T.C.
TEKİRDAĞ
NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

Gülüzar TÜRKMENOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. MAHMUT ERGÜT

TEKİRDAĞ-2017

Prof. Dr. Mahmut ERGÜT ‘ün danışmanlığında Gülüzar TÜRKMENOĞLU tarafından hazırlanan “Minkowski 3-uzayında sabit açılı yüzeyler” isimli bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı ‘nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT *İmza:*

Üye: Doç. Dr. Ünver ÇİFTÇİ *İmza:*

Üye: Yrd. Doç. Dr. Pelin POŞPOŞ TEKİN *İmza:*

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Adına

Prof. Dr. Fatih KONUKCU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLER

Gülüzar TÜRKMENOĞLU

Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlendi.

Birinci bölümde, Minkowski uzayının tarihçesi ve bu uzayda yapılan çalışmalar özet halinde ifade edildi.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılacak olan temel kavram ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, E_1^3 Minkowski 3-uzayında time-like ve space-like sabit açılı yüzeyler incelenerek bu uzayda sabit açılı yüzeylerin sınıflandırılmasıyla ilgili tanımlar, teoremler, sonuçlar ve örnekler araştırıldı. Bu bölümün son kısmı çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Minkowski 3-uzayı, Minkowski 3-uzayında sabit açılı yüzeyler, Regle yüzeyi.

2017, 56 sayfa

ABSTRACT

Msc. Thesis

CONSTANT ANGLE SURFACES IN MINKOWSKI 3-SPACE

Gülüzar TÜRKMENOĞLU

Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

This study is organized in three sections.

In the first section, the history of Minkowski Space and some studies on this space are presented.

In the second section, the fundamental concepts and theorems which will be used in this study are given.

In the third section, time-like and space-like constant angle surfaces in E_1^3 Minkowski space are investigated. The definitions, theorems, results and examples regarding classification of constant angle surfaces in Minkowski space are studied in this section. Also, the last part in this section includes the original part at this study.

Keywords: Minkowski 3-space, Constant angle surfaces in Minkowski 3-space, Ruled surface.

2017, 56 pages

İÇİNDEKİLER

SİMGE DİZİNİ

E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
M	: Riemann manifoldu
$\bar{M}$	: Yarı-Riemann manifold
$\tilde{M}$	: Yarı-Riemann alt manifold
S	: Yüzey
$[,]$	:Lie operatörü
g	:Riemann metriği
<,>	: Minkowski metriği
TM	: Tanjant uzay
$TM^{\perp}$	: Normal uzay
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi
D	: M üzerindeki konneksiyon
$\bar{D}$	: $\bar{M}$ üzerindeki konneksiyon
$D^{\perp}$	: Normal demet üzerindeki konneksiyon
A	: Şekil operatörü
x	: İzometrik immersiyon
N	: Normal vektör alan
σ	: İkinci temel form
sh	: Sinüs hiperbolik fonksiyonu
ch	: Cosinüs hiperbolik fonksiyonu

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübesinden her zaman yararlandığım, çalışmanın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e ve değerli bilgilerini birikimlerini esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Arş. Gör. Alev KELLECİ (Fırat Üniversitesi) ve Arş. Gör. Ayla ERDUR'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Ağustos-2017

Gülüzar TÜRKMENOĞLU

1.GİRİŞ

Minkowski Uzayı, Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından, 1907 yılında ifade edilmiştir. Gerek matematik ve gerekse fizikte Minkowski uzayı, Einstein'ın izafiyet teorisini formüle etmek için kullanılır. Minkowski uzayı, Öklidyen uzaya kıyasla daha karmaşık ve daha zengin bir geometrik yapıya sahiptir. Örneğin, Minkowski 3-uzayında verilen bir vektör üç farklı şekilde olup space-like, time-like ve light-like (null) vektördür. Ayrıca, Minkowski uzayında yüzeylerin normal vektörlerinin konumlarına göre de space-like, time-like ve light-like yüzeyler olarak isimlendirildiğini biliyoruz. Eğer yüzeyin normal vektörü space-like (sırasıyla, time-like, light-like) ise, o zaman yüzey timelike (sırasıyla, space-like, light-like) yüzey olarak adlandırılır.

E^3, Öklid 3-uzayında bir yüzey M olsun. Eğer, M deki sabit bir vektör ile M nin normal vektörü arasındaki açı sabit ise, o zaman M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olarak adlandırılır. Tanımdan yola çıkılarak, bu yüzeyler helis kavramının genelleştirilmesi olup, sarmal özellikteki bütün vida, cıvata ve bununla birlikte dişlilerin ayırt edici özelliğidir. Bu nedenle, makine ve inşaat mühendisliği çalışmalarında önemlidir. Ayrıca, DNA helise benzer çift sarmal bir moleküldür. Son zamanlarda, önemli uygulama alanlarında sabit açılı yüzeyler sıkça kullanılmaktadır. Örneğin, Cermelli ve Di Scala (2007) çalışmasında, E^3, Öklid 3-uzayında sabit açılı yüzeylerin sınıflandırılması yapıldı ve fiziksel olarak bazı önemli uygulamalar elde edildi. Ayrıca, bağımsız olarak yine Munteanu ve Nistor (2008) çalışmasında E^3, Öklid 3-uzayında geometrik olarak bu yüzeyler için sınıflandırma yapıldı ve bazı önemli karakterizasyonlar elde edildi. Güler, Şaffak, Kasap (2011) ve Lopez, Munteanu (2011) çalışmalarında Minkowski 3-uzayında sabit açılı yüzeyler incelenmiş ve bu yüzeylerin bir sınıflandırılması verilmiştir.

Ayrıca, sabit açılı yüzeyler Dillen, Fastenakels, Van der Veken, Munteanu, Fu ve Nistor tarafından $M^2 \times \mathbb{R}$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$, Sol_3 ve Heisenberg grup gibi farklı uzaylarda çalışılmıştır. Burada S^2 ve H^2, sırasıyla, birim 2-küre ve hiperbolik düzlem olarak ifade edilir.

Bu çalışmada, Minkowski uzayındaki sabit açılı yüzeyler kavramı ele alındı. E_1^3, Minkowski uzayında bir vektörün causal karakterinin çeşitliliğinden dolayı keyfi iki vektör arasında Güler, Şaffak ve Kasap (2011) çalışmasındaki gibi tanımlanan açı kavramları göz önünde bulundurularak, yüzey üzerindeki space-like sabit doğrultu ile ilişkili olan sabit açılı space-like yüzeylerin sınıflandırılması verilip, böylece, Lopez (2009) makalesinde elde edilen kısmi sınıflandırma bir ölçüde tamamlanmış olacaktır.

2. TEMEL KAVRAM VE TEOREMLER

2.1 Temel Tanım ve Kavramlar

2.1.1 Tanım

M, bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise, M ye n-boyutlu topolojik manifold denir.

i. M bir Hausdorff uzayıdır,

ii. M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur,

iii. M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilirdir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.2 Tanım

V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $p \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(p, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının p noktasındaki bir tanjant vektörü denir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.3 Tanım

$V \subseteq M$ üzerindeki bir vektör alanı operatörü,

$$X: V \longrightarrow \bigcup_{p \in V} T_p V$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I: V \longrightarrow V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur.

Yukarıdaki tanıma göre M manifoldu yerine, E^n, n-boyutlu Öklid uzayını alarak, E^n de bir X vektör alanını, $\forall\, p \in E^n$ noktasına bir X_p tanjant vektörünü karşılık getiren fonksiyon olarak düşünebiliriz. Ayrıca E^n deki tüm vektör alanlarının ve teğet vektör alanlarının cümleleri, sırasıyla, $\chi(M)$ ve $T_p M$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.4 Tanım

M, bir topolojik n–manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa, M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.5 Tanım

M ve $\overline{M}$, sırasıyla, m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $\forall p \in M$ noktasında $d_{\varphi_p}: T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\overline{M}$ dönüşümü 1-1 ise, $\varphi: M \longrightarrow \overline{M}$ diferensiyellenebilir dönüşümüne immersiyon denir (Chen 1973, Do Carmo 1976).

2.1.6 Tanım

U, E^2 2-boyutlu Öklid uzayının irtibatlı bir açık alt cümlesi olmak üzere,

$x: U \subset E^2 \rightarrow E^n$,

dönüşümü düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. Eğer $x: U \subset E^2 \rightarrow x(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise, $x(U)$ cümlesine E^3 uzayında bir basit yüzey olarak adlandırılır.

Ayrıca M , E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in x(U)$ ve $x(U) \subset M$ olacak biçimde bir $x(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M cümlesine , E^3 uzayında bir yüzey denir. $x(U)$, M yüzeyi içinde bir basit yüzey ise $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$ dönüşümüne bir koordinat sistemi (yüzey yaması) denir (Do Carmo 1976).

2.1.7 Tanım

$x : U \rightarrow E^3$ bir yüzey yaması olsun. Eğer, x düzgün ve $\forall\,(u, v) \in U$ için x_u ve x_v vektörleri lineer bağımsız ise x e düzenlidir denir. Benzer şekilde, x in düzgün olması demek, $x_u \times x_v$ vektörel çarpımının U nun her noktasında sıfırdan farklı olmasıdır (Do Carmo 1976).

2.1.8 Tanım

M yüzeyi $x : U \subset E^2 \rightarrow E^n$ parametrizasyonu ile verilsin. M nin $p \in x(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı T_pM, x_u ve x_v ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin birinci ve ikinci temel formları, sırasıyla,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

ve

$$\sigma = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

Burada, N birim normali olmak üzere, birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları, sırasıyla,

$$E = \langle x_u, x_u \rangle,\ F = \langle x_u, x_v \rangle,\ G = \langle x_v, x_v \rangle, \tag{2.1}$$

ve

$$e = \langle x_{uu}, N\rangle, \ \ f = \langle x_{uv}, N\rangle, \ \ g = \langle x_{vv}, N\rangle \tag{2.2}$$

şeklindedir.

Bir $M \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H} = HN$ olarak tanımlanır. (2.1) eşitliklerinden,

$$\|x_u \wedge x_v\|^2 = EG - F^2$$

bulunur. Eğer $\|x_u \wedge x_v\| \neq 0$ ise, $x(u, v)$ parametrizasyonu regülerdir denir (Hacısalihoğlu 1994, Neill 1983, Pressley 2015).

2.1.1 Önerme

M yüzeyi, $x : U \subset E^2 \to E^n$ parametrizasyonu ile verilsin. (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden, M yüzeyinin Gauss, ortalama ve asli eğrilikleri, sırasıyla,

i. $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$,

ii. $H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$,

iii. $H \pm \sqrt{H^2 - K}$

şeklindedir (Pressley 2015).

2.1.9 Tanım

İkinci dereceden bir yüzey,

$$v^t A v + b^t v + c = 0$$

denklemiyle tanımlanan E^3 ün bir alt cümlesidir. Burada $v = (x, y, z)$ şeklinde bir vektör, *A;* 3x3 tipinde sabit bir simetrik matris, $b \in E^3$ bir sabit vektör ve $c \in R$ sabit bir sayıdır.

Ayrıca,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix}, \qquad b = (b_1, b_2, b_3)$$

olmak üzere yukarıda ifade edilen ikinci dereceden yüzeyin denklemi:

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2a_4xy + 2a_5yz + 2a_6xz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Dikkat etmek gerekirse, ikinci dereceden verilen her ifadenin bir yüzey belirtmesi gerekmez. Örneğin, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ikinci derece ifadesi bir noktadır ve $x^2 + y^2 = 0$

denklemi ise bir doğrudur. Bir diğer ilginç bir örnek de, $xy = 0$ ikinci derece denklemidir. Bu denklem ise, kesişen iki $x = 0$, $y = 0$ düzlemlerinin birleşimidir ve yine bir yüzey değildir (Pressley 2015).

2.1.1 Teorem

E^3 ün bir direk izometrisini uygulayarak, katsayılarının hepsi birden sıfır olmayan boş cümleden farklı her (2.3) ikinci derece denklemi, aşağıdaki kartezyen denklemlerden birine dönüştürülebilir:

i. Elipsoid : $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}=1,$

ii. Tek kanatlı hiperboloid: $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-\frac{z^2}{r^2}=1,$

iii. İki kanatlı hiperboloid : $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}-\frac{z^2}{r^2}=1,$

iv. İkinci dereceden koni : $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-\frac{z^2}{r^2}=0,$

v. Tek nokta : $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}=0,$

vi. Eliptik paraboloid : $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=z,$

vii. Hiperbolik paraboloid : $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z,$

viii. Kesişen iki düzlem : $\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=0,$

ix. Doğru : $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=0,$

x. Parabolik silindir : $\frac{x^2}{p^2}=y,$

xi. Düzlem : $x = 0,$

xii. Paralel iki düzlem : $x^2 = p^2$

Buradaki denklemlerin her birinde p, q ve r değerleri sıfırdan farklı sabitlerdir (Pressley 2015).

2.1.10 Tanım

$S \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall\, p \in S$ noktasında, E^3 ün S de kalan bir doğrusu var ise, S ye bir regle yüzey denir. Ayrıca, $p \in S$ noktasından geçen ve S de kalan doğruya da S nin bir doğrultmanı denir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.2 Teorem

$S \subset E^3$ bir regle yüzey olsun. O zaman, S nin doğrultmanları, S de hem asimptotik ve hem de geodezik çizgilerdir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.3 Teorem

$S \subset E^3$ bir regle yüzey ve S nin Gauss eğrilik fonksiyonu K olsun. O zaman $\forall\, p \in S$ için $K(p) \leq 0$ dır (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.4 Teorem

Bir regle yüzeyin, bir doğrultmanı boyunca teğet düzlemleri aynıdır $\Leftrightarrow$ $c = 0$, $c \in C^{\infty}(S, \mathbb{R})$ (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.11 Tanım

Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyinin dağılma parametresi (drali) denir (Hacısalihoğlu 1983).

2.1.12 Tanım

Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Hacısalihoğlu 1983).

2.2. Yarı-Riemann Altmanifoldları

2.2.1 Tanım

V sonlu boyutlu reel vektör uzayı, V üzerinde simetrik bilineer form $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\forall\, u \in V$ ve $u \neq 0$ için

i. $g(u,u) > 0$ [< 0] pozitif [negatif] tanımlı,
ii. $g(u,u) \geq 0$ [≤ 0] yarı pozitif [yarı negatif] tanımlı,
iii. Bir $v \in V$ için $g(u,v) = 0$ şartı sadece $v = 0$ için sağlanıyorsa non-dejenere,
iv. Bir $v \in V$ için $g(u,v) = 0$ şartı sadece $v \neq 0$ için sağlanıyorsa dejenere

denir. Eğer V üzerinde tanımlı $g: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bilineer, simetrik ve non-dejenere ise g ye V üzerinde bir iç çarpım ve buradaki V vektör uzayına da bir iç çarpım uzayı denir (Neill 1983).

2.2.2 Tanım

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.
$\forall\, u \in V$ ve $u \neq 0$ için,

i. $g(u,v) > 0$ [< 0] pozitif [negatif] tanımlı,
ii. $g(u,v) \geq 0$ [≤ 0] yarı pozitif [yarı negatif] tanımlı denir (Neill 1983).

2.2.3 Tanım

$U \subset E^3$ bir vektör alt uzayı, *U* üzerinde bir indirgenmiş metrik $g(u,v)|_U$ *;*

$$g(u,v)|_U = g(u,v), \qquad u,v \in U$$

şeklinde tanımlıdır (Neill 1983).

2.2.4 Tanım

Bir *V* vektör uzayı üzerindeki g simetrik bilineer formunun *ν* indeksi, $g|_{(W \times W)}$ negatif tanımlı olacak şekilde verilen en büyük boyutlu $W \subset V$ alt uzayının boyutudur. g iç çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca *V* iç çarpım uzayının indeksi üzerinde tanımlı g, iç çarpım indeksi olarak tanımlanır (Neill 1983).

2.2.5 Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, bilineer, nondejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden $\langle , \rangle$ tensör alanına bir metrik tensör denir (Neill 1983).

2.2.6 Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold ve üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda,

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

şeklinde tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

i. $g(X,Y) = g(Y,X)$,

ii. $g(X,X) \geq 0$ ve $\forall X$ için, $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa, g, bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör denir. Bu durumda (M,g) ikilisine de Riemann manifoldu denir (Neill 1983).

2.2.7 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu ($Dg = 0$), yani $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$[X,Y] = D_X Y - D_Y X$$

$$Xg(Y,Z) = < D_X Y, Z > + < Y, D_X Z >$$

şartlarını sağlayan bir tek D konneksiyonu vardır.

Bu konneksiyona, M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir ve bu konneksiyon

$$2g(D_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)$$

şeklindeki Kozsul özdeşliği ile karakterize edilir (Neill 1983, Pressley 2015).

2.2.8 Tanım

M bir Riemann manifoldu ve üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu da D ile gösterilsin. M üzerinde

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y,Z) \longrightarrow R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z = R_{XY}Z$$

$$= D_X D_Y Z - D_{\boldsymbol{Y}} D_{\boldsymbol{X}} Z - D_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlı R, (3,1)-tipinde tensör alanına D konneksiyonunun eğrilik tensörü denir. Eğer, $R = 0$ ise, M manifoldu flattır (düzlemsel) denir (Neill 1983, Pressley 2015).

Tanım 2.2.9

M bir k-manifold ve $\overline{M}$ de bir n-manifold ve n > k olsun. $\forall p \in M$ noktası için, M de bir U ve $\overline{M}$ de bir $\overline{U}$ koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \overline{U}: \bar{x}_{k+1}(m) = \cdots = \bar{x}_n(m) = 0\}$$

ise, M ye $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu denir. Burada $\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$ koordinat sistemi $\overline{U}$ de $\{\bar{x}_1|_U, \cdots, \bar{x}_k|_U\}$ da U daki koordinat sistemidir (Chen 1973, Hacısalihoğlu 1983).

2.2.10 Tanım

M bir Riemann manifold ve $\overline{M}$ de M manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlar, sırasıyla, $\overline{\mathrm{D}}$ ve D olmak üzere,

$$A_V: \chi(\overline{M}\,) \longrightarrow \chi(\overline{M}\,)$$

ile tanımlı operatöre Weingarten temel tensörü veya şekil operatörü denir. Ayrıca $X,\ Y\ \in \chi(\overline{M}\,)$ ve $V \in \chi^{\perp}(\overline{M}\,)$ için,

$$(D_X Y)^{\intercal} = \overline{D}_X Y = -A_V X$$

dır (Neill 1983, Pressley 2015).

2.2.11 Tanım

M bir Riemann manifold ve $\overline{M}$ de M manifoldunun bir altmanifoldu olsun. M ve $\overline{M}$ üzerindeki konneksiyonlar, sırasıyla, D ve $\overline{\mathrm{D}}$ olmak üzere $\forall\, X, Y \in \chi(\,\overline{M})$ ve $V \in \chi^{\perp}(\overline{M})$ için,

$$\mathrm{D}_X Y = \overline{\mathrm{D}}_X Y + \langle A_V(X), Y\rangle N$$

$$\mathrm{D}_X V = -A_V X + \mathrm{D}^{\perp}{}_X V$$

ile tanımlı denklemlere, sırasıyla, Gauss ve Weingarten formülü denir. Burada $\mathrm{D}^{\perp}$ konneksiyonu normal demet üzerindedir ve normal konneksiyon olarak adlandırılır (Neill 1983, Pressley 2015).

2.2.12 Tanım

M, *m* boyutlu Riemann manifold ve $\overline{M}$ de *M* nin *n* boyutlu altmanifoldu olsun. Eğer, *m-n* boyutu 1 ise $\overline{M}$ manifolduna hiperyüzey denir.

Diğer taraftan, $\chi^{\perp}(\overline{M})$ 1-boyutlu olduğundan, $\chi^{\perp}(\overline{M})$ uzayını geren birim normal vektör alanı *N* olmak üzere $X, Y \in \chi(\overline{M})$ için,

$$\sigma(X, Y) = \lambda N, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\overline{M}$ hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere,

$$g(\mathrm{D}_X^{\perp} N, N) = g(\overline{\mathrm{D}}_X N, N) = 0$$

olur ve böylece Weingarten formülü

$$\overline{\mathrm{D}}_X N = -A_N X \qquad \textbf{(2.4)}$$

haline gelir (Neill 1983, Pressley 2015).

2.2.13 Tanım

M bir Riemann manifoldu ve M de bir hiperyüzey S olsun. S yüzeyinin şekil operatörü A olmak üzere, S yüzeyinin bir p noktasına karşılık gelen *A(p)* nin karakteristik değerleri *S* yüzeyinin bu noktadaki asli eğrilikleri olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlerin belirttiği doğrulara da S yüzeyinin bu p noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir (Hacısalihoğlu 1994, Pressley 2015).

2.2.14 Tanım

Tanım 2.2.6 da verilen g; Riemann metriği pozitif tanımlılık aksiyomu yerine, non-dejenere aksiyomunu sağlıyorsa $(\overline{M}\ , g)$ ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir, [9].

$\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksine, $\overline{M}$ yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir (Neill 1983, Pressley 2015)

Bundan sonraki kullanımlarda $(\overline{M},g)$ yarı-Riemann manifoldunu, kısaca $\overline{M}$ ile göstereceğiz.

2.2.15 Tanım

M, bir diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $U \subset M$ açık cümlesi üzerinde vektör alanları *X* ve *Y* olmak üzere, $f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie (parantez) operatörü denir. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun *X* vektör alanı yönündeki türevidir (Hacısalihoğlu 1983, Neill 1983, Pressley 2015)

2.2.16 Tanım

$\overline{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $\widetilde{M}$, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $j: \widetilde{M} \longrightarrow \overline{M}$ inclusion (içine) dönüşümü olmak üzere $\forall\ p \in \widetilde{\mathrm{M}}$ için,

$$\big(j(g)\big)(p) = g\big(j(p)\big)$$

şeklinde tanımlı $\mathrm{j}(g)$ dönüşümü $\widetilde{\mathrm{M}}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\widetilde{\mathrm{M}}$ ye $\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir (Neill 1983, Pressley 2015).

Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ ve $\widetilde{M}$ üzerindeki metrik tensörü g ile göstereceğiz.

2.2.17 Tanım

$\widetilde{M}$, $\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $\overline{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\overline{\mathrm{D}}$ olmak üzere $\forall\, X, Y \in \chi(\widetilde{\mathrm{M}})$ için

$$\widetilde{\mathrm{D}}_X Y = tan\overline{\mathrm{D}}_X Y$$

şeklinde tanımlı $\widetilde{\mathrm{D}}$ fonksiyonuna $\widetilde{M}$ üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir (Neill 1983, Pressley 2015).

2.2.18 Tanım

$\widetilde{\mathrm{M}}$, $\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun.

$$\sigma: \chi(\widetilde{\mathrm{M}}) \times \chi(\widetilde{\mathrm{M}}) \longrightarrow \chi^{\perp}(\widetilde{\mathrm{M}})$$

şeklinde tanımlı $\chi^{\perp}(\widetilde{\mathrm{M}})$ değerli, bilineer ve simetrik fonksiyonuna $\widetilde{\mathrm{M}}$ nin ikinci temel form tensörü denir ve $\forall\, X, Y \in \chi(\widetilde{\mathrm{M}})$ ve $V \in \chi^{\perp}(\widetilde{\mathrm{M}})$ için

$$(\overline{D}_X V)^{\perp} = \widetilde{D}^{\perp}{}_X V = \sigma(X, Y)$$

şeklindedir (Pressley 2015).

2.2.19 Tanım

$\widetilde{M}$ yarı-Riemann altmanifoldunun, $p \in \widetilde{\mathrm{M}}$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\,\widetilde{M}$ ve p noktasındaki normal uzay ise $T_p{}^{\perp}\widetilde{M}$ ile gösterilir. Normal uzayın meydana getirdiği $T^{\perp}\widetilde{M}$ tanjant demete de normal demet denir. Böylece $T_p\overline{M}$ uzayı için,

$$T_p\overline{M} = T_p\,\widetilde{M} \oplus T_p^{\perp}\widetilde{M} \quad \text{veya} \quad T\overline{M} = T\widetilde{M} \oplus T^{\perp}\widetilde{M}$$

yazılabilir. $V \in T_p^{\perp}\widetilde{M}$ vektörüne normal vektör ve birim normal vektöre de normal kesit denir. Normal vektör alanlarının cümlesi $\chi^{\perp}(\widetilde{M})$ ile gösterilir (Chen 1973, Pressley 2015).

2.2.20 Tanım

$\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi S ve S yüzeyinin birim normal vektör alanı N olsun. Her $V, W \in \chi(\overline{M})$ için,

$$g(A(V), W) = g(\sigma(V, W), N)$$

şeklindeki (1,1)-tipinden tensör alanı A ya S nin N normalinden elde edilen şekil operatörü denir.

Diğer bir ifadeyle, A şekil operatörü S nin bir p noktasında,

$A: \chi(S) \to \chi(S)$

bir lineer operatördür (Chen 1973, Pressley 2015).

2.2.1 Teorem

$\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi S ve A da S nin normali olan N den elde edilen şekil operatörü olsun. Bu durumda $V\epsilon\chi(\overline{M})$ için,

$A(V) = -\overline{D}_V N$

şeklinde olup A şekil operatörü aynı zamanda self-adjointtir. Her $V, W\epsilon\chi(\overline{M})$ için,

$$\sigma(V, W) = \varepsilon g(A(V), W)N \qquad \textbf{(2.5)}$$

yazılır. Burada $\varepsilon = \langle N, N\rangle$ dir. Yarı-Riemann hiperyüzeyler için Gauss denklemi, her $V, W\epsilon\chi(\overline{M})$ olmak üzere,

$$D_V W = \overline{D}_V W + \varepsilon g(A(V), W)N \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$D_V N = -A_N V \qquad \textbf{(2.7)}$$

şeklinde verilir (Chen 1973, Pressley 2015).

2.3 E_1^3 Minkowski 3-Uzayı

2.3.1 Tanım

E^n, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ ve v_p,$w_p \in T_pE^n$ olmak üzere

$$\langle v_p, w_p\rangle = \sum_{i=1}^{v-1} v_i\, w_i - \sum_{i=v}^{n} v_i w_i$$

eşitliği ile verilen ν-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı-Öklidyen uzay denir ve E_ν^n ile gösterilir.

Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla, v_i ve w_i ler, v_p ve w_p tanjant vektörlerinin bileşenidir (Neill 1983).

2.3.2 Tanım

n-boyutlu, ν-indeksli E_ν^n yarı-Öklidyen uzayında, $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ için, E_1^n yarı-Öklid uzayına Minkowski (Lorentz) n-uzayı denir.

Eğer, E_ν^n yarı-Öklidyen uzayının boyutu 3 ve indeksi 1 olarak alınırsa, elde edilen E_1^3 uzayına Minkowski (Lorentz) 3-uzayı denir (Neill 1983).

2.3.3 Tanım

E_1^3 Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ olsun. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$u \times v = (u_3 v_2 - u_2 v_3, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

vektörüne u ve v nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $u \times v$ yerine bazen, $u \wedge v$ şeklinde de gösterilir.

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad \text{ise,}$$

$e_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}, \rho_{i3}), \quad i = 1, 2, 3$ olmak üzere,

$$u \wedge v = -det \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

ya da

$$u \wedge v = det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir.

Burada $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_{1,}$ $e_3 \wedge e_1 = e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yönü olarak alınmıştır (Neill 1983, Lopez 2008).

2.3.1 Teorem

E_1^3, Minowski 3-uzayında iki vektör *u* ve *v* olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i. *u* ve *v* space-like vektör ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ bir time-like vektördür,

ii. *u* space-like ve *v* time-like vektör ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ space-like vektördür,

iii. *u* space-like ve *v* light-like vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ light-like vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ space-like vektördür,

iv. *u* ve *v* light-like vektör ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ spacelike vektördür,

v. *u* time-like *v* light-like vektör ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ space-like vektördür,

vi. *u* ve *v* time-like vektör ise $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ space-like vektördür (Neill 1983, Lopez 2008).

2.3.4 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey S olsun. Eğer $\forall\, p \in S$ ve $v_p, w_p \in T_pS$ için,

$$\langle v_p, w_p \rangle = 0 \Rightarrow v_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa, S ye E_1^3 uzayında bir Lorentz yüzey denir (Neill 1983, Lopez 2008).

2.3.5 Tanım

E_v^n yarı- Öklidyen uzay ve g, yarı-Öklidyen metrik olmak üzere,

i. $\mathcal{L}_N = \{v \in (E_v^n - \{0\}) : \langle v, v \rangle = 0\}$ şeklinde tanımlı $\mathcal{L}_N$ cümlesine E_v^n nin light-like (null) konisi,

ii. $\mathcal{L}_S = \{v \in E_v^n : \langle v, v \rangle \geq 0\}$ şeklinde tanımlı $\mathcal{L}_S$ cümlesine, E_v^n nin space-like konisi,

iii. $\mathcal{L}_T = \{v \in (E_v^n - \{0\}) : \langle v, v \rangle < 0\}$ şeklinde tanımlı $\mathcal{L}_T$ cümlesine E_v^n nin time-like konisi

Denir (Neill 1983, Lopez 2008).

2.3.6 Tanım

E_1^3 bir Minkowski 3-uzayı ve W, E_1^3 nin bir altuzayı olsun. Bu durumda

i. $\langle , \rangle|_W$ pozitif tanımlı ise, *W* ya space-like altuzay,

ii. $\langle , \rangle|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise, *W* ya time-like altuzay,

iii. $\langle , \rangle|_W$ dejenere ise, W ya light-like altuzay

denir (Chen 1973, Fu ve Nistor 2013).

2.3.7 Tanım

$\bar{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun $boy\bar{M} \geq 2$ ve $\bar{M}$ nin indeksi 1 ise $\bar{M}$ ye bir Lorentz manifoldu denir ve özel olarak L ile gösterilir. Bu tanıma göre bir L Lorentz manifoldu için,

$$\langle v_p, w_p \rangle_p = \sum_{i=2}^{n} v_i |pw_i|_p - v_1 |pw_1|_p, \qquad p \in \bar{M}, \qquad v_p, w_p \in T_p L$$

dir (Neill 1983, Lopez 2008).

2.3.8 Tanım

L bir Lorentz manifoldu ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow L$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

i. $\langle T, T \rangle > 0$ ise α eğrisine space-like eğri,

ii. $\langle T, T \rangle < 0$ ise α eğrisine time-like eğri,

iii. $\langle T, T \rangle = 0$ ve T$\neq$ 0 ise α eğrisine light-like eğri

denir.

Eğrinin bir özel hali olan doğruyu göz önüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü space-like ise, space-like doğru; doğrultman vektörü time-like ise, time-like doğru; doğrultman vektörü light-like ise, light-like doğru adını alır (Neill 1983, Lopez 2008).

2.3.9 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında time-like alt vektör uzayı tarafından gerilen *u* ve *w* space-like vektörleri için,

$$|\langle u, w \rangle| = \|u\| \|w\| ch\, \theta$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, u ve w vektörleri arasındaki Lorentz space-like açı denir (Neill 1983 ve Güler, Şaffak, Kasap 2011).

2.3.10 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında space-like alt vektör uzayı tarafından gerilen *u* ve *w* space-like vektörleri için,

$$|\langle u, w\rangle| = \|u\|\|w\| cos\,\theta$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, u ve w vektörleri arasındaki Lorentz space-like açı denir (Neill 1983 ve Güler, Şaffak, Kasap 2011).

2.3.11 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında *u* ve *w* pozitif (negatif) time-like vektörleri için,

$$|\langle u, w\rangle| = \|u\|\|w\| ch\,\theta$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \geq 0$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, u ve w vektörleri arasındaki Lorentz time-like açı denir (Neill 1983 ve Güler, Şaffak, Kasap 2011).

2.3.12 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında *u* bir space-like vektör ve *w* pozitif (negatif) time-like vektörleri için,

$$|\langle u, w\rangle| = \|u\|\|w\| sh\,\theta$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $\theta \geq 0$ reel sayısı mevcuttur. Bu θ sayısına, u ve w vektörleri arasındaki Lorentz time-like açı denir (Neill 1983 ve Güler, Şaffak, Kasap 2011).

2.3.13 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey S olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı, yani Riemann metriği ise S ye E_1^3 uzayında bir space-like yüzey denir (Neill 1983 ve Güler, Şaffak, Kasap 2011).

2.3.2 Teorem

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında (U, x) parametrizasyonu ile verilen,

$x: U \subset E^2 \longrightarrow E_1^3$

$(u, v) \longrightarrow x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$

$x(U)$ yüzeyinin space-like yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin time-like bir vektör alanı olmasıdır, yani

$\langle N, N \rangle < 0$

dır. Burada N, $x(U)$ yüzeyinin birim normalidir (Neill 1983).

2.3.14 Tanım

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey S olsun. S yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise S ye time-like yüzey denir (Neill 1983 ve Güler, Şaffak, Kasap 2011)

.2.3.3 Teorem

E_1^3, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir S yüzeyinin time-like yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin space-like bir vektör alanı, yani

$\langle N, N \rangle > 0$

olmasıdır (Neill 1983).

3. E_1^3 MİNKOWSKİ 3-UZAYINDA SABİT AÇILI YÜZEYLERİN SINIFLANDIRILMASI

E_1^3, Minkowski 3-uzayı ve $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in E_1^3$ olmak üzere, Lorentz metriğini;

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 \quad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde göz önüne alalım (Beem ve Ehrlich 1981).

M , E_1^3 de bir yüzey ve M nin birim normali N olmak üzere, her $X, Y \in \chi(M)$ için, Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla,

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \varepsilon \langle A(X), Y \rangle N \quad \textbf{(3.2)}$$

$$D_X N = -A(X) \quad \textbf{(3.3)}$$

şeklindedir. Burada, $\varepsilon = \langle N, N \rangle = \pm 1$ dir. Ayrıca, (2.5) eşitliğinden, $i, j = 1{,}2$ olmak üzere $v_i, v_j \in T_pM$ için,

$$\overline{D}_{v_i} v_j = D_{v_i} v_j - \sigma_{ij} N \quad \textbf{(3.4)}$$

$$\overline{D}_{v_i} N = \sigma_{i1} v_1 + \sigma_{i2} v_2 \quad \textbf{(3.5)}$$

yazılabilir. Burada $\overline{D}$ ve D, sırasıyla, E_1^3 ve M üzerinde Levi-Civita konneksiyonlarıdır.

3.1 Tanım

$x: M \to E_1^3$ dönüşümü bir izometrik immersiyon ve M de birim normal vektör alanı N olsun. N vektörü ile sabit açı yapacak şekilde bir U sabit vektörü varsa M ye sabit açılı yüzey denir (Lopez 2009).

Sabit açılı yüzeyler Öklid uzayında ve başka uzaylarda çalışılmıştır (Dillen, Munteanu 2009 ve Munteanu, Nistor 2008). Bu bölümde, sabit açılı yüzeyler iki alt kısımda incelenecektir. İlk kısımda, Güler, Şaffak ve Kasap (2011) makalesinde incelenen sabit açılı time-like yüzeyler verilecek, ikinci kısımda ise Lopez (2009) makalesinde incelenen sabit açılı space-like yüzeyler incelenecek ve orijinal kısım olan sabit space-like vektör ile ilişkili olan sabit açılı yüzeyler sınıflandırılacaktır.

3.1 E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Sabit Açılı Time-like Yüzeyler

Bu kısımda, Güler, Şaffak ve Kasap (2011) makalesinde incelenen sabit vektör ile ilişkili time-like sabit açılı yüzeyler için elde edilen sonuçlar ayrıntılı bir şekilde verilecektir.

3.1.1 Sabit Space-Like Vektör ile İlişkili Sabit Açılı Time-Like Yüzeyler

M bir time-like yüzey olmak üzere, sabit space-like vektörü k ile birim normal vektörü $N = (n_1, n_2, n_3)$ arasındaki sabit açı θ olsun.

θ açısı için iki durum vardır:

a. $|n_1| < 1$ ise, Tanım 2.3.9 dan, $\langle N, k \rangle = ch\, \theta$,

b. $|n_1| \geq 1$ ise, Tanım 2.3.10 dan, $\langle N, k \rangle = cos\, \theta$.

Bu durumları, sırasıyla, inceleyelim:

a. $|n_1| < 1$ olsun. M de bir e_1 time-like vektörü için k sabit space-like birim vektörü,

$$k = sh\, \theta e_1 + ch\, \theta N \qquad \textbf{(3.6)}$$

şeklinde yazılabilir.

3.1.1.1 Teorem

M yüzeyinde e_1 vektörüne ortogonal olan bir vektör alanı e_2 olsun. O zaman, $\chi(M)$ nin $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı,

$$\overline{D}_{e_2} N = \lambda e_2, \quad \overline{D}_{e_2} e_1 = -\lambda coth\, \theta e_2, \ \lambda = \lambda(u, v),$$
$$\overline{D}_{e_1} N = \overline{D}_{e_1} e_1 = \overline{D}_{e_1} e_2 = 0$$

şeklindedir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

İspat:

(3.6) ifadesinin e_2 ye göre türevi alınırsa,

$$\overline{D}_{e_2}k = sh\,\theta\overline{D}_{e_2}e_1 + ch\,\theta\overline{D}_{e_2}N$$

elde edilir. k vektörü sabit bir vektör olduğundan, son denklem

$$0 = sh\,\theta\overline{D}_{e_2}e_1 + ch\,\theta\overline{D}_{e_2}N \tag{3.7}$$

haline gelir. $e_2[\langle N, e_1\rangle] = 0$ olduğundan,

$$\langle\overline{D}_{e_2}N, e_1\rangle + \langle N, \overline{D}_{e_2}e_1\rangle = 0 \tag{3.8}$$

olur. Ayrıca, $e_2[\langle N, N\rangle] = 0$ olduğundan, $\overline{D}_{e_2}N \in \chi(M)$ olduğu açıktır. Böylece,

$$\overline{D}_{e_2}N = \lambda_1 e_1 + \lambda e_2 \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.7) ve (3.9) eşitliklerinden,

$$\overline{D}_{e_2}e_1 = -coth\,\theta(\lambda_1 e_1 + \lambda e_2\,) \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu denklem, (3.8) de göz önüne alınırsa, kolayca görülebilir ki $\lambda_1 = 0$, $\overline{D}_{e_2}N = \lambda e_2$ ve $\overline{D}_{e_2}e_1 = -\lambda\, coth\,\theta\, e_2$ şeklinde bulunur.

Benzer şekilde, (3.6) da e_1 e göre türevi alınır ve k vektörünün sabit bir vektör olduğu göz önüne alınırsa, (3.6) ifadesi

$$0 = sh\,\theta\overline{D}_{e_1}e_1 + ch\,\theta\overline{D}_{e_1}N \tag{3.11}$$

olur. $e_1[\langle N, N\rangle] = 0$ olduğundan, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\overline{D}_{e_1}N = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri ve $e_1[\langle e_1, e_1\rangle] = 0$ olduğu birlikte göz önüne alınırsa,

$$\overline{D}_{e_1}e_1 = -\mu_2 coth\,\theta e_2 \tag{3.13}$$

Elde edilir. $\langle A(e_1), e_2 \rangle = \langle A(e_2), e_1 \rangle$ olduğundan, $\lambda_1 = \mu_2 = 0$ olur. Böylece, $\overline{D}_{e_1} N = \overline{D}_{e_1} e_1 = 0$ elde edilir. Son olarak, $\overline{D}_{e_1} e_2 = 0$ olduğu da direkt hesaplama ile gösterilebilir.

3.1.1.1 Sonuç

M nin bir Riemann konneksiyonu D, M de ortonormal baz $\{e_1, e_2\}$, λ ikinci temel form ve θ da iki vektör arasında açı olmak üzere;

$$D_{e_1} e_1 = D_{e_1} e_2 = 0, \quad D_{e_2} e_1 = -\lambda coth\, \theta e_2, \; D_{e_2} e_2 = -\lambda coth\, \theta e_1$$

dir.

Kabul edelim ki M bir time-like regle yüzeyi

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

şeklinde verilsin. Diğer taraftan, $\beta: M \to \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, $r_u = e_1$ ve $r_v = \beta(u, v) e_2$ olsun. Sonuç 3.1.1.1 den,

$$r_{uu} = 0 \tag{3.14}$$
$$r_{vu} = \frac{\beta_u}{\beta} r_v \tag{3.15}$$
$$r_{uv} = -\lambda coth\, \theta r_v \tag{3.16}$$
$$r_{vv} = -\lambda \beta^2 coth\, \theta r_u + \frac{\beta_v}{\beta} r_v - \lambda \beta^2 N \tag{3.17}$$

eşitlikleri bulunur. Ayrıca, $r_{uv} = r_{vu}$ ve $N_{uv} = N_{vu}$ olduğundan, sırasıyla,

$$\beta_u + \lambda \beta coth\, \theta = 0 \;\text{ ve }\; \lambda_u - \lambda^2 coth\, \theta = 0 \tag{3.18}$$

denklemleri yazılır. Bu denklemler çözülürse,

$$\lambda(u, v) = -\frac{tanh\, \theta}{u + \alpha(v)} \;\text{ ve }\; \beta(u, v) = \varphi(v)(u + \alpha(v)) \tag{3.19}$$

ya da

$$\lambda(u, v) = 0 \quad \text{ve} \;\; \beta(u, v) = \beta(v) \tag{3.20}$$

elde edilir.

M yüzeyini sınıflandırmak için, kabul edelim ki (3.19) eşitlikleri sağlansın. (3.6) denkleminden, $\langle r_u, k\rangle = -sh\,\theta$ ve $\langle r_v, k\rangle = 0$ yazılır. Böylece $h(u,v) \in \mathbb{R}_1{}^2$ olmak üzere, yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u,v) = (-u\,sh\,\theta, h(u,v))$$

olur. Ayrıca, $\langle r_u, r_u\rangle = -1$ olduğundan,

$$\langle h_u, h_u\rangle = y_u{}^2 - z_u{}^2 = -ch^2\theta$$

şeklindedir. Böylece, $f(v) = (f_1(v), f_2(v)) \in \mathbb{R}_1{}^2$ ve $\|f(v)\| = 1$ olmak üzere,

$$h_u = (ch\,\theta f_1(v), ch\,\theta f_2(v))$$

elde edilir. Böylece yüzeyin parametrizasyonu,

$$r(u,v) = (-u\,sh\,\theta, u\,ch\,\theta f_1(v) + \gamma_1(v), u\,ch\,\theta f_2(v) + \gamma_2(v))$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan, $r_{uv} = r_{vu}$ olduğundan,gösterilebilir ki

$$\frac{d\gamma_1}{dv} = ch\,\theta \frac{df_1}{dv}\alpha(v) \qquad \textbf{(3.20)}'$$
$$\frac{d\gamma_2}{dv} = ch\,\theta \frac{df_2}{dv}\alpha(v)$$

olur. Genelliği bozmaksızın, $f(v) = [chv, shv]$ olarak alınırsa,

$$r(u,v) = (-u\,sh\,\theta, u\,ch\,\theta ch\,v + \gamma_1(v), u\,ch\,\theta sh\,v + \gamma_2(v)) \qquad \textbf{(3.21)}$$

elde edilir. Burada,

$$\gamma(v) = \big(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\big) = ch\,\theta\Big(\int_0^v sh\,\tau\alpha(\tau)d\tau, \int_0^v ch\,\tau\alpha(\tau)d\tau\Big)$$

olup bu ifade $(3.20)'$ eşitliğinden elde edilen $r(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir eğridir.

Şimdi, kabul edelim ki (3.20) çözümleri sağlansın. Buradan, $\beta_u = 0$ olduğu (3.15) de göz önünde bulundurulursa, $r_{vu} = 0$ olur. $r_{uu} = 0$ ve $r_{uv} = 0$ olduğundan, $h_{uu} = 0$ ve $h_{uv} = 0$ elde edilir. Bu da gösterir ki, h_u vektörü, $\mathbb{R}_1^2$ de sabit bir vektördür. O zaman bir μ sabiti için,

$$h_u = (ch\,\theta ch\,\mu, -ch\,\theta sh\,\mu)$$

olarak alalım. Böylece u ya göre integral alınırsa;

$$h(u,v) = (u\,ch\,\theta ch\,\mu + \gamma_1(v), -u\,ch\,\theta sh\,\mu + \gamma_2(v))$$

olur. $\langle r_u, r_v \rangle = 0$ olduğundan,

$$\gamma(v) = \big(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\big) = (sh\,\mu\alpha(\tau), -ch\,\mu\alpha(\tau))$$

yazılır. Son denklemden,

$$r(u,v) = (-u\,sh\,\theta, u\,ch\,\theta cosh\,\mu + sin\,\mu\alpha(\tau), -u\,ch\,\theta sh\,\mu - ch\,\mu\alpha(\tau)) \qquad \textbf{(3.22)}$$

elde edilir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.1.1 Özel Durum

$\theta = 0$ ise, o zaman $k = N$ dir. Buradan M yüzeyinin birim normalinin sabit olduğu söylenebilir. Ayrıca k vektörü space-like sabit bir vektör , yani, $k = (1,0,0)$ olduğundan M yüzeyi (y,z)-düzlemine paralel olan Lorentz düzlemidir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

Bu da 3.1.1 de ifade edilen $|n_1| < 1$ olduğunu gösterir.

Şimdi yine 3.1.1 de ifade edilen $|n_1| \geq 1$ olma durumunu inceleyelim.

b. $|n_1| \geq 1$ olsun. k space-like birim vektör olduğundan M de e_1 space-like vektör alanı için,

$$k = sin\,\theta e_1 + cos\,\theta N \tag{3.23}$$

yazılır.

3.1.1.2 Teorem

M de e_1 vektörüne ortogonal olan vektör alanı e_2 olsun. $\chi(M)$ nin $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı için,

$$\overline{\mathrm{D}}_{e_2}N = \lambda e_2,$$
$$\overline{\mathrm{D}}_{e_2}e_1 = -\lambda cot\,\theta e_2,$$
$$\overline{\mathrm{D}}_{e_1}N = \overline{\mathrm{D}}_{e_1}e_1 = \overline{\mathrm{D}}_{e_1}e_2 = 0$$

yazılabilir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

İspat:

Bu teoremin ispatı bir önceki (3.1.1.1) teoremin ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir:

3.1.1.2 Sonuç

D, M nin bir Riemann konneksiyonu, $\{e_1, e_2\}$ M de ortonormal baz, λ ikinci temel form ve θ da iki vektör arasında açı olmak üzere;

$$D_{e_1}e_1 = D_{e_1}e_2 = 0, \quad D_{e_2}e_1 = -\lambda cot\,\theta e_2, \quad D_{e_2}e_2 = -\lambda cot\,\theta e_1$$

dır (Kuhnel 2006).

Şimdi kabul edelim ki M yüzeyi,

$$r = r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$$

şeklinde verilsin. Bu yüzey için $r_u = e_1, r_v = \beta e_2$ alınıp **(a)** dakine benzer işlemler yapılırsa;

$$r_{uu} = 0,$$
$$r_{vu} = \frac{\beta_u}{\beta} r_v,$$
$$r_{uv} = -\lambda cot\, \theta r_v,$$
$$r_{vv} = -\lambda\beta^2 cot\, \theta r_u - \frac{\beta_v}{\beta} r_v + \lambda\beta^2 N$$

elde edilir. $r_{uv} = r_{vu}$ ve $N_{uv} = N_{vu}$ olduğundan, sırasıyla,

$$\beta_u + \lambda\beta cot\, \theta = 0, \text{ ve } \quad (\lambda)_u - (\lambda)^2 cot\theta = 0 \tag{3.24}$$

diferensiyel denklemleri bulunur. (3.24) denklemleri çözülürse

$$\lambda(u,v) = -\frac{tan\, \theta}{u+\alpha(v)} \text{ ve } \quad \beta(u,v) = \varphi(v)(u + \alpha(v)) \tag{3.25}$$

veya

$$\lambda(u,v) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \beta(u,v) = \beta(v)$$

bulunur. Böylece M yüzeyinin paremetrizasyonu **(a)** şıkkındakine benzer işlemlerle

$$r(u,v) = (u\, sin\, \theta, u\, cos\, \theta cos\, v + \gamma_1(v), u\, cos\, \theta sin\, v + \gamma_2(v)) \tag{3.26}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\gamma(v) = \big(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\big) = cos\, \theta\Big(\int_0^v a(v) sh\, v dv, \int_0^v a(v) ch\, v dv\Big)$$

olup bu ifade $(3.20)'$ eşitliğinden elde edilen $r(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir eğridir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.1.2 Özel Durumlar

1. $\theta = 0$ ise, o zaman $k = N$ dir. Böylece M yüzeyi, (y,z)-düzlemine paralel bir Lorentz düzlemidir.
2. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise, o zaman k sabit vektörü, M yüzeyine teğettir. Bu ise, yüzeyin $r(u,v) = (u, \gamma_1(v), \gamma_2(v))$

şeklinde olduğunu gösterir. Bu durumda M yüzeyi, silindir yüzeyinin bir parçasıdır (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

3.1.1.3 Teorem

Sabit bir space-like doğrultu ile ilişkili her sabit açılı time-like yüzey, aşağıdaki yüzeylerden birine denktir:

i. $r(u,v) = (-u\, sh\, \theta, u\, ch\, \theta ch\, v + \gamma_1(v), u\, ch\, \theta sh\, v + \gamma_2(v)),$

$$\gamma(v) = \left(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\right) = ch\, \theta\left(\int_0^v sh\, \tau\alpha(\tau)d\tau, \int_0^v ch\, \tau\alpha(\tau)d\tau\right)$$

dır. Burada $\gamma(v)$ fonksiyonu $(3.20)'$ eşitliğinden elde edilen $r(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir eğridir.

ii. $r(u,v) = \left(u\, sin\, \theta, u\, cos\, \theta cos\, v + \gamma_1(v), u\, cos\, \theta sin\, v + \gamma_2(v)\right),$

$$\gamma(v) = \left(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\right) = cos\, \theta\left(\int_0^v a(v) sh\, v dv, \int_0^v a(v) ch\, v dv\right).$$

iii. $sh\, \theta x + ch\, \theta z = 0$ veya $sin\, \theta x - cos\, \theta z = 0$

denklemli bir Lorentz düzlemdir.

iv. $(y,z) -$ düzlemine paralel olan bir Lorentz düzlemdir.

v. Silindirik yüzeyin bir parçasıdır (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.1.1 Örnek

1. (3.21) ifadesinde $\alpha(v) = v + 1$ ve $\theta = 2$ alınırsa M için,

$$r(u,v) = \left(-u\, sh\, 2, ch\, 2\left(u\, sh\, v + \frac{1}{2} sh^2 v\right), ch\, 2\left(u\, sh\, v - 1 + \frac{1}{2} sh\, 2v + v\right)\right),$$

paremetrizasyonu bulunur.

2. (3.26) ifadesinde $\alpha(v) = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ alınırsa M için,

$$r(u,v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} u, \frac{\sqrt{2}}{2}\left((u+1) chv - 1\right), \frac{\sqrt{2}}{2}(u+1) sh\, v\right)$$

paremetrizasyonu bulunur (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.2 Sabit Time-Like Vektör ile İlişkili Sabit Açılı Time-Like Yüzeyler

M bir time-like yüzey olsun. k sabit time-like vektörü ile $N = (n_1, n_2, n_3)$ birim normal vektörü arasındaki sabit açı θ olsun.

O zaman e_1, M üzerinde birim time-like vektör olmak üzere, k sabit time-like birim vektörünü,

$$k = ch\,\theta e_1 + sh\,\theta N \tag{3.27}$$

şeklinde yazabiliriz (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.2.1 Teorem

M yüzeyinde e_1 vektörüne ortogonal olan bir space-like vektör alanını e_2 olarak seçelim. O zaman, $\chi(M)$ nin $\{e_1, e_2\}$ ortonormal bazı,

$$\overline{D}_{e_2} N = \lambda e_2, \quad \overline{D}_{e_2} e_1 = -\lambda tanh\,\theta e_2, \; \lambda = \lambda(u, v),$$
$$\overline{D}_{e_1} N = \overline{D}_{e_1} e_1 = \overline{D}_{e_1} e_2 = 0$$

şeklindedir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

İspat:

Teorem 3.1.1.1 deki benzer hesaplamalar ile ispat edilebilir.

3.1.2.1 Sonuç

M nin bir Riemann konneksiyonu D, M de ortonormal baz $\{e_1, e_2\}$, λ ikinci temel form ve θ da iki vektör arasında açı olmak üzere;

$$D_{e_1} e_1 = D_{e_1} e_2 = 0, \quad D_{e_2} e_1 = -\lambda tanh\,\theta e_2, \; D_{e_2} e_2 = -\lambda tanh\,\theta e_1$$

dir.

Kabul edelim ki, M bir time-like regle yüzeyi,

$$r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

şeklinde verilsin. Ayrıca, $r_u = e_1$ ve $r_v = \beta(u,v)e_2$ olsun. Sonuç 3.1.2.1 den,

$$r_{uu} = 0 \tag{3.28}$$

$$r_{vu} = \frac{\beta_u}{\beta} r_v \tag{3.29}$$

$$r_{uv} = -\lambda tanh\,\theta r_v \tag{3.30}$$

$$r_{vv} = -\lambda\beta^2 tanh\,\theta r_u + \frac{\beta_v}{\beta} r_v - \lambda\beta^2 N \tag{3.31}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca, $r_{uv} = r_{vu}$ ve $N_{uv} = N_{vu}$ olduğundan, sırasıyla,

$$\beta_u + \lambda\beta tanh\,\theta = 0 \text{ ve } \lambda_u - \lambda^2 tanh\,\theta = 0 \tag{3.32}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse,

$$\lambda(u,v) = -\frac{coth\,\theta}{u+\alpha(v)} \text{ ve } \beta(u,v) = \varphi(v)(u + \alpha(v)) \tag{3.33}$$

veya

$$\lambda(u,v) = 0 \text{ ve } \beta(u,v) = \beta(v) \tag{3.34}$$

elde edilir.

Şimdi M yüzeyini sınıflandırmak için, kabul edelim ki (3.33) eşitlikleri sağlansın. (3.27) denkleminden, $\langle r_u, k\rangle = -ch\,\theta$ ve $\langle r_v, k\rangle = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $h(u,v) \in \mathbb{R}_1{}^2$ olmak üzere, yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u,v) = (h(u,v), u\,ch\,\theta)$$

olacaktır. Ayrıca, $\langle r_u, r_u\rangle = -1$ olduğundan,

$$\langle h_u, h_u\rangle = x_u{}^2 + y_u{}^2 = sh^2\theta$$

şeklindedir. Böylece, $f(v) = (f_1(v), f_2(v)) \in \mathbb{R}_1{}^2$ ve $\|f(v)\| = 1$ olmak üzere,

$$h_u = (sh\,\theta f_1(v), sh\,\theta f_2(v))$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla yüzeyin parametrizasyonu,

$$r(u,v) = (u\,sh\,\theta f_1(v) + \gamma_1(v), u\,sh\,\theta f_2(v) + \gamma_2(v), u\,ch\,\theta)$$

şeklinde olur. Benzer şekilde $r_{uv} = r_{vu}$ olduğundan, gösterilebilir ki

$$\frac{d\gamma_1}{dv} = sh\,\theta \frac{df_1}{dv}\alpha(v) \qquad \mathbf{(3.34)'}$$
$$\frac{d\gamma_2}{dv} = sh\,\theta \frac{df_2}{dv}\alpha(v)$$

dir. Genelliği bozmaksızın, $f(v) = [cos\ v, sin\ v]$ alınırsa,

$$r(u,v) = (u\,sh\theta\,cos\,v + \gamma_1(v), u\,sh\,\theta sin\,v + \gamma_2(v), u\,ch\,\theta) \qquad \mathbf{(3.35)}$$

elde edilir. Burada, $\gamma(v) = \big(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\big) = sh\theta\big(-\int_0^v sin\,\tau\alpha(\tau)d\tau,\ \int_0^v cos\,\tau\alpha(\tau)d\tau\big)$ dır.

Kabul edelim ki (3.34) çözümleri sağlansın. Benzer olarak, yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u,v) = (u\,sh\,\theta cos\,\mu + \gamma_1(v), -u\,sh\,\theta sin\,\mu + \gamma_2(v), u\,ch\,\theta) \qquad \mathbf{(3.36)}$$

şeklindedir. Burada

$$\gamma(v) = \big(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\big) = (sh\,\mu\alpha(\tau), -ch\,\mu\alpha(\tau))$$

olup bu ifade (3.34)$'$ eşitliğinden elde edilen $r(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir eğridir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.2.1 Özel Durum

Kabul edelim ki, $\theta = 0$ olsun. Bu durumda, k sabit time-like vektörü, M ye teğettir. Buradan

$r(u,v) = (u, \psi_1(v), \psi_2(v))$

sonucu çıkar. Bu durumda M yüzeyi, yine silindir yüzeyinin bir parçasıdır (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

3.1.2.2 Teorem

Sabit bir time-like doğrultu ile ilişkili her sabit açılı time-like yüzey, aşağıdaki yüzeylerden birine denktir:

i. $r(u,v) = (u\, sh\, \theta cos\, v + \gamma_1(v), u\, sh\, \theta sin\, v + \gamma_2(v), u\, ch\, \theta)$,

$$\gamma(v) = \big(\gamma_1(v), \gamma_2(v)\big) = sh\, \theta\big(-\int_0^v sin\, \tau\alpha(\tau)d\tau, \int_0^v cos\, \tau\alpha(\tau)d\tau\big)$$

dır. Burada $\gamma(v)$ fonksiyonu $(3.34)'$ eşitliğinden elde edilen $r(u,v)$ yüzeyi üzerinde bir eğridir.

ii. $ch\, \theta x - sh\, \theta z = 0$ denklemli bir Lorentz düzlemdir.

iii. Silindirik yüzeyin bir parçasıdır (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.1.2.2 Örnek

(3.35) ifadesinde $\alpha(v) = v$ ve $\theta = 2$ alınırsa M için,

$$r(u,v) = \big[sh\, 2\big((u+v)cos\, v - sin\, v\big), sh\, 2\big((u+v)sin\, v - 1 + cos\, v\big), uch\, 2\big]$$

paremetrizasyonu elde edilir (Güler, Şaffak ve Kasap 2011).

3.2 E_1^3 Minkowski 3-Uzayında Sabit Açılı Space-like Yüzeyler

Bu bölümün, birinci kısmında Lopez (2009) makalesinde incelenen sabit time-like vektör ile ilişkili space-like sabit açılı yüzeyler için elde edilen sonuçlar ayrıntılı bir şekilde verildi. İkinci kısmında ise, tezin orijinal kısmı olan, sabit space-like vektör ile ilişkili space-like sabit açılı yüzeyler için sınıflandırma elde edilip yeni sonuçlar verildi. Böylece, Minkowski 3-uzayındaki space-like sabit açılı yüzeylerin sınıflandırılması bir ölçüde tamamlanmış olacaktır.

3.2.1 Sabit Time-Like Vektör ile İlişkili Sabit Açılı Space-Like Yüzeyler

E_1^3 de $x: M \to E_1^3$ bir space-like immersiyon ve N, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olsun. Ayrıca, M yüzeyinde sabit bir time-like vektör k olsun. Genelliği bozmaksızın, k vektörü, $E_3 = (0,0,1)$ şeklinde alınabilir. N ve k vektörleri arasındaki hiperbolik açıyı θ olarak tanımlayalım. Buda θ açısının Tanım 2.3.11 deki gibi olması anlamına gelir. Eğer M üzerinde $\theta = 0$ ise, o zaman $N = k$ olur. Bu demektir ki x, paralel bir afin düzlemden $0x^1x^2$ ye bir immersiyon tanımlar. Bu çalışma boyunca, $\theta = 0$ aşikar durumunu göz önünde bulundurmayacağız. Tanım 2.3.11 göz önüne alınırsa, k vektörü

$$k = k^{\intercal} + ch\, \theta N$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k^{\intercal}$ ye, k vektörünün M yüzeyinin teğet düzlemi üzerine izdüşümü denir. Kabul edelim ki

$$e_1 = \frac{k^{\intercal}}{|k^{\intercal}|}$$

olacak şekilde M üzerinde birim teğet vektör alanı olsun. O halde, M yüzeyinin her bir noktası için yönlendirilmiş bir $\{e_1, e_2, N\}$; ortonormal bazı tanımlanacak şekilde, M üzerinde e_1 vektörüne ortogonal olan birim vektör alanı e_2 yi göz önüne alalım. Böylece k vektörü,

$$k = sh\, \theta e_1 + ch\, \theta N \qquad \textbf{(3.37)}$$

şeklinde ayrıştırılabilir. k sabit bir vektör alanı olduğundan, $\overline{D}_{e_2} k = 0$ dır. Böylece, bu eşitlik (3.37) ifadesinde göz önünde bulundurulursa,

$$sh\, \theta\, \overline{D}_{e_2} e_1 + ch\, \theta\, \overline{D}_{e_2} N = 0 \qquad \textbf{(3.38)}$$

elde edilir. (3.38) ifadesinin normal bileşeni alınırsa ve

$$\overline{D}_{v_i} V_j = D_{v_i} V_j - \sigma_{ij} N \qquad \textbf{(3.39)}$$

ifadesi kullanılırsa,

$$sh\,\theta\,\langle \overline{D}_{e_2}e_1, N\rangle = -\,sh\,\theta\,\sigma_{21} = 0$$

olur. $\theta \neq 0$ olduğundan, $\sigma_{21} = \sigma_{12} = 0$ sonucu elde edilir. (3.38) eşitliği ve

$$\overline{D}_{v_i}N = \sigma_{i1}v_1 + \sigma_{i2}v_2 \quad \textbf{(3.40)}$$

ifadeleri birlikte düşünülürse

$$\overline{D}_{e_2}e_1 = -coth\,\theta\sigma_{22}e_2 \quad \textbf{(3.41)}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\overline{D}_{e_1}k = 0$ ifadesi (3.37) de göz önüne alınırsa

$$sh\,\theta\,\overline{D}_{e_1}e_1 + ch\,\theta\,\overline{D}_{e_1}N{=}0 \quad \textbf{(3.42)}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin normal bileşeni, (3.39) ifadesi ile birlikte göz önünde bulundurulursa, $\sigma_{11}sh\,\theta = 0$ olur, yani, $\sigma_{11} = 0$ dır.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.2.1.1 Teorem

E_1^3 de, *M* sabit açılı space-like yüzeyinin *D*, Levi-civita konneksiyonu

$D_{e_1}e_1 = 0,$

$D_{e_1}e_2 = 0,\quad D_{e_2}e_1 = -coth\,\theta\sigma_{22}e_2$

$D_{e_2}e_2 = -\,coth\,\theta\,\sigma_{22}e_1$

şeklinde verilir. Ayrıca, $\{e_1, e_2\}$ bazına göre Weingarten dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Lopez 2009).

3.2.1.1 Sonuç

E_1^3 de, M yüzeyi sabit açılı space-like bir yüzey için, M üzerindeki metrik $\langle , \rangle = du^2 + \beta dv^2$ ile tanımlı, yani, birinci temel formun katsayıları E=1, F=0 ve G=β^2 olacak şekilde, u ve v lokal koordinatları vardır. Burada $\beta = \beta(u, v)$, M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyondur.

Şimdi yukarıdaki sonuçta verilen $r(u, v)$ parametrizasyonunu göz önüne alalım. $A(r_u) = 0$ ve $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ olduğunu biliniyor. Teorem 3.2.1.1 den;

$$r_{uu} = 0,$$
$$r_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} r_v,$$
$$r_{vv} = -\beta\beta_u r_u + \frac{\beta_v}{\beta} r_v + \beta^2 \sigma_{22} N$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$N_u = \overline{D}_{r_u} N = 0$$
$$N_v = \overline{D}_{r_v} N = \beta\sigma_{22} e_2 = \sigma_{22} r_v$$

olur. $N_{uv} = N_{vu} = 0$ olduğundan, $\overline{D}_{r_u}(\sigma_{22} r_v) = 0$ sonucu bulunur. Teorem 3.2.1.1 de, $\sigma_{12} = 0$ ve $\overline{D}_{r_u} r_v = \overline{D}_{r_v} r_u$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$0 = (\sigma_{22})_u r_v + \sigma_{22} \overline{D}_{r_u} r_v = (\sigma_{22})_u r_v - \coth\theta\, \sigma_{22}^2 r_v$$

elde edilir. Böylece,

$$(\sigma_{22})_u - \coth\theta\, \sigma_{22}^2 = 0 \qquad \textbf{(3.43)}$$

dır. Ayrıca, r_{uv} ifadesini kullanılarak

$$(\sigma_{22})_u + \sigma_{22} \frac{\beta_u}{\beta} = 0$$

sonucunu elde edilir. Dolayısıyla $(\beta\sigma_{22})_u = 0$ olur. Böylece, yalnızca v ye bağlı olan diferensiyellenebilir $\varphi = \varphi(v)$ fonksiyonu bulunur. Öyle ki

$$\beta\sigma_{22} = \varphi(v) \tag{3.44}$$

dir. Ayrıca, (3.4) ve (3.5) ifadeleri birlikte düşünülürse,

$$\frac{\beta_u}{\beta} = -coth(\theta)\sigma_{22}$$

elde edilir (Lopez 2009).

3.2.1.1 Önerme

E_1^3 de, bir sabit açılı space-like $r = r(u, v)$ yüzeyini göz önüne alalım. Burada (u, v) Sonuç 3.2.1.1 de verilen koordinatlardır. Eğer M üzerinde $\sigma_{22} = 0$ ise, o zaman r bir afin düzlem tanımlar (Lopez 2009).

İspat:

M üzerinde $\beta_u = 0$ olduğu biliniyor. Böylece $r_{uv} = 0$ ve dolayısıyla r_u sabit bir vektördür. (3.37) den N, M boyunca sabit bir vektör alanıdır ve dolayısıyla r bir (space-like) düzlemdir.

Burada ve çalışmanın geri kalanında $\sigma_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edilecektir. (3.43) denklemi çözülürse,

$$\sigma_{22}(u, v) = \frac{1}{-u\, coth\,\theta + \alpha(v)}$$

elde edilir. Burada, $\alpha = \alpha(v)$ şeklinde bir fonksiyondur. $\beta\sigma_{22} = \varphi(v)$ eşitliğinden,

$$\beta(u, v) = \varphi(v)(-u\, coth\,\theta + \alpha(v))$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$r_{uu} = 0, \quad \textbf{(3.45)}$$

$$r_{uv} = \frac{coth\,\theta}{u\,coth\,\theta - \alpha(v)} r_v, \quad \textbf{(3.46)}$$

$$r_{vv} = \varphi^2\,coth\,\theta\,(-u\,coth\,\theta + \alpha)r_u \quad \textbf{(3.47)}$$
$$+\left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\alpha'}{-u\,coth\,\theta + \alpha}\right) r_v + \varphi^2(-u\,coth\,\theta + \alpha)N$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.37) ayrışımından,

$$\langle r_u, k\rangle = sh\,\theta\,,\ \langle r_v, k\rangle = 0,$$

veya bu ifadeye eşit olarak

$$\langle r, k\rangle_u = sh\theta, \quad \langle r, k\rangle_v = 0$$

yazılabilir. O zaman,

$$\langle r, k\rangle = u\,sh\,\theta + \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$$

bulunur. Böylece, r yüzeyinin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), -\,sinh(\theta)\,u)$$

şeklinde olur. E=1 olduğundan,

$$r_u = (ch\,\theta\,cos\phi(u, v), ch\,\theta\,sin\phi(u, v), -\,sh\,\theta)$$

olacak şekilde bir $\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. $r_{uu} = 0$ olduğundan, $\phi_u = 0$ elde ederiz. Yani $\phi = \phi(v)$ olur ve dolayısıyla

$$r_u = (ch\,\theta\,cos\,\phi(v)\,, ch\,\theta\,sin\,\phi(v)\,, -\,sh\,\theta)$$
$$= ch\,\theta\,(cos\,\phi(v)\,, sin\,\phi(v)\,, 0) - sh\,\theta\,(0,0,1)$$

şeklinde yazılır. Genelliği bozmaksızın, $f(v) = [\cos\phi(v), \sin\phi(v)]$ olsun. Böylece r_u ifadesi,

$$r_u = ch\,\theta\,(f(v),0) - sh\,\theta\,(0,0,1)$$

olur. Buradan

$$r_{uv} = ch\,\theta\,(f'(v),0) \qquad \textbf{(3.48)}$$

bulunur. Son eşitlikte, *u* ya göre integral alınırsa

$$r_v = ch\,\theta\,(uf'(v) + h(v),0) \qquad \textbf{(3.49)}$$

elde edilir. Burada $h = h(v)$, $\mathbb{R}^2$ de diferensiyellenebilir bir eğridir. (3.46) ve (3.49) ifadelerinden

$$r_{uv} = \frac{1}{u\coth\theta - \alpha(v)}\frac{ch^2\theta}{sh\,\theta}(uf'(v) + h(v),0)$$

bulunur. Bu eşitlik (3.48) ile birlikte göz önüne alındığında

$$h = -\tanh\theta\,\alpha(v)f'(v)$$

elde edilir ve böylece

$$r_v = ch\,\theta\,\big(u - \tanh\theta\,\alpha(v)\big)(f'(v),0)$$

şeklinde yazabiliriz. O zaman,

$$r_{vv} = ch\,\theta\,(u - \tanh\theta\,\alpha)(f''(v),0) - sh\,\theta\,\alpha'(f'(v),0) \qquad \textbf{(3.50)}$$

şeklinde bulunur. (3.47) ve (3.50) deki r_{vv} ifadeleri r_u ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\phi'(v) = \frac{1}{sh\,\theta}\varphi(v)$$

elde edilir. Burada, v nin uygun bir değişimi ile $\phi' = 1$ alınabilir. Böylece, $\phi(v) = v$ dir. Kolayca gösterilir ki, bu seçim (3.45), (3.46) ve (3.47) denklemlerindeki *x* in ikinci türevlerini değiştirmez. Bu durumda

$$r_u = ch\,\theta\,(cos\,v\,, sin\,v\,, 0) - sh\,\theta\,(0,0,1),$$
$$r_v = \big(u\,ch\,\theta - sh\,\theta\,\alpha(v)\big)(-\,sin\,v\,, cos\,v\,, 0)$$

olur.

Yukarıdaki sonuçlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

3.2.1.2 Teorem

M yüzeyi, E_1^3 Minkowski uzayında total olarak geodezik olmayan sabit açılı bir space-like yüzey olsun. M yüzeyinin lokal koordinatları *(u,v)* olmak üzere paremetrizasyonu aşağıdaki gibidir:

$$r(u,v) = (u\;ch\;\theta\;cos\;v + \gamma_1(v),\;u\;ch\;\theta\;sin\;v + \gamma_2(v), -u\;sh\;\theta), \qquad \textbf{(3.51)}$$
$$\gamma(v) = sh\;\theta(\textstyle\int \alpha(v)\;sin\;v\,, -\int \alpha(v) cos\;v) \qquad \textbf{(3.52)}$$

dır. Burada (3.52) ifadesi $(3.20)'$ eşitliğindekine benzer işlemler yapılarak elde edilen $r(u,v)$ üzerinde bir eğridir. Ayrıca α, I belirli aralığı üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Ayrıca, θ değeri $k = (0,0,1)$ sabit bir doğrultu ve M yüzeyinin birim normal vektör arasındaki hiperbolik açıdır (Lopez 2009).

3.2.1.2 Önerme

Sabit açılı bir space-like yüzey flat (düz) dır (Lopez 2009).

İspat:

Her bir $p \in M$ noktasında Weingarten endomorfizminin öz vektörlerinin, bir $\{v_1(p), v_2(p)\}$ bazını göz önüne alalım. Özel olarak $\lambda_i(p) = -\sigma_{ii}(p)$ alınmış olsun. $\langle N, k\rangle$ fonksiyonu, sabit olduğundan $v_i(p)$ boyunca türevi $\langle \overline{D}_{v_i(p)} N, k\rangle = 0, i = 1, 2,$ ifadesini sağlar. (3.5) ifadesi kullanılarak

$$\lambda_1(p)\langle v_1(p), k\rangle = \lambda_2(p)\langle v_2(p), k\rangle = 0$$

elde edilir. Şimdi, p noktasında $\lambda_1(p)\lambda_2(p) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Esas eğrilik fonksiyonlarının sürekliliğini kullanarak, p noktasının bir N_p komşuluğundaki her q noktası için, $\langle v_1(q), k\rangle = \langle v_2(q), k\rangle$ =0 bulunur. Bu demektir ki, N_p deki normal vektör k vektörüdür ve böylece $\theta = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde, $\forall\, p$ için $\lambda_1(p)\ \lambda_2(p)$=0 dır, yani M üzerinde $K = 0$ dır. Gerçekten, Öklid uzayındaki gibi, tüm flat yüzeyler; düzlem, koni, silindir ya da teğet açılabilir yüzeylerine lokal izometrik olarak karakterize edilirler.

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

3.2.1.2 Sonuç

Her bir sabit açılı space-like yüzey bir düzlem, bir koni, bir silindir ya da teğet açılabilir yüzeylere izometriktir.

Teorem 3.2.1.2 de verilen sabit açılı space-like bir yüzeyi bir regle yüzeyidir. Gerçekten, (3.51) parametrizasyonu ile verilen yüzey

$$r(u,v) = (\gamma(v),0) + u(ch\,\theta\,cos\,v\,, ch\,\theta\,sin\,v\,, -sh\,\theta)$$

olarak yazılabilir ki bu yüzey aynı zamanda bir regle yüzeyidir, [14].

3.2.1.1 Örnek

(3.51) eşitliği ile verilen $\gamma(x)$ fonksiyonu α nın farklı değerlerine göre incelenecek olursa,

1. $\alpha(v) = 0$ olsun. Bu durumda, $\gamma(v) = (0,0)$ olur ve buradan,

$$r(u,v) = u(ch\,\theta\,cos\,v\,, ch\,\theta\,sin\,v\,, -sh\,\theta)$$

elde edilir. Bu yüzey dayanak eğrisi yatay düzlemde bir çember olan ve tepe noktası orijinde bulunan bir konidir.

2. $\alpha(v) = 1$ olsun. Bu durumda $\gamma(v) = -sh\,\theta(cos\,v\,, sin\,v)$ olur ve böylece,

$$r(u,v) = -sh\,\theta\,(cos\,v\,, sin\,v\,, o) + u(ch\,\theta\,(cos\,v\,, sin\,v), -sh\,\theta)$$

bulunur. Bu yüzeyde tabanı çember bir konidir.

3. $\alpha(v) = \frac{1}{sin\,v}$ olsun. Bu durumda $\gamma(v) = sinh(\theta)(v, -log(|sin(v)|))$ olur ve buradan,

$$r(u,v) = sh\,\theta(v, -log(|sin\,v|), 0) + (u\,ch\,\theta\,cos\,v, u\,ch\,\theta\,sin\,v, -sh\,\theta)$$

elde edilir (Lopez 2009).

3.2.2 Sabit Space-Like Vektör ile İlişkili Sabit Açılı Space-Like Yüzeyler

3.2 de belirttiğimiz gibi, bu alt kısım tezin orijinal kısmı olup, sabit space-like vektör ile ilişkili space-like sabit açılı yüzeyler incelendi.

E_1^3 de $x: M \to E_1^3$ bir space-like immersiyon ve N, M yüzeyinin birim normal vektör alanı olsun. Ayrıca, M yüzeyinde sabit bir space-like vektör k olsun. Genelliği bozmaksızın, k vektörünü, $E_1 = (1,0,0)$ olarak düşünebiliriz. N ve k vektörleri arasındaki hiperbolik açıyı θ olarak tanımlayalım. Böylece, θ açısı Tanım 2.3.12 deki gibi tanımlı olur. Bu tanım göz önünde bulundurularak, k vektörünü

$$k = k^{\top} + sh\,\theta N$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $k^{\top}$ ye, k vektörünün M yüzeyinin teğet düzlemi üzerine izdüşümü denir. Kabul edelim ki

$$e_1 = \frac{k^{\top}}{|k^{\top}|}$$

olacak şekilde M üzerinde birim teğet vektör alanı olsun. Bu durumda, M yüzeyinin her bir noktası için yönlendirilmiş bir $\{e_1, e_{2,} N\}$; ortonormal bazı tanımlayarak M üzerinde e_1 vektörüne ortogonal olan, birim vektör alanı e_2 yi göz önüne alalım. Böylece k vektörünü,

$$k = ch\,\theta e_1 + sh\,\theta N \qquad \textbf{(3.53)}$$

şeklinde ayrıştırabiliriz. k sabit bir vektör alanı olduğundan, (3.53) ifadesinde e_2 vektörü yönünde türev alınırsa,

$$sh\,\theta\,\overline{D}_{e_2}e_1 + ch\,\theta\,\overline{D}_{e_2}N = 0 \qquad \textbf{(3.54)}$$

elde edilir. Bu ifadenin normal bileşen alınır ve (3.4) Gauss denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$sh\,\theta\,\langle \overline{D}_{e_2}e_1, N\rangle = -\,sh\,\theta\,\sigma_{21} = 0 \qquad \textbf{(3.55)}$$

olur. $\theta \neq 0$ olduğundan, $\sigma_{21} = \sigma_{12} = 0$ sonucunu elde ederiz. (3.54) ve (3.5) ifadeleri birlikte düşünülürse

$$\overline{D}_{e_2}e_1 = -\,coth\,\theta\,\sigma_{22}e_2 \qquad \textbf{(3.56)}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\overline{D}_{e_1}k = 0$ ifadesi (3.53) ifadesinde göz önüne alınırsa

$$sh\,\theta\,\overline{D}_{e_1}e_1 + ch\,\theta\,\overline{D}_{e_1}N{=}0 \qquad \textbf{(3.57)}$$

bulunur. (3.57) ifadesinin normal bileşeni, (3.4) ifadesi ile birlikte düşünülürse, $\theta \neq 0$ olduğundan, $\sigma_{11} = 0$ elde edilir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

3.2.2.1 Teorem

E_1^3 de, M sabit açılı space-like yüzeyinin *D*, Levi-civita konneksiyonu

$$D_{e_1}e_1 = 0,$$
$$D_{e_1}e_2 = 0, \quad D_{e_2}e_1 = -tanh\,\theta\sigma_{22}e_2,$$
$$D_{e_2}e_2 = -\,tanh\,\theta\,\sigma_{22}e_1$$

şeklinde verilir. Ayrıca, $\{e_1, e_2\}$ bazına göre Weingarten dönüşümü

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

3.2.2.1 Sonuç

$\mathbf{E_1^3}$ de, M bir sabit açılı space-like bir yüzey olmak üzere, M üzerindeki metrik $\langle , \rangle = du^2 + \beta dv^2$ ile tanımlı olacak şekilde, u ve v lokal koordinatları vardır.Burada $\beta = \beta(u, v)$, M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyondur.

Şimdi bu sonuçta verilen $r(u,v)$ parametrizasyonunu göz önüne alalım. $A(r_u)=0$ ve $\sigma_{11}=\sigma_{12}=0$ olduğu biliniyor. Teorem 3.2.2.1 den;

$$r_{uu}=0,$$
$$r_{uv}=\frac{\beta_u}{\beta}r_v,$$
$$r_{vv}=-\beta\beta_u r_u+\frac{\beta_v}{\beta}r_v+\beta^2\sigma_{22}N$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$N_u=\overline{D}_{r_u}N=0,$$
$$N_v=\overline{D}_{r_v}N=\beta\sigma_{22}e_2=\sigma_{22}r_v$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitliklerden, $\overline{D}_{r_u}(\sigma_{22}r_v)=0$ sonucu bulunur. Teorem 3.2.2.1 den, $\sigma_{12}=0$ ve $\overline{D}_{r_u}r_v=\overline{D}_{r_v}r_u$ olduğu göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}0&=(\sigma_{22})_u r_v+\sigma_{22}\overline{D}_{r_u}r_v\\&=(\sigma_{22})_u r_v-\sigma_{22}^2 tanh\,\theta r_v\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$(\sigma_{22})_u-tanh\,\theta\sigma_{22}^2=0 \qquad \textbf{(3.58)}$$

dır. Burada, r_{uv} ifadesini kullanılırsa,

$$(\sigma_{22})_u+\sigma_{22}\frac{\beta_u}{\beta}=0$$

olur ki buradan $(\beta\sigma_{22})_u=0$ dır. Böylece, $\varphi=\varphi(v)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu

$$\beta\sigma_{22}=\varphi(v) \qquad \textbf{(3.59)}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, (3.4) ve (3.5) ifadeleri birlikte düşünülürse,

$$\frac{\beta_u}{\beta} = -tanh\,\theta\sigma_{22}$$

elde edilir.

3.2.2.1 Önerme

E_1^3 de, bir sabit açılı space-like $r = r(u, v)$ yüzeyini göz önüne alalım. Burada (u, v) Sonuç 3.2.2.1 de verilen koordinatlardır. Eğer M üzerinde $\sigma_{22} = 0$ ise, o zaman r bir afin düzlem tanımlar.

İspat:

Bu önermenin ispatı Önerme 3.2.1.1 deki benzer olarak yapılabilir.

Bu çalışmanın geri kalanında $\sigma_{22} \neq 0$ olduğunu kabul edilecektir. (3.58) denklemi çözülürse,

$$\sigma_{22}(u, v) = \frac{-coth\,\theta}{u+\alpha(v)}$$

elde edilir. Burada, $\alpha = \alpha(v)$ şeklinde v ye bağımlı bir fonksiyondur. $\beta\sigma_{22} = \varphi(v)$ eşitliğinden,

$$\beta(u, v) = -tanh\,\theta\varphi(v)(u + \alpha(v))$$

olur. Sonuç olarak,

$$r_{uu} = 0, \qquad \textbf{(3.60)}$$

$$r_{uv} = \frac{1}{u+\alpha(v)} r_v, \qquad \textbf{(3.61)}$$

$$r_{vv} = -tanh^2\theta\varphi^2(v)\big(u + \alpha(v)\big)r_u + \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\Gamma'}{u+\alpha(v)}\right) r_v - tanh\,\theta\,\varphi^2(u + \alpha(v))N \qquad \textbf{(3.62)}$$

elde edilir. (3.53) ayrışımından,

$$\langle r_u, k\rangle = ch\,\theta\,,\ \langle r_v, k\rangle = 0,$$

bulunur. Böylece,

$$\langle r, k\rangle = u\, sh\, \theta + \mu, \;\; \mu \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. $k = (1,0,0)$ olduğundan, r yüzeyinin parametrizasyonu;

$$r(u, v) = \big(u\, ch\, \theta, x_2(u, v), x_3(u, v)\big)$$

olur. Diğer taraftan $\langle r_u, r_u\rangle = 1$ olduğundan,

$$r_u = (ch\, \theta, s\, h\, \theta sh\, \phi(u, v), s\, h\, \theta ch\, \phi(u, v))$$

olacak şekilde bir $\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Böylece, $r_{uu} = 0$ olduğundan, $\phi = \phi(v)$ olur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} r_u &= (ch\, \theta, s\, h\, \theta sh\, \phi(v), s\, h\, \theta ch\, \phi(v)) \\ &= ch\, \theta(1,0,0) + sh\, \theta\, (0, sh\, \phi(v), ch\, \phi(v)) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Kabul edelim ki, $f(v) = [sh\, \phi(v), ch\, \phi(v)]$ olsun. Bu kabul r_u ifadesinde göz önünde bulundurulur ve bulunan ifadenin v ye göre türev alınırsa,

$$r_{uv} = sh\, \theta\, (0, f'(v)) \qquad \textbf{(3.63)}$$

olur. (3.63) de u ya göre integrallenirse, $h = h(v)$, $\mathbb{R}^2$ de diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere

$$r_v = sh\, \theta\, (0, uf'(v) + h(v)) \qquad \textbf{(3.64)}$$

elde edilir. Böylece (3.61) ve (3.64) ifadelerinden

$$r_{uv} = \frac{sh\, \theta}{u + \alpha(v)} (0, u\alpha'(v) + h(v))$$

bulunur. Bu eşitlik (3.63) ile karşılaştırılırsa,

$$h = \alpha(v) f'(v)$$

elde edilir. Böylece (3.64) denklemi

$$r_v = sh\,\theta\,(0, (u + \alpha(v))f'(v))$$

haline gelir. Buradan,

$$r_{vv} = sh\,\theta\,\big(0, \alpha'(v)f'(v) + (u + \alpha(v))f''(v)\big) \quad \textbf{(3.65)}$$

bulunur. (3.62) ve (3.65) deki r_{vv} ifadeleri r_u ile iç çarpıma tabi tutulur ve kıyaslanırsa,

$$\phi'(v) = \frac{1}{ch\,\theta}\varphi(v)$$

elde edilir. Son denklemde, v nin uygun bir değişimi ile $\phi'(v) = 1$ alınabilir. Böylece, $\phi(v) = v$ bulunur. Böylece

$$r_u = ch\,\theta(1,0,0) + sh\,\theta\,(0, sh\,v, ch\,v),$$
$$r_v = \big(u\,sh\,\theta + sh\,\theta\,\alpha(v)\big)(0, ch\,v\,, sh\,v)$$

olur. Böylece aşağıdaki ifadeler verilebilinir.

3.2.2.2 Teorem

M yüzeyi, E_1^3 Minkowski uzayında sabit space-like vektör ile ilişkili sabit açılı space-like bir yüzey olsun. M yüzeyinin lokal koordinatları *(u,v)* olmak üzere paremetrizasyonu aşağıdaki gibidir:

$$r(u, v) = (u\,ch\,\theta, u\,sh\,\theta sh\,v + \gamma_1(v), sh\,\theta ch\,v + \gamma_2(v)), \quad \textbf{(3.66)}$$
$$\gamma(v) = sh\,\theta(\textstyle\int \alpha(v)ch\,vdv, \int \alpha(v)sh\,vdv). \quad \textbf{(3.67)}$$

Burada (3.67) ifadesi $(3.20)'$ eşitliğindekine benzer işlemler yapılarak elde edilen $r(u, v)$ üzerinde bir eğridir.

3.2.2.2 Sonuç

Her sabit açılı space-like yüzey bir düzlem, bir koni, bir silindir ya da teğet açılabilir yüzeylere izometriktir.

Ayrıca bir sabit açılı space-like yüzeyin Teorem 3.2.2.2 den regle yüzey olduğu görülebilir.

Gerçekten (3.66) parametrizasyonu

$$r(u,v) = (0,\gamma(v)) + u(ch\,\theta,\ sh\,\theta sh\,v, sh\,\theta ch\,v)$$

olarak yazılabilir. Bu da bir regle yüzeyi ifade eder.

Bu konuyla ilgili aşağıdaki önermeleri verelim:

3.2.2.1 Örnek

(3.67) eşitliği ile verilen $\gamma(x)$ fonksiyonu α nın farklı değerlerini incelenecek olursa,

1. $\alpha(v) = 0$ olsun. Bu durumda, $\gamma(v) = (0,0)$ olur ve buradan,

$$r(u,v) = u(ch\,\theta,\ sh\,\theta sh\,v, sh\,\theta ch\,v)$$

elde edilir.

2. $\alpha(v) = 1$ olsun. Bu durumda $\gamma(v) = sh\,\theta(sh\,v\,, ch\,v)$ olur ve

böylece,

$$r(u,v) = u(ch\,\theta\,, sh\,\theta\, sh\,v\,, sh\,\theta\, ch\,v) \\ +sh\,\theta\,(0,\ sh\,v\,, ch\,v)$$

bulunur.

4. KAYNAKLAR

Beem, J.K and Ehrlich, P.E (1981) Global Lorentzian Geometry. Marcel Dekker. Inc. New York.

Cermelli P. and Di Scala A. J (2007), Constant-angle surfaces in liquid crystals, Philosophical Magazine, 87 12, 1871 – 1888.

Chen, B.Y (1973), Geometry of submanifolds, M. Dekker, Newyork.

Dillen F. and Munteanu M. I (2009), Constant angle Surfaces in $H^2 \times \mathbb{R}$, Bull. Braz Math. Soc., 40, 85-97.

Dillen F., Munteanu M. I., Van der Veken J. and VranckenL (2011). Constant angle surfaces in a warped product, Balkan J. Geom. Appl. 16, no. 2, 35-47.

Dillen F., J. Van der Veken, Vrancken L. (2007), Constant angle Surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$, Monaths. Math., 15, 289-96.

Do Carmo, M. P (1976), Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice- Hall, Englewood Cliffs., pp. 503, New Jersey.

Fastenakels J., Munteanu M. I. and Van der Veken J. (2011), Constant angle surfaces in the Heisenberg group. Acta Math. Sinica – Engl. Series **27,** 747–756.

Fu Y. and Nistor A. I (2013), Constant Angle Surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$, Mediterr. J. Math. 10, 1035–1049.

Güler F., Şaffak G. and Kasap E. (2011), Timelike Constant Angle in Minkowski 3-space E_1^3, Int. J. Contemp. Math.Sciences,Vol.6, no.44, 2189-2200.

Hacısalihoğlu H.H. (1983), Diferensiyel Geometri, İnönü üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu H.H. (1994), Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 339.

Kuhnel, W. (2006), Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society.

Lopez R. (2009), Constant Angle Surfaces in Minkowski Space, arXiv: 0905. 0670v1[math.DG].

Lopez R. (2008), Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, arXiv: 0810.3351 v1[math.DG].

Lopez R. and Munteanu M. I., Constant Angle Surfaces in Minkowski Space, Bull.

Belg. Math. Soc. Simon Stevin 18, no. 2, 271-286, (2011).

Lopez R. and Munteanu M. I (2011), On the geometry of constant angle surfaces in Sol_3, Kyushu J. Math. 65, no. 2, 237-249

Munteonu M.I and Nistor A. I (2008), A New Approach on Constant Angle Surfaces in E^3, Doi. 10.3906/mat-0802-32.

Neill O. (1983), Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity, Acedemic press, Inc.,

Pressley A.(2015), Elementary Differential Geometry, Springer.Ruiz-Hernandez G., A. J. Di Scala, , Helix submanifolds of Euclidean spaces, Monatsh. Math. DOI 10.1007 / s00605-008-0031-9.

Şahin B. (2012), Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayınları.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Malatya'nın Hekimhan ilçesinde doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Malatya'da tamamladım. 2011 yılında Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladım ve 2015 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl, Namık Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen aynı üniversitede tezli yüksek lisans öğrencisiyim.

Gülüzar TÜRKMENOĞLU