DEVİRLİ HİPERGRUPLAR

Sümeyye EROL

Yüksek Lisans

Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Dilek BAYRAK

2021

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEVİRLİ HİPERGRUPLAR

Sümeyye EROL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Dilek BAYRAK

TEKİRDAĞ-2021

ÖZET

Yüksek Lisans

DEVİRLİ HİPERGRUPLAR

Sümeyye EROL

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Dilek BAYRAK

Bu tezin genel amacı devirli hipergrupların alt hipergruplarının özelliklerini araştırmaktır. Çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde devirli hipergruplar üzerine literatürde bulunan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde hipergruplardaki temel kavramların bir derlemesi sunulmuştur. Çalışmanın kısmen özgün olan üçüncü bölümünde ise devirli hipergruplar incelenmiştir. Özel olarak devirli hipergrupların alt hipergruplarının hangi şartlar altında devirli olabileceği araştırılmıştır. Devirli gruplarda var olan birçok teoremin devirli hipergruplarda sağlanmadığı örneklerle gösterilmiştir. Diğer yandan hipergrupların homomorfik görüntülerinde grup teorisindekilere paralel sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: hipergrup, devirli hipergrup, alt hipergrup

2021, 46 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

CYCLIC HYPERGROUPS

Sümeyye EROL

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Dilek BAYRAK

The general purpose of this thesis is to investigate the properties of subhypergroups of cyclic hypergroups. The study consists of three main parts. In the first part, studies on cyclic hypergroups in the literature are included. In the second part, a compilation of basic concepts in hypergroups is presented. In the third part of the study, which is partially original, cyclic hypergroups were examined. In particular, it was investigated under which conditions subhypergroups of cyclic hypergroups can be cyclic. It has been shown with examples that many theorems that exist in cyclic groups are not provided in cyclic hypergroups. On the other hand, parallel results to the ones in group theory were obtained in homomorphic images of hypergroups.

Key words: hypergroup, cyclic hypergroup, subhypergroup

2021, 46 pages

İÇİNDEKİLER

ÖZET ... **4**
ABSTRACT ... **ii**
İÇİNDEKİLER ... **iii**
ÇİZELGE DİZİNİ ... **iv**
ŞEKİL DİZİNİ ... **v**
SİMGELER ve KISALTMALAR ... **vi**
TEŞEKKÜR ... **vii**
1. GİRİŞ ... **1**
2. HİPERGRUPLAR ... **3**
2.1. Hipergruplar ... 3
2.2. Alt Hipergruplar ... 9
2.3. Kanonik Hipergruplar ... 13
2.4. Hipergrupların Kartezyem Çarpımı ... 15
2.5. Homomorfi ... 18
3. DEVİRLİ HİPERGRUPLAR ... **21**
3.1. Devirli Hipergrup Tanımı ... 21
3.2. Devirli Hipergrupların Alt Hipergrupları ... 23
3.3. *P*-Devirli Hipergruplar ... 31
3.4. Devirli Hipergrupların Kartezyen Çarpımı ... 33
3.5. Devirli Hipergrupların Homomorfik Görüntüleri ... 33
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER ... **35**
KAYNAKLAR ... **37**
ÖZGEÇMİŞ ... **39**

ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 2.1. Örnek 2.3.4 de verilen hipergrubun işlem tablosu 15
Çizelge 3.1. Örnek 3.2.4 de verilen hipergrubun işlem tablosu 26
Çizelge 3.2. Örnek 3.2.7 de verilen hipergrubun işlem tablosu 27
Çizelge 3.3. Örnek 3.2.8 de verilen hipergrubun işlem tablosu 28

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 3.1. Örnek 3.2.1 deki L kafesinin Hasse diyagramı 24

SİMGELER VE KISALTMALAR

$A \circ B$	: A ile B nin hiperçarpımı
gcd	: En büyük ortak bölen
$(H,\circ)$	: Hipergrupoid
ind(h)	: h nin indeksi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_{\geq i}$	: i doğal sayısından büyük ya da eşit olan doğal sayılar kümesi
$\wp^*(H)$	: H nin boş kümeden farklı alt kümelerinin kümesi
Q_8	: Quaternion grup
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
Sub(H)	: H nin alt hipergruplarının kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\wedge$	: İnfumum
$\vee$	: Supremum
$< a >$	: a elemanı tarafından üretilen küme

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, maddi ve manevi desteğini benden esirgemeyen, sabırla bana yol gösteren danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Dilek Bayrak'a tüm desteklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Nisan, 2021 Sümeyye EROL

Matematik Öğretmeni

1. GİRİŞ

Hipergrup kavramı, ilk olarak 1934 yılında “8th. Congress of Scandinavion Mathematicians” adlı konferansta F. Marty [1] tarafından tanıtılmıştır ve bu çalışma cebirsel hiperyapıların çalışılmasına öncülük etmiştir. Genel olarak klasik cebirsel yapılar ile olan bağlantıları ve geometri, topoloji, olasılık teorisi, fuzzy ve kaba kümeler teorisi gibi alanlardaki çeşitli uygulamaları araştırılmıştır [2]. Klasik cebirsel yapılarda iki elemanın bir işlem altındaki görüntüsü bir eleman oluyorken, cebirsel hiperyapılarda iki elemanın bir hiperişlem altındaki görüntüsü bir kümeye karşılık gelir. Böylelikle cebirsel hiperyapılar ile cebirsel yapıların uygun bir genellemesi elde edilmiştir.

Grup teorinin önemli kavramlarından biri devirliliktir. Marty [1] tarafından başlatılan cebirsel hiperyapılar teorisinde devirlilik kavramını ilk olarak Wall [3] çalışmıştır. Daha sonra devirli hipergruplar için iki farklı tanım verilmiştir. Bunlardan biri De Salvo, Freni, Corsini [4, 5] tarafından çalışılmıştır. De Salvo ve Freni [4], Wall'ın aksine, sadece hipergruplar için değil, aynı zamanda yarıhipergruplar için devirlilik kavramını incelemişlerdir. Daha sonra Freni [6] de hipergrupoidler için devirlilik kavramını araştırmıştır. Bu makalelerin çoğu İtalyan üniversite dergilerinde yayınlanan İtalyanca makalelerdir ve bazıları da Fransızca yazılmıştır. Bu makalelerinde Wall’ın çalışmasından bahsetmemişlerdir. Devirli hipergrup çalışan bir diğer grup ise Vougiouklis, Konguetsof, Kessoglides ve Spartalis’dir [7]. Vougiouklis [8], De Salvo ve Freni ile aynı zamanlarda İngilizce bir makale yayınlamıştır. Vougiouklis bu makalesinde, Wall’un orijinal tanımını kullanmıştır ve Vougiouklis P-devirli hipergrupların daha doğrusu P-hiperişlemli hipergruplarda devirliliğin çalışılmasına ön ayak olmuştur. Vougiouklis’un tanımı devirliliğin birçok türünü tanımlamak için olabildiğince kapsamlıdır. Vougiouklis’in tanımladığı devirli hipergrup tanımı Wall'ın çalışmasına paralel olup, diğer tanıma kıyasla daha uygundur. Tüm bu çalışmaların kapsamlı bir derlemesi yakın bir zamanda Novak, Krehlik ve Cristea [9] tarafından verilmiştir.

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde devirli hipergruplarda yapılan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölüm beş kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda yarıhipergrup, hipergrup ve join space tanıtılarak ileri kısımlarda da kullanılmak üzere bazı örnekler verilmiştir. İkinci kısımda bir hipergrubun alt hipergrupları ve alt hipergrupların özel sınıfları tanıtılmıştır. Bu özel alt hipergruplar arasındaki ilişkiler verilerek örneklerle açıklanmıştır. Üçüncü kısımda hipergrupların özel bir sınıfı olan kanonik hipergruplar tanıtılmıştır. Dördüncü kısımda ise hipergrupların kartezyen çarpımları tanımlanarak ilgili teoremler Bayrak [10]'ın çalışmasından derlenmiştir. Beşinci kısımda hipergruplar üzerinde tanımlanan homomorfiler örneklerle incelenmiştir.

Üçüncü bölüm de beş kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda Vougiouklis'in tanımladığı devirli hipergrup tanımları verilerek örneklendirilmiştir. İkinci kısımda "Bir devirli hipergrubun alt hipergrupları hangi şartlar altında devirli olur?" sorusunun cevabı aranmıştır. Gruplardaki birçok teoremin hipergruplarda geçerli olmadığı aksi örneklerle açıklanmıştır. Üçüncü kısımda *P*-devirli hipergrupların üzerine Vougiouklis [8]'in çalışmasının derlemesi sunulmuştur. Dördüncü kısımda grup teorinin aksine mertebeleri aralarında asal olan iki devirli hipergrubun kartezyen çarpımlarının devirli olmadığı gösterilmiştir. Son kısımda ise iki devirli hipergrup arasındaki homomorfinin hangi özellikleri koruduğu incelenmiştir.

Sonuçlar ve Öneriler bölümünde çalışmadaki önemli noktalar özetlenmiştir. Bu çalışmada derlenen bilgilerden yola çıkarak cevapları aranabilecek, yeni çalışmalara yol gösterebilecek birkaç soru ile öneriler sunulmuştur.

2. HİPERGRUPLAR

2.1. Hipergruplar

Bu bölümde hipergruplar tanıtılmıştır ve bazı örnekleri incelenmiştir. Verilen tanım ve teoremler Davvaz ve Leoreanu [11] dan derlenmiştir.

Tanım 2.1.1. H boştan farklı bir küme olsun. H nın boştan farklı tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme $\wp^*(H)$ olmak üzere H üzerindeki hiperişlem

$$\circ: H \times H \to \wp^*(H)$$

şeklindedir. $(a, b) \in H \times H$ elemanının $\circ$ hiperişlemi altındaki görüntüsü a ve b nin hiperçarpımı olarak tanımlanır ve $a \circ b$ ile gösterilir. $(H,\circ)$ ikilisine hipergrupoid denir.

A ve B, H nin boştan farklı alt kümeleri ise

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b$$

dir. $A \circ B$ kümesine A ve B nin hiperçarpımı denir. $x \in H$ olmak üzere $A \circ x = A \circ \{x\}$ ve $x \circ B = \{x\} \circ B$ dir. Ayrıca herhangi $a, b \in H$ için,

$$a/b = \{x \in H: a \in x \circ b\}$$

$$b \backslash a = \{x \in H: a \in b \circ x\}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.2. $(H,\circ)$ hipergrupoid olsun.

(i) Her $a, b, c \in H$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ sağlanıyorsa H ye yarı hipergrup denir.

(ii) Her $a \in H$ için $a \circ H = H \circ a = H$ sağlanıyorsa H ye quasi hipergrup denir.

(iii) H hem yarı hipergrup hem de quasi hipergrup ise H ye hipergrup denir.

(iv) $(H,\circ)$ hipergrubunda her $a, b \in H$ için $a \circ b = b \circ a$ ise H ye değişmeli hipergrup denir.

Bir $(G,*)$ grubunun aynı zamanda bir hipergrup olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla hipergruplar grup teorinin uygun bir genelleştirilmesidir.

Tanım 2.1.3. $(H,\circ)$ hipergrubu değişmeli hipergrup ve her $a, b, c, d \in H$ için

$$a/b \cap c/d \neq \emptyset \Rightarrow a \circ d \cap b \circ c \neq \emptyset$$

sağlanıyorsa $(H,\circ)$ ya join space denir.

Bazı hipergrup ve join space örnekleri aşağıda görülebilir.

Örnek 2.1.4. H boştan farklı bir küme olsun. Her $a, b \in H$ için $a \circ_1 b = \{a, b\}$ işlemi ile H join spacedir.

Örnek 2.1.5. G bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için $a \circ_2 b = \langle a, b \rangle$ işlemi ile a ve b tarafından üretilen G nin alt grubu olmak üzere $(G,\circ_2)$ değişmeli hipergruptur.

Örnek 2.1.6. $(L,\wedge,\vee)$ bir tam kafes olsun. Her $a \in L$ için $F(a) = \{x \in L | a \leq x\}$, yani $F(a)$ a dan üretilen esas filtreyi göstermek üzere, her $a, b \in L$ için

$$a \circ_3 b = F(a \wedge b)$$

işlemi ile $(L,\circ_3)$ join spacedir.

Her $a, b, c \in L$ için,

$$a \circ_3 (b \circ_3 c) = a \circ_3 F(b \wedge c) = \bigcup_{x \in F(b \wedge c)} F(a \wedge x) = F(a \wedge b \wedge c)$$

$$(a \circ_3 b) \circ_3 c = F(a \wedge b) \circ_3 c = \bigcup_{x \in F(a \wedge b)} F(x \wedge c) = F(a \wedge b \wedge c)$$

dir. Böylece $a \circ_3 (b \circ_3 c) = (a \circ_3 b) \circ_3 c$ olduğundan $(L,\circ_3)$ yarı hipergrup elde edilir.

L tam kafes olduğundan en büyük eleman 1 ve en küçük eleman 0 vardır.

$$x \circ_3 L = \bigcup_{y \in L} x \circ_3 y = \bigcup_{y \in L} F(x \wedge y) = F(x \wedge 0) = F(0) = L$$

$$L \circ_3 x = \bigcup_{y \in L} y \circ_3 x = \bigcup_{y \in L} F(y \wedge x) = F(0 \wedge x) = F(0) = L$$

olduğundan $x \circ_3 L = L \circ_3 x = L$ ve böylece $(L,\circ_3)$ hipergrup elde edilir. Ayrıca her $a, b \in L$ için $a \circ_3 b = F(a \wedge b) = b \circ_3 a$ olduğundan $(L,\circ_3)$ değişmeli hipergruptur.

$x \in a/b \cap c/d$ olsun. O zaman $x \in a/b$ ve $x \in c/d$ dir.

$a/b = \{x \in H| \; a \in x \circ_3 b\} = \{x \in H| \; a \in F(x \wedge b)\}$

$c/d = \{x \in H| \; c \in x \circ_3 d\} = \{x \in H| \; c \in F(x \wedge d)\}$

$x \in a/b \cap c/d$ olması $a = x$ veya $a = b$, $c = x$ veya $c = d$ olması ile mümkündür.

$a \circ_3 d = F(a \wedge d)$ ve $b \circ_3 c = F(b \wedge c)$ olmak üzere,

(i) $x = a = c$ ise

$(a \circ_3 d) \cap (b \circ_3 c) = F(a \wedge d) \cap F(b \wedge c) = F(x \wedge d) \cap F(b \wedge x)$

dir. Buradan $x \in F(x \wedge b) \cap F(x \wedge d)$, yani $a \circ_3 d \cap b \circ_3 c \neq \emptyset$ dir.

(ii) $a = b, c = d$ ise

$(a \circ_3 d) \cap (b \circ_3 c) = F(a \wedge d) \cap F(b \wedge c) = F(a \wedge d) \cap F(a \wedge d) \neq \emptyset$

dir. Buradan $(a \circ_3 d) \cap (b \circ_3 c) \neq \emptyset$’dir.

Sonuç olarak, $(L,\circ_3)$ join spacedir.

Örnek 2.1.7. $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $i \in \mathbb{N}$ için $S_i = 2^i\mathbb{Z}$ alt grubu göz önüne alınsın.

Her bir $x \in \mathbb{Z}\backslash \{0\}$ için bir tek $n(x)$ doğal sayısı vardır öyle ki $x \in S_{n(x)}\backslash S_{n(x)+1}$ dir. $\mathbb{Z}\backslash \{0\}$ da değişmeli hiper işlem aşağıdaki gibi tanımlansın:

$n(x) < n(y)$ iken $x \circ y = x + S_{n(y)}$

$n(x) = n(y)$ iken $x \circ y = S_{n(x)}\backslash\{0\}$

$n(x) > n(y)$ iken $x \circ y = y + S_{n(x)}$.

Eğer $n(x) < n(y)$ ise $n(x + y) = n(x)$ olduğuna dikkat edilmelidir. O zaman $(\mathbb{Z}\backslash \{0\},\circ)$ hipergruptur.

$x, y, z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ olsun. O zaman $x \in S_{n(x)} \backslash S_{n(x)+1}$, $y \in S_{n(y)} \backslash S_{n(y)+1}$ ve $z \in S_{n(z)} \backslash S_{n(z)+1}$ olacak şekilde bir tek $n(x), n(y), n(z)$ doğal sayısı vardır. Buradan $x = 2^{n(x)}a,\ y = 2^{n(y)}b,\ z = 2^{n(z)}c$ olacak şekilde $a, b, c \in \mathbb{Z} \backslash 2\mathbb{Z}$ vardır.

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ eşitliğinin varlığı incelenirken, $n(x) < n(y) < n(z)$ olduğu varsayılsın.

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= \left(x + 2^{n(y)}\mathbb{Z}\right) \circ z \\ &= (2^{n(x)}a + 2^{n(y)}\mathbb{Z}) \circ z \\ &= 2^{n(x)}(a + 2^{n(y)-n(z)}\mathbb{Z}) \circ z \\ &= 2^{n(x)}q \circ z \\ &= 2^{n(x)}q + 2^{n(z)}c \\ &= 2^{n(x)}\mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + 2^{m}\mathbb{Z}) \\ &= x \circ \left(2^{n(y)}b + 2^{n(z)}\mathbb{Z}\right) \\ &= 2^{n(x)}a \circ \left(2^{n(y)}\left(b + 2^{n(z)-n(y)}\mathbb{Z}\right)\right) \\ &= 2^{n(x)}a + 2^{n(y)}\mathbb{Z} \\ &= 2^{n(x)}\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Buradan $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ dir. Benzer şekilde diğer durumlar için de birleşme özelliğinin sağlandığı görülür. Sonuç olarak her $x, y, z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ için $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ olduğundan $(\mathbb{Z} \backslash \{0\}, \circ)$ yarı hipergruptur.

$x \circ \mathbb{Z} \backslash \{0\} = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ eşitliğinin varlığını incelerken,

$y \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ olsun. O zaman $x = 2^{n(x)}a,\ y = 2^{n(y)}b$ olacak şekilde $n(x), n(y) \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.

(i) $n(x) < n(y)$ ise $x \circ x = 2^{n(x)}\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ dir. Yani $y \in x \circ x \subseteq x \circ \mathbb{Z} \backslash \{0\}$,

(ii) $n(y) < n(x)$ ise $x \circ y = y + 2^{n(x)}\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ dir. Yani $y \in x \circ y \subseteq x \circ \mathbb{Z} \backslash \{0\}$,

(iii) $n(y) = n(x)$ ise $x \circ x = 2^{n(x)}\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ dir. Yani $y \in x \circ x \subseteq x \circ \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

elde edilir. Böylece $(\mathbb{Z} \backslash \{0\}, \circ)$ hipergruptur.

Örnek 2.1.8. $(A,\circ)$ en az iki elemanlı bir hipergrup ve $T = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ öyle ki $A \cap T = \emptyset$ ve $i \neq j$ için $t_i \neq t_j$ olsun. $H = A \cup T$ da $\otimes$ hiper işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$(x,y) \in A^2$ ise $x \otimes y = A$;

$(x,t) \in A \times T$ ise $x \otimes t = t \otimes x = A\backslash\{x\} \cup T$;

$(t_i,t_j) \in T \times T$ ise $t_i \otimes t_j = A \cup \{t_{i+j}\}$.

Böylece $(H,\otimes)$ hipergruptur.

$x,y,z \in H$ olsun.

(i) $x,y,z \in A$ ise $(x \otimes y) \otimes z = A \otimes z = A$ ve $x \otimes (y \otimes z) = x \otimes A = A$

(ii) $x = t_i \in T$ (i bir doğal sayı), $y,z \in A$ ise

$$t_i \otimes (y \otimes z) = t_i \otimes A = (\cup_{a\in A} A\backslash\{a\}) \cup T = H,$$

$$\begin{aligned}(t_i \otimes y) \otimes z &= (\left(\bigcup_{b\in A} A\backslash\{b\}\right) \cup T) \otimes z \\ &= \left(\left(\bigcup_{b\in A} A\backslash\{b\}\right) \otimes z\right) \cup (T \otimes z) \\ &= A \cup A\backslash\{z\} \cup T \\ &= H\end{aligned}$$

dir. Böylece $t_i \otimes (y \otimes z) = (t_i \otimes y) \otimes z$ elde edilir. Benzer şekilde $y = t_j \in T$ (j bir doğal sayı), $x,z \in A$ ve $z = t_k \in T$ (k bir doğal sayı), $x,y \in A$ olduğu durumlar (ii) gibi gösterilir.

(iii) $x = t_i, y = t_j \in T$ (i,j bir doğal sayı), $z \in A$ ise

$$(t_i \otimes t_j) \otimes z = (A \cup \{t_{i+j}\}) \otimes z = (A \otimes\ z) \cup (t_{i+j} \otimes z) = A \cup (A\backslash\ \{z\} \cup T) = H,$$

$$\begin{aligned}t_i \otimes \left(t_j \otimes z\right) &= t_i \otimes (A\ \backslash\{z\} \cup T) \\ &= (t_i \otimes A\ \backslash\{z\}) \cup (t_i \otimes T) \\ &= \left(\bigcup_{c\in A\backslash\{z\}} (A\backslash\{c\} \cup T)\right) \cup \left(\bigcup_{t_k\in T} A \cup \{t_{i+k}\}\right)\end{aligned}$$

$= H$

dir. Böylece $(t_i \otimes t_j) \otimes z = t_i \otimes (t_j \otimes z)$ elde edilir. Benzer şekilde $y = t_j,\ z = t_k \in T$ (j, k bir doğal sayı), $x \in A$ ve $x = t_i, z = t_k \in T$ (i, k bir doğal sayı), $y \in A$ olduğu durumlar (iii) gibi gösterilir.

(iv) $t_i,\ t_j,\ t_k \in T$ (i, j ve k bir doğal sayı)ise

$$\begin{aligned}(t_i \otimes t_j) \otimes t_k &= (A \cup \{t_{i+j}\}) \otimes t_k \\ &= (A \otimes t_k) \cup (t_{i+j} \otimes t_k) \\ &= \left(\bigcup_{a \in A} A\backslash\{a\} \cup T\right) \cup (A \cup \{t_{i+j+k}\}) \\ &= H.\end{aligned}$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned}t_i \otimes (t_j \otimes t_k) &= t_i \otimes (A \cup \{t_{j+k}\}) \\ &= (t_i \otimes A) \cup (t_i \otimes t_{j+k}) \\ &= \left(\bigcup_{b \in A} A\backslash\{b\} \cup T\right) \cup (A \cup \{t_{i+j+k}\}) \\ &= H\end{aligned}$$

olduğundan $(t_i \otimes t_j) \otimes t_k = t_i \otimes (t_j \otimes t_k)$ elde edilir. Böylece her $x, y, z \in H$ için $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ dir. $(H,\otimes)$ yarıhipergruptur.

$x \in H$ olsun.

$x \in A$ ise $x \otimes H = x \otimes (A \cup T) = (x \otimes A) \cup (x \otimes T) = A \cup (A\backslash\{x\} \cup T) = H$ dir.

$x = t \in T$ ise

$$\begin{aligned}x \otimes H &= t \otimes (A \cup T) \\ &= (t \otimes A) \cup (t \otimes T) \\ &= (\bigcup_{b \in A} A\backslash\{b\} \cup T) \cup (A \cup T) \\ &= H\end{aligned}$$

dir. Böylece her $x \in H$ için $x \otimes H = H$ dir. Sonuç olarak $(H, \otimes)$ hipergruptur.

2.2. Alt Hipergruplar

Bu kısımda bir hipergrubun alt hipergrubu tanıtılmış ve alt hipergrupların özel sınıfları incelenmiştir. Verilen tanım, teorem ve örnekler genel olarak Davvaz ve Leoreanu [11]'ın kitabından derlenmiştir.

Tanım 2.2.1. $(H,\circ)$ hipergrup olsun. $\emptyset \neq K \subseteq H$ olsun. K, H nin $\circ$ işlemi ile bir hipergrup ise K ye, H nin alt hipergrubu denir. Başka bir deyişle,

(i) Her $a, b \in K$ için $a \circ b \subseteq K$,

(ii) Her $a \in K$ için $a \circ K = K \circ a = K$

ise K, H nin alt hipergrubudur.

Açık olarak $(H,\circ)$ hipergrubunda H nin kendisi alt hipergruptur. H nin tüm alt hipergruplarının oluşturduğu küme $Sub(H)$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.2.2. $(H,\circ)$ bir hipergrup ve K, H nin alt hipergrubu olsun.

(i) $k_1, k_2 \in K$ için $k_1 \in x \circ k_2$ $(k_1 \in k_2 \circ x)$ iken $x \in K$ ise K ye soldan (sağdan) kapalı denir. K soldan ve sağdan kapalı ise K ye kapalıdır denir.

(ii) $x, y \in H$ için $x \in K \circ y$ iken $y \in K \circ x$ $(x \in y \circ K$ iken $y \in x \circ K)$ ise K ye soldan (sağdan) tersinir (invertible) denir. K soldan ve sağdan tersinir (invertible) ise K ye tersinir (invertible) denir.

(iii) Her $x \in H$ için $(K \circ x) \cap [(H \backslash K) \circ x] = \emptyset$ $((x \circ K) \cap [x \circ (H \backslash K)] = \emptyset)$ ise K ye soldan (sağdan) ultra kapalı denir. K soldan ve sağdan ultra kapalı ise K ye ultra kapalıdır denir.

(iv) K soldan (sağdan) kapalı ve her $x \in H$ için öyle bir $x' \in H$ vardır öyle ki $x \circ x' \subseteq K$ $(x' \circ x \subseteq K)$ ise K ye soldan (sağdan) eşleniklenebilir (conjugable) denir. K soldan ve sağdan eşleniklenebilir (conjugable) ise K ye eşleniklenebilir (conjugable) denir.

Alt hipergrupların, kapalı alt hipergrupların, tersinir alt hipergrupların, ultra kapalı alt hipergrupların ve eşleniklenebilir (conjugable) alt hipergrupların kümeleri, sırasıyla, $Sub(H)$, $CSub(H)$, $ISub(H)$, $USub(H)$ ve $ConSub(H)$ notasyonlarıyla gösterilmiştir. Üstelik bu kümeler içerme bağıntısına göre kısmi sıralı kümelerdir. Bu kümeler üzerindeki bağıntı aşağıda ifade edilmiştir:

$ConSub(H) \subseteq USub(H) \subseteq ISub(H) \subseteq CSub(H) \subseteq Sub(H)$

H nin kısmi birimlerinin kümesi aşağıdaki küme ile ifade edilir ve I_P notasyonu ile gösterilir.

$I_P = \{e \in H | \exists x \in H$ öyle ki $x \in (x \circ e) \cup (e \circ x)\}$

Örnek 2.2.3. Örnek 2.1.7'deki $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\circ)$ hipergrubunda her $i \in \mathbb{N}$ için $(S_i\setminus\{0\},\circ)$ alt hipergruptur. Üstelik $S_i\setminus\{0\}$ kümeleri $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ nin tersinir (invertible) alt hipergruplarıdır.

Şimdi her $i \in \mathbb{N}$ için $(S_i\setminus\{0\},\circ)$ nin $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ nin bir alt hipergrubu olduğunu göstermek için $S_i\setminus\{0\} = 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olmak üzere, $x, y \in 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olsun. O zaman $x = 2^i.k,\ y = 2^i.l$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır.

(i) k, l tek ise $x \circ y = 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\} \subseteq 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ dir.

(ii) k veya l çift ve $x = 2^m.a,\ y = 2^n.b$ yazılabiliyorsa
$m < n$ iken $x \circ y = x + 2^n\mathbb{Z} = 2^m.a + 2^n\mathbb{Z} = 2^m(a + 2^{n-m}\mathbb{Z}) \subseteq 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ve
$n < m$ iken $x \circ y = y + 2^m\mathbb{Z} = 2^n.a + 2^m\mathbb{Z} = 2^n(a + 2^{m-n}\mathbb{Z}) \subseteq 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ dir.

Böylece alt hipergrup tanımının ilk koşulu sağlanır.

Diğer yandan her $x \in 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ için $x \circ 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\} = 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ olduğundan $2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ alt hipergruptur. Her $i \in \mathbb{N}$ için $(S_i\setminus\{0\},\circ)$, $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ nin bir alt hipergrubudur. Üstelik tersinir (invertible) dir.

$x \in 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\} \circ y$ ve m tek sayı olmak üzere $y = 2^l m$ olsun.

$$2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\} \circ y = (2^i a + 2^l\mathbb{Z}) \cup (2^l\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \cup (2^l m + 2^{l+n}\mathbb{Z})\ (a \text{ tek sayı})$$
$$= 2^i(a + 2^{l-i}\mathbb{Z}) \cup (2^l\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \cup (2^l(m + 2^n\mathbb{Z}))$$

olduğundan $y \in 2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\} \circ x$ dir. Böylece $2^i\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ tersinir (invertible) alt hipergruptur.

Yardımcı Teorem 2.2.4. $(H,\circ)$ bir hipergrup ve K, H nin alt hipergrubu olsun. K nin tersinir (invertible) olması için gerek ve yeter şart $\{x \circ K\}_{x \in H}$ kümesi H nin bir parçalanışı olmasıdır.

İspat: $(H,\circ)$ bir hipergrup ve K, H nin alt hipergrubu olsun.

Önce K tersinir olsun. $x, y \in H$ için $z \in (x \circ K) \cap (y \circ K)$ olsun. O zaman $z \in x \circ K$ ve $z \in y \circ K$ dir. K tersinir olduğu için $x \in z \circ K$ ve $y \in z \circ K$ dir. Buradan $x \circ K \subseteq z \circ K$ ve $y \circ K \subseteq z \circ K$ elde edilir. Böylece $x \circ K = z \circ K = y \circ K$ dir. Sonuç olarak $\bigcup_{x \in H} (x \circ K) = H$ dir. Yani $\{x \circ K\}_{x \in H}$ H nin bir parçalanışıdır.

Şimdi $\{x \circ K\}_{x \in H}$ H nin bir parçalanışı olsun. $y \in H$ için $x \in y \circ K$ olsun. O zaman $x \circ K \subseteq y \circ K$ olur ki $\{x \circ K\}_{x \in H}$ H nin bir parçalanışı olduğundan $x \circ K = y \circ K$ dir. Buradan $x \in x \circ K$ elde edilir. Böylece her $x \in H$ için $x \in x \circ K$ ve her $y \in H$ için $y \in y \circ K$ iken $y \in x \circ K$ elde edilir. Sonuç olarak K tersinirdir.

Teorem 2.2.5. $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K, H nin eşleniklenebilir (conjugable) alt hipergrubu ise K ultra kapalıdır.

İspat: $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K, H nin eşleniklenebilir (conjugable) alt hipergrubu olsun. Gösterilmesi gereken $(x \circ K) \cap \big(x \circ (H \backslash K)\big) = \emptyset$ olduğudur.

$B = (x \circ K) \cap \big(x \circ (H \backslash K)\big)$ olarak tanımlansın. K eşleniklenebilir (conjugable) olduğundan kapalıdır ve $x \in H$ için $x \circ x' \subseteq K$ olacak şekilde bir $x' \in H$ vardır.

$$x' \circ B = x' \circ \Big((x \circ K) \cap \big(x \circ (H \backslash K)\big)\Big)$$

$$\subseteq \big(x' \circ (x \circ K)\big) \cap \Big(x' \circ \big(x \circ (H \backslash K)\big)\Big)$$

$$= K \cap (K \circ (H \backslash K))$$

$$\subseteq K \cap (H \backslash K) \qquad (K \text{ kapalı olduğu için})$$

$$= \emptyset$$

dir. Böylece $(x \circ K) \cap \big(x \circ (H \backslash K)\big) = \emptyset$ elde edilir. Sonuç olarak K ultra kapalıdır.

Teorem 2.2.6. $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K, H nin ultra kapalı alt hipergrubu ise K tersinir (invertible) dir.

İspat: $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K, H nin ultra kapalı alt hipergrubu olsun.

K, H nin ultra kapalı alt hipergrubu olduğu için $x \in K$ için $(K \circ x) \cap [(H \backslash K) \circ x] = \emptyset$ dir. Ayrıca $H = H \circ x = (K \cup (H \backslash K)) \circ x = (K \circ x) \cup [(H \backslash K) \circ x]$ dir.

Her $x \in K$ için $(H \backslash K) \circ x = H \backslash K$ olduğundan

$(H \backslash K) \circ K = H \backslash K$ dır. (2.1)

$a \in H$, $k_1, k_2 \in K$ için $k_1 \in a \circ k_2$ iken $a \notin H \backslash K$ olacağı için $a \in K$ dir. Böylece K kapalıdır.

$\{x \circ K\}_{x \in H}$ nin H nin bir parçalanışı olduğunu göstermek için $y \in (x \circ K) \cap (z \circ K)$ olsun. O zaman $y \circ K \subseteq x \circ K$ dir.

$y \circ (H \backslash K) \subseteq (x \circ K) \circ (H \backslash K) = x \circ [K \circ (H \backslash K)]$ olup denklem 2.1 den $y \circ (H \backslash K) \subseteq x \circ (H \backslash K)$ elde edilir.

Böylece $H = (x \circ K) \oplus (x \circ (H \backslash K))$ dir. K ultra kapalı olduğundan $H = (y \circ K) \oplus (y \circ (H \backslash K))$ yazılabilir. Böylece $(x \circ K) = (y \circ K)$ ve benzer şekilde $(z \circ K) = (y \circ K)$ dır. Buradan $\{x \circ K\}_{x \in H}$ H nin bir parçalanışıdır. Sonuç olarak Yardımcı Teorem 2.2.4 den dolayı K tersinirdir.

Teorem 2.2.7. $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K, H nin tersinir (invertible) alt hipergrubu ise K kapalı alt hipergruptur.

İspat: $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K, H nin tersinir (invertible) alt hipergrubu olsun.

$k_1, k_2 \in K$ için $k_1 \in x \circ k_2$ olsun. $x \circ k_2 \subseteq x \circ K$ olduğundan $k_1 \in x \circ K$ dir. K tersinir alt hipergrup oluğundan $x \in k_1 \circ K = K$ dir. Böylece K kapalı alt hipergrup elde edilir.

Teorem 2.2.8. $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun. K nin, H nin ultra kapalı alt hipergrubu olması için gerek ve yeter şart K nin kapalı olması ve $I_P \subseteq K$ olmasıdır.

İspat: $(H,\circ)$ bir hipergrup olsun.

Önce K nin H nin ultra kapalı alt hipergrubu olduğu kabul edilsin. Teorem 2.2.6 dan K tersinir ve Teorem 2.2.7 den K kapalıdır.

$I_P \nsubseteq K$ olduğu varsayılsın. Yani $I_P \cap (H\backslash K) \neq \emptyset$ dir. O zaman en az bir $e \in H\backslash K$ ve $e \in I_P$ vardır ve öyle bir $x \in H$ için $x \in x \circ e \cap e \circ x$ dir. Buradan $x \in e \circ x \subseteq (H\backslash K) \circ x$ dir. K ultra kapalı olduğundan $x \notin K \circ x$ olur ki bu K nin tersinir olmasıyla çelişir. Böylece $I_P \subseteq K$ dir.

Şimdi K kapalı ve $I_P \subseteq K$ olsun. $x, y \in H$ olmak üzere $x \in K \circ y$ olsun. Varsayılsın ki $y \notin K \circ x$ olsun. O zaman $y \in (H\backslash K) \circ x$ dir. Buradan

$$x \in K \circ y \subseteq K \circ (H\backslash K) \circ x \subseteq (H\backslash K) \circ x$$

elde edilir. Dolayısıyla $I_P \cap (H\backslash K) \neq \emptyset$ olur ki $I_P \subseteq K$ olmasıyla çelişir. Böylece $y \in K \circ x$ dir. Yani K tersinirdir.

Mümkünse $a \in (K \circ x) \cap [(H\backslash K) \circ x]$ olsun. O zaman $a \in (K \circ x)$ ve $a \in (H\backslash K) \circ x$ olur. K tersinir olduğundan $x \in (K \circ a)$ bulunur. Böylece $x \in K \circ (H\backslash K) \circ x \subseteq (H\backslash K) \circ x$ elde edilir. Buradan $I_P \cap (H\backslash K) \neq \emptyset$ olur ki $I_P \subseteq K$ olmasıyla çelişir. Böylece $(K \circ x) \cap \big((H\backslash K) \circ x\big) = \emptyset$ dir. Sonuç olarak K ultra kapalı alt hipergruptur.

2.3. Kanonik Hipergruplar

Bu kısımda kanonik hipergrup tanımı ve bu kavramla ilgili iki teorem Davvaz ve Leoreanu [11]'den derlenmiştir.

Tanım 2.3.1. $(H,\circ)$ hipergrubunda

i) Her $x, y \in H$ için $x \circ y = y \circ x$, ($(H,\circ)$ değişmeli)

ii) $0 \in H$ elemanı mevcuttur öyle ki her $x \in H$ için $0 \circ x = \{x\}$, (birim elemanlı)

iii) Her $x \in H$ için tek bir $x' \in H$ elemanı mevcuttur öyle ki $0 \in x \circ x'$, (Burada x' elemanı x in tersi gibi düşünülecek ve x^{-1} ile gösterilecektir.)

iv) $z \in x \circ y$ ise $y \in x^{-1} \circ z$ ve $x \in z \circ y^{-1}$

özellikleri sağlanıyor ise $(H,\circ)$ kanonik hipergruptur.

Açıkça bir kanonik hipergrupta 0 elemanı tektir. $0 = 0 \circ 0' = 0'$ dır. $A \subseteq H$ olmak üzere, $A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.3.2. $(H,\circ)$ kanonik hipergrup ise her $x, y, z, t \in H$ için aşağıdaki çıkarım geçerlidir:

$x \circ y \cap z \circ t \neq \emptyset \Rightarrow x \circ z^{-1} \cap t \circ y^{-1} \neq \emptyset$.

İspat: $u \in x \circ y \cap z \circ t$ olsun. H tersinir olduğundan $u^{-1} \in z^{-1} \circ t^{-1}$ elde edilir, bundan dolayı $u \circ u^{-1} \subseteq x \circ y \circ z^{-1} \circ t^{-1}$ dir. Eğer e, H nin birim elemanı ise $e \in (x \circ z^{-1}) \circ (t \circ y^{-1})^{-1}$ elde edilir. Böylece $v \in x \circ z^{-1} \cap t \circ y^{-1}$ olacak şekilde bir v elemanı vardır.

Teorem 2.3.3. Değişmeli bir hipergrubun kanonik olması için gerek ve yeter şart hipergrubun skalar birimli bir join space olmasıdır.

İspat: $(H,\circ)$ kanonik hipergrup olsun. Her $a, b \in H$ için $a/b = a \circ b^{-1}$ yazılabilir. Bu durumda Teorem 2.3.2 den H skalar birimli bir join spacedir.

Tersine bir elemanın tersinin tek olup olmadığı kontrol edilsin. e skalar birim olsun. Eğer $e \in a \circ b \cap a \circ c$ ise o zaman $a \in e/b \cap e/c$ dir, buradan $e \circ c \cap e \circ b \neq \emptyset$ sonucu çıkarılır, böylece $b = c = a^{-1}$ dir. Şimdi H nin tersinirliği kontrol edilsin. $a \in b \circ c$ ancak ve ancak $b \in a/c$ dir. $e \in b \circ b^{-1}$ den $b \in e/b^{-1}$ elde edilir, dolayısıyla $a \circ b^{-1} \cap e \circ c \neq \emptyset$ $c \in a \circ b^{-1}$ anlamına gelir. Bu yüzden H kanoniktir.

Örnek 2.3.4. $H = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi üzerinde $\circ$ hiperişlemi "Çizelge 2.1" deki gibi tanımlansın.

Çizelge 2.1. Örnek 2.3.4'de verilen hipergrubun işlem tablosu

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{1,2,3\}$	$\{5\}$
5	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{1,2,3\}$	$\{6\}$	$\{4\}$
6	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{5\}$	$\{4\}$	$\{1,2,3\}$

$(H,\circ)$ değişmeli hipergruptur. 1 elemanı birim elemanı olup, $(H,\circ)$ kanonik hipergruptur.

H değişmeli hipergrup olduğundan kanonik hipergrubun ilk şartı sağlanır. Her $x \in H$ için $x \circ 1 = \{x\}$ olduğundan 1 birim elemandır.

$1 \circ 1 = \{1\},\ 2 \circ 2 = \{1\},\ 1 \in 3 \circ 3,\ 1 \in 4 \circ 5,\ 1 \in\ 6 \circ 6$ olduğundan $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 2, 3^{-1} = 3, 4^{-1} = 5, 5^{-1} = 4$, $6^{-1} = 6$ elde edilir. Böylece her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ dir. "Çizelge 2.1" incelendiğinde her $z \in x \circ y$ için $y \in x^{-1} \circ z$ ve $x \in z \circ y^{-1}$ elde edildiği görülür.

2.4. Hipergrupların Kartezyen Çapımı

Bu kısımdaki tanım ve teoremler Corsini [5] ve Bayrak [10]'ın çalışmasından derlenmiştir.

Tanım 2.4.1. $(H_1,\circ_1)$, $(H_2,\circ_2)$ iki hipergrup olsun. $H_1 \times H_2$ kartezyen çarpımı üzerinde hiperişlem

$$(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 \circ_1 y_1, x_2 \circ_2 y_2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(H_1 \times H_2,\otimes)$ hipergruptur.

Teorem 2.4.2. H_1, H_2 hipergruplar olmak üzere $K_1 \in Sub(H_1)$ ve $K_2 \in Sub(H_2)$ ise $K_1 \times K_2 \in Sub(H_1 \times H_2)$ dir. Üstelik, eğer K_1, H_1 in kapalı (tersinir, ultra kapalı, eşleniklenebilir) alt hipergrubu ve K_2, H_2 nin kapalı (tersinir, ultra kapalı, eşleniklenebilir) alt hipergrubu ise $K_1 \times K_2$, $H_1 \times H_2$ nin kapalı (tersinir, ultra kapalı, eşleniklenebilir) alt hipergrubudur.

Örnek 2.4.3. $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde hiperişlem aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \circ y = \begin{cases} \{x\} & , \quad x = y \\ [min\{x,y\}, max\{x,y\}] & , \quad x \neq y \end{cases}$$

$(\mathbb{R},\circ)$ bir hipergruptur [11]. Açıkça $\{1\}$ kapalı alt hipergruptur [12].

Diğer yandan Örnek 2.1.7 de bahsedilen $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},*)$ hipergrubunda her $i \in \mathbb{N}$ için $S_i\backslash\{0\}$ kümeleri tersinir(invertible) alt hipergruptur.

Tanım 2.4.1 ile $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\},\otimes)$ hipergrubu elde edilebilir. Teorem 2.4.2 ile açıkça $\{1\} \times (4\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ kapalı alt hipergruptur.

Gerçekten, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ olmak üzere bir $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için $(1,4k_1) \in (1,4k_2) \otimes (x,y)$ olsun. Bu durumda $(1,4k_1) \in (1 \circ x, 4k_2 * y)$ dir. Böylece $(x,y) \in \{1\} \times (4\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ elde edilir. Sonuç olarak $\{1\} \times (4\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ kapalı alt hipergruptur. Ancak $\{1\}$ alt hipergrubu $(\mathbb{R},\circ)$ hipergrubunda tersinir olmadığından $\{1\} \times (4\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ tersinir(invertible) alt hipergrup değildir. Gerçekten, $(2,4) \in (\{1\} \times (4\mathbb{Z}\backslash\{0\})) \otimes (3,4)$ dir. Ancak $(3,4) \notin (\{1\} \times (4\mathbb{Z}\backslash\{0\})) \otimes (2,4)$ dir.

Yardımcı Teorem 2.4.4. H_1, H_2 hipergrup ve $K \in Sub(H_1 \times H_2)$ olsun. I_i kümeleri H_i nin kısmi birimlerinin kümeleri olmak üzere K_1 ve K_2 kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$K_1 := \{k_1 \in H_1 | \exists e_2 \in I_2$ öyle ki $(k_1, e_2) \in K\}$

$K_2 := \{k_2 \in H_2 | \exists e_1 \in I_1$ öyle ki $(e_1, k_2) \in K\}$.

Her $(x,y) \in K$ için $e_1 \in I_1$ ve $e_2 \in I_2$ öyle ki $(x,e_2) \in K$ ve $(e_1,y) \in K$ varsa $K_1 \in Sub(H_1)$ ve $K_2 \in Sub(H_2)$ dir.

İspat: $a, b \in K_1$ olsun. O zaman $(a, e_{2_1}), (b, e_{2_2}) \in K$ olacak şekilde $e_{2_1}, e_{2_2} \in I_2$ vardır. $K \in Sub(H_1 \times H_2)$ olduğundan

$(a, e_{2_1}) \otimes (b, e_{2_2}) \subseteq K$

$(a \circ_1 b, e_{2_1} \circ_2 e_{2_2}) \subseteq K$

dir. Her $x \in a \circ_1 b$ için $(x, e_{2_1} \circ_2 e_{2_2}) \subseteq K$ dir. Hipotezden $(x,e) \in K$ olacak şekilde $e_{2_2} \in I_2$ vardır. Buradan $x \in K_1$ ve böylece $a \circ_1 b \subseteq K_1$ elde edilir.

$a \in K_1$ olsun. Şimdi $a \circ_1 K_1 = K_1$ olduğu gösterilmelidir. $a \circ_1 K_1 \subseteq K_1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

$x \in K_1$ olsun. $(x, e_{2_1}) \in K$ olacak şekilde $e_{2_1} \in I_2$ vardır. Bir de $a \in K_1$ olduğundan $(a, e_{2_2}) \in K$ olacak şekilde $e_{2_2} \in I_2$ vardır. K bir hipergrup olduğu için

$$\begin{aligned}(x, e_{2_1}) \quad &\in (a, e_{2_2}) \otimes K \\ &= \bigcup \{(a, e_{2_2}) \otimes (h, k) | (h, k) \in K\} \\ &= \bigcup \{(a \circ_1 h, e_{2_2} \circ_2 k) | (h, k) \in K\}\end{aligned}$$

dir. Böylece $(x, e_{2_1}) \in (a \circ_1 h_1, e_{2_2} \circ_2 k_1)$ olacak şekilde $(h_1, k_1) \in K$ vardır. O zaman $x \in a \circ_1 h_1$ dır.

$(h_1, k_1) \in K$ olduğundan hipotezden $(h_1, e) \in K$ olacak şekilde $e \in I_2$ vardır. Böylece $h_1 \in K_1$ ve $x \in a \circ_1 h_1$ olduğundan $x \in a \circ_1 K_1$ dir. Buradan $K_1 \subseteq a \circ_1 K_1$ elde edilir. Böylece $K_1 \in Sub(H_1)$ dir. Benzer şekilde $K_2 \in Sub(H_2)$ elde edilir.

Teorem 2.4.5. H_1, H_2 hipergruplar ve $K \in Sub(H_1 \times H_2)$ olsun.

$K_1 := \{k_1 \in H_1 | \exists e_2 \in I_2 \text{ öyle ki } (k_1, e_2) \in K\}$ ve

$K_2 := \{k_2 \in H_2 | \exists e_1 \in I_1 \text{ öyle ki } (e_1, k_2) \in K\}$

olarak tanımlanırsa $K_1 \in Sub(H_1)$ ve $K_2 \in Sub(H_2)$ dir. Bu durumda her $(x, y) \in K$ için $(x, e_2) \in K$ ve $(e_1, y) \in K$ olacak şekilde $e_1 \in I_1$ ve $e_2 \in I_2$ var olması için gerek ve yeter şart $K = K_1 \times K_2$ olmasıdır.

İspat: $K_1 \in Sub(H_1)$ ve $K_2 \in Sub(H_2)$ olmak üzere $K = K_1 \times K_2$ olsun.

$(x, y) \in K$ olsun. $y \in K_2$ ve K_2 hipergrup olduğundan $y \in y \circ e_2$ olacak şekilde $e_2 \in I_2 \cap K_2$ vardır. Buradan $(x, e_2) \in K_1 \times K_2 = K$ dir. Böylece $(x, e_2) \in K$ elde edilir. Benzer şekilde $e_1 \in I_1$ olacak şekilde $(e_1, y) \in K$ elde edilir.

Diğer taraftan her $(x, y) \in K$için $(x, e_2) \in K$ ve $(e_1, y) \in K$ olacak şekilde $e_1 \in I_1$ ve $e_2 \in I_2$ olsun. Yardımcı Teorem 2.4.4 ten $K_1 \in Sub(H_1)$ ve $K_2 \in Sub(H_2)$ dir. $(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2$ olsun. K_1, K_2 hipergrup olduğundan $k_1 \in k_1 \circ_1 e_1$, $k_2 \in e_2 \circ_1 k_2$ olacak şekilde $e_1 \in I_1$ ve $e_2 \in I_2$ k_1 vardır. O zaman $K \in Sub(H_1 \times H_2)$ olduğundan

$(k_1, k_2) \in (k_1 \circ_1 e_1, e_2 \circ_1 k_2) = (k_1, e_2) \otimes (e_1, k_2) \in K$ dir. Böylece $K_1 \times K_2 \subseteq K$ dir.

$(x, y) \in K$ olsun. Hipotezden $(x, e_2) \in K$ ve $(e_1, y) \in K$ olacak şekilde $e_1 \in I_1$ ve $e_2 \in I_2$ vardır. Böylece $x \in K_1$ ve $y \in K_2$ dir. Buradan $K \subseteq K_1 \times K_2$ dır. Böylece $K = K_1 \times K_2$ elde edilir.

Teorem 2.4.5 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Sonuç 2.4.6. $H_1, H_2, \cdots, H_n$ birer hipergrup ve $e_1, e_2, \cdots, e_n$, sırasıyla, $H_1, H_2, \cdots, H_n$ nin kısmi birimleri iken K, $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ nin bir alt hipergrubu olsun. Bu durumda $K_i = \{x \in H_i | (e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \cdots, e_n) \in K\}$ olmak üzere $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ olması için gerek ve yeter şart her $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ için $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K$ ise $i = 1,2, \cdots, n$ için $(e_1, e_2, \cdots, e_{i-1}, x_n, e_{i+1}, \cdots, e_n) \in K$ olmasıdır.

2.5. Homomorfi

Bu kısımdaki tanım ve teoremler Corsini [5] ve Davvaz ve Leoreanu [11] çalışmalarından derlenmiştir.

Tanım 2.5.1. $(H_1, \circ)$ ve $(H_2, *)$ iki hipergrupoid olsun. $f: H_1 \to H_2$ olmak üzere,

- Her $x, y \in H_1$ için $f(x \circ y) \subseteq f(x) * f(y)$ ise f ye homomorfi,
- Her $x, y \in H_1$ için $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ ise f ye iyi homomorfi,
- f homomorfi iken f^{-1} de homomorfi ise f ye izomofi denir.

Örnek 2.5.2. $(G, \cdot, \leq)$ sıralı abel grup üzerinde,

$$x \circ y = \{x + y, |x - y|\}$$

hiperişlemi ile elde edilen hipergrup $H(G)$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$f: (H(\mathbb{Z}), \circ) \to (H(\mathbb{Z}), \circ)$ olmak üzere

$$f(n) = \begin{cases} 0, & 2|n, \\ 1 & 2 \nmid n. \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa f homomorfidir ancak iyi homomorfi değildir.

$x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x \circ y) = f(\{x+y, |x-y|\})$ dir.

- $2|(x, y)$ ise $f(x \circ y) = 0 = f(x) \circ f(y)$,
- x veya y den sadece biri tek sayı ise $f(x \circ y) = 1 = f(x) \circ f(y)$,
- $2 \nmid (x, y)$ ise $f(x \circ y) = 0 \subseteq f(x) \circ f(y) = \{0,2\}$.

olduğundan f homomorfidir. Ancak,

$f(1 \circ 3) = f(\{4,2\}) = 0$

iken

$f(1) \circ f(3) = 1 \circ 1 = \{0,2\}$

olduğundan f iyi homomorfi değildir.

Teorem 2.5.3. $f: (H_1, \circ) \to (H_2, *)$ iyi homomorfi ve K, H_1 in alt hipergrubu olsun. Bu durumda $f(K)$ H_2 nin alt hipergrubudur.

İspat: Her $x, y \in f(K)$ için $k_1, k_2 \in K$ vardır öyle ki $f(k_1) = x$ ve $f(k_2) = y$ dir.

$$\begin{aligned} x * y &= f(k_1) * f(k_2) \\ &= f(k_1 \circ k_2) \\ &\subseteq f(K) \end{aligned}$$

ve $a \in f(K)$ için $k \in K$ vardır öyle ki $f(k) = a$ dır.

$a * f(K) = f(k) * f(K) = f(k \circ K) = f(K)$

elde edilir. Böylece $f(K)$ H_2 nin alt hipergrubudur.

Her alt hipergrubun iyi homomorfik görüntüsü alt hipergrup olurken homomorfik görüntüsünün alt hipergrup olması gerekmez. Bu duruma bir örnek aşağıda gösterilmiştir.

Örnek 2.5.4. $f: (H(\mathbb{Z}), \circ) \to (H(\mathbb{Z}), \circ)$, $f(n) = \begin{cases} 0, & 2|n, \\ 1 & 2 \nmid n \end{cases}$ homomorfisinin iyi homomorfi olmadığı Örnek 2.5.2 de gösterilmiştir. Her $3k, 3l \in 3\mathbb{Z}$ için

$3k \circ 3l = \{3k + 3l, |3k - 3l|\} \subseteq 3\mathbb{Z}$ ve

$$3k \circ 3\mathbb{Z} = \bigcup_{3l \in 3\mathbb{Z}} 3k \circ 3l = 3\mathbb{Z}$$

elde edilir ki böylece $3\mathbb{Z}$ kümesi $(H(\mathbb{Z}),\circ)$ hipergrubunun alt hipergrubudur. Ancak $3\mathbb{Z}$ kümesinin homomorfik görüntüsü alt hipergrup değildir. Gerçekten, $f(3\mathbb{Z}) = \{0, 1\}$ kümesi,

$$1 \circ 1 = \{0,2\} \nsubseteq \{0, 1\}$$

olduğundan alt hipergrup değildir.

Teorem 2.5.5. $(H_1,\circ)$ ve $(H_2,*)$ yarıhipergruplar olmak üzere, $f: (H_1,\circ) \to (H_2,*)$ birebir örten homomorfi olsun. Bu durumda f nin izomorfi olması için gerek ve yeter şart f nin iyi homomorfi olmasıdır.

İspat: $f: (H_1,\circ) \to (H_2,*)$ birebir örten izomorfi olsun. Her $x, y \in H_1$ için,

$$\begin{aligned} f(x \circ y) &= f\big(f^{-1}(f(x)) \circ f^{-1}(f(y))\big) && (f \text{ birebir ve örten olduğundan}) \\ &\supseteq f\big(f^{-1}(f(x) * f(y))\big) && (f^{-1} \text{ homomorfi olduğundan}) \\ &= f(x) * f(y) && (f \text{ birebir ve örten olduğundan}) \\ &\supseteq f(x \circ y) && (f \text{ homomorfi olduğundan}) \end{aligned}$$

$f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ elde edir. Dolayısıyla f iyi homomorfidir.

Tersine f iyi homomorfi olsun. Her $a, b \in H_2$ için f örten olduğundan $x, y \in H_1$ elemanları vardır öyle ki $a = f(x)$ ve $b = f(y)$ dir.

$$\begin{aligned} f^{-1}(a * b) &= f^{-1}(f(x) * f(y)) \\ &= f^{-1}\big(f(x \circ y)\big) \\ &= x \circ y \\ &= f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b) \end{aligned}$$

dir. Böylece $f^{-1}(a * b) = f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b)$ elde edildiğinden f^{-1} de iyi homomorfidir. Sonuç olarak f izomorfidir.

3. DEVİRLİ HİPERGRUPLAR

3.1. Devirli Hipergrup Tanımı

İlk olarak devirli hipergrupları Wall [3], “H hipergrubu H nin bir a elemanı tarafından üretiliyorsa H ye devirli hipergrup denir.” olarak tanımlamıştır. Daha sonra birçok araştırmacı bu tanımı genişletmişlerdir [4-6]. Novak, Krehlik ve Cristea [9]’nın çalışması devirli hipergrup çalışmalarının kapsamlı bir derlemesini sağlamaktadır. Vougiouklis [8]’in tanımladığı devirli hipergrup tanımı Wall'ın çalışmasına paralel olup devirliliğin mümkün olduğunca çok tipini tanımlamıştır. Bu çalışmada Vougiouklis [8]’in devirli hipergrup tanımı kullanılmıştır.

Tanım 3.1.1. [8] $(H,\circ)$ hipergrup ve $h \in H$ için $h^1 = \{h\}$ ve $h^m = \underbrace{h \circ \ldots \circ h}_{m\ tane}$ olmak üzere,

$$H = h^1 \cup h^2 \cup \ldots \cup h^n \cup \ldots \tag{3.1}$$

ise $(H,\circ)$ hipergrubuna devirlidir denir. Eğer (3.1) eşitliğinde sonlu bir $n \in \mathbb{N}$ varsa H ye sonlu periyotlu devirli hipergrup denir. Diğer durumda H ye sonsuz periyotlu devirli hipergrup denir. (3.1) eşitliğindeki $h \in H$ elemanı H nin üreteci olarak isimlendirilir; (3.1) eşitliğindeki n kuvvetinin en küçük değeri h nin periyodu olarak isimlendirilir. Eğer H nin tüm üreteçleri aynı n periyoduna sahip ise H ye n periyotlu devirli hipergrup denir. Bazı $h \in H$ için

$$H = h^n \tag{3.2}$$

yazılabilir. Bu durumda H hipergrubu, h ile üretilen tek-güçlü (single-power) devirli hipergrup olarak isimlendirilir.

(3.1) eşitliği geçerli ve sabit bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$h^1 \cup h^2 \cup \ldots \cup h^{n-1} \subsetneq h^n \tag{3.3}$$

ise o zaman H ye h için sonsuz periyotlu tek-güçlü (single-power) devirli hipergrup denir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(H,\circ)$ h ile üretilen bir devirli hipergrup ise $h \in h^i$ olacak şekilde $i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mevcuttur.

İspat: H sonsuz periyotlu olsun (sonlu periyotlu ise benzer şekilde gösterilebilir).

$$H = \bigcup_{i \geq 1} h^i$$

$H = h \circ H = H \circ h$ olduğundan $H = \bigcup_{i \geq 2} h^i$ elde edilir. $h \in H$ dan $h \in \bigcup_{i \geq 2} h^i$dır.

Yardımcı Teorem 3.1.2 de belirtilen i sayısı tek değildir. $\{i \in \mathbb{N}_{\geq 2} \mid h \in h^i\}$ kümesinin minimum değerine h nin indeksi denir ve $ind(h)$ ile gösterilir [13]. Özel olarak $ind(h) = 2$ ise H tek-güçlü(single-power) devirli hipergruptur.

$(H,\circ)$ h ile üretilen p periyotlu devirli bir hipergrup olsun. Eğer $p < ind(h)$ ise $ind(h) = p + 1$ dir.

Aşağıdaki tanımda Massouros [14] geometrik anlam taşıyan "kapalı" ismini kullanırken Chvalina [15,16] "geniş (extensive)" ismini kullandığına dikkat edilmelidir.

Tanım 3.1.3. [9] Eğer her $a, b \in H$ için $\{a, b\} \subseteq a * b$ ise H deki "$*$" hiperişlemi geniş (extensive) olarak isimlendirilir. $(H,*)$ hipergrupoid "$*$" geniş (extensive) hiperişlemi ile bir geniş hipergrupoid olarak isimlendirilir.

Yardımcı Teorem 3.1.4. [9] Her geniş yarı hipergrup bir hipergruptur.

İspat: Her $a \in H$ için $a * H = \bigcup_{b \in H} a * b$ ve "$*$" geniş olduğundan $a * H = H$ elde edilir. Böylece H yarı hipergrubu bir hipergruptur.

Aşağıdaki örnek, sonsuz periyotlu tek-güçlü (single-power) devirli hipergruplara bir örnektir.

Örnek 3.1.5. [9] $I = (0,1)$ açık aralığında çarpma ve

$$a * b = [a.b)_{\leq} = \{x \in I : a.b \leq x\}$$

hiperişlemi ile $(I,*)$ bir yarı hipergruptur. I kümesi üzerinde tanımlı "$*$" hiperişleminin geniş olmasından dolayı hipergruptur. Herhangi bir $a \in I$ için $a^n \subsetneq a^{n+1}$ olduğundan açıkça $(I,*)$ keyfi bir $a \in I$ için sonsuz periyotlu tek-güçlü (single power) devirli hipergruptur.

Aşağıdaki örnekte sonlu periyotlu ve yalnızca tek eleman ile üretilen bir tek-güçlü(single power) devirli hipergrup görülebilir.

Örnek 3.1.6. [9] $(\mathbb{N}^*, \text{ebob}, \mid)$ kısmi sıralı yarı grubu ele alınsın. $(\mathbb{N}^*, \text{ebob}, \mid)$ üzerinde tanımlanan her $a, b \in \mathbb{N}^*$ için

$$a \circ b = \{x \in \mathbb{N}^* : \text{ebob}\{a, b\} \mid x\}$$

işlemi ile $(\mathbb{N}, \circ)$ yarı hipergruptur. Her $a, b \in \mathbb{N}^*$ için $\{a, b\} \subseteq a \circ b$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.4'den $(\mathbb{N}^*,\circ)$ bir hipergruptur. Açık olarak

$$1 \circ 1 = \{x \in \mathbb{N}^* : \text{ebob}\,\{1,1\} \mid x\} = [1)_{\leq} = \mathbb{N}^*$$

dir. Böylece $(\mathbb{N}^*, \circ)$ 1 elemanı tarafından üretilen 2-periyotlu tek güçlü (single power) devirli hipergruptur.

Devirli gruplar değişmeli olurken bu özellik hipergruplarda mevcut olmayabilir. Bir devirli hipergrubun değişmeli olması gerekmez.

Örnek 3.1.7. $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ 8. mertebeden quaternion grup olmak üzere Q_8 üzerindeki hiperişlem her $x, y \in Q_8$ için $x \circ y = \{xy, xiy\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(Q_8,\circ)$ hipergruptur [17].

Burada $< j > = < -j > = < k > = < -k > = Q_8$ elde edilir. Dolayısıyla $(Q_8,\circ)$ devirli hipergruptur. Ancak $j \circ k = \{i, k\}$ ve $k \circ j = \{-i, -k\}$ olduğundan değişmeli değildir. Sonuç olarak her devirli hipergrup değişmeli değildir.

3.2. Devirli Hipergrupların Alt Hipergrupları

Hipergruplar teorisi klasik grup teorisinin uygun bir genellemesi olmasına rağmen grup teorisindeki birçok özellik hipergruplarda mevcut değildir. Devirli grupların en temel teoremlerinden biri her altgrubunun da devirli olmasıdır. Ancak aşağıdaki örnekle devirli hipergrubun alt hipergruplarının devirli olması gerekmediği görülür.

Örnek 3.2.1. $(L,\wedge,\vee)$ en küçük elemanı 0 olan bir kafes olsun. Her $a \in L$ için $F(a)$ a dan üretilen esas filtreyi göstersin, o zaman $a \circ b = F(a \wedge b)$ işlemi ile $(L,\circ)$ hipergruptur.

Şimdi L kafesinin Hasse diyagramı Şekil 3.1. deki gibi olsun.

Şekil 3.1. Örnek 3.2.1 deki L kafesinin Hasse diyagramı

$$\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ \frac{1}{2} \\ \uparrow \\ \frac{1}{2^2} \\ \uparrow \\ \frac{1}{2^3} \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

Bu durumda $0^2 = F(0 \wedge 0) = F(0) = L$ olduğundan L bir tek-güçlü (single-power) devirli hipergrup elde edilir. Ancak L nin her alt hipergrubu devirli değildir. Örneğin, $L\backslash\{0\}$ kümesi L'nin alt hipergrubudur ancak devirli değildir. Gerçekten, her $a, b \in L\backslash\{0\}$ için,

$a \circ b = F(a \wedge b) \subseteq L\backslash\{0\}$

ve

$a \circ L\backslash\{0\} = \bigcup_{x \in L\backslash\{0\}} F(a \wedge x) = L\backslash\{0\}$

olduğundan $L\backslash\{0\}$, L nin bir alt hipergrubudur. Ancak $L\backslash\{0\}$ hiç bir elemanı tarafından üretilemediğinden devirli değildir.

Varsayılsın ki $x \in L\backslash\{0\}$ için $L\backslash\{0\} = < x >$ olsun.

$< x > = \{x\} \cup x^2 \cup \ldots = F(x)$

dir. $\frac{x}{2} \in L\backslash\{0\}$, fakat $\frac{x}{2} \notin F(x) = < x >$ dir. Bundan dolayı $L\backslash\{0\} \neq < x >$ elde edilir. Sonuç olarak $L\backslash\{0\}$ alt hipergrubu devirli değildir.

Grup teorisinde bir eleman tarafından üretilen küme, devirli alt grup oluyor iken bir hipergrupta devirli alt hipergrup olmayabilir. Bu duruma bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.2.2. $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ kısmi sıralı grubu üzerinde tanımlanan

$a * b = \{x \in Z | a + b \leq x\}$

hiperişlemi ile $(\mathbb{Z},*)$ bir hipergruptur. $(\mathbb{Z},*)$ sonsuz çoklukta elemanı tarafından üretilir ve sonsuz periyotlu tek-güçlü (single-power) hipergruptur. Sadece negatif tamsayılar bu kümeyi ürettiği için $(\mathbb{Z},*)$ hipergrubu tüm elemanları tarafından üretilmez. Yukarıda belirtildiği gibi $(\mathbb{Z},*)$ hipergrubunda pozitif tamsayılar tarafından üretilen kümeler alt hipergrup değildir [9]. Örneğin,

$< 5 >= \{5\} \cup \{x \in \mathbb{Z} | 10 \leq x\}$

bir alt hipergrup değildir. $10 \in < 5 >$ iken $10 * < 5 > \neq < 5 >$ dir. Gerçekten,

$5 \notin 10 * < 5 >= \{x \in \mathbb{Z} | 15 \leq x\}$

olduğundan $< 5 >$ alt hipergrup değildir.

Yukarıdaki örnek **"**Bir hipergrubun tek bir elemanı tarafından üretilen elemanların kümesi ne zaman bir alt hipergrup olur?" sorusunu araştırılmaya değer kılar. Bu sorunun kısmi bir cevabı aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.3. $(H,\circ)$ hipergrubu geniş (extensive) ise her $a \in H$ için $< a >$ devirli alt hipergruptur.

İspat: Yardımcı Teorem 3.1.4 den her geniş yarı hipergrup bir hipergruptur. Bu nedenle her $a \in H$ için $< a >$ yarı hipergrup olduğundan bir hipergruptur.

Yukarıdaki teorem ile bahsedildiği üzere tam bir karakterizasyon yapılamamaktadır. Yani bir hipergrupta (hatta devirli bir hipergrupta) her $a \in H$ için $< a >$ kümesinin alt hipergrup olması için H nin geniş hipergrup olması gerekmez. Bu duruma bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 3.2.4. $H = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi üzerinde $\circ$ hiperişlemi "Çizelge 3.1" deki gibi tanımlansın.

Çizelge 3.1. Örnek 3.2.4 de verilen hipergrubun işlem tablosu

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
4	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{4\}$	$\{6\}$	$\{1,2,3\}$	$\{5\}$
5	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{1,2,3\}$	$\{6\}$	$\{4\}$
6	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{5\}$	$\{4\}$	$\{1,2,3\}$

Burada $< 4 >=< 5 >= H$ dir. Böylece $(H,\circ)$ bir devirli hipergruptur. H geniş hipergrup olmamasına rağmen tek bir elemanı tarafından üretilen kümelerinin her biri bir alt hipergruptur.

$< 1 >= \{1\}$,

$< 2 >= \{1,2\}$,

$< 3 >= \{1,2,3\}$,

$< 6 >= \{1,2,3,6\}$.

Bir geniş hipergrupta tek bir elemanın ürettiği kümelerinin her biri alt hipergrup olduğundan her geniş hipergrubun devirli olduğu düşünülebilir. Ancak bu varsayım yanlıştır. Yani geniş bir hipergrup devirli olmayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte açıkça görülebilir.

Örnek 3.2.5. $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinde hiperişlem aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \circ y = \begin{cases} \{x\}, & , \quad x = y \\ [min\{x,y\}, mak\{x,y\}] & , \quad x \neq y\,. \end{cases}$$

$(\mathbb{R},\circ)$ hipergruptur [11]. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\{x,y\} \subseteq x \circ y$ olduğundan $(\mathbb{R},\circ)$ geniş hipergruptur. Her $a \in \mathbb{R}$ için $< a > = \{a\}$ olduğundan $\mathbb{R}$ hiçbir elemanı tarafından üretilmez. Dolayısıyla $(\mathbb{R},\circ)$ hipergrubu devirli değildir. Sonuç olarak $(\mathbb{R},\circ)$ geniş hipergrup olmasına rağmen devirli değildir.

Örnek 3.2.6. H geniş bir hipergrup olmak üzere, her $a \in H$ için $< a >$ kümesinin alt hipergrup olduğu Teorem 3.2.3 ile biliniyor. Ancak H geniş hipergrubu devirli olsa dahi alt hipergruplarının devirli olması gerekmez. Örnek 3.2.1 bu duruma bir örnektir.

Örnek 3.2.1 de $a \circ b = F(a \wedge b)$ işlemi ile $(L,\circ)$ bir geniş, devirli hipergruptur. Gerçekten,

Her $a, b \in L$ için $\{a, b\} \subseteq F(a \wedge b) = a \circ b$ olduğundan $(L,\circ)$ geniş hipergruptur. Devirli olduğu Örnek 3.2.1 de gösterilmiştir. Yine Örnek 3.2.1 de gösterildiği üzere $L \backslash \{0\}$ alt hipergrup olmasına rağmen devirli değildir.

Devirli bir hipergrup geniş olmayabilir. Bu duruma bir örnek aşağıda görülebilir.

Örnek 3.2.7. $H = \{a, b, c, d, e\}$ de hiperişlem "Çizelge 3.2" deki gibi tanımlansın:

Çizelge 3.2. Örnek 3.2.7 de verilen hipergrubun işlem tablosu

$\oplus$	a	b	c	d	e
a	$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$
b	$\{b, c\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{a\}$
c	$\{b, c\}$	$\{d\}$	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{a\}$
d	$\{d\}$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{b, c\}$
e	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\{d\}$

Böylece, $(H,\oplus)$ değişmeli hipergruptur [15].

$H =< b >=< c >=< d >=< e >$

Böylece $(H,\oplus)$ devirli bir hipergruptur, ancak geniş değildir.

Lagrange Teoreminden biliniyor ki sonlu bir grupta her altgrubun mertebesi grubun mertesini bölmektedir. Sonlu hipergruplarda bu teoremin yansımasının nasıl olduğu düşünüldüğünde, Örnek 3.2.4 bu sorunun cevabının olumsuz olduğunu göstermektedir. Açık olarak Örnek 3.2.4 de $(H,\circ)$ hipergrubunun mertebesi 6 olurken $< 6 >$ alt hipergrubunun mertebesi 4 tür.

Asal mertebeli gruplar devirli oluyor iken asal mertebeli bir hipergrup devirli olmayabilir. Aşağıda bu duruma bir örnek görülebilir.

Örnek 3.2.8. $H = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi üzerinde $\circ$ hiperişlemi "Çizelge 3.3" deki gibi tanımlansın.

Çizelge 3.3. Örnek 3.2.8 de verilen hipergrubun işlem tablosu

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7
1	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6,7\}$	$\{6,7\}$
2	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{6,7\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{4\}$
3	$\{3\}$	$\{6,7\}$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
4	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6,7\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
5	$\{5\}$	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{6,7\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
6	$\{6,7\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{5\}$
7	$\{6,7\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{5\}$	$\{5\}$

Bu durumda $(H,\circ)$ hipergruptur [15]. Bu hipergrupta,

$< 1 >= \{1\}$

$< 2 >= \{1,2\}$

$< 3 >= \{1,3\}$

$< 4 >= \{1,4\}$

$< 5 >=< 6 >=< 7 >= \{1,5,6,7\}$

olduğundan H hiçbir elemanı tarafından üretilemez. Sonuç olarak H asal mertebeli olmasına rağmen devirli hipergrup değildir.

G bir grup olmak üzere, $\emptyset \neq K \subseteq G$ olsun. G nin K yi içeren bütün altgruplarının ara kesitine K tarafından üretilen altgrup denir ve $< K >$ ile gösterilir. Yani

$$< K >= \bigcap_{\substack{K \subseteq L \\ L \leq G}} L$$

dir. Tanımdan anlaşıldığı gibi $< K >$ altgrubu K yi içeren en küçük altgruptur. Eğer $< K >= G$ ise bu durumda K ye G nin üretici kümesi denir. Eğer $K = \{a\}$ bir elemanlı ise $<$

$K> = < a > = \{a^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ olup bu tanım bir eleman tarafından üretilen altgrup tanımı ile aynı olur.

Bir grupta $< a > = \{a^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ ile $< a >= \bigcap\{L | a \in L,\ L \leq G\}$ kümeleri çakışmaktadır. Ancak bir H hipergrubunda $< a > = \{a\} \cup a^2 \cup \ldots \cup a^n$ kümesi ile $\bigcap\{L | a \in L,\ L \in Sub(H)\}$ kümesi çakışmamaktadır. Bu duruma bir örnek aşağıda görülebilir.

Örnek 3.2.9. $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ sıralı grubu üzerinde tanımlı

$$a * b = \{x \in Z | a + b \leq x\}$$

hiperişlemi ile $(\mathbb{Z},*)$ hipergrubuna Örnek 3.2.2 de yer verilmiştir. Burada

$$< 5 >= \{5\} \cup \{x \in \mathbb{Z} | 10 \leq x\} \neq \bigcap_{\substack{5 \in L \\ L \leq G}} L = \{x \in \mathbb{Z} | 5 \leq x\}$$

elde edilir.

Bir hipergrupta, bir eleman tarafından üretilen küme bir alt hipergrup ise bu alt hipergrubun özel bir sınıfa (kapalı, tersinir,…) ait olup olmadığı araştırılmaya değerdir. Bu bağlamda, bir devirli hipergrupta bir eleman tarafından üretilen alt hipergrubun kapalı olmayabileceği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.2.10. $(A,\circ)$ en az iki elemanlı bir hipergrup ve $T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ öyle ki $A \cap T = \emptyset$ ve $i \neq j$ için $t_i \neq t_j$ olsun. $H = A \cup T$ da $\otimes$ hiper işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$(x, y) \in A^2$ ise $x \otimes y = A$;

$(x, t) \in A \times T$ ise $x \otimes t = t \otimes x = A \backslash \{x\} \cup T$;

$(t_i, t_j) \in T \times T$ ise $t_i \otimes t_j = A \cup \{t_{i+j}\}$.

$(H,\otimes)$ hipergrubu T nin tüm elemanları tarafından üretilir. Burada $(H,\otimes)$ 3-periyotlu devirli hipergruptur. Her $t_i \in T$ için $H = t_i \cup {t_i}^2 \cup {t_i}^3$ dir. Gerçekten,

$${t_i}^2 = A \cup \{t_{2i}\}$$

ve

$$
\begin{aligned}
{t_i}^3 &= t_i \otimes A \cup \{t_{2i}\} \\
&= \left(\bigcup_{x\in A}\{t_i \otimes x\}\right) \cup (t_i \otimes t_{2i}) \\
&= \left(\bigcup_{x\in A} A\backslash\{x\} \cup T\right) \cup (A \cup \{t_{3i}\}) \\
&= A \cup T \\
&= H
\end{aligned}
$$

olduğundan H 3-periyotlu tek-güçlü (single-power) devirli hipergruptur.

Her $x, y \in A$ için

$x \otimes y = A \subseteq A$ ve $x \otimes A = \bigcup_{b\in A} x \otimes b = A$ olduğundan A, H nin alt hipergrubudur.

Her $x \in A$ için $< x >= A$ dır. A devirli bir alt hipergrup olmasına rağmen,

$x, y \in A$ ve $x \neq y$ için $x \in t \otimes y = A\backslash\{y\} \cup T$ dir. $t \in T$ olduğundan $t \notin A$ dır. Buradan A kapalı olmayan bir alt hipergruptur.

Devirli bir hipergrup geniş olsa dahi bir eleman tarafından üretilen alt hipergrubu kapalı olması gerekmez.

Örnek 3.2.11. $(L,\circ)$ tek-güçlü (single-power) devirli hipergrup olduğu Örnek 3.2.1 ile gösterilmiştir. Örnek 3.2.6 da gösterildiği üzere, $(L,\circ)$ geniş devirli hipergruptur. $x, a, b \in L$ için bu elemanlar arasındaki sıralama $x < a < b$ şeklinde olsun. Bu durumda $< a >$ alt hipergrubu kapalı değildir. Gerçekten,

$< a > = F(a)$ olduğundan a ve b $< a >$ alt hipergrubunun elemanlarıdır. $a \in x \circ b$ olmasında rağmen $x \notin < a >$ dır. Böylece $< a >$ kapalı değildir.

3.3. *P*-Devirli Hipergruplar

Devirli hipergruplar üzerinde klasik devirli grupların özelliklerinin birçoğunun mevcut olmadığı önceki kısımlarda verilen örneklerde gözlemlenmiştir. Bunu aşmak için özel hipergruplar tanımlanmıştır. Vougiouklis [8]'in tanımladığı özel bir hipergubu aşağıda görebiliriz.

Önerme 3.3.1. $(H,\cdot)$ değişmeli bir grup ve P, H'nin bir alt kümesi olsun. O zaman aşağıda tanımlanan $*^P$ işlemi ile $\langle H,*^P\rangle$ bir hipergruptur:

e, $(H,\cdot)$ grubunun birim elemanı olmak üzere,

$$*^P : H \times H \to \wp(H) : (x,y) \mapsto x *^P y = xy(\{e\} \cup P)\ . \tag{3.4}$$

$\langle H,*^P\rangle$ P-hipergrup olarak isimlendirilir [8].

İspat: $x, y, z \in H$ için

$$x *^P (y *^P z) = x *^P \big(yz(\{e\} \cup P)\big) = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} x *^P (yza) = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} xyza(\{e\} \cup P)$$

$(H,\cdot)$ değişmeli bir grup olduğu için,

$$(x *^P y) *^P z = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} xya *^P z = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} xyaz(\{e\} \cup P) = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} xyza(\{e\} \cup P)$$

dir. Böylece her $x, y, z \in H$ için $x *^P (y *^P z) = (x *^P y) *^P z$ dir.

$x \in H$ için

$$x *^P H = \bigcup_{a\in H} x *^P a = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} xa(\{e\} \cup P) = H$$

$$H *^P x = \bigcup_{a\in H} a *^P x = \bigcup_{a\in\{e\}\cup P} ax(\{e\} \cup P) = H$$

dir. Böylece her $x \in H$ için $x *^P H = H = H *^P x$ elde edilir.

Sonuç olarak (3.4) eşitliğinde tanımlanan $*^P$ işlemi ile $\langle H,*^P\rangle$ bir hipergruptur.

Önerme 3.3.2. [8] $(H_n,\cdot)$ n elemanlı sonlu devirli bir grup ve $P \subseteq H_n$ olsun. O zaman Önerme 3.3.1 de tanımlanan $\langle H,*^P\rangle$ P-hipergrup bir devirli hipergruptur ve P-devirli hipergrup olarak isimlendirilir.

İspat: Bir $x \in H_n$ elemanının $*^P$ hiperişlemi altındaki bir ν. kuvveti $x^{[\nu]}$ şeklinde gösterilirse $x \in H_n$ olmak üzere her $\nu \in \mathbb{N}$ için

$$x^{[\nu]} = x^{[\nu]}(\{e\} \cup P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^{\nu-1})$$

olduğu açıkça görülür. Böylece $(H_n,\cdot)$ devirli grubu $a \in H_n$ tarafından üretiliyor ise

$$a^{[1]} \cup a^{[2]} \cup \ldots \cup a^{[n]} = H_n$$

dir. Böylece $\langle H,*^P \rangle$ hipergrubu en fazla n periyotludur.

Aksi söylenmedikçe bundan sonraki teoremlerde P-devirli hipergrubunda $P = \{p\}$ tek elemanlı olarak alınacaktır. $\langle H,*^p \rangle$ olarak gösterilecektir.

Teorem 3.3.3. [8] $\langle H_n,*^{a^x} \rangle$ P-devirli hipergrubunun a^λ elemanı tarafından üretilmesi için gerek ve yeter şart $(\lambda, x, n) = 1$ olmasıdır.

İspat: a^λ elemanının Önerme 3.3.2 de tanımlanan $*^P$ hiper işlemi altında μ-inci kuvveti

$$a^{\lambda[\mu]} = \{a^{\lambda\mu}, a^{\lambda\mu+x}, \ldots, a^{\lambda\mu+(\mu-1)x}\} \tag{3.5}$$

dir. Bu yüzden a^λ nın kuvvetlerinin elemanları $s \in \mathbb{N}_0$ ve $t = 0, 1, \ldots, s-1$ için $a^{\lambda s+tx}$ tipindedir.

Ayrıca $\lambda s + tx \equiv 1 \ (mod\, n)$ olması için gerek ve yeter şart $\exists \varrho \in \mathbb{Z}$: $\lambda s + tx - n\varrho = 1$ olmasıdır. $\exists \varrho \in \mathbb{Z}$: $\lambda s + tx - n\varrho = 1$ olması için gerek ve yeter şart $(\lambda, x, n) = 1$ olmasıdır. Dolayısıyla $s, t, \varrho, mod\ n$ yukarıda ihtiyaç duyulana uygun seçilirse $a^{\lambda s+tx} = a^1 = a$ olması için gerek ve yeter şart $(\lambda, x, n) = 1$ dir.

Şimdi eğer a, a^λ nın bazı kuvvetlerine bağlı ise o zaman her $\nu \in \mathbb{N}_0$ için $a^\nu \in H_n$ elemanı a^λ nın bazı kuvvetlerine bağlıdır, çünkü $a^{\lambda(\nu s)+(\nu t)x} = a^\nu$ dir. Böylece $\langle H_n,*^{a^x} \rangle$ nin üretecinin a^λ elemanı olması için gerek ve yeter şartın $(\lambda, x, n) = 1$ olduğu elde edilir.

3.4. Devirli Hipergrupların Kartezyen Çarpımı

G grubunda; eğer $g^n = e$ olacak şekilde bir $n > 0$ varsa bu eşitliği sağlayan pozitif sayıların en küçüğüne g nin derecesi (veya mertebesi) denir ve bu sayı $o(g)$ ile gösterilir. Eğer

$g^n = e$ hiçbir $n > 0$ için sağlanmıyorsa, g nin derecesi sonsuzdur denir. Üstelik, her $a \in G$ için $| < a > | = o(a)$ dır. Hipergruplarda bu eşitlik sağlanmamaktadır.

Örnek 3.4.1. $(H,\oplus)$ devirli hipergrubu Örnek 3.2.7 de tanıtılmıştı. H nin kısmi birimlerinin kümesi $I_P = \{a\}$ dır. Grup teorideki tanıma paralel olarak $I_P \subseteq e^4$ ve bunu sağlayan en küçük tamsayı 4 olduğundan $o(e) = 4$ elde edilir. Bu devirli hipergrubu üreten elemanlardan biri olan e elemanı için $| < e > | = 5$ iken $o(e) = 4$ dir. Bunun yanı sıra, Örnek 3.2.4 te verilen $(H,\circ)$ sonlu devirli hipergrubu için de eşitliğin sağlanmadığı görülür. Bu örnekte $I_P = \{1\}$ dir. 5 elmanı için $I_P \subseteq 5^4$ ve dolayısıyla $o(5) = 4$ dir. Ancak $| < 5 > | = 6$ dır. Dolayısıyla H hipergruplarda a elemanı için $| < a > | = o(a)$ eşitliği sağlanmamaktadır.

Yine grup teoride iki devirli grubunun kartezyen çarpımlarının devirli olması için gerek ve yeter şart mertebelerinin aralarında asal olmasıdır. Ancak bu teoremin de hipergruplarda sağlanmadığı aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 3.4.2. Örnek 3.2.4'te tanımlanan $(H,\circ)$ devirli hipergrubuna H_1, Örnek 3.2.7 de tanımlanan $(H,\oplus)$ devirli hipergrubuna H_2 denilsin. $|H_1| = 6$ iken, $|H_2| = 5$ dir. Dolayısıyla $(|H_1|, |H_2|) = 1$ dir. Ancak $H_1 \times H_2$ hipergrubu hiçbir elemanı tarafından üretilemediğinden devirli değildir.

3.5. Devirli Hipergrupların Homomorfik Görüntüsü

Devirli gruplardaki bir çok teorem devirli hipergruplarda sağlanmazken, hipergrupların homomorfik görüntüleri için grup teoriyle paralel sonuçlar elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.5.1. $(H,\circ)$ ve $(K,*)$ hipergruplar ve $f: H \to K$ iyi homomorfi olsun. Bu durumda her $a \in H$ için $f(< a >) =< f(a) >$ dir.

İspat: $x \in f(< a >)$ olsun. $x = f(y)$ olacak şekilde $y \in< a >$ mevcuttur. Burada $n \in \mathbb{N}^*$ vardır öyle ki $y \in a^n$ dir. $x \in f(a^n)$ ve f iyi homomorfi olduğundan $x \in f(a)^n$ elde edilir. Böylece $x \in< f(a) >$ dir. $f(< a >) \subseteq< f(a) >$ ve benzer şekilde $< f(a) >\subseteq f(< a >)$ olduğu elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teorem, herhangi iyi olmayan bir f homomorfisi için doğru değildir. Aşağıda bu duruma bir örnek görülebilir.

Örnek 3.5.2. Örnek 2.5.4 de verilen $f: (H(\mathbb{Z}),\circ) \to (H(\mathbb{Z}),\circ)$, $f(n) = \begin{cases} 0, & 2|n, \\ 1, & 2 \nmid n \end{cases}$ iyi olmayan homomorfisi ele alınsın. Örneğin, $< 3 > = 3\mathbb{N}$ dir. Dolayısıyla $f(< 3 >) = \{0, 1\}$ dir. Diğer yandan

$< f(3) > =< 1 >= \mathbb{N}$

dir. Sonuç olarak f iyi homomorfi olmadığından $f(< 3 >) \neq< f(3) >$ dir.

Teorem 3.5.3. $(H,\circ)$ ve $(K,*)$ hipergruplar ve $f: H \to K$ iyi homomorfi olsun. Bu durumda H nin devirli alt hipergrubunun iyi homomorfik görüntüsü de K'nin devirli alt hipergrubudur.

İspat: $a \in H$ için $< a >$ alt hipergrup olsun. f iyi homomorfi olduğundan Teorem 2.5.3 ile $f(< a >)$ alt hipergruptur. Yardımcı Teorem 3.5.1 ile $f(< a >) =< f(a) >$ olur ki böylece $f(< a >)$ devirli alt hipergruptur.

Teorem 3.5.4. $(H,\circ)$ ve $(K,*)$ hipergruplar ve $H =< h >$ devirli hipergrup olsun. $f: H \to K$ epimorfi ise $K =< f(h) >$ olup K devirli hipergruptur.

İspat: $H =< h >$ ve $f(h) \in K$ olduğundan $< f(h) >\subseteq K$ dir. Öte yandan f örten olduğundan her $k \in K$ için $f(a) = k$ olacak şekilde $a \in H$ mevcuttur. $a \in< h >$ olduğundan $l \in \mathbb{N}^*$ vardır öyle ki $a \in h^l$ dir.

$k = f(a) \in f(h^l) \subseteq f(h)^l \subseteq< f(h) >.$

Buradan $K \subseteq< f(h) >$ elde edildiğinden $K =< f(h) >$ dir. Sonuç olarak K devirli hipergruptur.

4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Hipergruplar teorisi klasik grup teorisinin uygun bir genellemesi olmasına rağmen gruplardaki birçok özellik hipergruplarda mevcut değildir. Bu tezde devirli grupların en temel teoremlerinin hipergrup teorisinde nasıl çalıştığı incelenmiştir. Birçok örnekle grup teoride mevcut olan çoğu özelliğin hipergruplar için doğru olmadığı elde edilmiştir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

1. Grupların aksine bir devirli hipergrubun değişmeli olması gerekmez. (Örnek 3.1.7)

2. Devirli bir hipergrubun alt hipergrupları devirli olmayabilir. (Örnek 3.2.1.)

3. “Bir hipergrubun tek bir elemanı tarafından üretilen kümesi ne zaman bir alt hipergrup olur?” sorusu araştırılmıştır. Hipergrupların özel bir sınıfı (geniş hipergruplar) için tek bir eleman tarafından üretilen kümenin alt hipergrup olduğu gösterilmiştir. (Teorem 3.2.3.) Ancak bu bize tam bir karakterizasyon vermemektedir. Yani bir hipergrupta (hatta devirli bir hipergrupta) her $a \in H$ için $< a >$ kümesinin alt hipergrup olması için H ın geniş hipergrup olması gerekmez. (Örnek 3.2.4.)

4. Lagrange Teoreminden ilham alarak sonlu hipergrupların alt hipergruplarının mertebesi araştırılmıştır. Ancak alt hipergruplarının mertebesinin hipergrubun mertebesini bölmeyebileceği gösterilmiştir. (Örnek 3.2.4.) Asal mertebeli gruplar devirli oluyor iken asal mertebeli bir hipergrup devirli olmayabilir. (Örnek 3.2.8.)

5. Devirli bir hipergrubun alt hipergruplarının özel bir sınıfa (kapalı, tersinir, …vb.) ait olmadığı gösterilmiştir. (Örnek 3.2.10.)

6. Hipergrupların homomorfik görüntülerinde grup teoride var olanlarla paralel sonuçlar elde edilmiştir. (Teorem 3.5.3. ve Teorem 3.5.4.)

Bu tezde elde edilen bulgular doğrultusunda aşağıdaki sorular araştırılabilir:

1. Devirli bir hipergrubun değişmeli olması için hangi şart eklenmelidir?

2. Bir hipergrubun tek bir elemanı tarafından üretilen kümesinin alt hipergrup olması için gerek ve yeter şart var mıdır? Bir devirli hipergrubun tüm alt hipergruplarının devirli olması için hipergrup nasıl seçilmelidir?

3. Devirli hipergrupların alt hipergrupları özel sınıflara (kapalı, tersinir,…vb.) hangi şartlar altında dahil olur?

4. Devirli hipergrupların alt hipergruplarının kartezyen çarpımları devirli midir?

5. Bir H hipergrubunun tüm alt hipergruplarının $(Sub(H), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi hakkında bir çok çalışma yapılmıştır [12,19]. Birinci öneride bahsedildiği gibi devirli bir hipergrubun tüm alt hipergruplarının devirli olması için tam bir karakterizayon elde edilirse bu hipergrubunun alt hipergruplarının kümesinin kafes yapısı araştırılabilir. Sonlu devirli bir grubun altgruplarının kafes yapısının dağılmalı olduğu bilinmektedir. Bu sebeple H devirli hipergrubu için $(Sub(H), \subseteq)$ kısmi sıralı kümesinin yapısı araştırılmaya değerdir.

KAYNAKLAR

[1] F. Marty, “Sur ungeneralisation de la notion degroup”, *8th Congress of Scandinavion Mathematicians*, pp. 45-49, 1934.

[2] P. Corsini ve V. Leoreanu, *Applications of hyperstructures theory*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[3] H.S. Wall, “Hypergroups”, *Am. J. Math.*, vol. 59, pp. 77-98, 1934.

[4] M. De Salvo ve D. Freni, “Sugli ipergruppi ciclici e completi”, *Matematiche (Catania)*, vol. 35, pp. 211-226, 1980.

[5] P. Corsini, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, 1993.

[6] D. Freni, “Una nota su gli ipergruppoidi ciclici”, *Ratio Mathematica*, vol. 9, pp. 101–111, 1995.

[7] L. Konguetsof, T. Vougiouklis, M. Kessoglides ve S. Spartalis, “On cyclic hipergroups with period”, *Acta Univ. Carolinae Math. Phys.*, vol. 28, pp. 3-7, 1987.

[8] T. Vougiouklis, “Cyclicity in a special class of hypergroups”, *Acta Univ. Carolinae Math. Phys.*, vol. 22, pp. 3-6, 1981.

[9] M. Novak, S. Krehlik ve I. Cristea, “Cyclicity in EL-hypergroups”, *Symmetry*, vol. 10, no. 11, pp. 611, 2018.

[10] D. Bayrak, “Subhypergroups of Cartesian Product of Hypergroups”, *Universal Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 10, pp. 145-153, 2017.

[11] B. Davvaz ve V. Leoreanu, *Hyperring theory ve applications*, International Academic Press, 2007.

[12] D. Bayrak, “The Lattice of Subhypergroups of A Hypergroup”, *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B- Teorik Bilimler*, vol. 7, pp. 159-165, 2019.

[13] Z. Gu, “On cyclic hypergroups”, *Journal of Algebra and Its Applications*, vol. 18, no. 11, 2019.

[14] C.G. Massouros, “On path hypercompositions in graphs and automata”, *MATEC Web Conf.*, 41, 05003, 2016.

[15] J. Chvalina, “Commutative hypergroups in the sense of Marty and ordered sets”, *In General Algebra and Ordered Sets, Proceedings of the International Conference Olomouc*, Verlag Johannes Heyn: Olomouc, Czech Republic, pp. 19–30, 1994.

[16] J. Chvalina, *Functional Graphs, Quasi-Ordered Sets and Commutative Hypergroups*, Masaryk University: Brno, Czech Republic, 1995.

[17] M. Alp ve B. Davvaz, “Hypergroups and their pullback and pushout structures”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 47, no. 2, pp. 237-250, 2018.

[18] K. Abbasi, R. Ameri ve Y. Talebi-Rostami, “Computation of fundamental group of a finite hypergroup”, *Sigma J Eng & Nat Sci*, vol. 9, no. 1, pp. 107-125, 2018.

[19] M. Tarnauceanu, “On the poset of subhypergroups of a hypergroups”, *Int. J. Open Problems Comp. Math.*, vol. 3, no. 2, pp.115-122, 2010.