu parametre değerlerinin dikkate alınmasıyla hesaplanan akım-gerilim karakteristiği Çizelge 5.1’de bu ifadelere uygun satırda verilmiştir.



Şekil 5.1. Alan Etkili Transistörün I-V Karakteristiği (Deneysel Verilerin Üstel Fonksiyon, İkinci Dereceden Fonksiyon ve m. Dereceden Fonksiyona Göre Hesaplanan Değerleri)

Böylece alan etkili bir transistör için deneysel olarak ölçülen akım-gerilim öz eğrisi ve bu akım-gerilim öz eğrisini aproksime eden fonksiyonlara göre belirlenmiş

grafikler Şekil 5.1’de gösterilmiştir. Çeşitli aproksimasyon fonksiyonlarından hareketle hesaplanan akım-gerilim değerlerin, deneysel olarak ölçülen verilerle oldukça iyi bir uyum gösterdiği belirlenmiştir.

5.4. Bipolar Transistörün Akım-Gerilim Özgeğrisinin Yaklaşımının İncelenmesi

Benzer algoritma kullanılarak bir bipolar transistör için deneysel olarak ölçülen ve aproksimasyon fonksiyonları kullanılarak belirlenmiş akım-gerilim karakteristiğinin sonuçları Çizelge 5.2’ de verilmiştir. Bu durumda aproksimasyon fonksiyonlarının ihtiva ettikleri parametrelerin belirlenmiş değerleri; üstel fonksiyon için $a = 0.8701$, ikinci dereceden fonksiyon için $a = -0.012$, $b = 0.180$, $c = 0.282$ ve m. dereceden fonksiyon için $a = 0.004$, $b = -0.011$, $c = 0.112$, $d = -0.510$, $e = 1.044$, $f = 0.013$ şeklindedir.

$$I = a \left(1 - e^{\left(-\frac{V}{a}\right)} \right) \quad (5.63)$$

$$I = aV^2 + bV + c \quad (5.64)$$

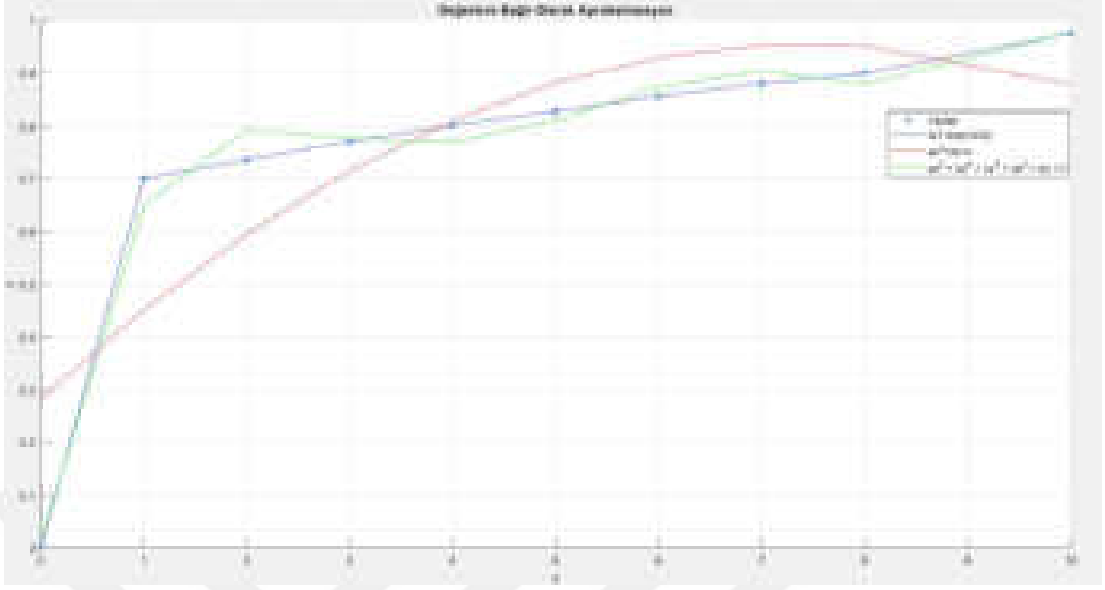
$$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + eV + f \quad (5.65)$$

Bu denklemlere bağlı olarak Çizelge 5.2 oluşturulmuştur.

Çizelge 5.2. Bipolar Transistörün I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar

$V_k, (V)$	$I_k, (mA)$	$I = a \left(1 - \exp\left(-\frac{V}{a}\right) \right)$	$I = aV^2 + bV + c$	$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + eV + f$
0	0	0	0.282	0.013
1	0.700	0.594	0.450	0.652
2	0.736	0.782	0.594	0.909
3	0.771	0.842	0.714	1.660
4	0.802	0.861	0.810	4.477
5	0.828	0.867	0.882	12.108
6	0.856	0.869	0.930	28.954
7	0.880	0.869	0.954	61.564
8	0.900	0.870	0.954	117.085
10	0.975	0.871	0.882	361.453

Akım-gerilim öz eğrisinin bu değerlere karşılık gelen grafikleri de uygun olarak Şekil 5.2’de gösterilmiştir.



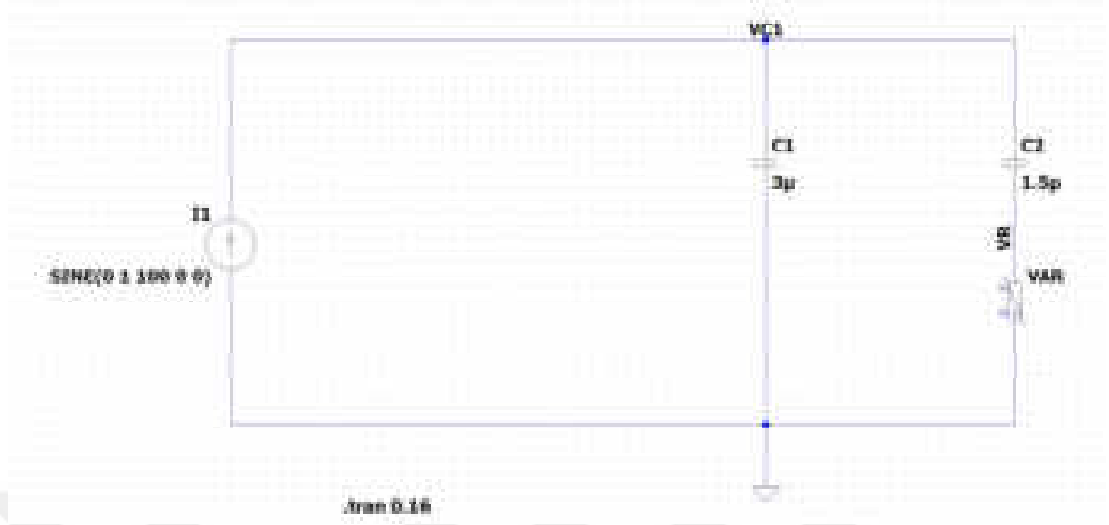
Şekil 5.2. Bipolar Transistörün I-V Karakteristiği (Deneyel Verilerin Üstel Fonksiyon, İkinci Dereceden Fonksiyon ve m. Dereceden Fonksiyona Göre Hesaplanan Değerleri)

5.5. Varistörün Akım-Gerilim Özeğrisinin Yaklaşımının İncelenmesi

Şimdi lineer olmayan bir elemanın (NE) olduğu bir devreyi Şekil 5.3 ele alalım. Bu durumda, lineer olmayan bir eleman olarak bir varistör seçilir. Varistörlerin simetrik akım-voltaj karakteristiğine sahip yarı iletken dirençler olduğu bilinmektedir. Elektronik ekipmanların ve aşırı gerilimlerin stabilize edilmesi ve korunması için kullanılırlar. Varistör gibi doğrusal olmayan bir elemanın bulunduğu bir devreyi incelemek için akım ve voltaj arasında analitik bir ifadenin bilinmesi önem arz etmektedir. Doğrusal olmayan bir eleman da akım ve gerilim arasındaki analitik bağımlılıkları elde ettikten sonra, bunları daha sonraki devre hesaplamalarında kullanabiliriz.

İncelenen durum için doğrusal olmayan (nonlinear) eleman üzerindeki akım ve voltajı ölçmek ve bu ölçümlerin sonuçlarına dayanarak, beşinci dereceden bir polinom şeklinde aproksimasyon fonksiyonu elde etmek gerekir. Bu kapsamda bir deney yapılmıştır. Deneyin amacı, giriş akımı ve gerilimi değiştiğinde çıkış akımı

ve geriliminin değerlerini belirlemektir. Deneyler, Namık Kemal Üniversitesinin Elektronik Devreler laboratuvarında yapılmıştır.



Şekil 5.3. Doğrusal Olmayan Eleman İçeren Devren Şeması



Şekil 5.4. Doğrusal Olmayan Eleman İçeren Devrenin Eşdeğer Şeması

Giriş ve çıkış (varistör olarak) akımları ve gerilimleri Şekil 5.4’de gösterildiği gibi ölçüldü. Giriş akımı ve voltajının değerleri ayarlandı ve çıkış parametreleri (akımlar ve voltaj) ölçüldü.

Deneysel sonuçlar Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4 ile verilmiştir. Burada I_1 ve V_1 giriş akımı voltajı; I_2 ve V_2 çıkış akımı ve voltajı ifade etmektedirler. Ayrıca bu çizelgede deneysel olarak ölçülen verilerin aproksimasyonunu en küçük kareler yöntemiyle bilinmeyen parametrelerini bularak belirlemeye olanak sağlayan fonksiyonlara göre hesaplanan değerler de verilmiştir. Giriş için bilinmeyen parametre değerleri; üstel fonksiyon için $a = 0.8701$, ikinci dereceden fonksiyon için $a = -0.0870$, $b = 0.612$, $c = 0.530$ ve m. dereceden fonksiyon için $a = -0.009$, $b = 0.385$, $c = -5.504$, $d = 33.169$, $e = -68.843$, $f = 0.022$ şeklindedir. Çıkış için bilinmeyen parametre değerleri; üstel fonksiyon için $a = 0.8701$, ikinci dereceden fonksiyon için $a = 0.008$, $b = 1.088$, $c = -1.688$ ve m. dereceden fonksiyon için $a = -2.410^5$, $b = 0.001$, $c = -0.051$, $d = 0.596$, $e = -1.402$, $f = 0.171$ şeklindedir.

Çizelge 5.3. Varistörün Giriş Değerlerine Bağlı Olarak I - V Karakteristiğini ve Aproksimasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar

$V_k, (V)$	$I_k, (mA)$	$I = a(1 - \exp(-\frac{V}{a}))$	$I = aV^2 + bV + c$	$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + fV + e$
0	0	0	0.530	0.022
4.6	2.5	0.865	5.186	3.308
5	7.5	0.867	5.765	9.532
7	14.45	0.869	9.077	28.652
8.85	18	0.870	12.760	46.663
10	2.5	0.871	15.350	74.492
12.6	25	0.870	22.053	234.047
14	27	0.871	26.150	384.112

Çizelge 5.4. Varistörün Çıkış Değerlerine Bağlı Olarak I - V Karakteristiğini ve Aproximasyon Fonksiyonlarının Değerlerini Belirlemek için Deneysel Sonuçlar

$V_k, (V)$	$I_k, (mA)$	$I = a(1 - \exp(-\frac{V}{a}))$	$I = aV^2 + bV + c$	$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + fV + e$
0	0	0	-1.688	0.171
2	0.07	0.782	0.520	-0.642
4	0.380	0.861	2.792	1.066
6	4.5	0.869	5.128	3.308
8	8.02	0.870	7.528	4.296
10	11	0.870	9.992	2.351
12	13.02	0.870	12.520	-4.192
14	15.61	0.870	15.122	-17.076
16	18	0.870	17.768	-38.210
18	20.2	0.870	20.488	-69.766
20	23	0.870	23.272	-114.269

$$I = a \left(1 - e^{-\frac{V}{a}} \right) \quad (5.66)$$

$$I = aV^2 + bV + c \quad (5.67)$$

$$I = aV^5 + bV^4 + cV^3 + dV^2 + eV + f \quad (5.68)$$

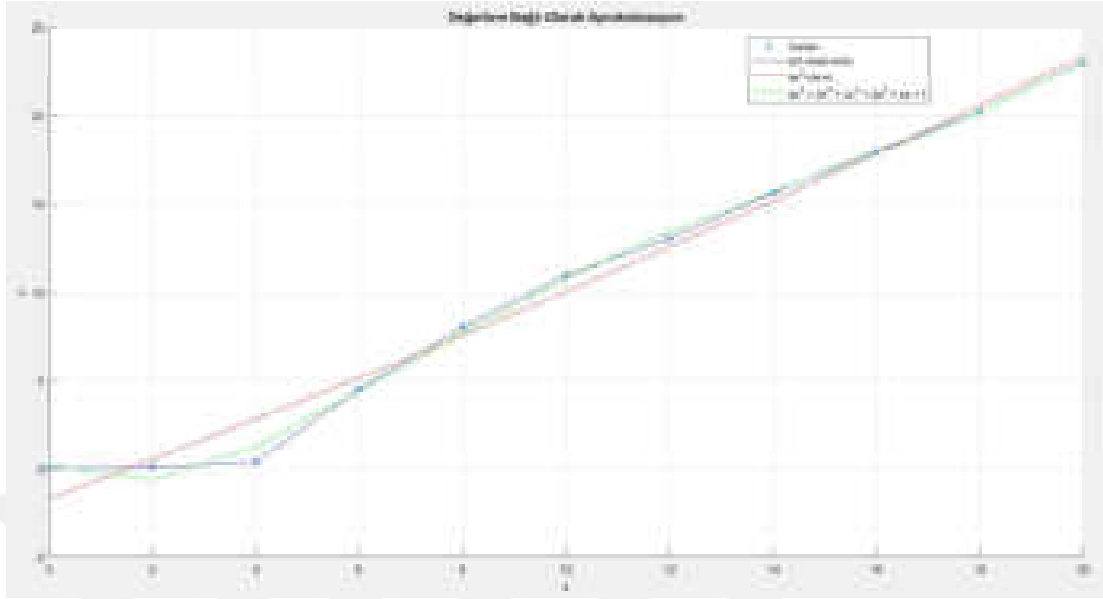
Deneysel sonuçların aproksimasyonu deneysel sonuçlara yaklaşmak için bir argüman olarak voltaj V_2 ve bir fonksiyon olarak akım I_2 alındı. Bu durumda kolaylık için aşağıdaki değişken değiştirmesi yapılmıştır.

$$x = V_2, \quad y = I_2 \quad (5.69)$$

Deney verilerinden hareketle en küçük kareler yöntemi yardımıyla aproksimasyon fonksiyonu için aşağıda verilen beşinci dereceden bir polinom benimsenmiştir.

$$y = 0.00005x^5 + 0.00367x^4 + 0.09354x^3 + 1.05314x^2 + 3.51466x + 2.96155 \quad (5.70)$$

(5.70) fonksiyonunun grafiği ve varistörün için deneysel ölçülen deneysel veriler Şekil 5.5’de gösterilmiştir.



Şekil 5.5. Varistörün I-V Karakteristiği (Deneysel Verilerin Üstel Fonksiyon, İkinci Dereceden Fonksiyon ve m. Dereceden Fonksiyona Göre Hesaplanan Değerleri)

6. DOĞRUSAL OLMAYAN ELEKTRİK DEVRELERİNİN NÜMERİK ANALİZİ

Lineer elektronik devrelerin analizinin aksine, lineer olmayan devrelerin analizinin belirli zorlukları ihtiva ettikleri bilinmektedir. Zaman domeninde incelenen lineer devreler için klasik analiz yöntemi veya Laplace integral dönüşüm tabanlı operasyonel yöntemlerin uygulandığı bilinmektedir. Ancak, bu tür yöntemler doğrusal olmayan devrelere uygulanamaz. Çünkü bu tür devrelerdeki süreçlerin matematiksel olarak modellenmesi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne yol açar. Bu bağlamda lineer olmayan denklemlerle ilgili problemlerin çözümü ve bunun sonucunda lineer olmayan devrelerin analizi için çeşitli sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Tezin bu bölümünde, doğrusal olmayan bir elektronik devre örneğinde, analiz probleminin sayısal çözümü ele alınmıştır.

Pratikte, genellikle akım-voltaj özelliklerinin doğrusal olmaması, yani akımın elektronik devre elemanlarının voltajına bağımlılığının belirlenmesi ile ilgili bir problemin ortaya çıktığı bilinmektedir. "Reaksiyonların ve etkilerin doğrusal olmayan elemanlarla ilişkilendirildiği" herhangi bir elektronik devrenin doğrusal olmayan devre olarak adlandırıldığı bilinmektedir (İonkin, 1976).

6.1. Doğrusal Olmayan Bir Elektronik Devrenin Analiz Probleminin Tanımlanması

Akım ve gerilim arasındaki ilişkinin analitik açıklaması için kullanılan çeşitli aproksimasyon fonksiyonlarının analizi gerçekleştirildikten sonra, doğrusal olmayan bir eleman içeren bir elektronik devrenin analizi probleminin ele alınması tavsiye edilir. Bunun için karmaşık bir devre düşünmeye gerek yoktur, doğrusal olmayan bir elemana sahip bir devre düşünmek yeterlidir.

Bu durumda doğrusal bir eleman yerine doğrusal olmayan bir eleman (NE) düşünülür. Doğrusal olmayan elemana (NE) ek olarak, devre iki kapasitör C_1 ve C_2 'nin yanı sıra bir akım kaynağı $i(t)$ içerir. Akım değeri t zamanına bağlıdır. $t = 0$ başlangıç anında devrenin akım kaynağına bağlı olduğu varsayılır. Bu devrede meydana gelen

geçici sürecin belirlenmesi gerekmektedir. Birkaç lineer olmayan elemana sahip bir elektronik devredeki daha genel geçici problem de benzer şekilde düşünülebilir.

6.2. Doğrusal Olmayan Bir Elektronik Devrenin Matematiksel Modeli

Kirchhoff yasalarına dayalı bir devrenin durum denklemlerini oluşturma tekniği, doğrusal dirençli elemanlar durumunda olduğu gibi kalır. Bununla birlikte, doğrusal olmayan bir denklem içeren sistemi çözme süreci önemli ölçüde karmaşık olabilir. Bu tür durumlarda sayısal çözüm yöntemlerinden yararlanmamız gerekir.

Kondansatörler için akım ve voltajın bağımlılıklarını belirleyen denklemler aşağıdaki formüller şeklinde yazılır:

1. Birinci Kapasitör için; $i_1(t) = C_1 \frac{dU_1}{d\tau}$
2. İkinci Kapasitör için; $i_2(t) = C_2 \frac{dU_2}{d\tau}$

Doğrusal olmayan bir elemanın (NE) I-V karakteristiğini aproksime etmek için aşağıdaki ifadenin doyurulduğunu varsayalım.

$$i_{NE} = \frac{U_0}{R} f(x) \quad (6.1)$$

Burada $x = \frac{U_{NE}}{U_0}$ - boyutsuz voltajı ve $f(x)$ ise doğrusal olmayan bir elemanda akım ve voltaj arasındaki ilişkiyi tanımlayan fonksiyonu temsil etmektedir. Bu tezin ilk bölümünde ele alınan problemde farklı olarak, bu problemde sabit R direncine sahip lineer bir eleman yerine lineer olmayan bir eleman kullanılmaktadır. Ayrıca, doğrusal olmayan eleman üzerindeki voltajın (6.2) denklemi gibi olduğunu varsayalım.

$$U_{NE} = xU_0 \quad (6.2)$$

Eğer $i_{NE} = i_2$ alınırsa, o zaman ele alınan eşdeğer devre için aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\begin{cases} i_2 = C_2 \frac{dU_2}{dt} & , & i_1 = C_1 \frac{dU_1}{dt} \\ i(t) = i_1 + i_2 & , & U_{NE} = U_1 - U_2 \\ i_2 = \frac{U_0}{R} f(x) \end{cases} \quad (6.3)$$

Bu beş denklem sisteminde $i_1, i_2, U_1, U_2, U_{NE}$ belirlenmesi gereken niceliklerdir. Belirtildiği gibi, birçok fiziksel problemin çözümüyle ilgili bir bilgisayarda hesaplamalar yapılırken, boyutsuz parametrelerin kullanılması tercih edilir. Boyutsuz değişkenlerdeki problemleri çözmeye yönelik bu yaklaşım, genellikle fizikte, mekanikte ve boyutları olan değişkenlerle uğraşılması gereken diğer bilim alanlarında kullanılır. İncelenen durumda aşağıdaki değişken değişikliği gerçekleştirilmiştir.

$$i_2 = y_2 \frac{U_0}{R}, \quad i = z \frac{U_0}{R}, \quad i_1 = y_1 \frac{U_0}{R}, \quad x_1 = \frac{U_1}{U_0}, \quad x_2 = \frac{U_2}{U_0}, \quad x = \frac{U_{NE}}{U_0}, \quad t = \frac{\tau}{T} \quad (6.4)$$

Genellikle parametrelerin ortalama veya en büyük değerleri karakteristik değerler olarak alınır. Bu, ele alınan problemin türüne bağlıdır. Burada x, x_1, x_2, y_1, y_2, t boyutsuz nicelikleri ifade etmektedir. Bu değişken ikamelerini kullanarak, belirlenmesi istenen büyüklükler için denklem sisteminden boyutsuz değişkenlerde bir denklem sistemi elde edilebilir. Bu sistemin bir parçası olarak, formül sayısını dörde indirmemizi sağlayan basit bir formül vardır.

$$U_{NE} = U_1 - U_2 \quad (6.5)$$

U_1 ve U_2 bulunursa o halde, U_{NE} kolayca belirlenir. Bu nedenle, dört bilinmeyen $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ fonksiyonları için beş denklem yerine aşağıdaki dört denklem sistemini çözmek yeterlidir:

$$y_2 = \alpha_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad y_1 + y_2 = z(t), \quad y_2 = f(x), \quad x = x_1 - x_2 \quad (6.6)$$

Burada $x = x_1 - x_2$ formülüne göre, lineer olmayan eleman üzerindeki gerilimin boyutsuz değeri $U_{NE} = xU_0$ olarak belirlenir. Ayrıca diferansiyel denklemlerde yer alan $\alpha_1 = \frac{RC_1}{T}$ ve $\alpha_2 = \frac{RC_2}{T}$ sabitleri de birer boyutsuz niceliklerdir.

Bu denklemler çözümlerse boyutsuz x_1, x_2, y_1, y_2 parametreleri belirlenir. Bu değişkenlerin boyutsal değerlerini belirlemek için elde edilen değerleri karakteristik değerlerle çarpmak gerekir.

$$U_1 = U_0 x_1, \quad U_2 = U_0 x_2, \quad U_{NE} = x U_0, \quad i_1 = \frac{U_0}{R} y_1, \quad i_2 = \frac{U_0}{R} y_2 \quad (6.7)$$

y_1 ve y_2 değişkenleri elimine edildikten sonra x, x_1, x_2 değişkenleri için bir denklem sistemi elde edilir. Böylece $x(t), x_1(t), x_2(t)$ bilinmeyen fonksiyonları için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} f(x) + \frac{1}{\alpha_1} z(t) \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\alpha_1} [z(t) - f(x)] \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{\alpha_2} f(x) \end{cases} \quad (6.8)$$

Ancak sistemin ilk denklemini çözümlerse ve daha sonra $x(t)$ fonksiyonunun değerleri belirlendikten sonra $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ parametrelerini içeren denklemlerin çözülmesi gerekir. Görüldüğü üzere bu sistemin diferansiyel denklemleri, $x(t)$ 'ye göre doğrusal olmayan $f(x)$ fonksiyonunu ihtiva etmektedir. Bu nedenle (6.8) ifadesiyle tanımlanan bu denklem sistemi doğrusal olmayan bir sistem gibi kabul edilmelidir. Lineer problemin yanı sıra, burada ele alınan elektronik devre için, zamanın ilk anında hiçbir akımın (voltajın) olmadığı varsayılır, bu nedenle, bu diferansiyel denklem sistemini çözmek için aşağıdaki başlangıç koşulları kabul edilmiştir.

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x(0) = 0 \quad (6.9)$$

Böylece (6.8) ifadesi ile tanımlanan diferansiyel denklemler sisteminin $t \in [0, 1]$ aralığında (6.9) ifadesiyle tanımlanan başlangıç koşullarını karşılayan $x_1(t), x_2(t), x(t)$ çözümlerinin belirlenmesi incelenen problemin matematiksel olarak tanımlanmasını ifade etmektedir.

Bu üç fonksiyonu birbirine bağlayan bir $x = x_1 - x_2$ formülü olduğu için, başlangıçta (6.8) ifadesi ile tanımlanan sistemin birinci ve ikinci denklemleri

olan iki diferansiyel denklemi çözmek yeterlidir. (6.8) denklem sisteminden, birinci denklemin x_1 , x_2 bilinmeyen değişkenlerini içermediği, dolayısıyla ikinci ve üçüncü denklemlerden bağımsız olarak çözülebileceği sonucu çıkar. Gerilimleri belirleyen boyutsuz $x_1(t), x_2(t), x(t)$ fonksiyonlarının değerleri bulunursa, $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ akımlarını belirleyen boyutsuz nicelikler aşağıdaki formüllerden bulunur.

$$y_2 = f(x), \quad y_1 = z - y_2 \quad (6.10)$$

6.3. Matematiksel Problemin Çözüm Yöntemi

Matematiksel problem (6.8) ve (6.9), türevlere göre çözülen birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy problemidir. Bu tür problemleri çözmek için çok sayıda yöntemin olduğu bilinmektedir (Bessonov, 2016 ve Alisoy, 2017). Ancak burada ele alınan problemi çözmek için denklemlerde doğrusal olmayan bir fonksiyonun varlığından dolayı mevcut kesin analitik yöntemleri kullanmak mümkün değildir. Bu nedenle, bu tür problemlerin çözümü için sayısal çözüm yöntemleri kullanılır.

Bu yöntemler analitik (yaklaşık) ve sayısal yöntemler olmak üzere iki gruba ayrılır. Yaklaşık analitik yöntemler, hantal yaklaşık formüller nedeniyle her zaman istenen sonuçları vermez. Sayısal yöntemler de yaklaşık yöntemlerdir. Bununla birlikte, bilgisayar teknolojisinin kullanılması, yeterince yüksek bir doğruluk ve hesaplama hızı elde etmeyi mümkün kılar. Bu nedenle, bu tür problemlerin çözümü için sayısal yöntemler tercih edilir.

Böyle bir problemi çözmek için çok sayıda sayısal yöntem vardır. Bu yöntemleri uygulama pratiği, çeşitli modifikasyonları olan Runge-Kutta yönteminin kullanılmasının tavsiye edildiğini göstermiştir (Alisoy, 2020).

Bu yönteme göre, ilk olarak bağımsız değişken t 'de adım seçilir: örneğin, $t = 0.0001$ ve ardından $[0, 1]$ doğru parçası, her birinin uzunluğu h olan n parçaya bölünür. Bundan sonra, aşağıdaki tanımlamalar tanıtılır.

$$x_i = x(t_i), \quad x_{1i} = x_1(t_i), \quad x_{2i} = x_2(t_i), \quad t_i = h \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (6.11)$$

$n = \frac{1}{h}$ bağımsız değişkendeki adım sayısını ifade eder.

Eğer $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ fonksiyonların türevleri fark bağıntıları ile değiştirilirse, o halde (6.12) ve (6.13) denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dx_1}{dt} \approx \frac{x_{1i+1} - x_{1i}}{h} \quad (6.12)$$

ve

$$\frac{dx_2}{dt} \approx \frac{x_{2i+1} - x_{2i}}{h} \quad (6.13)$$

(6.8)'deki ikinci ve üçüncü denklemlerden ikame (6.14) ve (6.15) kullanarak, aranan fonksiyonların $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ ayrık değerlerini belirlemek için aşağıdaki tekrarlayan formülleri elde edebiliriz.

$$x_{1i+1} = \frac{h}{\alpha_1} [f(x_i) - z(t_i)] \quad (6.14)$$

ve

$$x_{2i+1} = \frac{h}{\alpha_2} f(x_i) \quad (6.15)$$

Burada $x_i = x(t_i)$, $t = t_i$ 'deki $x(t)$ fonksiyonunun değeridir. (6.9) ifadesi ile tanımlanan başlangıç koşullarından hareketle (6.16) denklemi yazılabilir.

$$t = t_0, \quad x_{10} = 0, \quad x_{20} = 0, \quad x_i = 0 \quad (6.16)$$

Şimdi (6.8) ifadesi ile tanımlanan denklemler sisteminin ilk denklemini, (6.9) ifadesiyle tanımlanan başlangıç koşulu doyuran çözümünün belirlenmesi problemi

ele alalım. Bu denklemi çözmek için, aşağıda hesaplama formülleri verilen dördüncü doğruluk derecesine ait Runge-Kutta yöntemi kullanılır.

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (6.17)$$

Burada ifade de uygun olarak $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

$$k_1 = F(t_i, x_i) \quad (6.18)$$

$$k_2 = F\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (6.19)$$

$$k_3 = F\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (6.20)$$

ve

$$k_4 = F(t_i + h, x_i + hk_3) \quad (6.21)$$

Bu formüllerde, $F(t, x)$ fonksiyonu, (6.8)'deki ilk denklemin sağ tarafıdır. Bu durum aşağıdaki denklemle gösterilmiştir.

$$F(t, x) = \frac{1}{\alpha_1}z(t) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1\alpha_2}f(x) \quad (6.22)$$

Böylece $t_i = ih$ ve $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ değerleri için aranan x, x_1, x_2 fonksiyonların kesikli değerlerini belirlemek için (6.14), (6.15) ve (6.18), (6.19), (6.20), (6.21) formüllerini elde etmiş olduk.

6.4. Problemin Çözüm Algoritması

İncelenen durumda ele alınan matematiksel problemi çözmek için ihtiyaç duyulacak algoritmayı geliştirmek için aşağıdaki tanımlamalar kullanılmıştır.

$$x_i = r_1, \quad x_{i+1} = r, \quad x_{1i} = p_1, \quad x_{1i+1} = p, \quad x_{2i} = q_1, \quad x_{2i+1} = q \quad (6.23)$$

Daha sonra bu işaretlemelerin dikkate alınmasıyla (6.12), (6.13), (6.17) ifadeleri yeniden düzenlenirse, o halde uygun olarak aşağıdaki denklemler bulunur.

$$p = p_1 + h \left(\frac{f(r_1) - z(t_i)}{\alpha_1} \right) \quad (6.24)$$

$$q = q_1 + h \frac{f(r_1)}{\alpha_2} \quad (6.25)$$

$$r = r_1 + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (6.26)$$

ve

$$k_1 = F(t_i, r_1) \quad (6.27)$$

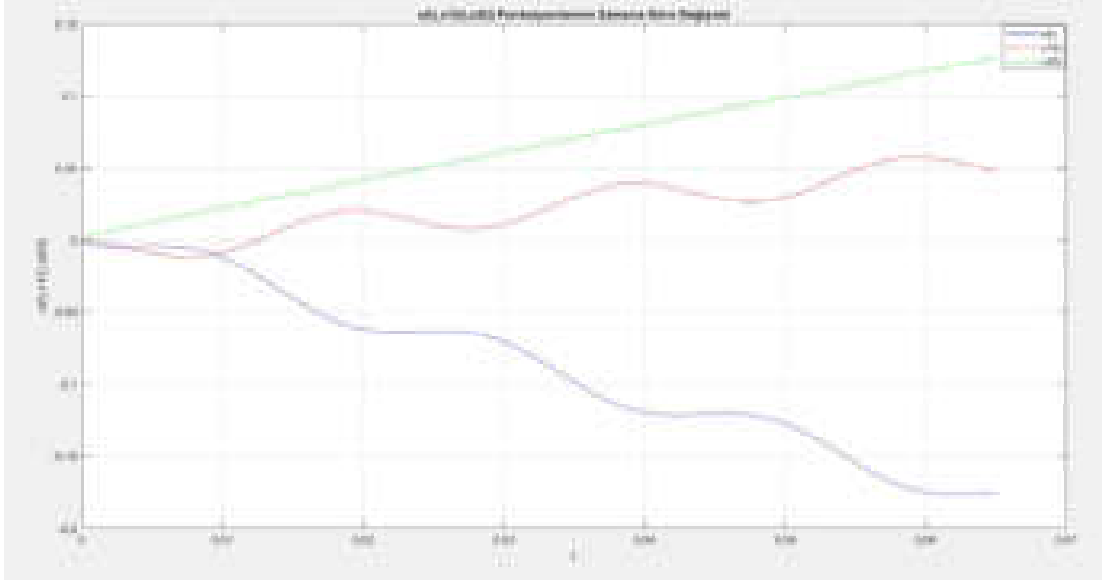
$$k_2 = F\left(t_i + \frac{h}{2}, r_1 + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (6.28)$$

$$k_3 = F\left(t_i + \frac{h}{2}, r_1 + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (6.29)$$

$$k_4 = F(t_i + h, r_1 + hk_3) \quad (6.30)$$

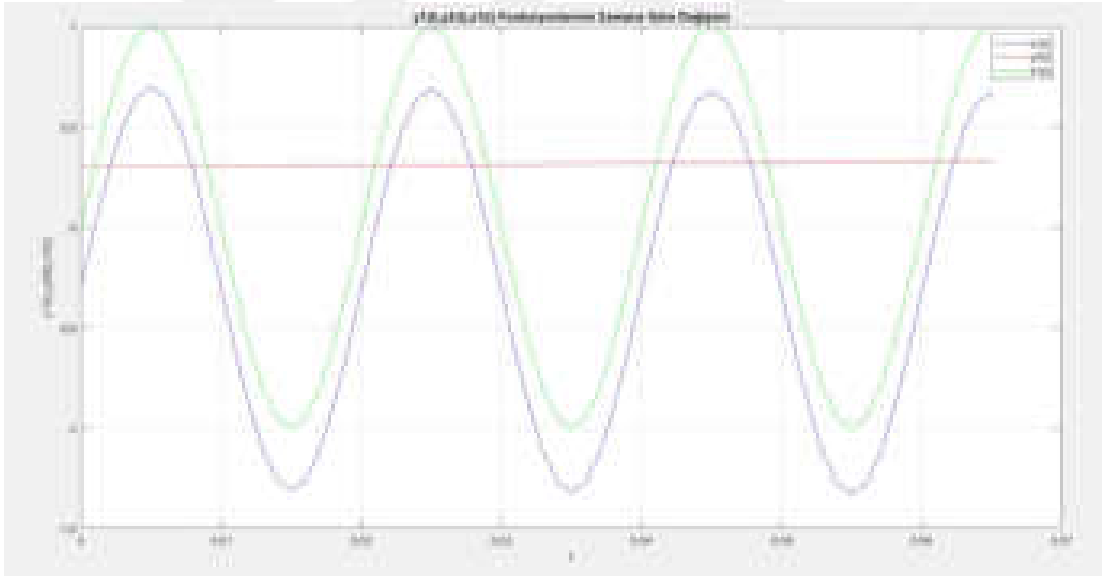
Bu fonksiyonlar için oluşturulan Matlab kodları (Ek 4 ve Ek 5) yardımıyla oluşan grafiksel sinyaller aşağıda verilmiştir.

Ek 4'de bulunan kod yardımıyla görüntülenen sinyaller Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'de gösterilmiştir.



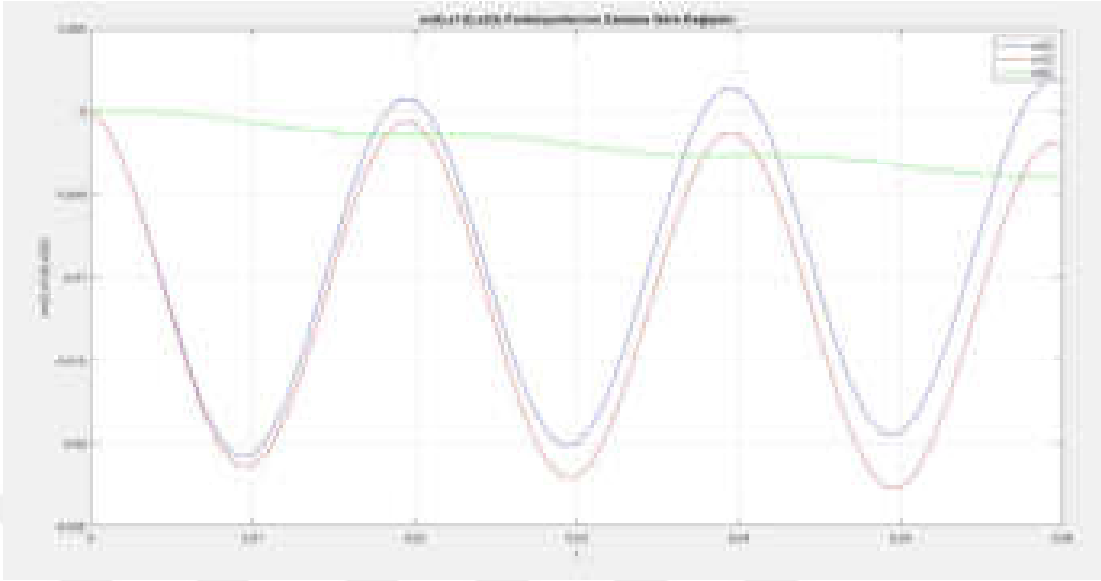
Şekil 6.1. $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği

ve



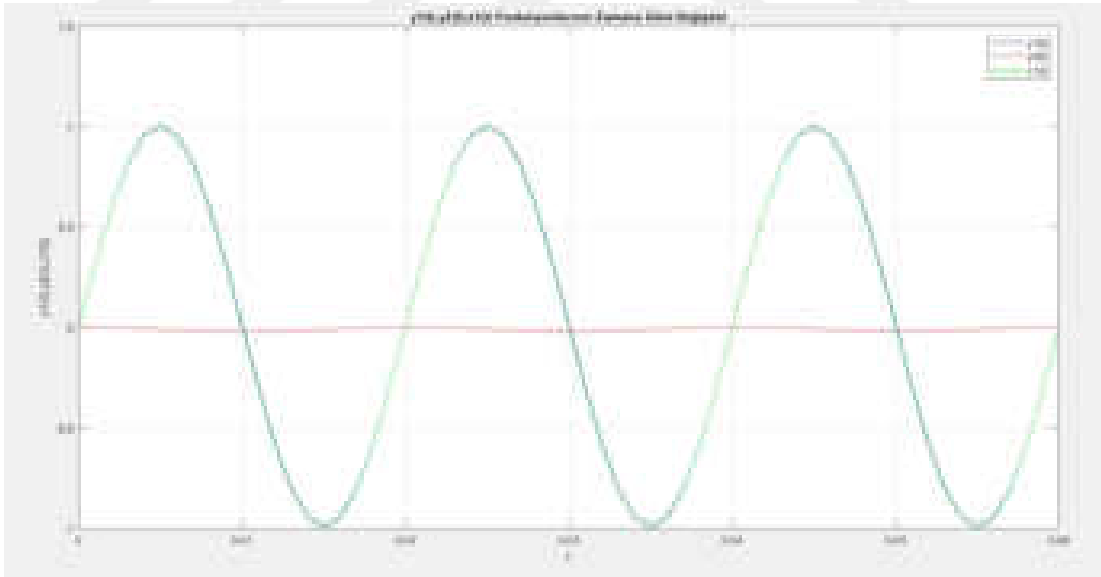
Şekil 6.2. $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z_1(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği

Ek 5’de bulunan kod yardımıyla görüntülenen sinyaller Şekil 6.3 ve Şekil 6.4’de gösterilmiştir.



Şekil 6.3. $x_n(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği

ve



Şekil 6.4. $y_1(t)$, $y_2(t)$, $z_1(t)$ Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişim Grafiği

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tez çalışmasında elde edilen bulgular ve sonuçlar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Bir elektronik devrede iç veya dış uyarımların etkisiyle, kararlı durumda oluşan değişimleri karakterize eden transient (geçici süreç) olay teorik olarak incelenmiş ve bu durumu açıklamaya olanak sağlayan matematiksel model geliştirilmiştir.

Lineer RC devrelerinde geçici (transient) süreçlerin matematiksel olarak modellenmesi sonucu elde edilen matematiksel problemler analitik ve sayısal yöntemlerle çözülmüştür.

RC devresinin lineer olmayan elemanlarının (varistör ve transistör) akım-gerilim karakteristiklerini (I-V) belirlemek için deneysel verilerin aproksimasyonunu gerçekleştirmeye olanak sağlayan fonksiyonlar belirlenmiştir. Bu amaçla, iyi bilinen en küçük kareler yöntemi (LSM) kullanılmıştır. Pratikte sıklıkla kullanılan, doğrusal olmayan devre elemanlarının (varistör ve transistör) akım-gerilim özelliklerini yaklaşık olarak tahmin etmek için kullanılan çeşitli türde aproksimasyon fonksiyonları önerilmiş ve bu fonksiyonları belirlemek için algoritmalar ve bilgisayar programları geliştirilmiştir.

Doğrusal olmayan bir RC devresinin matematiksel modeli geliştirilmiş ve bu matematiksel modelden hareketle oluşturulan, birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi için Cauchy problemi tanımlanmıştır. Cauchy problemini çözmek için dördüncü derece Runge-Kutta yöntemi kullanılarak ihtiyaç duyulan algoritmalar ve bilgisayar programları geliştirilmiş, özel durumlar incelenmiş ve incelenen problemler için elde edilen sonuçlar analiz edilmiştir .

8. KAYNAKLAR

Albayrak, E. ve Çiltaş, A. (2017). Türkiye’de Matematik Eğitimi Alanında Yayımlanan Matematiksel Model ve Modelleme Araştırmalarının Betimsel İçerik Analizi. Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, (9).

Alisoy, H. (2017). Diferansiyel Denklemler Ders Notları, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ , s120.

Alisoy, H. (2020). Sayısal Analiz Ders Notları, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ, 72s.

Alisoy, H. (1988). Elektrik ve Manyetik Alanların Sayısal Hesaplama Yöntemi, MGTU, Moskova, 80s.

Alisoy, H. (2019). Varyasyonel Hesaplama Yöntemleri, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Tekirdağ

Alisoy H. Z.(1995). Electrical Phenomen in Gas (in Russia), USSR Science Academy, Institute of Physics, 553p.

Aroudi, A. El, Rodriguez, E. ve Orabi, M. (2010). Modeling of switching frequency instabilities in buck- based DC – AC H-bridge inverters. International Journal of Circuit Theory and Applications, (April 2009), 787–795. doi:10.1002/cta

Bessonov L. A. (2016). Theoretical foundations of electrical engineering. Electrical circuits. 12ed., Rev. and add. - M .: Higher. school, 701s

Budaev, A. V., Belenkov, R. N. ve Emelianov, N. A. (2019). Memristive properties of pani-polysterene/PVDF-TrFE interface. Condensed Matter, 4(2), 1–8. doi:10.3390/condmat4020056

Bussgang, J. J., Ehrman, L., Graham, J. W. (1974). Analysis of nonlinear systems with multiple inputs. Proceedings of the IEEE, 62(8), 1088-1119.

Chua, L., Ushida, A. (1981). Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies. *IEEE Transactions on circuits and systems*, 28(10), 953-971.

Demirchyan K. S., Neyman, L. R., Korovkin, N. V., Checherin, V. L. (2003). *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki [Theoretical Fundamentals of electrical engineering]*. St. Petesburg, Piter, 2, 576.

Driven, C., Signals, M., Ushida, A. K. ve Chua, L. (1984). *Frequency-Domain Analysis of Nonlinear*, C(9).

Dyakonov V. P. (2012). *MATLAB. Complete Tutorial*. –M.: DMK, 762p.

Efimov, A. V. (1980). *Special topics in Mathematical Analysis: Part 1*.

Genin, Y. (1977). of 737. *Circuit Theory and Applications*, 5(104), 1977.

Glowacki, I., Jung, J., Wiosna-Salyga, G., Chapran, M., Luczak, A., Dupont, B. G., Ulanski, J. (2017). Role of charge-carrier trapping in organic optoelectronic devices. *Disp. Imaging*, 2, 279-319.

Glowacki, I., Korolev, G., Terekhov, V., Ozhogin, M., SerovIzyurova G., Serov V. (1987). *Calculation of electronic circuits. Examples and tasks: textbook for technical colleges / N. Moscow: Vyssh. shk., 335 p*

Herbert B. Dwight (1961). *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* 4th Edition, 336s.

Ionkin P. A (1976). *Fundamentals of Linear Circuit Theory*, M.: Higher. school, 544s.

Khader, M. M., Gómez-Aguilar, J. F. ve Adel, M. (2021). Numerical study for the fractional RL, RC, and RLC electrical circuits using Legendre pseudo-spectral method. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 49(10), 3266–3285. doi:10.1002/cta.3103

Kuo, Y. (1973). Distortion analysis of bipolar transistor circuits. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 20(6), 709-716.

Leon, B., Schaefer, D. (1978). Volterra series and Picard iteration for nonlinear circuits and systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 25(9), 789-793.

Li, C., Bai, J., Ding, J. ve Fan, Y. (2015). Gap current voltage characteristics of energy-saving pulse power generator for wire EDM. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 77(5–8), 1525–1531. doi:10.1007/s00170-014-6365-7

Lucia, D., Iordache, M. ve Voicu, N. (2007). Symbolic hybrid analysis of nonlinear analog circuits. *European Conference on Circuit Theory and Design 2007, ECCTD 2007*, (5), 970–973. doi:10.1109/ECCTD.2007.4529760

Mustafa, A. (2019). Investigation of IV characteristic of Semiconductor Diode and Resistor using KEITHLEY 2450 Source Meter Operated by LabView programming CANDIDATE ' S DECLARATION, 1–18.

Pukhov, G. G. (1982). Differential transforms and circuit theory. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 10(3), 265–276. doi:10.1002/cta.4490100307

Rabiner, L. R. (1971). Techniques for Designing Finite-Duration Impulse-Response Digital Filters. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 19(2), 188–195. doi:10.1109/TCOM.1971.1090625

Sánchez-López, C. (2013). Pathological equivalents of fully-differential active devices for symbolic nodal analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 60(3), 603–615. doi:10.1109/TCSI.2013.2244271

Sánchez-López, C., Fernández, F. V., Tlelo-Cuautle, E. ve Tan, S. X. D. (2011). Pathological element-based active device models and their application to symbolic analysis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 58(6), 1382–1395. doi:10.1109/TCSI.2010.2097696

Sandberg, I. (1983). On Volterra expansions for time-varying nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30(2), 61-67.

Selçuk, A. B., Bilge Ocak, S., Kahraman, G. ve Selçuk, A. H. (2014). Investigation of diode parameters using I-V and C-V characteristics of Al/maleic anhydride (MA)/p-Si structure. *Bulletin of Materials Science*, 37(7), 1717–1724. doi:10.1007/s12034-014-0729-3

Shelest, A. E. (1988). *Microcalculators in Physics*.

Solaguren-Beascoa Fernández, M. (2018). MATLAB implementation for evaluation of measurements by the generalized method of least squares. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 114(September 2017), 218–225. doi:10.1016/j.measurement.2017.09.039

Sun, Y. ve Fidler, J. K. (1997). Component value ranges of tunable impedance matching networks in RF communications systems. *IEE Conference Publication*, 2(441), 185–189. doi:10.1049/cp:19970786

Teor, C. (1984). Translated from *Teoreticheskaya Matematicheskaya Fizika*. P. N. Lebedev Physics Institute, USSR Academy of Sciens, 60(9), 395–403. doi:6003-0836808.50

Wilson, A. G. (2002). Complex spatial systems: Challenges for modellers. *Mathematical and Computer Modelling*, 36(3), 379–387. doi:10.1016/S0895-7177(02)00132-2

Yerzhan, A. A. ve Zauytbek, K. (2015). an Approach To the Problem Solving of Sensitivity, 3(9), 83–94.

EKLER

EK 1

```
clc, clear, close all
options = optimoptions(@lsqnonlin,'Display','off'); Data
x = [0 0.1 0.25 0.5 1 2 5 10]';
y = [0 0.115 0.195 0.317 0.352 0.377 0.422 0.462]';
a) a(1-exp(-x/a))
fun = @(ca)ca*(1-exp((-x/ca)))+y;
x0 = 100;
coefficientsa = lsqnonlin(fun,x0,[],[],options);
b)  $ax^2 + bx + c$ 
Ab = [x.^2xx.^0];
coefficientsb = pinv(Ab) * y;
aproximationb = Ab * coefficientsb;
c)  $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ 
Ac = [x.^5x.^4x.^3x.^2xx.^0];
coefficientsc = pinv(Ac) * y;
aproximationc = Ac * coefficientsc;
figure
hold on
plot(x,y,'p');
a(1 - exp(-x/a))
plot(x,fun(coefficientsa),'b')
ax2 + bx + c
plot(x,aproximationb,'r');
ax5 + bx4 + cx3 + dx2 + ex + f
plot(x,aproximationc,'g');
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('DeerlereBalBolarakAproksimasyon')
```

```

legend('Veriler', 'a(1 - exp(-x/a))', 'ax^2 + bx + c', 'ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f')
disp('stelFonksiyon')
disp('a)f(x) = a(1 - exp(-x/a))')
disp(['Coficients : ' a : ' num2str(coefficients_a(1))])
disp('kinciDerecedenBirFonksiyon')
disp('b)f(x) = ax^2 + bx + c')
disp(['Coficients : ' a : ' num2str(coefficients_b(1))' - b : '
...num2str(coefficients_b(2))' - c : ' num2str(coefficients_b(3))'])disp('m.DerecedenBirFonksiyon')
disp('c)f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f')
disp(['Coficients : ' a : ' num2str(coefficients_c(1))' - b : '
...num2str(coefficients_c(2))' - c : ' num2str(coefficients_c(3))...' - d : '
num2str(coefficients_c(4))' - e : ' num2str(coefficients_c(5))...' - f : '
num2str(coefficients_c(6))'])

```

EK 2

```
clc, clear, close all

options = optimoptions(@lsqnonlin,'Display','off'); Data
x = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 10]';
y = [0 0.700 0.736 0.771 0.802 0.828 0.856 0.880 0.900 0.975]';
a) a(1-exp(-x/a))
fun = @(ca)ca*(1-exp((-x/ca)))+y;
x0 = 100;
coefficientsa = lsqnonlin(fun,x0,[],[],options);
b)  $ax^2 + bx + c$ 
Ab = [x.^2xx.^0];
coefficientsb = pinv(Ab)*y;
aproximationb = Ab*coefficientsb;
c)  $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ 
Ac = [x.^5x.^4x.^3x.^2xx.^0];
coefficientsc = pinv(Ac)*y;
aproximationc = Ac*coefficientsc;
figure
holdon
plot(x,y,'p');
a(1 - exp(-x/a))
plot(x,fun(coefficientsa),'b')
ax2 + bx + c
plot(x,aproximationb,'r');
ax5 + bx4 + cx3 + dx2 + ex + f
plot(x,aproximationc,'g');
gridon
xlabel('x')
ylabel('y')
title('DeerlereBalBolarakAproksimasyon')
legend('Veriler','a(1 - exp(-x/a))','ax2 + bx + c','ax5 + bx4 + cx3 + dx2 + ex + f')
disp('stelFonksiyon')
```

disp('a)f(x) = a(1 - exp(-x/a))')

disp(['Coefficients : ' a : ' num2str(coefficients_a(1))'])

disp('kinciDerecedenBirFonksiyon')

disp('b)f(x) = ax² + bx + c')

disp(['Coefficients : ' a : ' num2str(coefficients_b(1))' - b : '])

...num2str(coefficients_b(2))' - c : ' num2str(coefficients_b(3))'])disp('m.DerecedenBirFonksiyon')

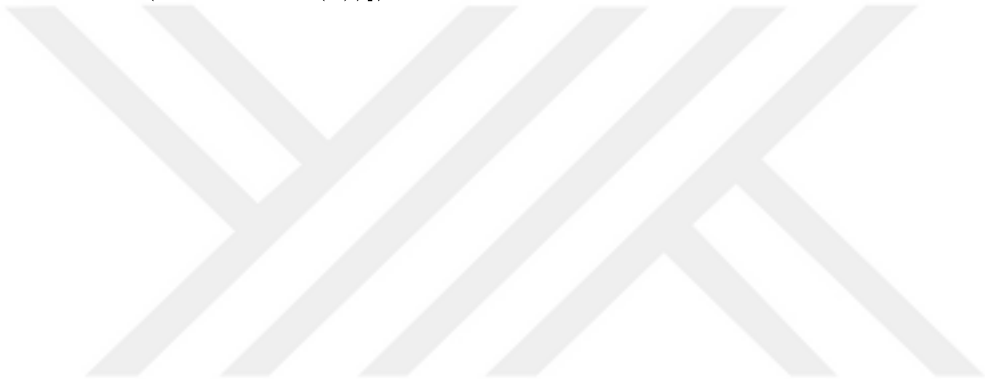
disp('c)f(x) = ax⁵ + bx⁴ + cx³ + dx² + ex + f')

disp(['Coefficients : ' a : ' num2str(coefficients_c(1))' - b : '])

...num2str(coefficients_c(2))' - c : ' num2str(coefficients_c(3))...' - d : '])

num2str(coefficients_c(4))' - e : ' num2str(coefficients_c(5))...' - f : '])

num2str(coefficients_c(6))'])



EK 3

```
clc, clear, close all

options = optimoptions(@lsqnonlin,'Display','off'); Data
x = [0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20]';
y = [0 0.07 0.38 4.5 8.02 11 13.02 15.61 18 20.2 23]';
a) a(1-exp(-x/a))
fun = @(ca)ca*(1-exp((-x/ca)))+y;
x0 = 100;
coefficientsa = lsqnonlin(fun,x0,[],[],options);
b)  $ax^2 + bx + c$ 
Ab = [x.^2 xx.^0];
coefficientsb = pinv(Ab) * y;
aproximationb = Ab * coefficientsb;
c)  $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ 
Ac = [x.^5 x.^4 x.^3 x.^2 xx.^0];
coefficientsc = pinv(Ac) * y;
aproximationc = Ac * coefficientsc;
figure
hold on
plot(x,y,'p');
a(1 - exp(-x/a))
plot(x,fun(coefficientsa),'b')
ax2 + bx + c
plot(x,aproximationb,'r');
ax5 + bx4 + cx3 + dx2 + ex + f
plot(x,aproximationc,'g');
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Deerlere Bal Olarak Aproksimasyon')
legend('Veriler','a(1 - exp(-x/a))','ax2 + bx + c','ax5 + bx4 + cx3 + dx2 + ex + f')
disp('stel Fonksiyon')
```

disp('a)f(x) = a(1 - exp(-x/a))')

disp(['Coefficients : ' a : ' num2str(coefficients_a(1))'])

disp('kinciDerecedenBirFonksiyon')

disp('b)f(x) = ax² + bx + c')

disp(['Coefficients : ' a : ' num2str(coefficients_b(1))' - b : '])

...num2str(coefficients_b(2))' - c : ' num2str(coefficients_b(3))'])disp('m.DerecedenBirFonksiyon')

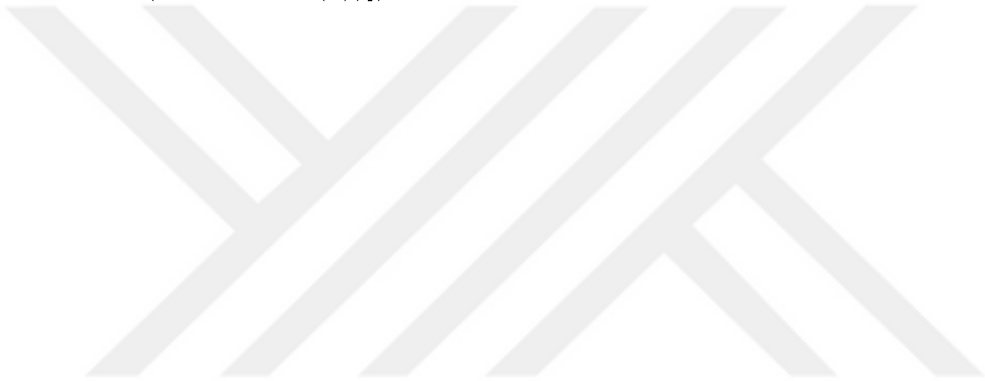
disp('c)f(x) = ax⁵ + bx⁴ + cx³ + dx² + ex + f')

disp(['Coefficients : ' a : ' num2str(coefficients_c(1))' - b : '])

...num2str(coefficients_c(2))' - c : ' num2str(coefficients_c(3))...' - d : '])

num2str(coefficients_c(4))' - e : ' num2str(coefficients_c(5))...' - f : '])

num2str(coefficients_c(6))'])



EK 4

```
delta=0.001;
n=66;
alfa1=0.3;
alfa2=0.15;
pi=3.1415926;
t2 = 0:delta:((n-1)*delta);
x = 1:n;
x1 = 1:n;
x2 = 1:n;
y1 = 1:n;
y2 = 1:n;
z1 = 1:n;
p=0;
q=0;
r=0;
i=1;
beta = (alfa1 + alfa2)/(alfa1 * alfa2);
while i<=n
t=delta*(i-1);
z=sin(100*pi*t);
z1(i)=z;
s=-0.0098*r*r+0.163*r+0.301;
p1=p;
q1=q;
r1=r;
w1=z/alfa1-beta*s;
u=t+delta/2;
v=r1+w1*delta/2;
z=sin(100*pi*u);
s=-0.0098*v*v+0.163*v+0.301;
w2=z/alfa1-beta*s;
```

```

v=r1+w2*delta/2;
s=-0.0098*v*v+0.163*v+0.301;
w3=z/alfa1-beta*s;
u=t+delta;
v=r1+w3*delta;
z=sin(100*pi*u);
s=-0.0098*v*v+0.163*v+0.301;
w4=z/alfa1-beta*s;
r=r1+delta*(w1+2*w2+2*w3+w4)/6;
p=p1+delta*(s-z)/alfa1;
q=q1+delta*s/alfa2;
x(i)=r;
x1(i)=p;
x2(i)=q;
y2(i)=-0.0098*r*r- 0.163*r+0.301;
y1(i)=sin(100*pi*t)-y2(i);
i=i+1;
end

gerilim = [x' x1' x2'];
akim = [y1' y2' z1'];

figure
plot(t2,x,'b')
hold on
plot(t2,x1,'r')
hold on
plot(t2,x2,'g')
grid on
xlabel('t')
ylabel('x(t),x1(t),x2(t)')
title('x(t),x1(t),x2(t) Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişimi')
legend('x(t)', 'x1(t)', 'x2(t)')
figure
plot(t2,y1,'b')

```

```
hold on
plot(t2,y2,'r')
hold on
plot(t2,z1,'g')
grid on
xlabel('t')
ylabel('y1(t),y2(t),z1(t)')
title('y1(t),y2(t),z1(t) Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişimi')
legend('y1(t)', 'y2(t)', 'z1(t)')
```



EK 5

```
delta=0.001;
n=61;
alfa1=0.3;
alfa2=0.15;
a=0.8701;
t2 = 0:delta:((n-1)*delta);
x1 = 1:n;
x2 = 1:n;
xn = 1:n;
y1 = 1:n;
y2 = 1:n;
z1 = 1:n;
x=0;
p=0;
q=0;
r=0;
i=1;
beta = (alfa1 + alfa2)/(alfa1 * alfa2);
while i<=n
t=delta*(i-1);
z=sin(100*pi*t);
z1(i)=z;
f=a*(1-exp(-x/a));
p1=p;
q1=q;
p=p1+delta*(f-z)/alfa1;
q=q1+delta*f/alfa2;
x = p-q;
xn(i)=x;
x1(i)=p;
x2(i)=q;
```

```

y2(i)=f;
y1(i)=sin(100*pi*t)-y2(i);
i=i+1;
end
figure
plot(t2,xn,'b')
hold on
plot(t2,x1,'r')
hold on
plot(t2,x2,'g')
grid on
xlabel('t')
ylabel('xn(t),x1(t),x2(t)')
title('xn(t),x1(t),x2(t) Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişimi')
legend('xn(t)', 'x1(t)', 'x2(t)')
figure
plot(t2,y1,'b')
hold on
plot(t2,y2,'r')
hold on
plot(t2,z1,'g')
grid on
xlabel('t')
ylabel('y1(t),y2(t),z1(t)')
title('y1(t),y2(t),z1(t) Fonksiyonlarının Zamana Göre Değişimi')
legend('y1(t)', 'y2(t)', 'z1(t)')

```