YOĞUNLUKLU YÜZEYLERİN

GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Ceylan KANAT

Yüksek lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

2020

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YOĞUNLUKLU YÜZEYLERİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Ceylan KANAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

TEKİRDAĞ -2020

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde eksiksiz biçimde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Ceylan KANAT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
YOĞUNLUKLU YÜZEYLERİN
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ
Ceylan KANAT
Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Bu çalışma geometride oldukça öneme sahip yoğunluklu yüzeylerin geometrik özellikleri üzerinedir. Bu konu üzerine belirlenen hedeflerden birincisi olarak yoğunluklu manifoldlar ile ilgili gerekli tanım ve teoremler incelenerek genel literatür bilgisi verildi. İkinci olarak bazı özel şartlar altında, e^z yoğunluklu sabit $\varphi -$ortalama eğrilikli dönel yüzeyler, öteleme yüzeyleri, regle yüzeyler ve helikoidal yüzeyler için çeşitli karakterizasyonlar verildi ve yüzeylerin sınıflandırılması yapıldı.

Anahtar kelimeler: Manifold, Minimal yüzey, Ortalama eğrilik, Yoğunluk fonksiyonu, Yoğunluklu yüzey, Yoğunluklu ortalama eğrilik

2020, 40

ABSTRACT

Master's Thesis

GEOMETRİC PROPERTİES OF DENSİTY SURFACE

Ceylan KANAT

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

This study explores the geometric properties of density surfaces that are very important in geometry. Firstly, the definitions and theorems related to density manifolds are examined and general literature information is given. Second, under some special conditions, e^z density constant mean curvature rolling surfaces, translational surfaces, ruled surfaces and helicoidal surfaces are given with various characterizations and classifications.

Key words: Manifold, Minimal surface, Mean curvature, Density function, Density surface, Mean curvature with density

2020, 40

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n- boyutlu Öklid uzayı
$\|\,,\,\|$	: Öklid normu
$<\,,\,>$	: İç çarpım
$\perp$	: Diklik sembolü
Λ	: Dış çarpım
M	: Manifold
N	: Yüzeyin birim normal vektörü
Ψ	: Yoğunluk fonksiyonu
G_{φ}	: Yüzeyin φ -Gauss eğriliği
H_{φ}	: Yüzeyin φ -ortalama eğriliği

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması ve yürütülmesi sırasında destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e, birikimlerini severek paylaşan sayın hocam Doç. Dr. M. Evren AYDIN'a (Fırat Üniversitesi), tez yazım aşamasında bana her daim destek olan Arş. Gör. Ayla ERDUR 'a ve beni her zaman destekleyen aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2020 Ceylan KANAT

1. GİRİŞ

Son yıllarda Olasılık ve İstatistik'teki uygulamaları sebebiyle, geometride yeni bir alan olan, yoğunluklu manifoldlara ilişkin artan bir ilgi bulunmaktadır. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir yoğunluk, pozitif bir e^{φ} fonksiyonuna karşılık gelerek hacim, kütle ve alanı ağırlıklandırır. Örneğin; İstatistik ve Olasılık çalışanlar için önemli olan G^n Gauss uzayı, aslında $(2\pi)^{-n/2}e^{-r^2/2}$ Gauss yoğunluklu bir Öklit uzayıdır. Ayrıca yoğunluklu manifoldlar Perelman'ın Poincare konjektürünün ispatı ile de ilgilidir.

Riemann Geometrisi'nin yoğunluklu manifoldlara genelleştirilmesiyle ilgili ilk çalışmalar Frank Morgan tarafından yapılmıştır [1-3]. Ayrıca Gromov ve Bayle [4,5], ortalama ve Ricci eğriliğinin yoğunluğa sahip manifoldlara genelleştirilmesi üzerine çalışmış ve Gromov' dan sonra Corwin, bir eğrinin eğriliğini ve bir yüzeyin ortalama eğriliğini, yoğunluğu olan manifoldlara genellemiştir [6].

Bu tez çalışmasında ise ilk olarak basit yoğunluklu manifold örnekleri verilip, yoğunluklu manifoldların geometrik özellikleri ile ilgili incelemeler yapıldı.

Ayrıca yoğunluklu dönel yüzeyler, öteleme yüzeyleri, regle yüzeyler ve helikoidal yüzeylerin minimal olması durumunda bu yüzeylerin yoğunluklu ortalama eğriliği incelenerek çeşitli karakterizasyonlar ve sınıflandırmalar yapıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. A boş olmayan bir cümle ve V de bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

A1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [7].

Tanım 2.2. X bir küme olsun.

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

fonksiyonu,

i. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$
ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii. $d(x, y) = d(y, x)$
iv. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [8].

Tanım 2.3. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $(y = y_1, y_2, \ldots, y_n)$ olmak üzere,

$$<,>: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklit iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece bu afin uzay Öklit uzayı adını alır [7].

Tanım 2.4. $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu standart Öklit uzayı olsun.

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \| \overrightarrow{xy} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ de uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in \mathbb{R}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [7].

Tanım 2.5. $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu Öklit uzayı ve $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ farklı noktalar olsun. $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $(0 \leq \theta \leq \pi)$

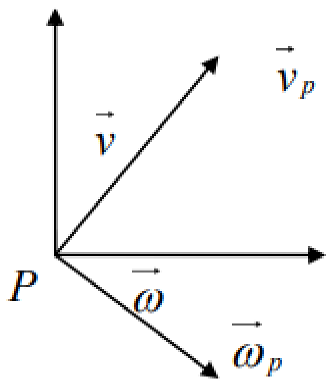
$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\| \overrightarrow{XY} \| \| \overrightarrow{XZ} \|}$$

ile tanımlıdır. Ayrıca $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{XZ}$ olması için gerek ve yeter şart $\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle = 0$ olmasıdır [8,9].

Tanım 2.6. M bir manifold ve M nin bir komşuluğu V olmak üzere, $V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü $X: V \rightarrow \cup T_V(P)$ biçimindeki bir fonksiyondur, öyle ki $\pi \text{ o } X = I: V \rightarrow V$ dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur [7].

Tanım 2.7. A, V vektör uzayı ile birleşen n- boyutlu afin uzay olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için

$(P, \vec{v}) = \vec{v}_p$ ikilisine A afin uzayında bir tanjant vektörü denir.



Şekil 2.1. Tanjant vektör [8].

P noktasının tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$T_A(P) = \{ \vec{v}_p = (P, \vec{v}): P \in A, \vec{v} \in V \}$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.8. X bir cümle olsun. X nin alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olmak üzere eğer τ aşağıda verilen önermeler sağlıyorsa X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay adı verilir [7].

T 1: X, $\emptyset \in \tau$

T 2: Her A_1, $A_2 \in \tau$ ise $A_1 \cap A_2 \in \tau$

T 3: τ da alınan herhangi sayıda elamanların birleşimi yine τ ya aittir.

Örnek 2.1. X = {0,1} olsun.

$\boldsymbol{\tau_1} = \{\emptyset, X\}$, $\boldsymbol{\tau_2} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, $\boldsymbol{\tau_3} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$, $\boldsymbol{\tau_4} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}\}$

kolleksiyonları X üzerinde birer topolojidir [10].

Tanım 2.9. X ve Y birer topolojik uzay olsun. f: X → Y şeklinde f fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon sürekli ise f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna X den Y ye bir homeomorfizm ya da topolojik dönüşüm denir [7].

Örnek 2.2. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ ve $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| = 1\}$ olsun. $S^1 \approx K$ olduğunu gösterelim [10].

f: $S^1 \longrightarrow K$

$$(x,y) \to f(x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right)$$

$x_1 = \frac{x}{|x|+|y|}$ ve $y_1 = \frac{y}{|x|+|y|}$ ise, bu durumda

$$|x| + |y| = \left|\frac{x}{|x|+|y|}\right| + \left|\frac{y}{|x|+|y|}\right| = \frac{|x|^2+2|x||y|+|y|^2}{(|x|+|y|)^2} = 1$$

o halde x_1 ve y_1 noktaları karenin üzerindedir.

i. $\forall\ (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \in S^1$ için f iyi tanımlıdır.

$$f(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{|x_1|+|y_1|}, \frac{y_1}{|x_1|+|y_1|}\right) = \left(\frac{x_2}{|x_2|+|y_2|}, \frac{y_2}{|x_2|+|y_2|}\right) = f(x_2, y_2)$$

ii. $\forall \left(\frac{x_1}{|x_1|+|y_1|}, \frac{y_1}{|x_1|+|y_1|}\right), \left(\frac{x_2}{|x_2|+|y_2|}, \frac{y_2}{|x_2|+|y_2|}\right) \in K$ için

$$\frac{x_1}{|x_1|+|y_1|} = \frac{x_2}{|x_2|+|y_2|} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{ve} \quad \frac{y_1}{|x_1|+|y_1|} = \frac{y_2}{|x_2|+|y_2|} \Rightarrow y_1 = y_2$$

böylece f bire birdir.

iii. $\forall\ (k,t) \in K$ için $f(x,y) = (k,t)$ olacak şekilde $(x,y) \in S^1$ vardır.

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right) = (k,t) \Leftrightarrow k = \frac{x}{|x|+|y|} \text{ ve } t = \frac{y}{|x|+|y|}$$

$k^2 = \frac{x^2}{(|x|+|y|)^2}$, $t^2 = \frac{y^2}{(|x|+|y|)^2}$ olmak üzere,

$$k^2 + t^2 = \frac{x^2+y^2}{(|x|+|y|)^2} \Longrightarrow \frac{1}{(|x|+|y|)^2} = k^2 + t^2$$

o halde

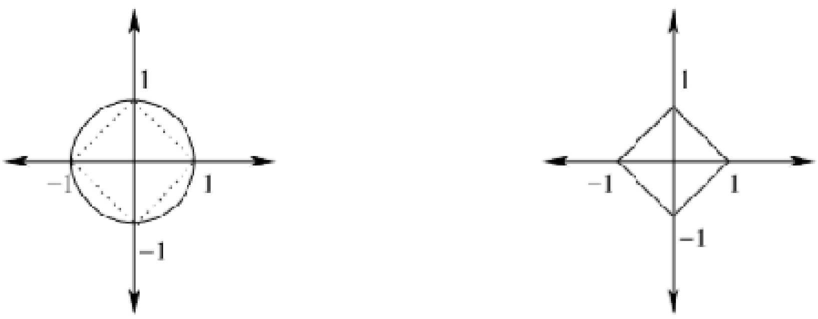
$$|x| + |y| = \frac{1}{\sqrt{k^2+t^2}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{\sqrt{k^2+t^2}} \\ y = \frac{t}{\sqrt{k^2+t^2}} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{k}{\sqrt{k^2+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{k^2+t^2}}\right) \in S^1$$

olduğundan f örtendir.

iv. f ve $f^{-1}: K \longrightarrow S^1$

$$(x,y) \rightarrow f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$



Şekil 2.2. Çember kareye homeomorftur [10].

Tanım 2.10. X bir topolojik uzay olsun. X nin P ve Q gibi farklı noktaları için, X de P ve Q noktalarını içine alan A_p ve A_Q açık alt cümleleri $A_p \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde bulunabiliyorsa X topolojik uzayına Hausdorff uzay denir [7].

Tanım 2.11. M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için, $\mathbb{R}^m$ deki bir açık kümeye homemorfik olacak şekilde p noktasının bir açık U komşuluğu varsa, M Haussdorf uzayına bir topolojik manifold ya da kısaca manifold denir. Bu durumda $\text{boy}(\mathbb{R}^m) = m$ olduğundan, manifoldun boyutu m olarak tanımlıdır [11].

Örnek 2.3. Manifoldlar için aşağıdaki örnekler verilebilir [12].

1. $\mathbb{R}^n$ nin kendisi, n- manifolddur. Gerçektende $\mathbb{R}^n$, Hausdorff, sayılabilir bazı var ve birim dönüşümü yerel homeomorfizmadır.
2. S^n, n- manifolddur.
3. Möbius şeridi, Torus, S^2, 2- manifolddur.

Tanım 2.12. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

i. $g(X, Y) = g(Y, X)$,

ii. $g(X, X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör denir. Bu durumda (M, g) ikilisine Riemann manifoldu denir [11].

Tanım 2.13. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha: I \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$de eğri adı verilir [7].

Örnek 2.4. Bilinen bazı eğri örnekleri,

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^3$$
$$t \to \alpha(t) = (t, t^2, 0)$$

ise α bir parabol,

$\mathrm{I} = \{t \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$

olmak üzere

$\beta: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$

$\quad t \to \beta(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$

ise β bir çember,

$\delta: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{I} = t \mid t\epsilon\, \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ veya $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ veya $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$

$\quad t \to \delta(t) = (a\sec t, b\tan t)$

ise δ bir hiperbol,

$\gamma: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{I} = \{t \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$

$\quad t \to \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$

ise γ bir elipstir [13].

Tanım 2.14. E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $s \in M$ noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\| \alpha'(s) \| = 1$ ise M 'ye birim hızlı eğri denir [8].

Tanım 2.15. 3- boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$ de birim hızlı $\alpha: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\mathrm{T}(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $\mathrm{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör alanı denir [14].

Tanım 2.16. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\mathrm{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

eşitliğiyle tanımlı $\mathrm{N}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektör alanı (birim dik vektör alanı) denir [14].

Tanım 2.17. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\mathrm{B}(s) = \mathrm{T}(s) \times \mathrm{N}(s)$$

vektörüne de α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektör alanı adı verilir.

$\{T(s), N(s), B(s)\}$ üçlüsüne ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçyüzlüsü denir [14].

Tanım 2.18. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = k_1(s) = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlanır. κ fonksiyonu α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına da α nın $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [8].

Tanım 2.19. Bir $X: U \to \mathbb{R}^3$ diferensiyellenebilir dönüşümüne yama ya da bir lokal yüzey adı verilir. Burada $U, \mathbb{R}^2$ nin bir açık alt kümesidir. Daha genel olarak eğer A, $\mathbb{R}^2$ nin herhangi bir alt kümesi ise, X in U dan $\mathbb{R}^2$ ye diferensiyellenebilir bir dönüşüme genişletilebilmesi şartıyla; $X: A \to \mathbb{R}^2$ dönüşümüne bir yama denir. Burada U, A yı kapsayan bir açık kümedir. $X(U)$ (ya da daha genel olarak X(A)) X in izi olarak adlandırılır.

Bir yama;

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v))$$

fonksiyon n-lisi olarak yazılabildiğinden, X in u ya göre X_u kısmi türevi

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u}(u, v)\right)$$

ile tanımlanır. X in diğer kısmi türevleri yani X_v, X_{uu}, X_{uv}, ... benzer şekilde tanımlanır [15].

Tanım 2.20. Bir $X: U \to \mathbb{R}^n$ yamasının Jakobian matrisi

$$J(X)(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_n}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} X_u(u, v) \\ X_v(u, v) \end{pmatrix}^T$$

şeklinde verilen matris değerli J(X) fonksiyonudur [15].

Sonuç 2.1. $X: U \to \mathbb{R}^n$ bir yama olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. $X_u(u_0, v_0)$ ve $X_v(u_0, v_0)$ lineer bağımlıdır,

ii. $\det\begin{pmatrix} X_u . X_u & X_u . X_v \\ X_v . X_u & X_v X_v \end{pmatrix}$, (u_0, v_0) da sıfırdır.

iii. $J(X)$ Jakobiyen matrisinin (u_0, v_0) da rankı 2 den azdır [15].

Tanım 2.21. Bir $X: U \to \mathbb{R}^n$ yamasının $\forall(u, v) \in U$ için $J(X)(u, v)$ Jakobiyen matrisinin rankı 2 ise, bu yamaya, regüler yama denir [15].

Lemma 2.1. Bir $X: U \to \mathbb{R}^n$ yaması, $J(X)(u_0, v_0)$ in rankının 2 olması şartıyla bir $(u_0, v_0) \in U$ noktasında regülerdir [15].

Tanım 2.22. Aşağıdaki şartları sağlayan $M \subset \mathbb{R}^n$ alt cümlesine regüler yüzey denir. $\forall\, P \in M$ noktası için $\mathbb{R}^n$ de P nin bir V komşuluğu ve bir $U \subset \mathbb{R}^n$açık cümlesinden $V \cap M$ ye bir $X: U \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü vardır. Öyle ki;

i. $X: U \to M$ bir regüler yamadır.

ii. $X: U \to V \cap M$ homeomorfizmdir.

Böylece X^{-1} sürekli bir $F: W \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünün $V \cap M$ ye kısıtlanmışı olacak şekilde; $X, X^{-1}: V \cap M \to U$ sürekli inversine sahiptir. Burada $W, V \cap M$ yi kapsayan $\mathbb{R}^2$nin bir açık alt cümlesidir.$\forall\, X: U \to M$ dönüşümüne lokal harita ya da $P \in M$ nin bir komşuluğunda lokal koordinat sistemi denir [15].

Tanım 2.23. $(\widetilde{M}, g)$ bir $m-$boyutlu Riemann manifold ve (M, g) de n- boyutlu keyfi bir manifold olsun. Bu durumda $i: M \to \widetilde{M}$ dönüşümü bir daldırma ise $m - n$ sayısına M manifoldunun ekboyutu denir. Eğer ekboyut $m - n = 1$ ise alt manifolda hiperyüzey denir [11].

Tanım 2.24. M bir m-boyutlu ve $\widetilde{M}$ de n- boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer

$$d\varphi_p : T_P M \to T_{\varphi(P)}\widetilde{M}$$

dönüşümü $\forall p \in M$ noktasında birebir ise

$$\varphi: M \to \widetilde{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne daldırma denir. Bu durumda M manifolduna, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir daldırılmış alt manifold denir [16].

Örnek 2.5. $V = \{ (\theta, \phi) | \ 0 < \theta < \pi, \ \ 0 < \phi < 2\pi\}$

$F = V \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\theta, \phi) \rightarrow (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$

dönüşümünü göz önüne alalım. Kolayca görülür ki $\mathrm{rank}F_* = 2$ dir. Böylece F, ekboyutu 1 olan bir immersiyondur. Bu S^2 küresidir. [11].

Tanım 2.25. $\varphi: E^2 \rightarrow E^3$

$$(u, v) \rightarrow (u, v, f(u, v))$$

şeklinde tanımlanan yüzey Monge yüzeyi adını alır. Burada $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyondur [17].

Örnek 2.6. $U = E^2$ olmak üzere, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f = u^2 + v^2$ olsun. f fonksiyonu düzgün olduğundan,

$\{(p, q, p^2 + q^2) : (p, q) \in U\}$

cümlesi bir yüzeydir.

$\varphi: U \rightarrow E^3, \quad \varphi = (u, v, u^2 + v^2)$

olmak üzere, $\varphi(U)$, E^3 öklit uzayında Monge gösterimiyle verilmiş bir yüzeydir [18].

Tanım 2.26. Parametrizasyonu $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ şeklinde olan bir M yüzeyinin birinci ve ikinci temel formunun katsayıları, sırasıyla,

$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v, \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle,$

$L = \langle X_{uu}, N \rangle, \quad M = \langle X_{uv}, N \rangle, \quad P = \langle X_{vv}, N \rangle,$

şeklindedir. Burada

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\| X_u \times X_v \|}, \tag{2.1}$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır. Buna göre yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri ise, sırasıyla,

$$H = \frac{EP + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}, \tag{2.2}$$

$$K = \frac{LP - M^2}{EG - F^2}$$

şeklinde hesaplanır [19].

Tanım 2.27. H ortalama eğriliği sıfır olan yüzeye minimal yüzey denir [19].

Tanım 2.28. $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ yüzey yamasının $R \subseteq U$ parçasının $\mathcal{A}_{X(R)}$ alanı

$$\mathcal{A}_{X(R)} = \int_R \|X_u \times X_v\| \, dudv$$

şeklindedir [20].

Tanım 2.29. M bir n- Riemann manifoldu ve

$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$

bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} \Delta: C^\infty(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow \Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan Δ operatörüne M üzerinde Laplace Operatörü denir [21].

Tanım 2.30. Eğer $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ de H ortalama eğriliğine ve $N: U \to \mathbb{R}^3$ küresel dönüşümüne sahip C^2 sınıfından bir regüler yüzey ise,

$$\Delta X = 2HN$$

dir [22].

Tanım 2.31. M kompakt, sınırsız, n- boyutlu bir Riemann manifold olsun. O zaman M nin hacmi

$$V = \int_M \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_n$$

dir. M nin bir varyasyonu şu şekilde verilir;

$$I = \{ t \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \}$$

olmak üzere

$$F : M \times I \longrightarrow X$$

$$(m, t) \longrightarrow F(m, t)$$

bir diferansiyellenebilir dönüşüm olsun ve ayrıca $\forall t \in I$ için F nin $M \times t$ ye kısıtlanmışı bir

$$f : M \times t \longrightarrow X$$

$$(m, t) \longrightarrow f(m, t) = F(m, t)$$

$$(m, o) \longrightarrow f(m, o) = F(m, o)$$

immersiyonu olsun. $M \times I$ üzerinde bir çatı alanını $e_A\,(m, t)$ olarak seçersek, $e_i\,(m, t)$ ve $e_\alpha\,(m, t)$ vektörleri (m, t) noktasında $F(m, t)$ ye , sırası ile, teğet ve normal vektörlerdir [21].

Tanım 2.32. Yönlendirilmiş kapalı yüzey

$$X: D \subset E^2 \longrightarrow M^2 \subset E^3$$
$$(u_1, u_2) \longrightarrow X(u_1, u_2)$$

ile verilsin. Burada u_1 ve u_2 yüzeyin sabit parametreleridir. Yüzeyin birinci varyasyonu,

$$\delta \int_{M^2} H^2\, dS = 2 \int_{M^2} \varphi \,\{\Delta H + 2H(H^2 - K\}\, dS$$

ile verilir. Burada H ve K sırasıyla yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleridir. Ayrıca,

$$\varphi : D \subset E^2 \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}$$

$$(u_1, u_2) \longrightarrow \varphi(u_1, u_2)$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon ve $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olmak üzere

$$\delta = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

dır [21].

Tanım 2.33. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \geq 0$

iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü adı verilir [23].

Tanım 2.34. Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ- cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüsüne bir ölçü uzayı adı verilir [23].

Tanım 2.35. $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey,

$$X(\alpha, \beta): I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \rightarrow X(\alpha, \beta)\,(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve I bir açık aralıktır. Ayrıca α regle yüzeyin dayanak eğrisi ve β ise regle yüzeyin doğrultmanı olarak adlandırılır [24].

Tanım 2.36. $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$r(u, v) = (u\cos av, u\sin av, bv) \tag{2.3}$$

parametrizasyonu ile tanımlı regle yüzeye helikoid adı verilir. Burada a ve b sıfırdan farklı sabitlerdir [25].

Tanım 2.37. $r: [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$r(u, v) = (a\cos v, a\sin v, u) \tag{2.4}$$

parametrizasyonu ile tanımlı regle yüzeye dik dairesel silindir denir [13].

Örnek 2.7. $r(u, v) = (a\cos u, a\sin u, v),\ G = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1)$

ile verilen noktalar cümlesini ele alalım. Bu noktalar cümlesinin kartezyen koordinatlardaki denklemi

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

olan dik dairesel silindirdir.

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

hesaplanırsa veya

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2$$

olduğu tespit edilirse $r(u, v)$ nin bir yüzey yaması olduğu görülür [26].

Tanım 2.38. E^3 de sabit bir $M \in E^3$ noktasından eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine küre denir ve S^2 ile gösterilir. M ye S^2 nin merkezi, sabit uzaklığa da yarıçapı adı verilir.

S^2 küresinin denklemi,

$$S^2 = \{ r(u, v) | \, r(u, v) = (a\cos u \sin v, a\sin u \sin v, a\cos v)\} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Burada $a \in [0, \infty)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$ dir [22].

Tanım 2.39. $\mathbb{R}^3$ de Γ bir düzlem, Γ düzleminde bir doğru l ve φ de Γ da bir nokta kümesi olsun. φ, l etrafında döndürüldüğünde, elde edilen M nokta kümesine φ ile üretilmiş bir **dönel yüzey** denir. Bu durumda φ ye **profil eğrisi** ve l doğrusuna da M nin **dönme ekseni** adı verilir [15, 27].

Γ nın xz-düzlemi, φ noktalar kümesinin de diferensiyellenebilir bir dönüşümü olan $\alpha: (a, b) \to \varphi$, $\alpha(v) = \big(\alpha_1(v), 0, \alpha_2(v)\big), v \in (a, b)$ parametrizasyonuna sahiptir. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 2.40. Bir M dönel yüzeyi

$$r: (0,2\pi) \times (a, b) \to \mathbb{R}^3$$
$$r(u, v) = \big(\alpha_1(v)\cos u, \alpha_1(v)\sin u, \alpha_2(v)\big)$$

şeklinde bir parametrizasyon ile tanımlıdır [3].

3. YOĞUNLUKLU MANİFOLDLAR

Bir (M,g) Riemann manifoldunda, $dv_g \equiv dv$ Riemann hacim ölçüsü olan doğal bir ölçü vardır. Daha genel olarak, (M,g,m) üçlüsü olan Riemann ölçü uzayları göz önünde bulundurulabilir. Burada m, M üzerinde diferensiyellenebilir bir ölçüdür. Bir diğer ifadeyle, $\varphi \in C^\infty(M)$ olmak üzere $dm = e^\varphi dv$ olan (M,g,φ) üçlüsü ele alınabilir. Bu durumda (M,g,φ) üçlüsü, φ **yoğunluklu manifold** olarak adlandırılır.

Yoğunluklu manifoldun ilk örneklerinden biri olan $e^{-\pi|x|^2}$ Gauss yoğunluklu Öklit uzayı, Olasılık ve İstatistik alanında sıkça görülmektedir. Bu tür manifoldlar için farklı örnekler aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 3.1. Kapalı Öklit yarı düzlemi üzerinde (x ekseni üzerinde sınır) sınırlı bir eğri ile bu eğrinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyi göz önüne alalım. Böylece yüzey üzerindeki alanlar ve yay uzunlukları, $2\pi y$ ağırlığına sahip yarı düzlem üzerindeki alan ve yay uzunluklarına karşılık gelir [6].

Örnek 3.2. Fizikte, bir nesne farklı iç yoğunluklara sahip olabilir. Böylece nesnenin kütlesini belirlemek için, yoğunluklu ağırlaştırılmış hacmi integre etmek gerekir [6].

Tanım 3.1. G^m Gauss uzayı, orijinden r radyal uzaklığa sahip $(2\pi)^{-m/2} e^{-r^2/2}$ Gauss yoğunluğu ile donatılmış $\mathbb{R}^m$ uzayıdır. Özel olarak, Gauss düzlemi, $(2\pi)^{-1} e^{-r^2/2}$ yoğunluğu ile donatılmış Öklitsel düzlemdir [6].

Örnek 3.3. Ekonomi ve yönetimde, sık sık insan grupları ve bu grupların alt gruplarının toplu özelliklerini göz önünde bulundurmak gereklidir. Büyük gruplar için, bu toplu özellikler, grubun üyeleri üzerinden farklı şahsi özellikler (farklı yoğunluklar gibi) integre edilerek belirlenebilir [6].

M. Gromov, bir $\Sigma \in (M,g,\varphi)$ hiperyüzeyinin genelleştirilmiş ortalama eğriliğini (ya da ortalama eğriliğin doğal bir genelleştirmesi olarak ağırlıklı ortalama eğrilik), ağırlıklı alanın birinci varyasyonu ile

$$H_\varphi = H + g(N, \overline{\nabla}\varphi)$$

şeklinde elde etmiştir. Burada H, Σ nın ortalama eğriliği ve N de Σ boyunca birim normal vektör alanı ve $\overline{\nabla}$ ise gradient operatörüdür [4].

(M, g, φ), $\varphi \in C^\infty(M)$, $\varphi > 0$ yoğunluğuna sahip bir Rieman manifoldu olsun. Sınırı $\Sigma := \partial\Omega$ olan herhangi bir $\Omega \subset M$ Borel kümesi ve Σ boyunca N iç birim normali için Ω nın ağırlıklı hacmi ve ağırlıklı alanı, sırasıyla,

$$V_\varphi(\Omega) = \int_\Omega e^\varphi \, dv, \quad A_\varphi(\Sigma) = \int_\Sigma e^\varphi \, dv_\Sigma$$

şeklindedir. Burada, dv ve dv_Σ , sırasıyla, g ye göre hacim ve alan elementidir. Ayrıca, $\varphi \equiv 0$ olduğunda, ağırlıklı hacim ve ağırlıklı alan, sırasıyla, alışılmış hacim ve alışılmış alana karşılık gelir.

Ψ_0 özdeşlik dönüşümü olacak şekilde, Ψ_t, $t \in (-\Sigma, \Sigma)$, M nin diffeomorfizmlerinin diferensiyellenebilir bir ailesidir. Bu durumda,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi_{t|\,\Sigma} = X + uN$$

olsun. Burada X, Σ boyunca teğet vektör alanı ve u, Σ üzerinde kompakt destekli diferensiyellenebilir fonksiyondur. Daldırılmış bir $\Sigma \in (M, g, \varphi)$ hiperyüzeyi, ağırlıklı alan fonksiyonelinin bir kritik noktası ise yani tüm kompakt destekli varyasyonlar için

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A_\varphi\big(\Psi_t(\Sigma)\big) = 0$$

şeklinde ise bu hiperyüzeye ağırlıklı minimal ya da $\varphi -$ minimal hiperyüzey denir [27].

Bayle'ın varyasyonel formülünden, kompakt destekli tüm varyasyonlar için

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A_\varphi\big(\Psi_t(\Sigma)\big) = \int_\Sigma H_\varphi u e^\varphi \, dv_\Sigma,$$

olduğu görülür. Burada

$$H_\varphi = H - \frac{1}{(n-1)} \frac{d\varphi}{dN} = H - \frac{1}{(n-1)} < \nabla_\varphi \, , N > \tag{3.1}$$

ifadesine hiperyüzeyin **ağırlıklı ortalama eğriliği** ya da **$\varphi -$ ortalama eğriliği** denir.

Böylece Σ nın **ağırlıklı minimal** olması için gerek ve yeter şart ağırlıklı ortalama eğriliğinin sıfıra eşit olmasıdır.

φ - ortalama eğriliği formülünden, $\frac{d\varphi}{dN}$ ifadesinin minimal yüzeyler için geometrik yorumu aşağıdaki gibi verilebilir:

Gauss uzayında $\frac{d\varphi}{dN}$, orijin ile yüzey üzerindeki bir noktanın teğet hiperdüzlemi arasındaki mesafedir. Bu yüzden G^3 Gauss uzayında,

- Düzlemler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve orijinden geçen düzlemler ağırlıklı minimaldir.
- Orijindeki küreler sabit ortalama eğriliklidir ve yarıçapı $1/\sqrt{2}$ olanlar ağırlıklı minimaldir.
- Eksenleri orijinden geçen dairesel silindirler sabit ortalama eğriliğe sahiptir ve yarıçapı 1 olan dairesel silindirler ağırlıklı minimaldir [28].

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ şeklinde lineer bir fonksiyon olduğunda $e^{\varphi(x)}$ yoğunluk fonksiyonuna **log-lineer yoğunluk** adı verilir. $\mathbb{R}^n$ de sabit yoğunluğa sahip herhangi bir nokta kümesi hiperdüzlemdir. Uygun bir koordinat değişimiyle, yoğunluğun e^{x_n} şeklinde olduğu kabul edilebilir. Böylece, $e^{\varphi(x)}$ yoğunluklu $\mathbb{R}^n$ uzayı $\mathbb{R}^{n-1} \oplus \mathbb{R}_\varphi$ çarpımı olarak düşünülebilir. Burada $\mathbb{R}^{n-1}$, $(n-1)-$boyutlu Öklit uzay ve $\mathbb{R}_\varphi$ de e^{x_n} yoğunluklu reel doğrudur. $\nabla_\varphi = (0,0,\ldots,1)$ olduğundan, $\frac{d_\varphi}{d_N} = <\nabla_\varphi, N>$, N ile $z-$ekseni arasındaki açının kosinüsüdür. φ- ortalama eğriliği tanımından H_φ, $z-$ekseni etrafında bir öteleme ya da dönme altında değişmez. Ayrıca,

- $\mathbb{R}^n$ de e^{x_n} yoğunluklu hiperdüzlemler sabit ortalama eğriliğe sahiptir,
- $\mathbb{R}^n$ de x_n- eksenine paralel olan e^{x_n} yoğunluklu hiperdüzlemler sıfır ortalama eğriliğe sahiptir,
- Üreteçleri x_n – eksenine paralel olan dairesel silindirler sabit ortalama eğriliğe sahiptirler [25].

Tanım 3.2. e^φ yoğunluklu Riemann yüzeyinin G_φ Gauss eğriliği,

$$G_\varphi = G - \Delta_\varphi$$

ile verilir. Burada G Riemann Gauss eğriliği ve Δ_φ Laplace operatörüdür [6].

Riemann metriği g olan bir Riemann manifold (M, g) olsun. M üzerindeki herhangi bir diferensiyellenebilir f fonksiyonunun ∇f gradienti M üzerinde bir vektör alanıdır. $\mathbb{R}^n$ de lokal koordinatlar $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ olmak üzere,

$$(\nabla f)_i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

ile gösterilir. Ayrıca M üzerindeki herhangi bir diferensiyellenebilir F vektör alanı için, divF, M üzerinde skalar bir fonksiyondur ve

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\sqrt{\det g^{ij}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g^{ij}}\, F_i\right)$$

şeklinde tanımlıdır. M üzerindeki v Riemann hacmi

$$v = \sqrt{\det g^{ij}}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 3.1. (Rieman manifoldunda divergens teoremi) M yönlendirilmiş bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde kompakt destekli herhangi bir diferensiyellenebilir X vektör alanı ve parçalı diferensiyellenebilir $\partial\Omega$ sınırına sahip herhangi bir $\Omega \subseteq M$ açık kümesi için

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, d\nu = -\int_{\partial\Omega} < X, N > da \tag{3.2}$$

dır. Burada N, $\partial\Omega$ boyunca birim normaldir [19].

Buradan bazı integral özdeşlikleri elde edilir. İlk olarak (3.2) de X yerine fX yazılırsa aşağıdaki türev özdeşlikleri;

$$\operatorname{div} fX = f.\operatorname{div}X + < \nabla f, X > = f.\operatorname{div}X + X(f) \tag{3.3}$$

ve Diverjans teoreminden,

$$\int_\Omega f.\operatorname{div}X \, d\nu + \int_\Omega X(f) dv = -\int_{\partial\Omega} < X, N > f da \tag{3.4}$$

olduğu ifade edilebilir. Diverjans teoremine göre diferensiyellenebilir her f fonksiyonu ve diferensiyellenebilir F vektör alanı için, F ya da f kompakt destekli olacak şekilde

$$\int_M f\operatorname{div}F \, d\nu = -\int_M < \nabla f, F > dv \tag{3.5}$$

olur. Burada $<.,.> = g(.,.)$ dir. Özel olarak, eğer ψ fonksiyonu için $F = \nabla\psi$ ise,

$$\int_M f \mathrm{div}\nabla\psi \, dv = -\int_M <\nabla f, \nabla\psi> dv \tag{3.6}$$

elde edilir.

M Riemann manifoldunun Laplace operatörü,

$$\Delta \coloneqq \mathrm{div}\, o\, \nabla$$

ile verilir. (3.6) dan ise

$$\int_M f\Delta\psi \, dv = -\int_M <\nabla f, \nabla\psi> dv = \int_M \psi\, \Delta f\, dv.$$

Green formülü elde edilir.

Bu eşitliklerin yoğunluklu manifoldlardaki karşılığı aşağıdaki gibidir: μ, M üzerinde $e^{\mu} dv = d\mu$ ile tanımlı bir ölçü olmak üzere div_{φ} ilişkili diverjansı (ya da φ −diverjans)

$$\mathrm{div}_{\varphi} F = \frac{1}{e^{\varphi}\sqrt{\det g_{ij}}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\varphi}\sqrt{\det g_{ij}}\, F_i\right) \tag{3.7}$$

ile tanımlanır ve (M^n, g, μ) nin φ-Laplace Beltrami operatörü Δ_{φ},

$$\Delta_{\varphi} := \mathrm{div}_{\varphi}\, o\, \nabla. = \frac{1}{e^{\varphi}} \mathrm{div}(e^{\varphi}\nabla.) = \Delta. + \nabla_{\varphi}.. \tag{3.8}$$

ile tanımlanır. μ ölçüsüne göre Green formüllerinin sağlandığı kolayca gösterilebilir, yani

$$\int_M f\Delta_{\varphi}\psi \, d\mu = -\int_M <\nabla f, \nabla\psi> d\mu = \int_M \psi\, \Delta_{\varphi} f\, d\mu \tag{3.9}$$

olur. Burada f ve ψ, $C_0^{\infty}(M)$ ye aittir [26].

Riemann diverjans teoremi ve $\mathrm{div}_{\varphi} X dv_{\varphi} = \mathrm{div}(e^{\varphi} X)\, dv$ eşitliğinin doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1. e^{φ} yoğunluklu, yönlendirilmiş Riemann manifold M olsun. M üzerinde kompakt destekli diferensiyellenebilir X vektör alanı ve parçalı diferensiyellenebilir $\partial\Omega$ sınırına sahip herhangi $\Omega \subseteq M$ açık kümesi için,

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}_{\varphi} X \, dv_{\varphi} = -\int_{\partial\Omega} < X, N > da_{\varphi} \tag{3.10}$$

dir. Burada N, $\partial\Omega$ boyunca iç birim normaldir [29].

İspat: (3.2) den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathrm{div}_{\varphi} X \, dv_{\varphi} &= \int_{\Omega} \mathrm{div}(e^{\varphi} X) \, dv \\ &= -\int_{\partial\Omega} < e^{\varphi} X, N > da \\ &= -\int_{\partial\Omega} < X, N > e^{\varphi} \, da \\ &= -\int_{\partial\Omega} < X, N > da_{\varphi} \end{aligned}$$

elde edilir.

Σ , n- boyutlu (M, g) Riemann manifoldunda gömülü diferensiyellenebilir yönlendirilmiş hiperyüzey olsun. Σ boyunca diferensiyellenebilir herhangi bir X vektör alanı için, X in Σ ye göre $\varphi -$ diverjansı,

$$\mathrm{div}_{\varphi}^{\Sigma} X = \mathrm{div}^{\Sigma} X + < \nabla_{\varphi}, X > \tag{3.11}$$

olarak tanımlanır. Burada div^{Σ}, (M, g) de Σ ye göre diverjansdır. Eğer N, Σ boyunca birim normal ise aşağıdaki teorem ifade edilebilir [29].

Teorem 3.2. $\Psi = e^{\varphi}$ yoğunluğuna sahip n-boyutlu (M, g) Riemann manifold üzerinde bir hiperyüzey Σ olsun. O zaman

$$\mathrm{div}_{\varphi} N = -(n-1) H_{\varphi} \tag{3.12}$$

dir. Burada H_{φ}, Σ yüzeyinin $\varphi -$ ortalama eğriliği ve N, Σ hiperyüzeyinin birim normal vektör alanıdır [30].

İspat: φ -diverjans tanımı ile birlikte, ortalama eğrilik vektörü tanımı ve $< e_i, N >= 0$ olması göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_{\varphi} N &= \frac{1}{e^{\varphi}} \mathrm{div}(e^{\varphi} N) + < \nabla_{\varphi}, N > \\ &= \mathrm{div} N + < N, \nabla_{\varphi} > \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} < \nabla_{e_i} N, e_i > + < N, \nabla_{\varphi} >$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\nabla_{e_i} < e_i, N > - < \nabla_{e_i} e_i , N > \right) + < N, \nabla_{\varphi} >$$

$$= -(n-1) < HN, N > + < N, \nabla_{\varphi} >$$

$$= -(n-1) \left(H - \frac{1}{(n-1)} < \nabla_{\varphi}, N > \right)$$

$$= -(n-1) H_{\varphi}$$

bulunur [30].

Özel olarak n = 3 olması durumunda, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.3. $S, \Psi = e^{\varphi}$ yoğunluğuna sahip, 3 – boyutlu manifoldda bir yüzey M olsun. Bu durumda,

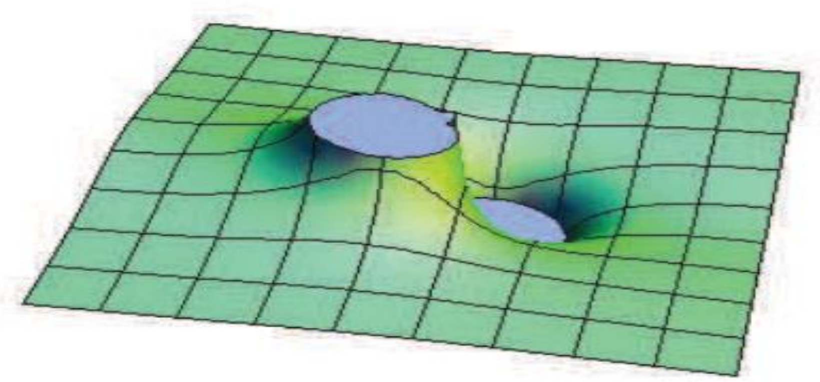
$$\mathrm{div}_{\varphi} N = -2H_{\varphi} \tag{3.13}$$

dir. Burada H_{φ}, S yüzeyinin $\varphi -$ ortalama eğriliği ve N, S yüzeyinin birim normal vektör alanıdır [31].

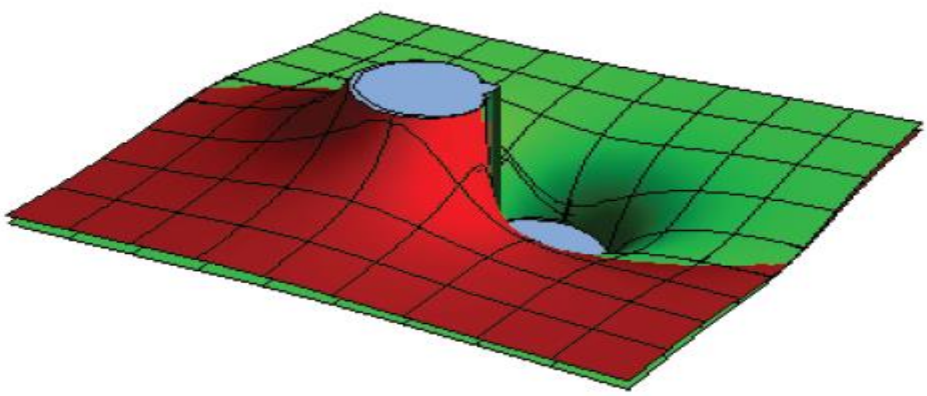
4. $\mathbb{R}^3$de e^z YOĞUNLUKLU, SABİT φ-ORTALAMA EĞRİLİĞE SAHİP YÜZEYLER

Bu bölümde $\mathbb{R}^3$ de e^z log- lineer yoğunluğa sahip bazı sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin sabit φ ortalama eğriliğine sahip olmaları durumunda çeşitli karakterizasyonlar verilip daha sonra bu tür yüzeyler ile ilgili genel bir sınıflandırma yapılmıştır.

4.1. $\mathbb{R}^3$ de e^z Yoğunluklu, Sabit φ-Ortalama Eğriliğe Sahip Regle Yüzeyler



Şekil 4.1. X(u, v) regle yüzeyinin e^z yoğunluklu H_φ ortalama eğriliği [32].



Şekil 4.2. X(u, v) regle yüzeyinin H ortalama eğriliği ile e^z yoğunluklu H_φ ortalama eğriliğinin ilişkisi (■ : H ortalama eğrilik, ■ : H_φ ortalama eğrilik) [32].

Tanım 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ de ortalama eğriliği sıfıra özdeş olan regle yüzeye **minimal regle yüzey** adı verilir [24].

Sabit ortalama eğrilikli regle yüzeyler ile ilgili karakterizasyon aşağıdaki teoremler ile verilebilir:

Teorem 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında minimal regle yüzeyler ya düzlem ya da helikoiddir [25].

Teorem 4.1.2. $\mathbb{R}^3$ de sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğe sahip yalnız regle yüzeyler dik dairesel silindirdir [33].

(2.3) ile parametrize edilmiş helikoidin birim normal vektörü (2.1) formülüne göre

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{(b\sin av, -b\cos av, au)}{\sqrt{a^2u^2 + b^2}} \tag{4.1.1}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ de $e^z = e^\varphi$ yoğunluğuna sahip bir helikoidin $\varphi -$ ortalama eğriliğini hesaplayalım:

$\varphi = z$ yoğunluk fonksiyonunun gradient vektörü $\nabla_\varphi = (0,0,1)$ şeklindedir. Yüzeyin N normali ve ∇_φ gradienti, (3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$H_\varphi = -\frac{1}{2} < (0,0,1), \frac{(b\sin av, -b\cos av, au)}{\sqrt{a^2u^2 + b^2}} >$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa, yoğunluklu ortalama eğrilik

$$H_\varphi = \frac{-au}{2\sqrt{a^2u^2 + b^2}} \tag{4.1.2}$$

olarak elde edilir. Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.1. $\mathbb{R}^3$ de $e^{\varphi = z}$ yoğunluğuna sahip, sabit $\varphi -$ ortalama eğrilikli minimal regle yüzeyler yalnızca düzlemdir.

İspat: $\mathbb{R}^3$ deki her bir düzlem için $< \nabla_\varphi, N > =$ sabit olacağından H_φ nin sabit olduğu açıktır. Diğer minimal regle yüzey olan helikoidin (4.1.2) ile verilen $\varphi -$ortalama eğriliği sabit olamayacağından, helikoid sabit $\varphi -$ortalama eğriliğine sahip değildir.

Şimdi $\mathbb{R}^3$ de $e^z = e^{\varphi}$ yoğunluğuna sahip bir dik dairesel silindirin $\varphi -$ ortalama eğriliğini hesaplayalım:

(2.4) ile parametrize edilmiş bir dik dairesel silindirin birim normal vektörü, (2.1) formülüne göre

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = (-\cos v, -\sin v, 0) \tag{4.1.3}$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin N normali ve $\nabla_{\varphi} = (0,0,1)$ gradienti, (3.1) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$H_{\varphi} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2} < (0,0,1), (-\cos v, -\sin v, 0) >$$

elde edilir. Buradan

$$H_{\varphi} = \frac{1}{2a}$$

olur.

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.2. $\mathbb{R}^3$ de e^{φ} yoğunluğunluklu sabit ortalama eğrilikli regle yüzeyler (silindirler), sabit $\varphi -$ eğriliğine sahiptir.

4.2. $\mathbb{R}^3$ Uzayında e^z Yoğunluklu, Sabit φ-Ortalama Eğriliğe Sahip Dönel Yüzeyler

Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında minimal bir dönel yüzey ya bir düzlemdir ya da bir katenoiddir [34].

Tanım 4.2.3. Katenoid, xz- düzleminde parametrizasyonu $\alpha(v) = \left(c \cosh\left(\frac{v}{c}\right), 0, v\right)$ şeklinde olan zincir eğrisinin (catenary) z-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan **minimal** bir dönel yüzeydir. Bu yüzeyin standart parametrizasyonu,

$$r(u,v) = \left(c \cos u \cosh\left(\frac{v}{c}\right), c \sin u \cosh\left(\frac{v}{c}\right), v\right) \tag{4.2.1}$$

şeklindedir [28].

Bu yüzeyin N birim normal vektörü;

$$r_u = \left(-c \sin u \cosh \frac{v}{c}, c \cos u \cosh \frac{v}{c}, 0\right)$$

$$r_v = \left(\cos u \sinh\left(\frac{v}{c}\right), \sin u \sinh\left(\frac{v}{c}\right), 1\right)$$

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\| r_u \times r_v \|} = \frac{\left(\cos u, \sin u, -\sinh \frac{v}{c}\right)}{\cosh \frac{v}{c}} \tag{4.2.2}$$

şeklindedir.

Şimdi e^z yoğunluklu bir katenoidin yoğunluklu ortalama eğriliğini hesaplayalım:

Yoğunluk fonksiyonu $\varphi = z$ şeklinde alındığında, bu fonksiyonun gradienti $\nabla_\varphi = (0,0,1)$ olur. Yüzeyin birim normali ve ∇_φ vektörü (3.1) de göz önüne alınırsa φ -ortalama eğriliği,

$$H_\varphi = -\frac{1}{2} < (0,0,1), \frac{\left(\cos u, \sin u, -\sinh \frac{v}{c}\right)}{\cosh \frac{v}{c}} >,$$

$$H_\varphi = \frac{\sinh \frac{v}{c}}{2 \cosh \frac{v}{c}} = \frac{1}{2} \tanh \frac{v}{c} \tag{4.2.3}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1. $\mathbb{R}^3$ de e^z yoğunluklu, sabit $\varphi -$ ortalama eğriliğine sahip minimal dönel yüzeyler yalnızca düzlemlerdir.

İspat: $\mathbb{R}^3$ de bir düzlem için $< \nabla_\varphi, N > = \text{sbt}$ olduğundan düzlemin sabit $\varphi -$ ortalama eğriliğine sahip olduğu açıkça görülür. Kabul edelim ki diğer bir minimal dönel yüzey olan katenoid, sabit $H_\varphi -$ eğriliğine sahip olsun. Bu durumda (4.2.3) eşitliğinin v ye göre türevi alınırsa $\frac{1}{\left(\cosh \frac{v}{c}\right)^2} = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup, katenoidin sabit H_φ eğriliğine sahip olmadığı sonucu elde edilir.

Teorem 4.2.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında sabit ortalama eğrilikli dönel yüzey bir küredir [33].

Sabit ortalama eğrilikli bir dönel yüzey olan kürenin, $\varphi -$ ortalama eğriliği için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.2. $\mathbb{R}^3$ de sabit ortalama eğrilikli dönel yüzeyler, sabit $\varphi -$ ortalama eğriliğine sahip değildir.

İspat. (2.5) ile verilen küre yüzeyin birim normal vektörü (2.1) den,

$$N = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\cos v)$$

şeklindedir. Yüzeyin ortalama eğriliği (2.2) den,

$$H = \frac{1}{a}$$

olarak bulunur. Yoğunluk fonksiyonu $\varphi = z$ şeklinde alındığında, bu fonksiyonun gradienti $\nabla_\varphi = (0, 0, 1)$ olur. Yüzeyin birim normali, ortalama eğriliği ve ∇_φ vektörü (3.1) de göz önünde bulundulursa φ -ortalama eğriliği,

$$H_\varphi = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} < (0,0,1), (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, -\cos v) >$$

$$H_\varphi = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\cos v$$

şeklinde elde edilir**.** H_φ nin v ye göre türevi alınırsa $\sin v \neq 0$ olup $\forall$ v $\in [0, \pi]$ için bu eşitlik sağlanmadığından H_φ nin sabit olmadığı sonucuna varılır.

4.3. $\mathbb{R}^3$ Uzayında e^z Yoğunluklu, Sabit φ-Ortalama Eğriliğe Sahip Minimal Helikoidal Yüzeyler

Tanım 4.3.1. $\mathbb{R}^3$ de xz- düzleminde, $I \subset R$ açık aralığı üzerinde tanımlı regüler bir $\gamma(u) = (g(u), 0, f(u)), g(u) > 0$ düzlem eğrisi olmak üzere, $\mathbb{R}^3$ de

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı bir M yüzeyine; Oz eksenli, h adımlı (pitch) ve profil eğrisi γ olan bir **helikoidal yüzey** denir. Burada h bir sabittir. Yani M yüzeyi,

$$X(u, v) = (g(u) \cos v, g(u) \sin v,\ f(u) + hv)$$

şeklinde parametrize edilir[35].

Genelliği bozmaksızın profil eğrisi $\gamma(u) = (u, 0, f(u))$ şeklinde kabul edilebilir. Bu durumda M helikoidal yüzeyi;

$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u) + hv)$

olur. Burada f, I aralığı üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyondur.

Doğrudan bir hesaplama ile, yüzeyin N birim normal vektörü ve H ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$N = \frac{(h\sin v - uf'(u)\cos v, -h\cos v - uf'(u)\sin v, u)}{(h^2 + (1 + f'^2)u^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.3.1}$$

$$H = \frac{(u^2 + h^2)uf''(u) + u^2 f'^3(u) + (u^2 + 2h)f'}{2\left(h^2 + u^2(1 + f'^2)\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.3.2}$$

şeklinde elde edilir .

Şimdi $\mathbb{R}^3$ de M nin e^{φ}, $\varphi = z$ yoğunluklu bir helikoidal yüzey olduğunu kabul edelim ve yüzeyin minimal olması durumunda $\varphi -$ eğrilikli ortalama eğriliğini hesaplayalım:

(3.1) eşitliğinde, (4.3.1) ve $\nabla_{\varphi} = (0, 0, 1)$ gradient vektörü göz önüne alınırsa;

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{2}\left\langle (0, 0, 1), \frac{(h\sin v - uf'(u)\cos v, -h\cos v - uf'(u)\sin v, u)}{(h^2 + u^2(1 + f'^2))^{\frac{1}{2}}}\right\rangle$$

$$= -\frac{u}{2(h^2 + u^2(1 + f'^2))^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.3.1. Sabit $\varphi -$ eğrilikli minimal helikoidal yüzeyler yalnızca düzlemdir.

İspat. Eğer H_{φ} sabit ise $(h^2 + u^2(1 + f'^2))^{\frac{1}{2}} = cu$, $c \in \mathbb{R}^+$ gibi bir sabit olmalıdır. Buna göre,

$$h^2 + u^2(1 + f'^2) = c^2u^2$$

$$h^2 = u^2(c^2 - 1 - f'^2)$$

$$f'^2 = c^2 - 1 - \frac{h^2}{u^2} \tag{4.3.3}$$

olur. (4.3.3)eşitliğinde $|c| > 1$ olması gerekir. Buna göre $c^2 - 1 = d$ denirse,

$$f' = \pm \sqrt{d - \frac{h^2}{u^2}} \tag{4.3.4}$$

ya da

$$f = u\sqrt{d - \frac{h^2}{u^2}} + \frac{hu\sqrt{d - \frac{h^2}{u^2}}\tan^{-1}\left(\frac{h}{\sqrt{du^2 - h^2}}\right)}{\sqrt{du^2 - h^2}} \tag{4.3.5}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi (4.3.3) de bulunan fonksiyonun (4.3.2) de $H = 0$ durumunda

$$(u^2 + h^2)uf''(u) + u^2f'^3(u) + (u^2 + 2h)f' = 0 \tag{4.3.6}$$

şeklinde elde edilen denklemi sağlayıp sağlamadığını inceleyelim:

(4.3.6) denklemi düzenlendiğinde

$$(u^2 + h^2)uf''(u) + \left[\left(1 + f'^2(u)\right)u^2 + 2h\right]f'(u) = 0 \tag{4.3.7}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.3) eşitliğinden $1 + f'^2 = c^2 - \frac{h^2}{u^2}$ ifadesi (4.3.7) de yazılırsa,

$$(u^2 + h^2)uf''(u) + [(c^2 - \frac{h^2}{u^2})u^2 + 2h]f'(u) = 0. \tag{4.3.8}$$

(4.3.4) ün türevi alınıp (4.3.8) de yerine yazıldığında,

$$u(u^2 + h^2)(\frac{h^2}{u^3f'(u)}) + [c^2u^2 - h^2 + 2h]f'(u)$$

$$= \frac{h^2u(u^2 + h^2) + u^3[c^2u^2 - h^2 + 2h](f'(u))^2}{u^3f'(u)} = 0$$

bulunur.

$$h^2u(u^2 + h^2) + u^3(c^2u^2 - h^2 + 2h)(f'(u))^2 = 0$$

olup (4.3.3) yerine yazılırsa,

$$h^2u(u^2+h^2)+u^3(c^2u^2-h^2+2h)\left(d-\frac{h^2}{u^2}\right)=0$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$h^2u^3(u^2+h^2)+u^3(c^2u^2-h^2+2h)(u^2d-h^2)=0$$

ya da

$$c^2d\,u^7+\ (2hd-2h^2d)u^5\ +(2h^4-2h^3)u^3\ =0$$

olur. Bu ise u nun baş katsayısı $c^2d\neq 0$ olan bir polinomudur.

Böylece (4.3.5) deki f fonksiyonu H=0 eşitliğini sağlamaz. Bu da ispatı tamamlar.

4.4. $\mathbb{R}^3$ Uzayında e^z Yoğunluklu, Sabit φ-Ortalama Eğriliğe Sahip Öteleme Yüzeyler

Tanım 4.4.1. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi eğer

$$r: U\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3: (x,y)\rightarrow\big(x,y,z=f(x)+g(y)\big) \tag{4.4.1}$$

immersiyonu ile verilirse, M ye **öteleme yüzeyi** denir [36].

Teorem 4.4.1. $\mathbb{R}^3$ de düzlemlerin yanı sıra tek minimal öteleme yüzeyler

$$z=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)}\right|$$

parametrizasyonuna sahip Scherk yüzeyidir [36].

Sonuç 4.4.1. $\mathbb{R}^3$ de sabit φ - ortalama eğrilikli bir minimal öteleme yüzey yalnızca düzlemdir.

İspat. (4.4.1) parametrizasyonuna sahip bir öteleme yüzeyin birim normal vektörü,

$$N=\frac{r_u\times r_v}{\parallel r_u\times r_v\parallel}=\frac{(-f',-g',1)}{\sqrt{f'^2+g'^2+1}}$$

şeklindedir. e^z yoğunluklu sabit ortalama eğriliğine sahip bir öteleme yüzeyin H_φ eğriliği aşağıdaki şekilde hesaplanır;

N vektörü (3.1) de göz önüne alınırsa

$$H_\varphi = -\frac{1}{2}\langle (0,0,1), \frac{(-f', -g', 1)}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} \rangle,$$

$$H_\varphi = \frac{1}{2\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}} \tag{4.4.2}$$

elde edilir. H_φ nin sabit olduğunu kabul edelim. (4.4.2) nin u ya göre türevi alınırsa $f' \neq 0$ olmak üzere $f'' = 0$ ve v ye göre türevi alınırsa $g' \neq 0$ olmak üzere $g'' = 0$ olduğu bulunur. Bu ise yüzeyin düzlem olması anlamına gelir.

Teorem 4.4.2. $\mathbb{R}^3$ de sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli tek öteleme yüzey, bir dik dairesel silindirdir [33, 37].

Sonuç 4.4.2. $\mathbb{R}^3$ de sıfırdan farklı sabit ortalama eğrilikli öteleme yüzeyler (dik dairesel silindir) sabit φ – ortalama eğriliğine sahiptir.

İspat: Sonuç 4.1.2. den açıktır.

Sınıflandırma: $\mathbb{R}^3$ uzayında M bir minimal regle, helikoidal, dönel ya da öteleme yüzeyi olsun. Eğer M sabit $\varphi -$ ortalama eğriliğe sahip ise M bir düzlemdir.

KAYNAKLAR

[1] F. Morgan, “Manifolds with density,” *Notices of AMS*, vol. 52, no. 8, pp. 853– 858, September 2005.

[2] F. Morgan, “Myers’ theorem with density,” *Kodai Math*. J. vol. 29, no. 3, pp. 455–461, 2006.

[3] F. Morgan, “Manifolds with density and Perelman’s proof of the Poincaré conjecture,” *The American Math. Monthly*, vol. 116, No.2, pp. 134–142, 2009.

[4] M. Gromov, ‘’Isoperimetry of waists and concentration of maps,’’ *Geom. Func. Anal*, vo1. 13, pp. 178-215, 2003.

[5] V. Bayle, ‘’Propri´et´es de concavit´e du profil isop´erim´etrique et applications,’’ Graduate Thesis, Institut Fourier, Universite Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004.

[6] I. Corwin, N. Hoffman, S.Hurder, V.Sesum and Y. Xu, “Differential geometry of manifolds with density,” *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, vol. 7, pp. 1-15, 2006.

[7] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1993.

[8] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri* , 1. Cilt, 4. baskı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 2000.

[9] H. H. Hacısalihoğlu, *Dönüşümler ve Geometriler*, 1. baskı, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1998.

[10] İ. Karaca, ‘’Topoloji Ders Notları,’’ 2013. [Çevrimiçi]. Erişim adresi: http://fen2.ege.edu.tr/~ismetkaraca/topoloji.pdf. [Erişim tarihi 8 Ocak 2020].

[11] B. Şahin, *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayıncılık, 2012.

[12] İ. Karaca, ‘’Geometrik Topoloji,’’ [Çevrimiçi]. Erişim adresi: http://fen2.ege.edu.tr/~ismetkaraca/GeometricTopology.pdf. [Erişim tarihi 12 Ocak 2020].

[13] E. Hartavi, ‘’Genel helisler,’’ Yüksek Lisans Tezi, T.C. Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Şanlıurfa, 2017.

[14] A. Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Ankara, Nobel Yayın Dağıtım, 2010.

[15] A. Gray, *Modern Differantial Geometri of Curves and Surface with Mathematica*, Boca Raton, FL: CRC Press., 1997.

[16] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, Boston, 1992.

[17] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, 2. cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1994.

[18] A. Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, 2. baskı, Ankara, Nobel Yayın Dağıtım, 2004.

[19] A. Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, 2001.

[20] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, 2th ed., Springer, 2010.

[21] H. H. Hacısalihoğlu, *Tensör Geometri,* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 2003.

[22] A. Kuster, R. Jakob, *Minimal Surfaces,* Second Edition, vol. 339, Springer, 2010.

[23] N. Yılmaz, ‘‘ Değişken üstlü uzaylarda Hardy eşitsizlikleri ve bazı uygulamaları,’’ Yüksek Lisans Tezi, T.C. Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir, 2012.

[24] S. Izumiya, and N. Takeuchi, ‘’Generic properties of helices and Bertrand curves,’’ *Journal of Geometry*, pp. 97-109, 2002.

[25] J. Lucas M. Barbosa, A. Gervasio Colares, *Minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1986.

[26] K. Bülent, ‘‘ Diferensiyellenebilir Yüzeyler,’’ [Çevrimiçi]. Erişim adresi: http://bulentkarakas.net/files/ders3_difer_yuzey.pd. [Erişim tarihi: 8 ocak 2020].

[27] J. M. Espinar, ‘’Manifolds with density, applications and Gradient Schrödinger Operators,’’ 2012. [online]. Erişim adresi: http://arxiv.org/abs/1209.6162. [Erişim tarihi: 9 Eylül 2019].

[28] D. The Hıeu, N. Mınh Hoang, ‘’Ruled minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with density e^z,’’ *Pacific J. Math.*, vol. 243, no. 2, 2009.

[29] L. Belarbi, M. Belkhelfa, ‘’On the minimal surface in Euclidean space with density, ‘’ *Nonlinear Studies*, vol. 22, no. 4, pp. 1-11, 2015.

[30] L. Belarbi, M. Belkhelfa, ‘’Some results in Riemannian manifolds with density,’’ *Analele. Univ. Oradea. Fasc. Mathematica*, *Tom XXII*, no. 2, pp. 81-86, 2015.

[31] L. Belarbi, M. Belkhelfa, ‘’Variational problem in Euclidean space with density,’’ *Geometric Science of Information*, LNCS 8085, pp. 257-264, 2013.

[32] N. Ulucan, ‘’ Yoğunluklu offset regle yüzeyler,’’ Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü, Sakarya Üniversitesi, 2019.

[33] R. Lopez, ‘’Surfaces with constant mean curvature in Euclidean space,’’ *International Electronic Journal of Geometry,* vol. 3, no. 2, pp. 67-101, 2010.

[34] A. Gray, S. Salamon and E. Abbena, *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica*, 3th ed., Chapman and Hall/CRC, 2006.

[35] D. W. Yoon, D. S. Kim, Y. H. Kim and J. W. Lee ‘’Constructions of helicoidal surfaces in Euclidean space with density,’’ *Symmetry*, 2017.

[36] L. Verstraelen, J. Walrave, and S. Yaprak, ‘’The minimal translation surface in Euclidean space,’’ *Soochow J. Math*. 20, pp. 77–82, 1994.

[37] H. Liu, ‘’Translation surface with constant mean curvature in 3- dimensional Space,’’ *J. Geom. 64*, pp. 141-149, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

17 Mayıs 1994 de Uşakta doğmuşum. İlk ve ortaöğrenimimi, sırasıyla, yine aynı ilde Aybey İlköğretim Okulu'nda ve İzzettin Çalışlar Lisesi'nde tamamladım. Yüksek öğrenimime 2013 yılında Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladım. 2017 yılında mezun oldum ve aynı yıl yüksek lisans programına, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında başladım ve halen bu bölümde öğrenci olarak devam etmekteyim.