# 1. GİRİŞ

Altmanifoldlar teorisi, diferansiyel ve integral hesabın bulunmasından itibaren çalışılmaya başlanmış bir konu olup, teorinin başlangıcı, Fermat'ın verilen bir eğriye teğetin nasıl çizileceği problemi ile başlamıştır. Fermat'ın zamanında düzlemsel bir eğrinin diferansiyel geometrisi (eğriliği, eğrilik çemberi, involüt, evolüt vb…); diferansiyel ve integral hesabın önemli bir araştırma alanı olup bu çalışmalardan sonra benzer çalışmalar uzay eğrileri ve yüzeyler de çalışılmıştır.

Bu teoriye ilk önemli katkı Euler tarafından yapıldı. 1736 yılında Euler yay uzunluğu kavramı ile eğrilik yarıçapını tanımladı ve yüzeylerin içsel geometrisini çalışmaya başladı. Bu çalışmanın yapıtaşı ise Gauss'un Theorama Egregium ile ortaya koyduğu ve yüzey teorisinin içsel geometrisinin başlangıcı sayılan gelişmelerdi. Böylece eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi matematiğin diğer branşlarına da önemli katkılar sağladı.

Minimal yüzey kavramı ilk kez 1762 yılında Lagrange tarafından tanımlandı. Lagrange $E^3$ Öklidyen uzayda, $z = f(x, y)$ şeklindeki diferansiyellenebilir fonksiyonlar ile tanımlanan grafikleri çalıştı.

Ayrıca verilen bir yüzeyin içsel Riemann yapısı kullanılarak yüzeyin eğriliği iki şekilde hesaplandı. Bunlardan biri asli eğrilikleri kullanarak bulmak, diğeri ise yüzey üzerine indirgenen iç çarpımı kullanarak içsel yolu takip etmektir. Bu iki yöntem, Gauss'un Theorema Egregium ile birbirine bağlantılıdır (Şahin 2012).

Altmanifoldlar teorisi üzerine ilk kapsamlı derleme Chen'in "Geometry of Submanifolds" (Chen 1973) adlı kitabında toplanmıştır. Ayrıca buna ek olarak Thas hiperyüzey, ortalama eğrilik, şekil operatörü gibi kavramlardan faydalanarak monosistemler üzerine bazı çalışmalar yapmıştır (Thas 1978).

Bu çalışmada ise monosistem örnekleri verilip, bunların şekil operatörü, asli eğrilik ve asli doğrultuları incelendi. Ayrıca bu monosistemlerin açılabilir olup olmadıklarına bakıldı.

# 2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

## 2.1 Temel Tanımlar ve Kavramlar

### 2.1.1 Tanım (Vektör Uzay)

K verilen bir cisim ve V, herhangi $u, v \in V$ yi bir $u + v \in V$ toplamına ve $u \in V$, $k \in K$ için $ku \in V$ çarpımına eşleyen toplama ve skaler ile çarpma kuralları ile boş olmayan bir cümle olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V bir vektör uzayıdır (Burada V nin elemanlarına vektör denir):

$[A_1]$ Herhangi $u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$,

$[A_2]$ V de 0 vektörü ile gösterilen ve sıfır vektörü denen bir vektör vardır ve bunun için her $u \in V$ vektörü için $u + 0 = u$ dur,

$[A_3]$ Her bir $u \in V$ vektörü için, $V$ de $(-u)$ ile gösterilen ve $u + (-u) = 0$ olan bir vektör vardır,

$[A_4]$ Herhangi $u, v \in V$ vektörler için, $u + v = v + u$,

$[M_1]$ Herhangi $k \in K$ skaleri ve herhangi $u, v \in V$ vektörleri için, $k(u + v) = ku + kv$,

$[M_2]$ Herhangi $a, b \in K$ skalerleri ve herhangi $u \in V$ vektörü için, $(a + b)u = au + bu$,

$[M_3]$ Herhangi $a, b \in K$ skalerleri ve herhangi $u \in V$ vektörü için, $(ab)u = a(bu)$,

$[M_4]$ $l \in K$ birim skalerleri ve herhangi $u \in V$ vektörü için $lu = u$ (Anonim 2019).

### 2.1.2 Tanım (Baz)

V nin bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse V nin bir bazı adını alır:

1. S lineer bağımsızdır.

2. $S_P(S) = V$ dir, yani $\forall \alpha \in V$ elemanı S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer kombinasyonudur (Hacısalihoğlu 1973).

### 2.1.3 Tanım (İç Çarpım)

V bir reel vektör uzayı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan ve

$V \times V \to \mathbb{R}$

şeklinde tanımlı bir dönüşüme V üzerinde **iç çarpım** denir. $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v\rangle$ şeklinde gösterilir.

i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, simetri aksiyomu

ii) Bilineerlik aksiyomu:

$\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle = \langle u, cv\rangle$; $\forall c \in \mathbb{R}$;

$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$ , $\forall v \in V$;

$\langle u\ , v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u\ , v_2\rangle$ , $\forall u \in V$.

iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu:

$\forall u \in V$ için,

$\langle u, u\rangle \geq 0$,

$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (Hacısalihoğlu 1973).

### 2.1.4 Tanım (Üç Boyutlu Uzayda Eğriler)

$M \subset E^n$ eğrisi $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$k_i\colon I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r,$

$s \longrightarrow k_i(s) = < V_i'(s), V_{i+1}(s) >$

şeklinde tanımlı $k_i$ fonksiyonuna M nin i-yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i-yinci eğriliği denir (Yüce 2017).

### 2.1.5 Tanım (Ortogonal ve Ortonormal Cümleler)

Normu bir olan vektörlere birim vektör denir. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ iken $\langle x, y\rangle = 0$ ise bu iki vektör birbirine ortogonaldir (diktir) denir. Sıfırdan farklı vektörlerin bir S cümlesinde herhangi iki vektör birbirine dikse bu S cümlesine ortogonaldir denir. S cümlesi ortogonal iken S deki her bir vektör birim vektör ise S ye ortonormaldir denir (Yüce 2017).

### 2.1.6 Tanım (Afin Uzay)

A boş olmayan bir cümle ve V de bir K cismi üstünde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir:

(A1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$,

(A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu 1998).

### 2.1.7 Tanım (Öklid Uzayı)

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle\, ,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \ \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa A afin uzayına Öklid uzayı denir. Bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir (Hacısalihoğlu 1998).

### 2.1.8 Tanım (Uzaklık)

$$d: E^n \times E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $E^n$ Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Yüce 2017).

### 2.1.9 Tanım (Standart Öklid Çatısı)

$E_1 = (1, 0, \dots 0), E_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1)$ olmak üzere $E^n$ deki $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı denir (Yüce 2017).

### 2.1.10 Tanım (Topolojik Uzay)

X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu $\tau$ olsun. $\tau$ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır:

(T1) X, $\emptyset \in \tau$

(T2) $\forall\, A_1, A_2 \in \tau \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

(T3) $A_i \in \tau, i \in I, \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau.$

Bir X cümlesi ve üzerindeki bir $\tau$ topolojisinden oluşan (X,$\tau$) ikilisine de bir topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu 1998).

### 2.1.11 Tanım (Homeomorfizm)

X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f: X \to Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve $f^{-1}$ tersi var ve $f^{-1}$ de sürekli ise $f$ ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir (Hacısalihoğlu 1998).

### 2.1.12 Tanım (Hausdorff Uzayı)

X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan $A_P$ ve $A_Q$ açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalihoğlu 1998).

### 2.1.13 Tanım (Manifold)

M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $P \in M$ için, $\mathbb{R}^m$ deki bir açık cümleye homeomorfik olacak şekilde $P$ noktasının bir U açık komşuluğu varsa, M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda boy($\mathbb{R}^m$) = m olduğundan, manifoldun boyutu m olarak tanımlanır (Şahin 2012).

### 2.1.14 Tanım (İmmersiyon)

$\boldsymbol{M^n}$ n-boyutlu, kompakt, yönlendirilebilir $C^\infty$ bir manifold olsun ve bir

$$f: \boldsymbol{M^n} \xrightarrow{C^\infty} E^{n+N}$$

dönüşümünü alalım. $f$ dönüşümünün birebir, yani rank (J($f$)) = n olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f$ dönüşümüne **immersiyon** denir. Eğer $f$ birebir ise $f$ ye **imbedding** denir (Sabuncuoğlu 2014).

### 2.1.15 Tanım (Alt Manifold)

$M$ bir k-manifold ve $\overline{M}$ de bir n-manifold olsun. $\forall P \in M$ noktası için $\overline{M}$ de bir $\overline{U}$ ve $M$ de bir $U$ koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \overline{U} | \bar{x}_{k+1}(m) = \cdots = \bar{x}_n(m) = 0\}$$

ise $M$ ye $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu denir. Burada $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ koordinat sistemi $\overline{U}$ de ve $\{x_1 = \bar{x}_1|_U, \ldots, x_k = \bar{x}_k|_U\}$ da $U$ daki koordinat sistemidir (Hacısalihoğlu 1998).

### 2.1.16 Tanım (Hiperyüzey)

$E^n$, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1) boyutlu altmanifolduna bir hiperyüzey denir.

$$\text{M}=\{x \in U \subset E^n |\ f: U \xrightarrow{dif.bilir} \mathbb{R},\ \text{U bir açık alt cümle}\}$$

$$x \longrightarrow f(x) = c$$

$\nabla f|_P \neq 0, \forall P \in M$ biçiminde tanımlanır. $E^n$ de bir (n-1)-yüzey, n>3 olması halinde bir hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu 1983).

### 2.1.17 Tanım (Riemann Metriği)

$M$ bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

ile tanımlı $g$ bilineer formu, simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

(a) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

(b) $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X,X) \geq 0$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa $g$ bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda $(M, g)$ ikilisine Riemann manifoldu denir (Yüce 2017).

**2.1.18 Tanım (Yarı Riemann Manifoldu)**

M bir $C^\infty$ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli $C^\infty$ fonksiyonların halkası da $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle\,,\rangle: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

fonksiyonu,

1) 2-lineer

2) Simetrik

3) $\forall X \in \chi(M)$ için $\langle X, Y\rangle = 0 \Rightarrow Y = O \in \chi(M)$

özelliklerini sağlıyor ise, M ye yarı-Riemann manifoldu denir (Hacısalihoğlu 1983).

**2.1.19 Tanım (Kovaryant Türev (Konneksiyon))**

M bir $C^\infty$ manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$D: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to D(X, Y) = D_X Y$$

fonksiyonu için,

1) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z\,,\ \forall X, Y, Z \in \chi(M),\ \forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

2) $D_X(fY) = fD_X Y + (Xf)Y,\ \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

özellikleri sağlanıyorsa D ye M manifoldu üstünde bir afin konneksiyon ve $D_X$ e de X e göre kovaryant türev operatörü denir.

Özel olarak M manifoldu bir Riemann manifoldu olarak alınırsa, konneksiyonun iç çarpım ile ilgisi düşünülebilir. Bu ise bizi Riemann konneksiyonu kavramına götürür (Hacısalihoğlu 1983).

### 2.1.20 Tanım (Riemann Konneksiyonu)

M bir yarı-Riemann manifoldu ve D, M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer D konneksiyonu aşağıda verilen özelliklere sahip ise, D konneksiyonuna, M üstünde bir Riemann konneksiyonu ve $D_X$ e de X'e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü denir (Hacısalihoğlu 1983).

1) D, $C^\infty$ sınıfındandır;

2) M nin bir A bölgesi üzerinde, $C^\infty$ olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$ dir,

3) M nin bir A bölgesi üzerinde $C^\infty$ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall P \in A$ için

$X_P < Y, Z > = < D_X Y, Z >_P + < Y, D_X Z >_P$ dır.

### 2.1.21 Tanım (Eğrilik Tensörü)

M bir $C^\infty$manifold olsun.

$$R: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n)$$

$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z$$

$$R(X, Y, Z) = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z$$

$$= \left(D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}\right)Z = ([D_X, D_Y] - D_{[X,Y]})Z$$

olarak tanımlanan R fonksiyonuna $M$ nin **eğrilik tensör** alanı ve bunun bir $P \in M$ noktasındaki değeri olan $R(X_P, Y_P)Z_P$ tensörüne de $M$ nin **P noktasındaki eğrilik tensörü** denir (Yüce 2017).

### 2.1.22 Tanım (Weingarten Dönüşümü (Şekil Operatörü))

$E^n$ in bir bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. $E^n$ de Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

S(X)=$D_X N$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir (Yüce 2017).

### 2.1.23 Tanım (Asli Eğrilik)

$E^n$ de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen S(P) nin karakteristik değerleri M nin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir (Sabuncuoğlu 2014).

### 2.1.24 Tanım (Ortalama Eğrilik)

$E^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü S(P) olmak üzere

$$H: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longrightarrow H(P) = tr(S(P))$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve H(P) değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2014).

### 2.1.25 Tanım (I. Temel Form)

$E^n$ in bir M hiperyüzeyi üzerinde q-yuncu temel form, $1 \leq q \leq n$ olmak üzere,

$$I^q: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X,Y) \rightarrow I^q(X,Y) = < S^{q-1}(X), Y >$$

şeklinde tanımlı $I^q$ fonksiyonuna denir.

Buna göre M üzerinde I. Temel form, henüz, M için < , > metrik tensöründen ibarettir. Diğer taraftan, M üzerinde metrik tensör; simetrik, bilineer ve S operatörü de self-adjoint olduğundan, temel formların her biri $\chi(M)$ üzerinde simetrik ve bilineerdir (Sabuncuoğlu 2014).

### 2.1.26 Tanım (II. Temel Form)

$E^n$ de M bir (n-1)-altmanifold ve P noktasında M nin tanjant uzayı $T_M(P)$ olduğuna göre M üzerinde Weingarten dönüşümü

$$S: T_M(P) \rightarrow T_M(P)$$

şeklinde tanımlıdır. M üzerinde ikinci dereceden bir kovaryant tensör olarak tanımlanan ikinci temel form II ile gösterilir ve $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$ için

$$\mathrm{II}(X_P, Y_P) = < S(X_P), Y_P >$$

şeklinde tanımlanır. Burada II tensörünün

$$S(X_P) = D_{X_P}N$$

olması nedeniyle N birim normal vektör alanına bağlıdır (Yüce 2017).

**2.1.27 Tanım (Gauss-Kronecker Eğriliği)**

$E^n$ de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S_P$ olmak üzere

$$K: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P \longrightarrow K(P) = detS_P$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin Gauss-Kronecker eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki Gauss-Kronecker eğriliği (total eğrilik) denir (Yüce 2017).

**2.1.28 Tanım (Gauss Formülü)**

$E^n$ nin bir hiperyüzeyi M ve M nin şekil operatörü S olsun. $E^n$ nin Riemann konneksiyonu D ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + < S(X), Y > N \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlı $\overline{D}$ operatörüne M üzerinde Gauss anlamında kovaryant türev operatörü ve (2.1) denklemine de M üzerinde Gauss denklemi denir (Hacısalihoğlu 1983).

**2.1.29 Tanım (Codazzi-Mainardi Denklemi)**

$E^n$ nin bir (n-1) alt manifoldu üzerindeki kovaryant türev $\overline{D}$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\overline{D}_X(\overline{D}_Y Z) - \overline{D}_Y(\overline{D}_X Z) - \overline{D}_{[X,Y]}Z = 0 \text{ dır.}$$

Dolayısıyla M için Gauss eğrilik denklemi kullanıldığında

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle V(Y,Z), V(X,Y)\rangle - \langle V(X,Z), V(Y,W)\rangle$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\overline{D}_Y S(X) - \overline{D}_X S(Y) + S([X,Y]) = 0 \Longrightarrow S([X,Y]) = \overline{D}_X S(Y) - \overline{D}_Y S(X)$$

denklemine de M için Codazzi-Mainardi denklemi denir (Hacısalihoğlu 1983).

$$[X,Y]=\overline{D}_XY-\overline{D}_YX \Longrightarrow S([X,Y])=\overline{D}_XS(Y)-\overline{D}_YS(X)$$

**2.1.30 Tanım (Frenet-Serret Teoremi)**

$E^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \longrightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$\mathrm{T}' = \kappa N$

$N' = -\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B}$

$\mathrm{B}' = -\tau \mathrm{N}$

dir. Burada, $\kappa$ ve $\tau$ sırasıyla eğrilik ve burulmadır (Sabuncuoğlu 2014).

## 2.2 Öklidyen Uzaydaki Alt Manifoldlar

$E^m$ Öklid uzayının bir altmanifoldu M olsun. M nin Riemann konneksiyonu D, $E^m$ nin standart Riemann konneksiyonu $\overline{D}$ olsun. X ve Y, M nin vektör alanları ve V, M nin ikinci temel formu ise, $\overline{D}_xY$ teğet ve normal bileşenlerine göre, sırasıyla,

$$\overline{D}_xY = D_xY + V(X,Y) \qquad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki, $\xi$ , M üzerinde normal bir vektör alanı olsun. $\overline{D}_xY$ vektör alanı teğet ve normal bileşenlerine göre ayrıştırılarak

$$\overline{D}_x\xi = -\big(A_\xi(x)\big) + D_x^{\perp}\xi \qquad (2.3)$$

Weingarten denklemi elde edilir. Burada $A_\xi$, M nin her $p$ noktasında $M_p \rightarrow M_p$ ye lineer bir self-adjoint dönüşümdür ve $D^{\perp}$, $M^{\perp}$ altmanifoldunun normal konneksiyonudur. Eğer N, $M^{\perp}$ normal demetinin bir alt demeti (yani N, M nin normal bir alt demeti) ve $\overline{D}_x\eta$ nin, M nin her X vektör alanı ve N nin her birim normal alan $\eta$ için; N ye dik olan normal alt demeti, herhangi bir bileşeni yok ise N alt demetine $N^{\perp}$ e paraleldir denir (Chen ve Yano 1973). $\xi$ normal vektör alanı ve X ve Y de M nin vektör alanı olsunlar. Eğer $E^m$ nin standart metrik tensörü $<,>$ ile gösterilirse,

$$<V(X,Y),\xi> = < A_\xi(X), Y> \qquad (2.4)$$

şeklinde olur.

$\xi_1, \dots, \xi_{m-dimM}$, $M^{\perp}$ normal demetinin ortonormal bir bazını oluştursun. Bu durumda

$$<V(X,Y), \xi_i >= V^i(X,Y)$$

ya da

$$V(X,Y) = \sum_{i=1}^{m-dimM} V^i(X,Y)\xi_i$$

olur. M nin H ortalama eğrilik vektörü

$$H = \sum_{i=1}^{m-dimM} \frac{trA_{\xi_i}}{dimM}\xi_i$$

şeklindedir. Eğer M nin her noktasında H=0 ise, M ye minimaldir denir (Thas 1978).

# 3. MİNİMAL MONOSİSTEMLER

## 3.1. $E^m$ de (n+1) Boyutlu Monosistemler

$e_1(s), \dots, e_n(s)$ ortonormal baz vektörleri tarafından gerilen, n≥ 1 boyutlu uzayların ortogonal yörüngesi, M monosisteminin bir r(s) dayanak eğrisi olsun. Bu durumda M, lokal olarak

$$X(s, l_1, \dots, l_n) = \mathrm{r(s)} + \sum_{i=1}^{n} l_i e_i(s), \quad l_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

şeklinde ifade edilebilir.

$e_1, \dots, e_n, e$ M nin ortonormal bir baz alanı, yani e üretim uzayların ortogonal yörüngelerinin birim teğet vektörü olsun. Eğer, her $p \in M$ noktasında

$$\mathrm{rank}\ [e, e_1, \dots, e_n, \overline{D}_e e_1, \dots, \overline{D}_e e_n] = 2n - k \tag{3.1}$$

ise M ye k-açılabilirdir denir.

$k \geq 0$ ise, M singüler noktalar içerir (Bu çalışmada bu noktalar göz önünde bulundurulmayacaktır), gerçekten (3.1) sağlanırsa, $E^m$ de paralel olan aynı üretim uzayının iki singüler olmayan p ve q noktasında, singüler noktaların k boyutlu bir S altuzayını kapsar ve aynı üretim uzayının iki tekil olmayan noktası p ve q noktalarında $M_p$ ve $M_q$tanjant uzayları $E^m$ de paraleldirler. (Yani, $M_q$ $E^m$ de p den q ya $M_p$ nin paralel yer değiştirmesidir. Klasik bir şekilde $M_p$ nin $M_q$ ile çakıştığı söylenir). S ve p tarafından gerilen (k+1)-boyutlu uzay ile S ve q tarafından gerilen (k+1)-boyutlu uzay aynıdır. Eğer k=-1 ise, M monosistemi açılabilir değildir ve eğer k=n-1 ise, M total açılabilirdir denir (Thas 1978). $X = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i + ae$ ve $Y = \sum_{i=1}^{n} b^i e_i + be$ iki M vektör alanı olsun. V, $E^m$ de M nin ikinci temel formunu göstermek üzere

$$V(e_i, e_j) = 0, \ \ i, j = 1, \dots, n \tag{3.2}$$

olduğu elde edilir.

$$V(X, Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i + ae, \sum_{i=1}^{n} b^i e_i + be\right)$$

$$= V\left(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i, \sum_{i=1}^{n} b^i e_i\right) + V\left(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i, be\right) + V\left(ae, \sum_{i=1}^{n} b^i e_i\right) + V(ae, be)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a^i, b^i) \underbrace{V(e_i, e_i)}_{0} + \sum_{i=1}^{n} a^i b\, V(e_i, e) + \sum_{i=1}^{n} a b^i\, V(e, e_i) + abV(e, e)$$

Burada $V(e_i, e) = V(e, e_i)$ dir. Böylece

$$V(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}(a^i b + b^i a)V(e, e_i) + abV(e,e) \tag{3.3}$$

bulunur.

$M^{\perp}$ nin $V(e, e_i)$, $i = 1, \dots, n$ normal alanları tarafından gerilen normal alt demeti F ile gösterilir.

Böylece monosistem tanımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

### 3.1.1 Tanım (Monosistem)

Lineer uzayların bir parametreli ailesi ile üretilen, $E^m$ Öklid uzayının alt manifoldlarına monosistem adı verilir (Thas 1978).

### 3.1.2 Önerme

M nin k-açılabilir olması için gerek ve yeter şart F normal alt demetinin (n-k-1) boyutlu olmasıdır (Thas 1978).

**İspat:**

Kabul edelim ki (3.1) sağlansın. Eğer D, M nin Riemann konneksiyonu ise

$$\overline{D}_e e_i = D_e e_i + V(e, e_i) \quad i = 1, \dots, n$$

şeklindedir. $D_e e_i$; $e_1, \dots, e_n, e$ alanlarının lineer bir kombinasyonudur ve bu nedenle $\overline{D}_e e_i$ alanlarını (3.1) de V ile değiştirebiliriz. Şimdi $e, e_1, \dots, e_n$ ile gerilen tanjant(teğet) uzay her bir noktada F ye normaldir ve dolayısıyla n+1+dimF=2n-k veya dimF=n-k-1 olur.

Sonuç olarak, eğer $m - n - 1 \geq n - k - 1$ veya $m \geq 2n - k$ ise M yalnızca k-açılabilir olabilir.

### 3.1.3 Önerme

M nin bir p noktasının komşuluğunda $e_1, \dots, e_n, e$ ortonormal baz alanını alalım. $(e_i)_p$ ve $e_p$ vektörleri tarafından gerilen $M_p$ nin iki boyutlu $\sigma$ doğrultusunda, $K_\sigma$ Riemann eğriliği;

$$K_\sigma = -< \overline{D}_{e_i} e, \overline{D}_{e_i} e >_p, \quad i = 1, \dots, n \tag{3.4}$$

şeklindedir (Thas 1978).

**İspat:**

Varsayalım ki, M nin eğrilik tensörü R olsun. Böylece

$$K_\sigma =< e_i, R(e_i, e) >_p$$

dır. Fakat Gauss denklemine göre

$$< e_i, R(e_i, e)_e >_p =< V(e_i, e_i), V(e, e) >_p -< V(e_i, e), V(e_i, e) >_p$$

dir.

$$e_i\langle e, e_j\rangle =< \overline{D}_{e_i}e, e_j > +< e, \overline{D}_{e_i}e_j >= 0$$

$$< \overline{D}_{e_i}e, e_j >= -< e, \overline{D}_{e_i}e_j >= 0, \;\; i, j = 1, \dots, n \text{ ve}$$

$$e_i\langle e, e\rangle =< \overline{D}_{e_i}e, e > +< e, \overline{D}_{e_i}e >= 0$$

$$< \overline{D}_{e_i}e, e >= -< e, \overline{D}_{e_i}e >= 0, \;\; i, j = 1, \dots, n$$

olduğu elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler ile birlikte $V(e_i, e_i)$=0 $i = 1, \dots, n$ olduğu da göz önünde bulundurulursa, $\overline{D}_{e_i}e$ nin bir normal vektör alanı ya da

$$\overline{D}_{e_i}e = V(e_i, e) \tag{3.5}$$

olması anlamına gelir ki bu da ispatı tamamlar.

Varsayalım ki $\xi_1, \dots, \xi_{m-n-1}$, $M^\perp$ normal demetinin ortonormal bir baz alanı olsun. Bu durumda aşağıdaki Weingarten denklemleri elde edilir:

$$\begin{cases} \overline{D}_{e_1}\xi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{1j}^{i} e_i + b_{1j} e + \sum_{r=1}^{m-n-1} c_{1j}^{r} \xi_r \\ \vdots \\ \overline{D}_{e_n}\xi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{nj}^{i} e_i + b_{nj} e + \sum_{r=1}^{m-n-1} c_{nj}^{r} \xi_r \\ \overline{D}_{e}\xi_j = \sum_{i=1}^{n} b_{j}^{i} e_i + b_{j} e + \sum_{r=1}^{m-n-1} c_{j}^{r} \xi_r \end{cases} \quad j = 1, \dots, m-n-1. \tag{3.6}$$

(2.4) ve (3.2) birlikte ele alınacak olursa

$$<\mathrm{V}(e_s, e_k), \xi_j >=< A_{\xi_j}(e_s), e_k >= -a_{sj}^{k} = 0, \quad s, k, = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m-n-1$$

olur. Ayrıca, $A_{\xi_j}$ lineer dönüşümünün self-adjoint olmasından, $b_j^i = b_{ij}$ $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m-n-1$ dir. Bu sebeple $A_{\xi_j}$ matrisi;

$$-\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nj} \\ b_{1j} & \dots & b_{nj} & b_j \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, m-n-1$$

formunda elde edilir. Bu ise $n \geq 2$ ise det $A_{\xi_j}$= 0 olması demektir. Buna göre aşağıdaki sonuç verilebilir:

**3.1.4 Sonuç**

Eğer $n \geq 2$ ise, normal doğrultudaki her noktada M nin Lipschitz-Killing eğriliği sıfırdır (Thas 1978).

(2.4) tekrar kullanıldığında <V($e_s$,$e$), $\xi_j >=< A_{\xi_j}(e_s), e >= -b_{sj}$ olur ve eğer $e$ ve $e_s$ tarafından gerilen iki boyutlu doğrultuda M nin Riemann eğriliği $K(e_s, e)$ ile gösterilirse (3.4) ve (3.5) den

$$K(e_s, e) = -\sum_{j=1}^{m-n-1} (b_{sj})^2 \tag{3.7}$$

bulunur.

Her bir üretim uzayı için $K(e_s, e_i) = 0,\ s, i = 1, \dots, n,\ E^m$ de total geodeziktir. Bu nedenle $e_s$ doğrultusunda M nin Ricci eğriliği $K(e_s, e)$ ye eşittir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir:

**3.1.5 Sonuç**

M nin r skaler eğriliği

$$r=-2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m-n-1} (b_{ij})^2 \tag{3.8}$$

şeklindedir. (2.4) ten dolayı $< V(e, e), \xi_i >=< A_{\xi j}(e), e >= -b_j,\ j = 1, \dots, m-n-1$ dir ve ortalama eğrilik vektörü de

$$H = \frac{V(e,e)}{n+1} \tag{3.9}$$

olur (Thas 1978).

**İspat:**

Skaler eğrilik tanımından,

r = $2\sum_{i\neq j=1}^{n} K(e_s, e)$

dir. Burada $K(e_s, e) = -\sum_{j=1}^{m-n-1}(b_{sj})^2$ eşitliği yerine yazılırsa

r = $-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-n-1}(b_{ij})^2$

elde edilir. Diğer taraftan

$$A = -\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nj} \\ b_{1j} & \dots & b_{nj} & b_j \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, m-n-1$$

olduğu bilindiğinden, H ortalama eğrilik vektörü tanımından,

$$H = \frac{izA}{n+1} = \sum_{j=1}^{m-n-1}\frac{-b_j}{n+1}\xi_j = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m-n-1} -b_j\xi_j$$

olur. Burada $-b_j =< V(e,e), \xi_j >$ eşitliği yerine yazıldığında

$$H = \frac{V(e,e)}{n+1}$$

bulunur.

### 3.1.6 Sonuç

M monosisteminin minimal olması için gerek ve yeter şart üretim uzaylarının her bir ortogonal yörüngesinin M nin bir asimptotik çizgisi olmasıdır (Thas 1978).

**İspat:**

(⟹) : M monosistemi minimal ise H=0 dır. Bu durumda

$$H = \frac{V(e,e)}{n+1}$$

eşitliğinden $V(e,e)$=0 olur. Bu da ortogonal yörüngenin bir asimptotik doğru olduğunu gösterir.

(⟸) : M üzerinde ortogonal yörüngenin asimptotik doğru olması için gerek ve yeter şart II. Temel formun sıfır olmasıdır. II. Temel formun yani $V(e,e)$=0 olduğu

$$H = \frac{V(e,e)}{n+1}$$

de göz önüne alınırsa, H=0 olur. Bu da M monosisteminin minimal olduğunu gösterir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

**3.1.7 Teorem**

Eğer (n+1)-boyutlu k-açılabilir M monosistemi minimal ise, bu durumda M, $E^{2n-k}$ uzayının bir alt manifoldudur (Thas 1978).

**3.1.8 Sonuç**

$E^m$ Öklid uzayında m tek ise (çiftse) herhangi bir $E^l$, l<m, de yatmayan, total olmayan minimal geodezik monosistemlerin en fazla (m-1/2)ve ((m-2)/2) gibi farklı iki türü (yani, farklı boyutlu lineer uzaylar tarafından üretilen) vardır. (n+1) boyutlu açılabilir olmayan minimal monosistemler yalnızca $E^{2n+1}$ de var olabilir (Thas 1978).

**3.1.9 Teorem**

Eğer (n+1)-boyutlu k-açılabilir M monosisteminin $H \neq 0$ ortalama eğrilik vektörü M nin her noktasında F normal alt demetinin bir vektörü ise M, $E^{2n-k}$ nin bir altmanifoldudur (Thas 1978).

**3.1.10 Açıklamalar**

**1.** (n+1)-boyutlu k-açılabilir M monosistemin F ve H tarafından gerilen normal alt demeti F+H, normal demette paralel ise, M (2n-k+1) boyutlu bir Öklid uzayında bulunur. Bu ise F+H ın en fazla (n-k) boyutlu olması ve F+H ın M nin her X ve Y vektör alanı için V(X,Y) ile gerilen alt demet olmasının sonucudur.

**2.**"M, $E^m$ nin (n+1)-boyutlu bir altmanifoldu olsun ve N de $M^{\perp}$ nin (m-n-2)-boyutlu bir normal alt demeti olsun. Eğer N paralel değilse ve M, N ye göre umbilik ise M, (n+1)-boyutlu Öklid uzayının bir hiperküresi ya da hiperdüzlemi anlamına gelen n-kürelerin bir bölgesidir." (Chen ve Yano 1973).

Eğer M hiperdüzlemi yukarıda ifade edilen bir bölge içindeyse, bazı kısıtlamalar göz önüne alınır:

Varsayalım ki $\xi_1, \dots, \xi_{m-n-1}$, $M^{\perp}$ nin ortonormal bir baz alanı olsun ve N $\xi_1, \dots, \xi_{m-n-2}$ tarafından gerilsin. Eğer M, N ye göre umbilik ise (yani $A_\eta$ N de her $\eta$ vektör alanı için birim dönüşüm ile orantılıysa) $A_{\xi_1} = \cdots = A_{\xi_{m-n-2}} = 0$ olarak alırız. ((3.6) denklemi $A_{\xi_j}$ nin matris formudur). Böylece $H \parallel N^{\perp}$ olur. Normal alt demet F yi göz önüne alalım. F deki her $\xi$ vektör alanı için $A_{\xi} \neq 0$ dır. Bu nedenle $F \perp N$ ya da $F = N^{\perp}$ olması gereklidir. Ancak $F \neq 0$ ise $H \in F$ olduğu görülür ve $N^{\perp}$ nin (ve dolayısıyla N nin) paralel olduğu anlamına gelen, M nin $E^{n+2}$ de bir hiperyüzey olduğunu ifade eden Teorem 3.1.7 ve 3.1.9 elde edilir. Bu nedenle; “M tamamen jeodeziktir ( H=F=0) ya da M, m>n+2 olan $E^{m}$’de tamamen açılabilirdir (F=0) ve H≠0 dır.” denilebilir.

## 3.2 Minimal Monosistemlerin İnşası

$E^m$ Öklid uzayının standart koordinat sistemi $x^1, \dots, x^m$ olsun. $x^{p+1} = \cdots = x^m = 0$ ile tanımlı $E^m$ in altuzayı olan $E^p$ Öklid uzayı olsun. Ayrıca M, $x^i = f^i(u_1, \dots, u_r),\ i = 1, \dots, p$ parametrik temsiliyle lokal olarak verilen r-boyutlu bir altmanifold olsun.

$E^m$ nin (m-p+r) boyutlu $M'$altmanifoldunun inşası şöyledir:

$$x^i = f^i(u_1, \dots, u_r), i = 1, \dots, p;\ x^j = l_j; j = p+1, \dots, m;\ l_j \in \mathbb{R}.$$

### 3.2.1 Önerme

Eğer $E^p$ de M minimal ise, $M'$ de $E^m$ de minimaldir (Thas 1978).

**İspat:**

$e_1, \dots, e_r$, M nin ortonormal bir baz alanı olsun ve $\bar{V}$ ise $E^m$ de $M'$ nün ikinci temel tensörü olsun. Normal vektör alanı olan

$$H(M; M', E^m) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \bar{V}\,(e_i, e_i)\ ,$$

$E^m$ ve $M'$ ye göre, M nin bağıl ortalama eğrilik vektörü olarak adlandırılır (Chen 1973). Eğer H (ya da $\overline{\mathrm{H}}$) $E^p$ de (ya da $M'$ $de$) M nin ortalama eğrilik vektörü ise

$$H = \bar{H} + H(M; M', E^m)$$

yazılabilir.

Eğer M, $E^p$ de (ve $E^m$ de) minimal ise H=0 dır ve böylece $\bar{H} = 0$ olur ve M nin her noktasında $H(M; M', E^m) = 0$ dır. $M'$ nün $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_{m-p+r}$ ortonormal bir baz alanına göre $e_1, \dots, e_r$ de M nin ortonormal baz alanı olsun. $E^m$ de $M'$nün $H'$ ortalama eğrilik vektörü

$$H' = \frac{1}{m-p+r}\left(\sum_{i=1}^{r} \bar{V}(e_i, e_i) + \sum_{j=r+1}^{m-p+r} \bar{V}(e_j, e_j)\right)$$

şeklinde verilsin.

$E^m$ in standart koordinat baz alanı $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ olsun. $M'$ nün inşası nedeniyle (M nin noktalarında) $e_j = \frac{\partial}{\partial x^{p-r+j}}, j = r+1, \dots, m-p+r$ yazılabilir. Bu alanların her biri M nin her noktasında $M'$ nün asimptotik doğrultusunu belirler. Böylece eğer $E^p$ de M minimalse, M nin her noktasında $H' = 0$ olur.

Şimdi, $M'$ nün herhangi $q(u_1^0, \dots, u_r^0, l_{p+1}^0, \dots, l_m^0)$ noktasını göz önüne alalım. M minimal olduğundan,

$$x^i = f^i(u_1, \dots, u_r),\ \ i = 1, \dots, p;\ \ x^j = l_j^0;\ \ j = p+1, \dots, m.$$

tarafından temsil edilen $x^j = l_j^0;\ \ j = p+1, \dots, m$ Öklid uzayının $\bar{M}$ altmanifoldu minimaldir. Ama q noktasında $\left(\frac{\partial}{\partial x^{p-r+j}}\right)_q$ $j = r+1, \dots, m-p+r$ vektörleri $M_q^{\perp}$ de $\bar{M}_q^{\perp}$, normal uzayının tekrar ortonormal bir baz alanı olur ve q noktasında $M'$ nün asimptotik doğrultularını belirler. Tüm bunlardan $M'$ nün her q noktasında $H'_q = 0$ olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

**Şimdi minimal monosistemleri kuralım:**

Eğer (n+1)-boyutlu M monosistemleri k-açılabilir ise, $M \subset E^{2n-k}$ olduğu biliniyor. Bu durumda, standart koordinat sistemi $x^1, \dots, x^{2n-k}$ olan $E^{2n-k}$ uzayını göz önüne alalım.

**a. 2n-k=3** olması durumunda n=1 ve k=-1 dir, yani M açılabilir değildir. Bu durumda helikoid $E^3$ de tek açılamayan minimal regle yüzeydir.

**b. 2n-k=4** olması durumunda Sonuç 3.1.8 yalnızca bir (aşikar olmayan) olasılığa sahip olunduğunu ifade eder: Düzlemler tarafından üretilen minimal bir monosistem. Önerme 3.2.1 den dolayı, aşağıdaki örneği verebiliriz: (Helikoid $E^3$ ün minimal bir altmanifoldu olarak düşünüldüğünde)

$$x^1 = l_1 coss, x^2 = l_1 sins, x^3 = as, x^4 = l_2, a = sabit \neq 0, l_1, l_2 \in \mathbb{R}.$$

Bu manifold, $C^{\infty}$ ve 0-açılabilirdir (Her üreten düzlemdeki tek(ortak) tekil nokta sonsuzdur.). Ayrıca, üreten düzlemlerin her bir ortogonal yörüngesi dairesel bir helezon ($E^3$ de) ya da düz bir çizgidir.

**c. 2n-k=5** olması durumunda iki ihtimal vardır: Düzlemler (n=2, k=-1) ya da 3-boyutlu uzaylar (n=3, k=1) tarafından üretilen minimal monosistemlerdir. Birincisi açılamaz. Fakat Önerme 3.2.1 göz önüne alındığında, ikinci tür için aşağıdaki örnek verilebilir.

$$x^1 = l_1 coss, x^2 = l_1 sins, x^3 = as, x^4 = l_2, x^5 = l_3, \qquad l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}.$$

Bu manifold $C^{\infty}$ ve 1-açılabilirdir. Bu durumda üç boyutlu her üretim uzayındaki tekil noktaların ortak çizgisi sonsuzdur. Aşağıdaki örnekte olduğu gibi burada yine ortogonal yörüngeler, dairesel helezonlar veya düz çizgilerdir. Ayrıca $E^{2n+1}$ de açılamayan minimal monosistemlerin genel durumu göz önüne alınıp

$$x^{i-1} = l_{\frac{i}{2}} coss, x^i = l_{\frac{i}{2}} sins, x^{2n+1} = as, l_{\frac{i}{2}} \in \mathbb{R}, i = 2,4,6, \dots ,2n.$$

olur.

Burada M nin açılamayan bir $C^{\infty}$ monosistemi olduğu açıktır. Buna ise genelleştirilmiş bir helikoid denir. $l_1 = \cdots = l_n = 0$ konulursa $x^j = 0,\ j = 1, \dots ,2n,\ x^{2n+1} = as$ doğrusu bulunur ve bu doğru açıkça, üreten uzayların ortogonal bir yörüngesi ve M nin jeodezik bir doğrusudur (Thas 1974). p($l_1^0, \dots, l_n^0, s_0$) noktası boyunca ortogonal yörünge aşağıdaki şekildedir;

$$x^{i-1} = l_{\frac{i}{2}}^0 coss, x^i = l_{\frac{i}{2}}^0 sins, x^{2n+1} = as, i = 2,4, \dots ,2n.$$

Bu eğri $E^3$ de dairesel bir helistir. Bu ise tüm ortogonal yörüngelerin M nin asimptotik eğrileri olduğunu verir. Dolayısıyla bu da M nin minimal olduğu anlamına gelir.

**d. 2n-k=6.** Bu durumda da iki ihtimal vardır: n=4 ve k=2 veya n=3 ve k=0. Birinci tür için, $E^3$ de bir helikoid alındığında

$$x^1 = l_1 coss, x^2 = l_1 sins, x^3 = as, x^4 = l_2, x^5 = l_3, x^6 = l_4, l_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3.$$

olur.

İkinci tür için, $E^3$ de genelleştirilmiş bir helikoid alınıp, yine Önerme 3.2.1 kullanıldığında;

$$x^1 = l_1 coss,\ x^2 = l_1 sins,\ x^3 = l_2 coss,\ x^4 = l_2 sins, x^5 = as,\ x^6 = l_3,$$

$$l_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3.$$

olur.

Son olarak $E^{2n-k}$ daki her türden minimal monosistem için geçerli olan genel bir örnek;

$$x^{i-1} = l_{\frac{i}{2}} coss,\ x^i = l_{\frac{i}{2}} sins, \qquad i = 2,4,6, \dots ,2(n-k-1)$$

$$x^{2(n-k)-1} = as,\ a = sabit \neq 0,\ s \in \mathbb{R}$$

$$x^{2(n-k)+j} = l_{n-k+j},\ j = 0,1, \dots , k,\ l_r \in \mathbb{R},\ r = 1, \dots , n.$$

şeklinde verilebilir. Bu örnekte tüm ihtimalleri ifade edebiliriz: Farz edelim ki, 2n-k=23 olsun. O zaman aşağıdaki değerler yazılabilir: (n=11, k=-1), (n=12; k=1), (n=13; k=3), (n=14; k=5), (n=15; k=7), (n=16; k=9), (n=17; k=11), (n=18; k=13), (n=19; k=15), (n=20; k=17), (n=21; k=19). Şunu da ifade edelim ki bu örnekte (n=22; k=21) yazıldığı durumda bile, tamamen jeodezik bir manifold elde edilir.

## 4. AÇILABİLİR VE AÇILABİLİR OLMAYAN MONOSİSTEM ÖRNEKLERİ

Bu bölümde açılabilir ve açılabilir olmayan minimal yüzeyler için örnekler verildi.

### 4.1 Örnek ($E^3$ de açılabilir olmayan, minimal yüzey):

$E^3$, 3-boyutlu öklid uzayında minimal yüzeyin yer vektörü

$$x(u,v) = (vcosu, vsinu, au) \tag{4.1}$$

(helisoid) şeklinde verilsin, ($M^2 \subset E^3$). Bu durumda (4.1) de, sırasıyla, u ve v ye göre türev alınırsa,

$$x_u = (-v\sin u\,, v\cos u\,, a)\,, \tag{4.2}$$

$$x_v = (\cos u\,, \sin u\,, 0)$$

bulunur. Dolayısıyla, teğet uzayın ortonormal bazı

$$e = \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} x_u, \qquad e_1 = \frac{x_v}{\|x_v\|} \tag{4.3}$$

olarak yazılabilir. Birim normal vektörü ise

$$N = e \times e_1$$

$$N = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \frac{-\mathrm{v}\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}} & \frac{\mathrm{v}\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{v^2+a^2}} \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix}$$

$$= E_3 \begin{vmatrix} \frac{-\mathrm{v}\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}} & \frac{\mathrm{v}\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}} \\ \cos u & \sin u \end{vmatrix} - \frac{a}{\sqrt{v^2+a^2}} \begin{vmatrix} E_1 & E_2 \\ \cos u & \sin u \end{vmatrix}$$

$$= E_3\left(\frac{-v}{\sqrt{v^2+a^2}}\right) + E_2\left(\frac{a\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}}\right) - E_1\left(\frac{\mathrm{a}\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla

$$N = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}}(-a\sin u\,, a\cos u\,, -v)$$

olur.

Şimdi, (4.1) eşitliği ile verilen M monosisteminin (minimal yüzeyinin) açılabilir olup olmadığını gösterelim. Doğrudan hesaplamalarla

$$\overline{D}_e e_1 = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}} \frac{\partial}{\partial u}(\cos u\,, \sin u\,, 0) = \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}}(-\sin u\,, \cos u\,, 0)$$

bulunur. Diğer taraftan $\overline{D}_e e_1$ bazı cinsinden

$$\overline{D}_e e_1 = Ae + BN \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade, sırasıyla, $e$ ve $N$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \overline{D}_e e_1, e\rangle = \langle\left(\frac{-\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}}, \frac{\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}}, 0\right), \left(\frac{-v\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}}, \frac{v\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)\rangle = \frac{v}{v^2+a^2}$$

ve

$$\langle \overline{D}_e e_1, N\rangle = \langle\left(\frac{-\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}}, \frac{\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}}, 0\right), \left(\frac{-a\sin u}{\sqrt{v^2+a^2}}, \frac{a\cos u}{\sqrt{v^2+a^2}}, \frac{-v}{\sqrt{v^2+a^2}}\right)\rangle = \frac{a}{v^2+a^2}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (4.4) de yerine yazılırsa,

$$\overline{D}_e e_1 = \frac{v}{v^2+a^2} e + \frac{a}{v^2+a^2} N \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.5), (3.1) de göz önüne alınırsa ,

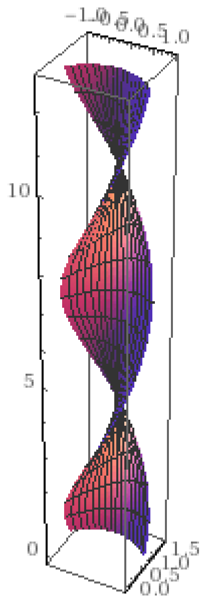
$$\text{rank}[e, e_1, \overline{D}_e e_1] = \text{rank}[e, e_1, \frac{v}{v^2+a^2} e + \frac{a}{v^2+a^2} N]=3$$

olur. n=1 olduğundan, k= -1 bulunur. Dolayısıyla, verilen minimal yüzey, açılabilir olmayan bir monosistem olur.

**Parametrik Grafiği:**

$$x(u, v) = (vcosu, vsinu, au)$$

özel olarak $a = 2$ için monosisteminin grafiği;




**Şekil 4.1 Yüzeyin Parametri Grafiği**

şeklindedir.

**4.2 Örnek (Yüksek boyutlu bir öklid uzayında açılabilir bir yüzey):**

$E^5$, 5 boyutlu Öklid uzayında yer vektörü

$$x(s, l_1, l_2, l_3) = (l_1 \cos s\,, l_1 \sin s\,, as, l_2, l_3)$$

olan monosistemi (hiperyüzeyi) göz önüne alalım. Burada, sırasıyla, $s, l_1, l_2, l_3$ e göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} x_s &= (-l_1 \sin s\,, l_1 \cos s\,, a, 0, 0), \\ x_{l_1} &= (\cos s\,, \sin s\,, 0, 0, 0), \\ x_{l_2} &= (0, 0, 0, 1, 0), \\ x_{l_3} &= (0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Dolayısıyla, teğet uzayın ortonormal bazı

$$e = \frac{x_s}{\|x_s\|} = \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2 + a^2}} x_s\,, \qquad e_1 = \frac{x_{l_1}}{\|x_{l_1}\|}, \qquad e_2 = \frac{x_{l_2}}{\|x_{l_2}\|}, \qquad e_3 = \frac{x_{l_3}}{\|x_{l_3}\|} \tag{4.7}$$

olarak alınabilir. Birim normal vektörü ise

$$N = e \times e_1 \times e_2 \times e_3$$

$$N = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \\ \frac{-l_1 \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{l_1 \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & 0 & 0 \\ \cos s & \sin s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= E_5 \begin{vmatrix} \frac{-l_1 \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{l_1 \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & 0 \\ \cos s & \sin s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ \frac{-l_1 \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{l_1 \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & 0 \\ \cos s & \sin s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \frac{-l_1 \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{l_1 \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} & \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} \\ \cos s & \sin s & 0 \end{vmatrix}$$

$$= E_1 \left( \frac{-a \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} \right) + E_2 \left( \frac{a \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} \right) + E_3 \left( \frac{-l_1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} \right)$$

$$N = \left( \frac{-a \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{a \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{-l_1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, 0, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} (-a \sin s\,, a \cos s\,, -l_1, 0, 0)$$

şeklinde elde edilir.

**Verilen minimal monosistemin (hiperyüzeyin) şekil operatörünün hesabı:**

Göz önüne alınan M monosisteminin şekil operatörü:

$$S(e) = \overline{D}_e N = \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}(-a\sin s\,, a\cos s\,, -l_1, 0, 0)\right)$$

$$= \frac{a}{{l_1}^2+a^2}(-\cos s, -\sin s\,, 0, 0)$$

$$= \frac{-a}{{l_1}^2+a^2}e_1\,, \tag{4.8}$$

$$S(e_1) = \overline{D}_{e_1} N = \frac{\partial}{\partial l_1}\left(\frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}(-a\sin s\,, a\cos s\,, -l_1, 0, 0)\right)$$

$$= \frac{1}{({l_1}^2+a^2)^{3/2}}(l_1 a\sin s\,, -l_1 a\cos s\,, -a^2, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}(0, 0, -1, 0, 0) \tag{4.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $S(e_1)$ bazları cinsinden,

$$S(e_1) = Ae + Be_1 + Ce_2 + De_3 \tag{4.10}$$

şeklinde yazılır. Burada, $A, B, C$ ve $D$ katsayılarını bulmak için $S(e_1)$, sırasıyla, $e, e_1, e_2, e_3$ ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$S(e_1) = \frac{-a}{{l_1}^2+a^2}e \tag{4.11}$$

bulunur. Diğer taraftan, benzer şekilde,

$$S(e_2) = \overline{D}_{e_2} N = \frac{\partial}{\partial l_2}N = 0, \tag{4.12}$$

$$S(e_3) = \overline{D}_{e_3} N = \frac{\partial}{\partial l_3}N = 0, \tag{4.13}$$

elde edilir. Bulunan (4.8), (4.11), (4.12), (4.13) değerleri yardımıyla şekil operatörü matrisi;

$$S=\begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{{l_1}^2+a^2} & 0 & 0 \\ \frac{-a}{{l_1}^2+a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan, verilen yüzeyin ortalama eğriliği;

$$H=\frac{1}{4}tr(S) = 0,$$

ve Gauss-Kronicker eğriliği;

K= detS= 0

olarak elde edilir.

**Asli Eğrilik, Asli Doğrultu:**

- S şekil operatörü olmak üzere yüzeyin $k_1$ asli eğriliği ve $x_1$ asli doğrultusu $S_{x_1} = k_1 x_1$ eşitliği tarafından elde edilir.
- Bu monosistemde 4 boyutlu altmanifoldda çalışıldığı için 4 tane asli eğrilik vardır. Bunlardan ikisi sıfır, diğer ikisi de birbirine dik çıkar.

Buna göre;

$$x_1 = Ae + Be_1 \tag{4.14}$$

olmak üzere $S_{x_1} = k_1 x_1$ şekil operatörünü oluşturmak için

$$ASe + BSe_1 = k_1(Ae + Be_1) \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.8) ve (4.11) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\frac{-aA}{{l_1}^2+a^2} e_1 - \frac{aB}{{l_1}^2+a^2} e = k_1 Ae + k_1 Be_1 \tag{4.16}$$

elde edilir. Buradan katsayıların eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\boldsymbol{e_1}\textbf{:}\ \frac{-aA}{{l_1}^2+a^2} = k_1 B, \tag{4.17}$$

$$\textbf{e:}\ -\frac{aB}{{l_1}^2+a^2} = k_1 A, \tag{4.18}$$

denklemleri bulunur. $e$ ve $e_1$ vektörleri birim vektörler olduğundan;

$$A^2 + B^2 = 1 \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) eşitliklerinin her iki yanı, sırasıyla, $A$ ve $-B$ ile skaler çarpılırsa,

$$\frac{-aAB}{{l_1}^2+a^2} = k_1 B^2, \tag{4.20}$$

$$\frac{aAB}{{l_1}^2+a^2} = -k_1 A^2 \tag{4.21}$$

olur. Elde edilen (4.20) ve (4.21) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılır ve $k_1 \neq 0$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$A^2 - B^2 = 0 \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.22) denklemlerinden

$$A = B = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4.23}$$

bulunur. $A$ ve $B$ nin (4.23) deki değerleri, (4.18) de yerine yazılırsa

$$\frac{\frac{-a}{2}}{{l_1}^2+a^2}=\frac{k_1}{2}$$

olur. Buradan verilen yüzeyin 1. asli eğriliği

$$k_1=\frac{-a}{{l_1}^2+a^2} \tag{4.24}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.23) değerleri (4.14) de yerine yazılırsa

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e+\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 \tag{4.25}$$

şeklinde verilen yüzeyin 1. asli doğrultusu bulunur.

Yukarıdaki ifadeye benzer şekilde

$$x_2=-Be+Ae_1 \tag{4.26}$$

olmak üzere $S_{x_2}=k_2x_2$ şekil operatörünü oluşturmak için

$$-BSe+ASe_1=k_2(-Be+Ae_1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k_1$ için yapılan işlemler tekrarlanırsa verilen yüzeyin 2. asli eğriliği,

$$k_2=\frac{a}{{l_1}^2+a^2} \tag{4.27}$$

bulunur. Ayrıca, (4.23) değerleri (4.26) da yerine yazılırsa, verilen yüzeyin 2. asli doğrultusu,

$$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}e+\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 \tag{4.28}$$

elde edilir.

Sonuç olarak verilen yüzeyin asli eğrilikleri, sırasıyla,

$$k_1=\frac{-a}{{l_1}^2+a^2}\,,\;\; k_2=\frac{a}{{l_1}^2+a^2}\,,\;\; k_3=0,\;\; k_4=0$$

şeklinde ve asli doğrultuları da, sırasıyla,

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e+\frac{\sqrt{2}}{2}e_1,\; x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}e+\frac{\sqrt{2}}{2}e_1,\; x_3=e_2,\; x_4=e_3$$

şeklinde olur. Buna göre verilen monosistemin (hiperyüzeyin) şekil operatörü;

$$S=\begin{pmatrix} \frac{-a}{{l_1}^2+a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{{l_1}^2+a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

bulunur.

Şimdi (4.2) ile verilen monosistemin açılabilir olup olmadığını gösterelim:

Doğrudan hesaplamalarla,

$$\overline{D}_e e_1 = \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}\frac{\partial}{\partial s}(\cos s, \sin s, 0, 0, 0),$$

$$\overline{D}_e e_2 = \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}\frac{\partial}{\partial s}(0, 0, 0, 1, 0),$$

$$\overline{D}_e e_3 = \frac{1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}\frac{\partial}{\partial s}(0, 0, 0, 0, 1),$$

elde edilir. $\overline{D}_e e_1$ bazları cinsinden

$$\overline{D}_e e_1 = Ae + BN \tag{4.30}$$

şeklinde yazılabilir. $A$ ve $B$ değerleri, sırasıyla, hesaplanırsa

$$A = \langle \overline{D}_e e_1, e \rangle$$

ya da

$$A = \left\langle \left( \frac{-\sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{\cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, 0, 0, 0 \right), \left( \frac{-l_1 \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{l_1 \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, 0, 0 \right) \right\rangle$$

$$A = \frac{l_1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} \tag{4.31}$$

olur.

$$B = \langle \overline{D}_e e_1, N \rangle$$

ya da

$$B = \left\langle \left( \frac{-\sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{\cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, 0, 0, 0 \right), \left( \frac{-a \sin s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{a \cos s}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, \frac{-l_1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}}, 0, 0 \right) \right\rangle$$

$$B = \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} \tag{4.32}$$

bulunur. (4.31) ve (4.32) değerleri (4.30) da göz önüne alınırsa,

$$\overline{D}_e e_1 = \frac{l_1}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} e + \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2+a^2}} N \tag{4.33}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$\langle \bar{D}_e e_2, e\rangle = 0,\ \langle \bar{D}_e e_2, N\rangle = 0,$ $\qquad$ $e \neq 0 \neq N$ olduğunda $\bar{D}_e e_2 = 0,$

$\langle \bar{D}_e e_3, e\rangle = 0\ ,\langle \bar{D}_e e_3, N\rangle = 0,$ $\qquad$ $e \neq 0 \neq N$ olduğunda $\bar{D}_e e_3 = 0$ $\qquad$ (4.34)

bulunur. (4.6) değerleri (4.7) de yerine yazılıp (4.33) ile birlikte (3.1) de göz önüne alınırsa,

$$rank[e, e_1, e_2, e_3, \bar{D}_e e_1, \bar{D}_e e_2, \bar{D}_e e_3] = rank[e, e_1, e_2, e_3, \frac{l_1}{\sqrt{{l_1}^2 + a^2}} e + \frac{a}{\sqrt{{l_1}^2 + a^2}} N, 0, 0] = 4$$

olur. $n = 3$ için, $2n - k = 4$ eşitliğinden $k = 2$ bulunur. Böylece $k = 2$ için verilen monosistemin (hiperyüzey) 2-açılabilir olduğu elde edilir.

**4.3 Örnek ($E^4$, 4 boyutlu Öklid uzayında 1-açılabilir hiperyüzey örneği):**

$E^4$, 4 boyutlu Öklid uzayında verilen hiperyüzeyin yer vektörü,

$$x(s, l_1, l_2) = r(s) + \sum_{i=1}^{2} l_i e_i \tag{4.35}$$

olsun. Burada $r(s)$ ve $x$;

$$r(s) = \left(0,\ 0,\ \frac{\cos s}{\sqrt{2}},\ \frac{\sin s}{\sqrt{2}}\right), \tag{4.36}$$

$$x = (l_1,\ l_2,\ \frac{\cos s}{\sqrt{2}}, \frac{\sin s}{\sqrt{2}}) \tag{4.37}$$

şeklinde tanımlansın.

(4.37) den, sırasıyla, $s, l_1, l_2$ e göre türev alınırsa,

$$x_s = (0, 0, \frac{-\sin s}{\sqrt{2}}, \frac{\cos s}{\sqrt{2}})$$

$$x_{l_1} = (1, 0, 0, 0)\ ,$$

$$x_{l_2} = (0, 1, 0, 0)\ ,$$

bulunur. Diğer taraftan, teğet uzayının ortonormal bazı,

$$e = \frac{x_s}{\|x_s\|} = (0, 0,\ -\sin s\ ,\ \cos s)\ ,\ \ e_1 = \frac{x_{l_1}}{\|x_{l_1}\|}\ ,\ \ e_2 = \frac{x_{l_2}}{\|x_{l_2}\|} \tag{4.38}$$

olarak alınabilir. Buna göre birim normal vektör aşağıdaki gibi hesaplanırsa:

$$N = e \times e_1 \times e_2 \times e_3$$

$$N = \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ 0 & 0 & -\sin s & \cos s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= E_1 \begin{vmatrix} 0 & -\sin s & \cos s \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_2 & E_3 & E_4 \\ 0 & -\sin s & \cos s \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= E_1 \begin{vmatrix} -\sin s & \cos s \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + E_2 \begin{vmatrix} -\sin s & \cos s \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_3 & E_4 \\ -\sin s & \cos s \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + E_3 \cos s + E_4 \sin s$$

$$N = (0, 0, \cos s, \sin s) \tag{4.39}$$

olur.

**Verilen monosistemin (hiperyüzeyin) şekil operatörünün hesabı:**

(4.39) göz önüne alındığında verilen M monosisteminin şekil operatörü;

$$\overline{D}_e N = S(e) = \frac{\partial}{\partial s}(0, 0, \cos s, \sin s) = (0, 0, -\sin s, \cos s) \tag{4.40}$$

bulunur. $S(e)$ bazlar cinsinden;

$$S(e) = Ae + Be_1 + Ce_2 \tag{4.41}$$

şeklinde yazılır.

(4.41) den $A, B, C$ katsayıları, sırasıyla,

$$A = \langle S(e), e \rangle = \langle (0, 0, -\sin s, \cos s), (0, 0, -\sin s, \cos s) \rangle = 1,$$

$$B = \langle S(e), e_1 \rangle = 0,$$

$$C = \langle S(e), e_2 \rangle = 0$$

bulunur. Bulunan bu değerler (4.41) de yerine yazıldığında

$$S(e) = e \tag{4.42}$$

olur. Yine (4.39) yardımıyla, $S(e_1)$, $S(e_2)$ sırasıyla,

$$\overline{D}_{e_1} N = S(e_1) = \frac{\partial}{\partial l_1}(0, 0, \cos s, \sin s) = 0,$$

$$\overline{D}_{e_2} N = S(e_2) = 0 \tag{4.43}$$

olarak elde edilir. (4.42) ve (4.43) göz önüne alınırsa şekil operatörünün matrisi;

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan hiperyüzeyin H ortalama ve K Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$H = \frac{trS}{4} = \frac{1}{4} \neq 0 ,$$

$$K = \det S = 0 ,$$

şeklinde olur.

**Asli Eğrilik, Asli Doğrultu:**

Verilen monosistemin asli eğrilikleri incelenecek olursa, $x_1 = \mu e$ olması durumunda, $Sx_1 = k_1 x_1$ tanımı ve şekil operatörünün lineerliği göz önüne alınırsa,

$$S(\mu e) = k_1 \mu e$$

$$\mu S(e) = k_1 \mu e$$

olur. Burada (4.42) göz önüne alınırsa;

$$\mu e = k_1 \mu e$$

ya da

$$k_1 = 1$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılırsa,

$$x_2 = e_1 \quad \text{ise} \quad k_2 = 0$$

$$x_3 = e_2 \quad \text{ise} \quad k_3 = 0$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan monosistemin açılabilirliği için, $\overline{D}_e e_1$, $\overline{D}_e e_2$ değerleri, sırasıyla,

$$\overline{D}_e e_1 = \frac{\partial}{\partial s}(1,0,0,0,0) = 0\ ,$$

$$\overline{D}_e e_2 = \frac{\partial}{\partial s}(0,1,0,0,0) = 0$$

elde edilir. Yani

$$\overline{D}_e e_1 = \overline{D}_e e_2 = 0 \tag{4.44}$$

dır. Böylece (3.1) de (4.38) ve (4.44) göz önüne alınırsa,

$$rank[e, e_1, e_2, \overline{D}_e e_1, \overline{D}_e e_2] = rank[e, e_1, e_2, 0, 0] = 3$$

olur. $n = 2$ için; 2.2-k=3 den k=1 bulunur. Bu ise monosistemin 1-açılabilir olduğunu gösterir.

Aşağıdaki örnekte ise, 4 boyutlu uzayda, karşıt boyutu 2 olan dönel yüzeyler incelendi.

**4.4 Örnek ($E^4$ öklid uzayında karşıt boyutu 2 olan dönel yüzey):**

$E^4$, 4-boyutlu öklid uzayında

$$x(s,t) = (x(s), y(s), z(s)\cos t\,, z(s)\sin t) \tag{4.45}$$

bir yüzey olsun, $(M^2 \subset E^4)$. Buradan s ve t ye göre türev alınırsa;

$$x_s = (x'(s), y'(s), z'(s)cost, z'(s)sint),$$

$$x_t = (0, 0, -z(s)\sin t, z(s)\cos t)$$

olur. Teğet uzayın ortonormal bazı;

$$e = x_s = (x'(s), y'(s), z'(s)cost, z'(s)sint), \quad (4.46)$$

$$e_1 = \frac{1}{\|x_t\|} x_t = (0, 0, -\sin t, \cos t) \quad (4.47)$$

şeklinde alınabilir. Verilen hiperyüzeyin birim normal vektörleri,

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{(x''(s))^2 + (y''(s))^2 + (z''(s))^2}} (x''(s), y''(s), z''(s)\cos t, z''(s)\sin t) \quad (4.48)$$

ya da

$$N_1 = \frac{1}{K}(x''(s), y''(s), z''(s)\cos t, z''(s)\sin t)$$

olur.

$$(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) = \big(x'(s), y'(s), z'(s)\big) \times \left(\frac{x''(s)}{K}, \frac{y''(s)}{K}, \frac{z''(s)}{K}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{y'(s)z''(s) - y''(s)z'(s)}{K}, \frac{z'(s)x''(s) - x'(s)z''(s)}{K}, \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{K}\right)$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda

$$N_2 = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \cos t, \varrho_3 sint) \quad (4.49)$$

şeklinde alınabilir. Diğer taraftan

$$\overline{D}_e N_1 = \frac{\partial}{\partial s} N_1, \qquad \overline{D}_{e_1} N_1 = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t} N_1,$$

$$\overline{D}_e N_2 = \frac{\partial}{\partial s} N_2, \qquad \overline{D}_{e_1} N_2 = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t} N_2$$

değerleri hesaplanarak, verilen yüzeyin şekil operatörü bulunabilir. Buna göre (4.48) göz önüne alınırsa,

$$\overline{D}_e N_1 = \frac{\partial}{\partial s} N_1,$$

$$\overline{D}_e N_1 = \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{K}(x''(s), y''(s), z''(s)\cos t, z''(s)\sin t)$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}(n_1, n_2, n_3\cos t\,, n_3\sin t)$$

$$=(n_1{}', n_2{}', n_3{}'\cos t\,, n_3{}'\sin t)$$

$$=(-Kt_1+\tau\varrho_1, -Kt_2+\tau\varrho_2, (-Kt_3+\tau\varrho_3)\cos t\,, (-Kt_3+\tau\varrho_3)\sin t)$$

$$=-K(t_1, t_2, t_3\cos t\,, t_3\sin t)+\ \tau(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\cos t\,, \varrho_3\sin t)$$

$$\overline{D}_e N_1=-K(x', y', z'\cos t\,, z'\sin t)+\ \tau(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\cos t\,, \varrho_3\sin t) \qquad (4.50)$$

ve

$$\overline{D}_{e_1} N_1=\ \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t}N_1$$

$$=\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{K}(x''(s), y''(s), z''(s)\cos t, z''(s)\sin t)$$

$$\overline{D}_{e_1} N_1=\frac{1}{z}\frac{1}{K}(0, 0, \text{-}z''(s)\sin t\,, z''(s)\cos t) \qquad (4.51)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.49) denkleminden gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\overline{D}_e N_2=\frac{\partial}{\partial s}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\cos t\,, \varrho_3 sint)$$

$$=(\varrho_1{}', \varrho_2{}', \varrho_3{}'\cos t\,, \varrho_3{}'\sin t)$$

$$\overline{D}_e N_2=\frac{\tau}{K}(x''(s), y''(s), z''(s)\cos t, z''(s)\sin t), \qquad (4.52)$$

ve

$$\overline{D}_{e_1} N_2=\ \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t}N_2$$

$$=\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\cos t\,, \varrho_3 sint)\ ,$$

$$\overline{D}_{e_1} N_2=\frac{1}{z}\frac{1}{K}(0, 0, \text{-}\varrho_3 sint, \varrho_3\cos t) \qquad (4.53)$$

bulunur. Dolayısıyla, $\overline{D}_e N_1$ ve $\overline{D}_{e_1} N_1$ açılımları,

$$\overline{D}_e N_1=Ae\ ,$$

$$\overline{D}_{e_1} N_1=Be_1+CN_2 \qquad (4.54)$$

şeklinde ifade edilirse, $S_{N_1}$ şekil operatörü;

$$S_{N_1}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad (4.55)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\overline{D}_e N_2$, $\overline{D}_{e_1} N_2$ açılımları,

$$\overline{D}_e N_2 = \tilde{A} e \ ,$$

$$\overline{D}_{e_1} N_2 = \tilde{B} e_1 + \tilde{C} N_1 \tag{4.56}$$

şeklinde yazılırsa, $S_{N_2}$ şekil operatörü;

$$S_{N_2} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

elde edilir. Buna göre, (4.50) ve (4.51), (4.54) göz önüne alınır ve bulunan değer (4.55) yerine yazılırsa, $S_{N_1}$;

$$S_{N_1} = \begin{pmatrix} -K & 0 \\ 0 & \frac{1}{z}\frac{1}{K} z''(s) \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca (4.52) ve (4.53), (4.56) göz önüne alınır ve bulunan değer (4.57) yerine yazılırsa, $S_{N_2}$;

$$S_{N_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z}\frac{1}{K} \varrho_3 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Ortalama eğrilik vektörü ise,

$$H = \frac{(A+B)}{2} N_1 + \frac{(\tilde{A}+\tilde{B})}{2} N_2$$

olur. Diğer taraftan monosistemin açılabilirliği için $\overline{D}_e e_1$ incelenirse,

$$\overline{D}_e e_1 = \frac{\partial}{\partial s}(0, 0, -\sin t\,, \cos t) = 0$$

sonucu elde edilir. Bu değer (3.1) de göz önüne alınırsa

$$rank\ [e, e_1, \overline{D}_e e_1] = rank\ [e, e_1, 0] = 2n - k$$

eşitliğinden 2.1-k=2 olup k=0 bulunur. Bu da monosistemin total açılabilir olduğunu gösterir.

## KAYNAKLAR


Anonim (2019). Vektör Uzayları. https://docplayer.biztr/199161-Vektor-uzaylari-1-giris.html (erişim tarihi, 04.07.2019).

Chen BY(1973). Geometry of submanifolds. Marcel Dekker, New York.

Chen BY, Yano K (1973). Submanifolds umbilical with respect to a non-parallel normal subbundle. Kodai Math. Sem. Rep. 25.

Hacısalihoğlu HH (1973). Lineer Cebir. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

Hacısalihoğlu HH (1983). Diferansiyel Geometri 2. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu HH (1998). Diferensiyel Geometri 1. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu HH (2003). Tensör Geometri. Hacısalihoğlu Yayınları, Ankara.

Sabuncuoğlu A (2014). Diferansiyel Geometri. Nobel Yayınları.

Spivak M (1970). A comprehensive introduction to diferential geometry. Publish or perish inc., Boston.

Şahin B (2012). Manifoldların Diferansiyel Geometrisi. Nobel Yayınları.

Takahashi T (1966). Minimal immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan, 18, 380-385.

Thas C (1974). Een (lokale) studie van de (m+1)-dimensionale varieteiten van de n-dimensionale euklidische ruimte $R^n$ (n≥2m+1 en m≥1), beschreven door een eendimensionale familievan m-dimensionale lineaire ruimten. Med. Kon. Acad. Wet. Lett. Sch. K. van Belgie, Jaargang XXXVI, nr. 4.

Thas C (1978). Minimal Monosystems. Yokohama Mathematical Journal Vol. 26.

Yüce S (2017). Diferansiyel Geometri. Pegem Akademi.

## ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında İstanbul’da doğmuşum. İlköğretimimi Arif Nihat Asya İlköğretim Okulu’nda, ortaöğretimimi 75. Yıl Cumhuriyet Lisesi’nde tamamladım. Yüksek öğrenimime 2010 yılında Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde başladım. Buradan 2016 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen aynı üniversitede tezli yüksek lisans öğrencisiyim.