



EĞRİLERİN KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA İNCELENMESİ

NURSEMİN ÇAVDAR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

2022

T.C.
TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



EĞRİLERİN KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA İNCELENMESİ

NURSEMİN ÇAVDAR

ORCID: 0000-0001-9286-7426

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

HAZİRAN-2022

Her hakkı saklıdır.

ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ BEYANI

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak sunulan ve Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışması; Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi BAP tarafından NKUBAP.01.YL.21.347 numaralı proje ile desteklenmiştir.

(İmza)

Nursemin Çavdar

24/06/2022



ÖZET

EĞRİLERİN KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA İNCELENMESİ

Nursemin Çavdar

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Kesirli analiz matematiğin teorik kısmında büyük bir öneme sahip olduğu gibi uygulama alanında da büyük bir yer edinmiştir. Bu tez çalışmasında Kesirli Analiz teknikleri kullanılarak eğrilerin geometrisi ele alındı. Bu yapılırken kesirli türev operatörleri içerisinde Caputo kesirli türev operatörü incelendi. Bu çalışmanın amacı bir seviye eğrisinin kesirli mertebeden teğet ve normal vektör alanları sayesinde kesirli türevin geometrik karşılıklarına katkıda bulunmaktadır. Bir seviye eğrisinin kesirli mertebeden teğet ve normal vektör alanı kavramları tanımlanmıştır. Bunların standart kavramlar ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Caputo kesirli türevi , seviye eğrisi, Teğet vektör alanı, Normal vektör alanı

ABSTRACT

EXAMINATION OF CURVES WIHT THE HELP OF FRACTIONAL DERIVATIVE

Nursemin Çavdar

Department of Mathematic

MSc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Fractional analysis has a great importance in the theoretical part of mathematics as well as in the field of application. In this thesis, the geometry of curves will be discussed using Fractional Analysis techniques. While doing this, the Caputo fractional derivative operator will be discussed among the fractional derivative operators. The aim of this study is to contribute to the geometrical equivalentents of the fractional derivative thanks to the fractional tangent and normal vector fields of a level curve. The concepts of fractional tangent and normal vector fields of a level curve are defined. The relations between these and standard concepts were examined.

Keywords: Caputo fractional derivatives, level curve, Tangent vector fields, Normal vector fields

İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURALLARINA UYUM BEYANI	3
ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ BEYANI	4
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	5
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
TEŞEKKÜR	7
1. GİRİŞ	8
1.1 Literatür Özeti	8
1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	9
2. TEMEL KAVRAMLAR	11
2.1 Diferansiyel Geometriye Dair Temel Kavramlar	11
2.2 Kesirli Analize Dair Temel Kavramlar	13
3. KAPALI EĞRİLERİN KESİRLİ DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ	17
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	30
KAYNAKLAR	31
TEZDEN ÜRETİLMİŞ ESERLER	33
ÖZGEÇMİŞ	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.2.1. Gama Fonksiyonunun Sayısal Değerleri.....	16
Çizelge 3.1. $ax + by + c = 0$ doğrusunun birim α –normal vektör alanı N^α , birim normal vektör alanı N^1 ve bu vektör alanları arasındaki açının kosinüs fonksiyonları.....	22
Çizelge 3.2. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin birim α –normal vektör alanı N^α , birim normal vektör alanı N^1 ve bu vektör alanları arasındaki açının kosinüs fonksiyonları.....	26
Çizelge 3.3. $y - 4x^2 = 0$ parabolünün birim α –normal vektör alanı N^α , birim normal vektör alanı N^1 ve bu vektör alanları arasındaki açının kosinüs fonksiyonları.....	29



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1. $y = x$ açılı ortay doğrusunun birim α – normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanı N^1 arasındaki açılı fonksiyonu için $\alpha = 0.1$ (a), $\alpha = 0.5$ (b), $\alpha = 0.9$ (c) ve $\alpha = 1$ (d) değerleri	21
Şekil 3. 2. $y = x$ açılı ortay doğrusu ve α –normal vektör alanları	22
Şekil 3. 3. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin, birim α – normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanları N^1 arasındaki açılı fonksiyonu için $\alpha = 0.1$ (a), $\alpha = 0.5$ (b), $\alpha = 0.9$ (c) ve $\alpha = 1$ (d) değerleri	25
Şekil 3.4. $y - 4x^2 = 0$ parabolünün, birim α – normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanı N^1 arasındaki açılı fonksiyonu için $\alpha = 0.1$ (a), $\alpha = 0.5$ (b), $\alpha = 0.9$ (c) ve $\alpha = 1$ (d) değerleri	28



SİMGELER DİZİNİ

$g(\cdot, \cdot)$: İç çarpım fonksiyonu
γ	: Parametrik eğri
\mathbb{R}^n	: n –boyutlu standart reel afin uzay
N	: Normal vektör
T	: Teğet vektörü
$\ \cdot\ $: Öklitsel norm fonksiyonu
∇^α	: Caputo anlamında gradyent operatörü
∇	: \mathbb{R}^2 uzayının gradiyent operatörü
N^α	: α –mertebeden birim normal vektör alanı
T^α	: α –mertebeden birim teğet vektör alanı

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanması sırasında bilgi ve tecrubesinden her zaman faydalandığım, çalışmanın baŐından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT'e ve değerli bilgi, birikimlerini esirgemeyen kıymetli hocalarım Fırat Üniversitesi'nde görev yapmakta olan Doç. Dr. M. Evren AYDIN ve Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi'nde görev yapmakta olan ArŐ.Gör. Dr. Ayla ERDUR KARA' ya teŐekkürlerimi sunmayı borç bilir, saygı duyarım.

Nursemin ÇAVDAR

İlköğretim Matematik Öğretmeni

1. GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kesirli Analiz reel ya da kompleks mertebeli adi diferansiyel ve integral kavramları ile ilgilidir. Matematiğin bu dalına ait ilk fikirler 17. yüzyıla dayanmaktadır ve Leibniz, Bernoulli, L. Hôpital, Euler, Laplace gibi çığır açmış matematikçilerin çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. O tarihten beri sadece matematikçiler değil birçok bilim insanı tarafından yoğun bir şekilde çalışılmaktadır ve günden güne gelişmektedir [1].

Kesirli analiz matematiğin teorik kısmında büyük bir öneme sahip olduğu gibi uygulama alanında da büyük bir yer edinmiştir. Örneğin Kesirli Analiz,

1. viskoelastik teori ([2]),
2. akışkanlar mekaniği ([3]),
3. tıp ([4]),
4. dinamik sistemler ([5])

gibi alanlarda çeşitli problemlere uygulanmıştır.

Bu tez çalışmasında Kesirli Analiz teknikleri kullanılarak eğrilerin geometrisi ele alındı. Bu yapılırken kesirli türev operatörleri içerisinde Caputo kesirli türev operatörü incelendi. Bunun nedeni sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevinin sıfır olmasıdır [6].

Caputo kesirli türev tanımı vermeden önce *Euler gama fonksiyonunu*,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

şeklindedir [7].

Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ mertebeden *Riemann-Liouville kesirli integrali*,

$$I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} d\xi$$

şeklinde yazılır [1].

Buna göre $0 < \alpha \leq 1$ mertebeden *Caputo kesirli türev operatörü*,

$$D_x^\alpha f(x) = I_x^{1-\alpha} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^\alpha} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi,$$

eşitliği ile tanımlanır [1]. Bu tanıma bakıldığında Caputo kesirli türevin aslında integral yardımıyla tanımlandığı göze çarpmaktadır.

Literatürde çeşitli kesirli türev operatörleri kullanılarak eğrilere dair yapılan çalışmalar mevcuttur. Örneğin, eğri ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi üzerine çalışmalar için [8,18] ve yüksek boyutlu nesnelerin diferansiyel geometrisi üzerine çalışmalar için [19,20] kaynaklara atıfta bulunulmuştur.

1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Eğrilerin diferansiyel geometrisi çalışılırken en önemli iki araç; zincir kuralı (yani bileşke fonksiyonun türevi) ve Leibniz kuralıdır (iki fonksiyonun çarpımının türevi). Ancak Caputo kesirli türev durumunda bu araçlar sonsuz seriler yardımıyla verilmektedir. Daha açık bir şekilde $f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon olmak üzere Leibniz kuralı;

$$(D_x^\alpha f g)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{d^i f}{dx^i} (D_x^{\alpha-i} g)(x) - \frac{f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

ve bileşke fonksiyonun türevi

$$(D_x^\alpha f)(g(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{x^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \frac{d^i f(g(x))}{dx^i} + \frac{f(g(x)) - f(g(0))}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

şeklinde ifade edilir [5].

Görüldüğü üzere Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi sonsuz seriler yardımıyla verildiğinden klasik anlamda eğrilerin diferansiyel geometrisini çalışmak oldukça zorlaşmaktadır. Bunun için kapalı formda bir denklem ile tanımlanan düzlem eğrileri (yani seviye eğrileri) ele alınarak Tarasov tarafından tanımlanan kesirli mertebeden gradiyent operatörü kullanılıp bir eğrinin *kesirli mertebeden teğet* ve *normal vektör alanları* gibi kavramlar tanımlandı.

Bu çalışmanın amacı, bir seviye eğrisinin kesirli mertebeden teğet ve normal vektör alanları sayesinde kesirli türevin geometrik karşılıklarına katkıda bulunmaktadır. Ayrıca Caputo kesirli türev kullanılarak literatürde seviye eğrileri üzerine yapılmış herhangi bir çalışmaya şimdilik rastlanmadı.

Bu çalışmanın İkinci Bölümü tez çalışmasının temel kavramlarına ayrılmıştır. Üçüncü Bölümde ifade edilen sonuçlar ve örnekler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde bir seviye eğrisinin kesirli mertebeden teğet ve normal vektör alanı kavramları tanımlandı ve bunların standart kavramlar ile arasındaki ilişkiler incelendi. Son bölüm ise sonuçlar ve öneriler kısmına ayrıldı.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Diferansiyel Geometriye Dair Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boş kümeden farklı bir küme ve V, \mathbb{R} cismi üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$f: A \times A \rightarrow V, (P, Q) \rightarrow f(P, Q) = Q - P$$

fonksiyonu, her $P, Q, R \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ ve $PQ = \alpha$ olduğunda Q tek bir şekilde bulunabiliyorsa A kümesine V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir *afin uzay* denir [21].

Uyarı 2.1.1. $\text{boy}V = \text{boy}A$ dır. Bir afin uzayda iki nokta bir vektör belirtir. Ayrıca bir referans noktası tespit edildiğinde uzaydaki her bir noktaya bir vektör karşılık gelir.

Tanım 2.1.2. V, n –boyutlu bir vektör uzayı ve A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ vektör kümesi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir *afin çatısı* denir [21].

Tanım 2.1.3. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ için $\{P_0P_1, P_0P_2, \dots, P_0P_n\}$ sistemi V vektör uzayının bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemi A için bir *Öklid çatısı* adını alır [21].

Teorem 2.1.1. A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. A da belli bir $P_0 \in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıç noktası P_0 olan bir afin çatı vardır [21].

Tanım 2.1.4. $V, \mathfrak{S} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ cismi üzerinde vektör uzayı; A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu afin uzay ve S, A afin uzayında bir afin çatı olsun.

$$x_i: A \rightarrow \mathfrak{S} \quad 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \overrightarrow{p_0P} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{P_0P_i}, \alpha_i \in \mathfrak{S}$$

$$P \rightarrow x_i(P) = \alpha_i$$

olmak üzere $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$ sıralı n –lisine P noktasının $S = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısına göre *afin koordinatları* ve her bir $x_i(P)$ ye P noktasının i –yinci *afin koordinatı*, x_i fonksiyonuna da, A afin uzayının S çatısına göre i –yinci *afin koordinat fonksiyonu* denir.

Ayrıca $\overrightarrow{P_0P_1}$ vektörüne ise P noktasının başlangıç noktası P_0 olan S afin çatısına göre *konum (yer) vektörü* denir [21].

Tanım 2.1.5. A, V vektör uzayı ile birleşen n -boyutlu bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına bir *Öklit Uzayı* denir. Bu uzayda klasik iç çarpım ve norm fonksiyonları, sırasıyla, $g\langle, \rangle$ ve $\|\cdot\|$ sembolleri ile gösterilir [21].

Tanım 2.1.6. E^n n -boyutlu Öklit uzayı ve $S = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısı verilsin. $\{\overrightarrow{P_0P_1}: i = 1, 2, \dots, n\}$ sistemi \mathbb{R}^n vektör uzayında ortonormal baz ise S afin çatısına bir *dik çatı* ve karşılık gelen afin koordinat sistemine *dik koordinat sistemi* denir. Ayrıca bu sistemin fonksiyonlarına da *Öklit koordinat fonksiyonları* denir [21].

Tanım 2.1.7. \mathbb{R}^n ve \mathbb{R}^m , sırasıyla, n - ve m -boyutlu iki reel vektör uzayı ve $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ olsun. $f: U \rightarrow V, p \mapsto f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p))$ vektör değerli fonksiyonu için eğer f_1, f_2, \dots, f_m reel değerli fonksiyonların tamamı her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise o zaman f fonksiyonuna *diferansiyellenebilir fonksiyon* adı verilir [21].

Tanım 2.1.8. E^n n -boyutlu Öklit uzayı ve $X, Y, Z \in E^n$ birbirlerinden farklı üç nokta olsun. $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere ($0 \leq \theta \leq \pi$) \mathbb{R}^n vektör uzayında \overrightarrow{XY} ve \overrightarrow{XZ} vektörleri arasındaki açının ölçüsü, $Y\hat{X}Z$ açısının ölçüsü olarak tanımlanır. Lineer cebirden bilindiği gibi;

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|\overrightarrow{XZ}\|}$$

dır. \overrightarrow{XY} ve \overrightarrow{XZ} vektörlerinin birbirine dik olmaları $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{XZ}$ ile gösterilir. İki vektörün birbirine dik olması için gerek ve yeter şart $\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ} \rangle = 0$ olmasıdır [21].

Tanım 2.1.9. Grad: $C(E^n, \mathbb{R}) \rightarrow \chi(E^n)$

$$f \rightarrow \text{Grad}(f)$$

öyle ki, E^n de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bir koordinat sistemi olmak üzere,

$$\text{Grad}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna, E^n de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bir koordinat sistemine göre *gradient fonksiyonu* denir ve ∇ sembolü ile gösterilir. ∇ fonksiyonu için,

$$\nabla x_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i < n$$

yazılabilir [21].

Tanım 2.1.10. \mathbb{R}^2 uzayında $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c\}$ nokta cümlesi ele alınsın. ∇ ile \mathbb{R}^2 uzayının gradiyent operatörü gösterilmek üzere, eğer her $(x, y) \in M$ için,

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) (x, y) \neq 0$$

ise M nokta cümlesine bir *seviye eğrisi* ya da *kapalı formda verilen eğri* adı verilir. ∇F vektör alanına C nin *normal vektör alanıdır*. Ayrıca

$$T(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial x} \right) (x, y)$$

vektör alanı da C nin *teğet vektör alanıdır*.

$F(x_0, y_0) = c$ ve $P = (x_0, y_0)$ olmak üzere M yüzeyinin bir P noktasındaki teğet doğrusunun kartezyen denklemi

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(P) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0$$

şeklindedir [18].

2.2 Kesirli Analize Dair Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. (Gama Fonksiyonu) Gama fonksiyonu, n nin pozitif değerleri için Euler integrali olarak adlandırılan

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 2.2.2. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere bir $f(t)$ fonksiyonunun α –mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx$$

ile tanımlanır [8].

Tanım 2.2.3. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi) $f(t)$ fonksiyonu, $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\alpha \in (0,1)$ ve $t > 0$ olmak üzere, bir $f(t)$ fonksiyonunun α -inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi;

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} (I_t^{1-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{f(x)}{(x-t)^\alpha} dx \right)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.2.4. (Caputo Kesirli Türevi) $\alpha \in (0,1)$ ve $t > 0$ olmak üzere bir f fonksiyonunun α -inci mertebeden Caputo kesirli türev yaklaşımı,

$$D_t^\alpha f(t) = I_t^{1-\alpha} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{df(x)/dx}{(x-t)^\alpha} dx \right)$$

ile tanımlıdır [8].

Tanım 2.2.5. $n \in N^+ = \{1,2,3, \dots\}$ olmak üzere $AC[a, b]$ ve $C^n[a, b]$ ile, sırası ile, $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve $n -$ mertebeden sürekli türevlere sahip kompleks değerli fonksiyonların uzayları gösterilsin. Ayrıca $AC^n[a, b]$ ile $(n - 1) -$ mertebeden sürekli türevlere sahip kompleks değerli $f(x)$ fonksiyonlarının uzayı gösterilsin öyle ki $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ dir [7].

Örnek 2.2.1. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2} -$ mertebeden kesirli türevini Caputo kesirli türevi ile hesaplayalım. O halde $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ olur ve Caputo formülünde $a = 0$ için integral alınırsa,

$$D_t^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

olur. Burada $u^2 = x - t$ dönüşümü yapılırsa,

$$D_t^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2u}{u} du$$

olur. Değişkenleri değiştirip sadeleştirildiğinde,

$$D_t^{\frac{1}{2}}x = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x}}^0 2 du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} 2 du$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$D_t^{\frac{1}{2}}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{\pi} - 0) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.1. $n \in \mathbb{N}^+$ ve $n - 1 \leq \alpha < 1$ olmak üzere eğer $f \in AC^n[a, b]$ ise o zaman $[a, b]$ üzerinde hemen hemen her yerde f in $\alpha -$ mertebeden Caputo kesirli türevi vardır. Üstelik eğer $f \in C^n[a, b]$ ise f nin $\alpha -$ mertebeden Caputo kesirli türevi $[a, b]$ üzerinde süreklidir [7].

Teorem 2.2.2. $n - 1 < \alpha < n$, $c > n - 1$, $c \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^c$ fonksiyonunun $\alpha -$ mertebeden Caputo kesirli türevi,

$$\frac{\Gamma(c + 1)}{\Gamma(c - \alpha + 1)} x^{c-\alpha}$$

şeklindedir [20].

Teorem 2.2.3. Gama fonksiyonun bazı temel özelliklerinden biri olarak aşağıdaki işlem verilebilir [19],

$$\Gamma(n) \cdot n = \Gamma(n + 1)$$

Bazı özel Gama fonksiyonu değerleri aşağıda verilmiştir [20].

Çizelge 2.2.1. Gama Fonksiyonunun Sayısal Değerleri

$\Gamma(n)$	Sayısal Değeri
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
$\Gamma(4)$	6

3. KAPALI EĞRİLERİN KESİRLİ DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Tanım 3.1. (x, y) ile \mathbb{R}^2 uzayında dik koordinat sistemi gösterilsin. ∇^α ile Caputo anlamında gradiyent operatörü gösterilmek üzere

$$\nabla^\alpha F(x, y) = (D_x^\alpha F, D_y^\alpha F)(x, y)$$

tanımlanır [17].

Caputo anlamında gradiyent operatörü kullanılarak aşağıda bir seviye eğrisi için bazı yeni kavramlar ifade edildi.

Tanım 3.2. $F(x, y) = 0$ ile verilen C düzlem eğrisi göz önüne alındığında $\nabla^\alpha F \neq 0$ ise C eğrisine α -regüler, aksi takdirde α -singüler adı verilir.

Tanım 3.3. $F(x, y) = 0$ denklemi ile bir α -regüler C eğrisi verilsin. Yani

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c, \nabla^\alpha F \neq 0\}$$

olsun. $\nabla^\alpha F = (D_x^\alpha F, D_y^\alpha F)$ olmak üzere,

$$N^\alpha(x, y) = \frac{1}{w} (D_x^\alpha F, D_y^\alpha F)(x, y) \quad (3.1)$$

vektör alanına C eğrisinin birim α -normali vektör alanı denir. Burada,

$$w = \sqrt{(D_x^\alpha F)^2 + (D_y^\alpha F)^2} \quad (3.2)$$

dir. Ayrıca,

$$T^\alpha = \frac{1}{w} (D_y^\alpha F, -D_x^\alpha F) \quad (3.3)$$

vektör alanına ise C eğrisinin birim α -teğet vektör alanı adı verilir.

Tanım 3.4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c, \nabla^\alpha F \neq 0\}$ α -regüler eğrisi verilsin. $F(x_0, y_0) = c$ ve $P = (x_0, y_0)$ olmak üzere, C eğrisinin bir P noktasındaki α -mertebeden teğet düzlemi

$$(x - x_0)(D_x^\alpha F)(P) + (y - y_0)(D_y^\alpha F)(P) = 0 \quad (3.4)$$

kartezyen denklemi ile ifade edilir.

Uyarı 3.1. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c, \nabla^\alpha F \neq 0\}$ α –regüler eğrisi verilsin. Bu eğrinin standart birim normal vektör alanı N^1 ve birim α –normal vektör alanı N^α ile gösterilsin. N^1 ve N^α vektör alanları arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{1}{\|N^1\|} \cdot \frac{1}{\|N^\alpha\|} \langle N^1, N^\alpha \rangle \quad (3.5)$$

dir. C eğrisi \mathbb{R}^2 düzleminde olduğundan bu θ açısı aynı zamanda standart birim teğet vektör alanı T^1 ve birim α –teğet vektör alanı T^α arasındaki açılıya karşılık gelir.

Önerme 3.1. $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ve a, b, c, d, e, f reel sabitler olmak üzere

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ile verilen kuadrik denklemin belirttiği C konik kesit eğrisinin birim α –teğeti ve birim α –normali

$$T^\alpha = \frac{\left(y^{1-\alpha} \left(\frac{2cy}{2-\alpha} + bx + e \right), -x^{1-\alpha} \left(\frac{2ax}{2-\alpha} + by + d \right) \right)}{\sqrt{x^{2-2\alpha} \left(\frac{2ax}{2-\alpha} + by + d \right)^2 + y^{2-2\alpha} \left(\frac{2cy}{2-\alpha} + bx + e \right)^2}}$$

ve

$$N^\alpha = \frac{\left(x^{1-\alpha} \left(\frac{2ax}{2-\alpha} + by + d \right), y^{1-\alpha} \left(\frac{2cy}{2-\alpha} + bx + e \right) \right)}{\sqrt{x^{2-2\alpha} \left(\frac{2ax}{2-\alpha} + by + d \right)^2 + y^{2-2\alpha} \left(\frac{2cy}{2-\alpha} + bx + e \right)^2}}$$

formülleri ile hesaplanır.

İspat: Teorem 2.2.1 gereğince

$$D_x^\alpha F = \frac{(x^{1-\alpha}) \left(\frac{2ax}{2-\alpha} + by + d \right)}{\Gamma(2-\alpha)}$$

ve

$$D_y^\alpha F = \frac{(y^{1-\alpha}) \left(\frac{2cy}{2-\alpha} + bx + e \right)}{\Gamma(2-\alpha)}$$

şeklinde elde edilir. Bu değerler (3.1) ve (3.3) de göz önüne alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda a, b, c , reel sabitlerinin özel durumlarına göre bazı özel eğriler için örnekler verildi.

Örnek 3.1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a^2 + b^2 \neq 0$ olmak üzere \mathbb{R}^2 düzleminde $ax + by + c = 0$ kartezyen denklemi ile verilen doğru C ile gösterilirse bu doğru $F(x, y) = ax + by + c = 0$ kapalı denklemi ile ifade edilir. C doğrusunun birim teğet ve birim normal vektörler alanları, sırasıyla, T^1 ve N^1 ile gösterilirsin. O zaman,

$$T^1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a)$$

ve

$$N^1 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a, b)$$

bulunur. (3.1)'den birim α –teğet vektör alanı T^α ,

$$T^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 x^{2-2\alpha} + b^2 y^{2-2\alpha}}}(by^{1-\alpha}, -ax^{1-\alpha})$$

olur. Benzer şekilde (3.3)'den birim α –normal vektör alanı N^α ,

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 x^{2-2\alpha} + b^2 y^{2-2\alpha}}}(ax^{1-\alpha}, by^{1-\alpha})$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edilirse C doğrusunun birim α –normal ve standart birim normal vektör alanları birbirinden farklı olup, aralarında belirli bir açı mevcuttur. Bu açı α ya bağlıdır. Daha açık bir şekilde bu açı θ ile gösterilirse, θ açısının kosinüsü (3.5)'den,

$$\cos \theta(a, x, y) = \frac{1}{\sqrt{a^2 x^{2-2\alpha} + b^2 y^{2-2\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a^2 x^{1-\alpha} + b^2 y^{1-\alpha}) \quad (3.6)$$

elde edilir. Örneğin $a = 1, b = -1$ ve $c = 0$ alınırsa, M doğrusu, kartezyen denklemi $y = x$ şeklinde olun açı ortay doğrusuna karşılık gelir. Bu değerler (3.6)'da yerine yazılırsa,

$$\cos \theta(\alpha, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^{2-2\alpha} + y^{2-2\alpha}}}(x^{1-\alpha} + y^{1-\alpha})$$

bulunur.

α nın aşağıda verilen özel değerlerini göz önüne alalım. Buna göre,

- $\alpha = 1/10$ olsun. O zaman $N^{1/10}$ ve N^1 arasındaki açılı fonksiyonu

$$\cos \theta \left(\frac{1}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^{18/10} + y^{18/10}}} (x^{9/10} + y^{9/10}),$$

- $\alpha = 5/10$ olsun. O zaman $N^{5/10}$ ve N^1 arasındaki açılı fonksiyonu

$$\cos \theta \left(\frac{5}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x + y}} (\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

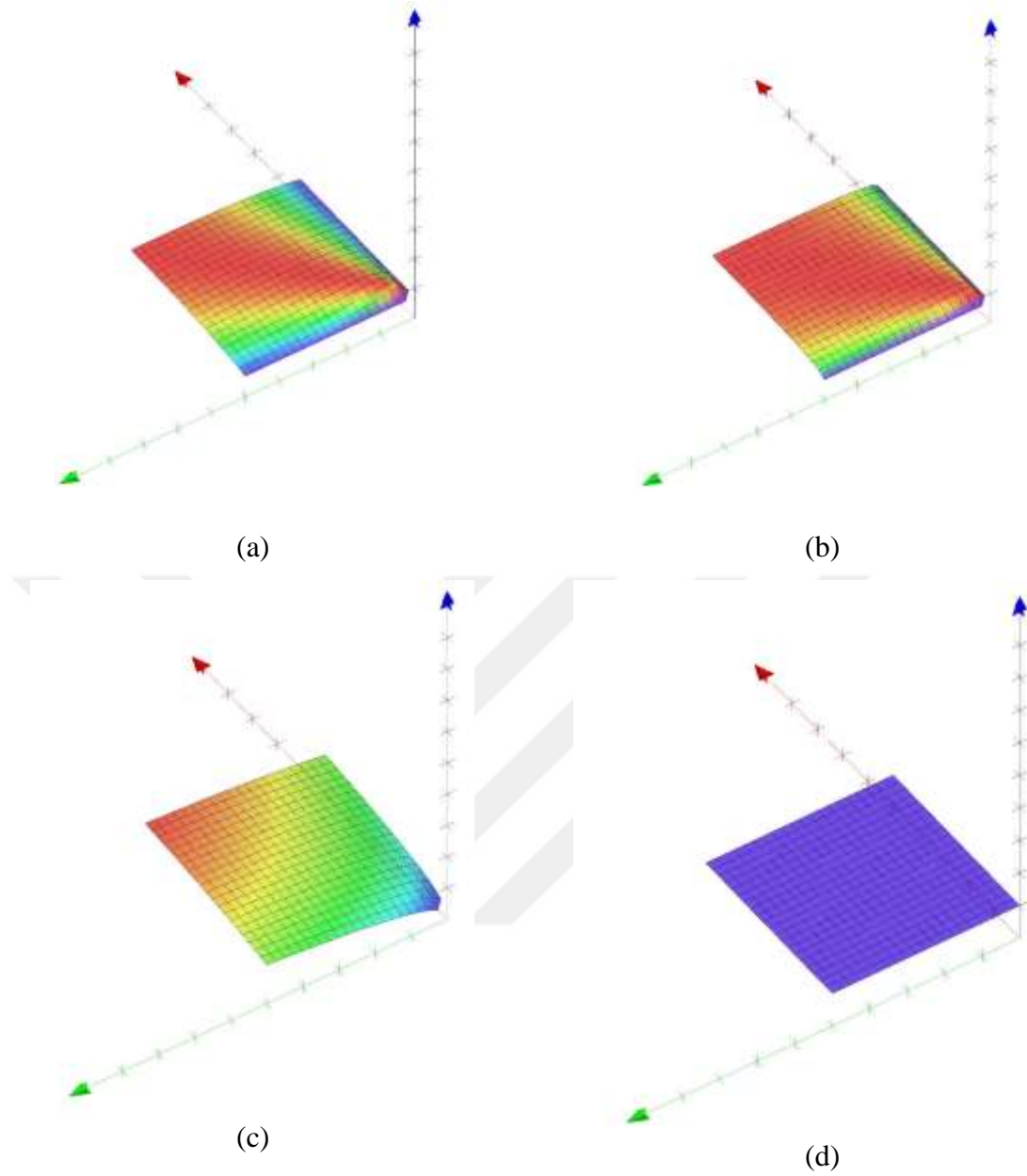
- $\alpha = 9/10$ olsun. O zaman $N^{9/10}$ ve N^1 arasındaki açılı fonksiyonu

$$\cos \theta \left(\frac{9}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x^{1/5} + y^{1/5}}} (x^{1/10} + y^{1/10})$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

- $\alpha = 1$ olması durumunda $\cos \theta(1, x, y) = 1$ olur.

Bu açılı fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.1 deki gibi gösterilebilir:



Şekil 3. 1. $y = x$ açılı ortay doğrusunun birim α – normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanı N^1 arasındaki açılı fonksiyonu için $\alpha = 0.1$ (a), $\alpha = 0.5$ (b), $\alpha = 0.9$ (c) ve $\alpha = 1$ (d) değerleri

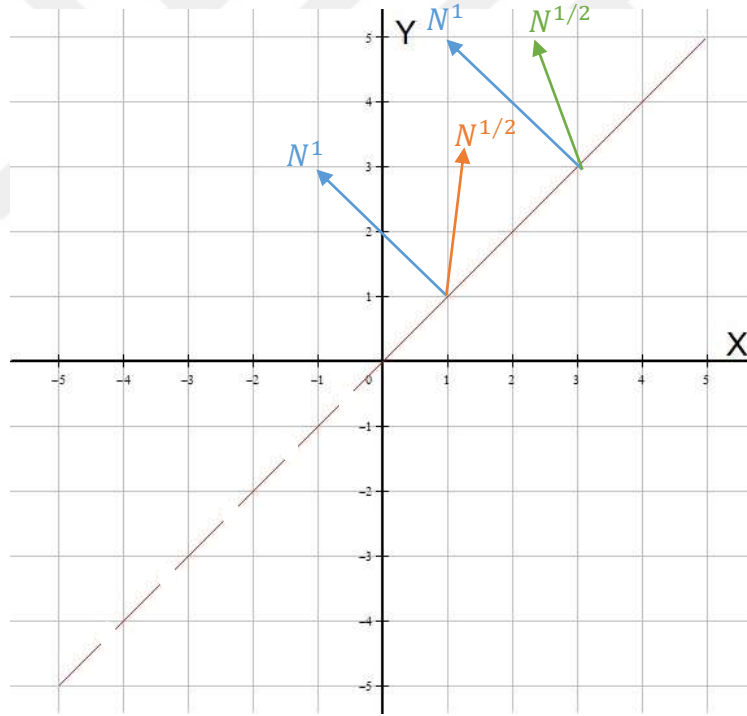
Şekil 3.1. den aşağıdaki ifadeler söylenebilir.

- $0 < x, y \leq 5$ seçilerek grafik yüzeyleri gösterildi.
- x –ekseni kırmızı renk ile, y –ekseni yeşil renk ile ve z –ekseni mavi renk ile gösterildi.
- şekiller z –ekseni boyunca yükseklik arttıkça renkleri daha açık hale getirilerek çizildi.

Ayrıca yukarıdaki açılı fonksiyonları Çizelge 3.1’deki gibi ifade edilebilir.

Çizelge 3.1. $ax + by + c = 0$ doğrusunun birim α -normal vektör alanı N^α , birim normal vektör alanı N^1 ve bu vektör alanları arasındaki açının kosinüs fonksiyonları

α değeri	N^1	N^α	Açı Fonksiyonu
1/10	$\frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$	$\frac{(x^{9/10}, -y^{9/10})}{\sqrt{x^{9/5} + y^{9/5}}}$	$\frac{x^{9/10} + y^{9/10}}{\sqrt{2}\sqrt{x^{9/5} + y^{9/5}}}$
5/10		$\frac{(\sqrt{x}, -\sqrt{y})}{\sqrt{x + y}}$	$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}\sqrt{x + y}}$
9/10		$\frac{(x^{1/10}, -y^{1/10})}{\sqrt{x^{1/5} + y^{1/5}}}$	$\frac{x^{1/10} + y^{1/10}}{\sqrt{2}\sqrt{x^{1/5} + y^{1/5}}}$
1		$\frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$	1



Şekil 3. 2. $y = x$ açılı ortay doğrusu ve α -normal vektör alanları

Yukarıdaki şekilden de görüleceği üzere bir doğrunun birim normal vektör alanı sabittir ve doğru boyunca paraleldir. Ancak α -normal vektör alanı sabit değildir. Üstelik doğru boyunca paralel de değildir. Bu ise kesirli argümanların klasik olanlardan farkını görmek için ilginç bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Örnek 3.2. $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, \mathbb{R}^2 düzleminde $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ kapalı denklemi ile ifade edilen $x^2 + y^2 = r^2$ çemberini göz önüne alalım. Bu çemberin, standart birim teğet ve birim normal vektör alanları, sırasıyla, T^1 ve N^1 olmak üzere

$$T^1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(y, -x)$$

ve

$$N^1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y)$$

olur. α nın $(0,1)$ aralığındaki bazı özel değerleri için kesirli mertebeden birim α –teğet vektör alanı T^α ve birim α –normal vektör alanları N^α ile gösterilsin. Teorem 2.2.1. kullanılarak, (3.3)’den gereğince birim α –teğet vektör alanı T^α ,

$$T^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha}}}(y^{2-\alpha}, -x^{2-\alpha})$$

ve (3.1)’den birim α –normal vektör alanları N^α ,

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha}}}(x^{2-\alpha}, y^{2-\alpha})$$

şeklinde bulunur. Dikkat edilirse bu çemberin birim α –normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanı N^1 birbirinden farklı vektörler olup aralarında belirli bir açı mevcuttur ve bu açı α ya bağlı olup θ ile gösterilsin. O zaman θ açısının kosinüsü, (3.5) göz önüne alınır,

$$\cos \theta(a, x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^{3-\alpha} + y^{3-\alpha}) \quad (3.7)$$

şeklinde bulunur.

Aynı zamanda bu çember, \mathbb{R}^2 düzleminde bulunduğundan yukarıdaki değer, birim α –teğeti vektörü T^α ile birim teğet vektör alanı T^1 arasındaki açının kosinüsü ile aynı olur.

Bazı özel değerler (3.7)'de α için ele alınırsa,

- $\alpha = 1/10$ olsun. O zaman $N^{1/10}$ ve N^1 arasındaki açı fonksiyonu

$$\cos \theta \left(\frac{1}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{x^{19/5} + y^{19/5}}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^{29/10} + y^{29/10})$$

dır.

- $\alpha = 5/10$ olsun. O zaman $N^{1/2}$ ve N^1 arasındaki açı fonksiyonu

$$\cos \theta \left(\frac{5}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + y^3}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^{5/2} + y^{5/2})$$

olur.

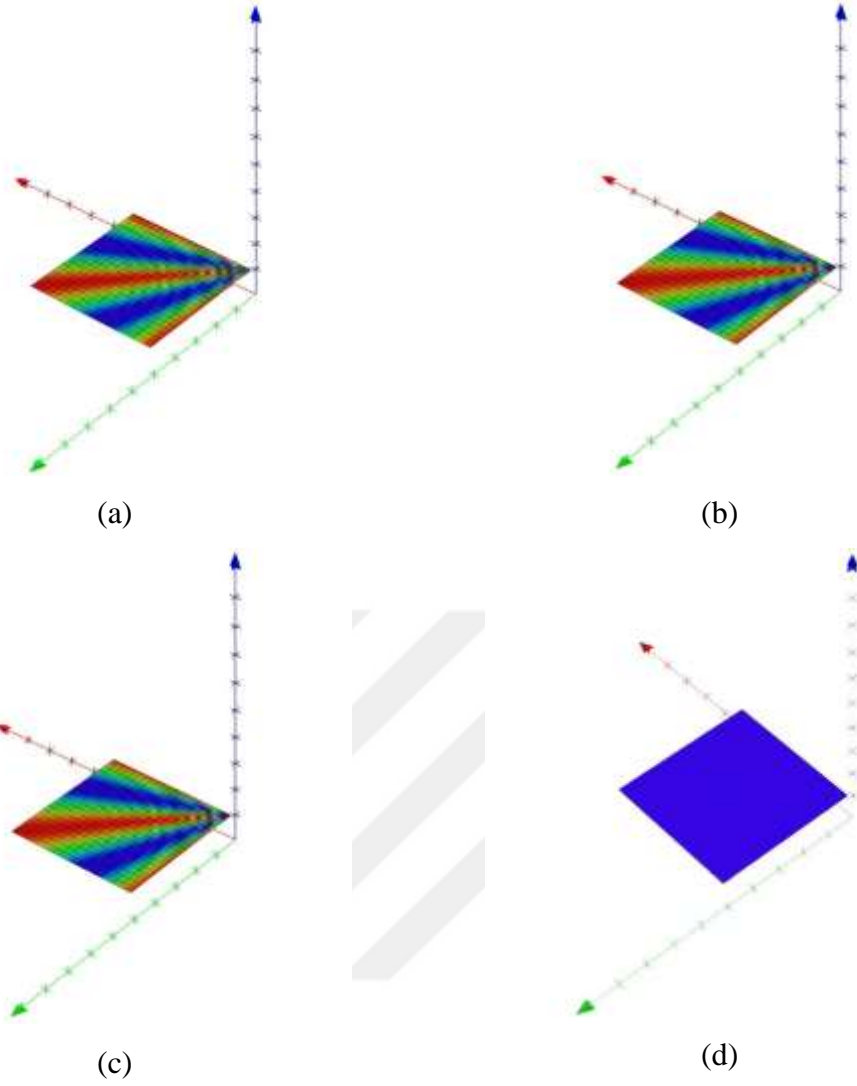
- $\alpha = 9/10$ olsun. O zaman $N^{9/10}$ ve N^1 arasındaki açı fonksiyonu

$$\cos \theta \left(\frac{9}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{x^{11/5} + y^{11/5}}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^{21/10} + y^{21/10})$$

şeklinde bulunur.

- $\alpha = 1$ olsun. Bu durumda $\cos \theta(1, x, y) = 1$ olduğu açıktır.

Bu açı fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.3. deki gibi gösterilir:



Şekil 3. 3. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin, birim α – normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanları N^1 arasındaki açı fonksiyonu için $\alpha = 0.1$ (a), $\alpha = 0.5$ (b), $\alpha = 0.9$ (c) ve $\alpha = 1$ (d) değerleri

Şekil 3.3. den aşağıdaki ifadeler söylenebilir.

- $0 < x, y \leq 5$ seçilerek grafik yüzeyleri gösterildi.
- x –ekseni kırmızı renk ile, y –ekseni yeşil renk ile ve z –ekseni mavi renk ile gösterildi.
- şekiller z –ekseni boyunca yükseklik arttıkça renkleri daha açık hale getirilerek çizildi.

Yukarıdaki açı fonksiyonları aşağıdaki gibi bir Çizelge 3.2. ile ifade edilebilir:

Çizelge 3.2. $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin birim α –normal vektör alanı N^α , birim normal vektör alanı N^1 ve bu vektör alanları arasındaki açının kosinüs fonksiyonları

α değeri	N^1	N^α	Açı Fonksiyonu
1/10	$\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\frac{(x^{19/10}, y^{19/10})}{\sqrt{x^{19/5} + y^{19/5}}}$	$\frac{(x^{29/10} + y^{29/10})}{\sqrt{x^{19/5} + y^{19/5}} \sqrt{x^2 + y^2}}$
5/10		$\frac{(x^{3/2}, y^{3/2})}{\sqrt{x^3 + y^3}}$	$\frac{(x^{5/2} + y^{5/2})}{\sqrt{x^3 + y^3} \sqrt{x^2 + y^2}}$
9/10		$\frac{(x^{11/10}, y^{11/10})}{\sqrt{x^{11/5} + y^{11/5}}}$	$\frac{(x^{21/10} + y^{21/10})}{\sqrt{x^{11/5} + y^{11/5}} \sqrt{x^2 + y^2}}$
1		$\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	1

Örnek 3.3. $F(x, y) = y - 4x^2 = 0$, kapalı denklemi ile verilen parabolün birim teğet ve birim normal vektör alanları, sırasıyla, T^1 ve N^1 ile gösterilmek üzere,

$$T^1 = \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 1}} (1, 8x)$$

ve

$$N^1 = \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 1}} (-8x, 1)$$

dir. α nın $(0, 1)$ aralığındaki bazı özel değerleri kesirli mertebeden birim α –teğet vektör alanı T^α ve birim α –normal vektör alanı N^α ile ifade edilsin. Teorem 2.2.1. de kullanılarak, (3.3)'den birim α –teğet vektör alanı T^α ,

$$T^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{64x^{4-2\alpha}}{(2-\alpha)^2} + y^{2-2\alpha}}} \left(y^{1-\alpha}, \frac{8x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} \right)$$

ve (3.1) eşitliğinden birim α –normal vektör alanı N^α ,

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{64x^{4-2\alpha}}{(2-\alpha)^2} + y^{2-2\alpha}}} \left(\frac{-8x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)}, y^{1-\alpha} \right)$$

şeklindedir. Bu parabolün birim α –normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanı N^1 birbirinden farklı vektörler olup aralarında belirli bir açı mevcuttur. Bu açı α ya bağlı olup θ ile gösterilsin. θ açısının kosinüsü (3.5) işlemi gereğince,

$$\cos \theta(a, x, y) = \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{64x^{4-2\alpha}}{(2-\alpha)^2} + y^{2-2\alpha}}} \left(\frac{64x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)} + y^{1-\alpha} \right) \quad (3.8)$$

olur. (3.8)'de,

- $\alpha = 1/10$ olsun. O zaman $N^{1/10}$ ve N^1 arasındaki açı fonksiyonu,

$$\cos \theta \left(\frac{1}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{64x^{19/5}}{(19/10)^2} + y^{9/5}}} \left(\frac{64x^{29/10}}{19/10} + y^{9/10} \right)$$

olur.

- $\alpha = 5/10$ olsun. O zaman $N^{1/2}$ ve N^1 arasındaki açı fonksiyonu,

$$\cos \theta \left(\frac{5}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{64x^3}{(3/2)^2} + y}} \left(\frac{64x^{5/2}}{(3/2)} + \sqrt{y} \right)$$

bulunur.

- $\alpha = 9/10$ olsun. O zaman $N^{9/10}$ ve N^1 arasındaki açı fonksiyonu,

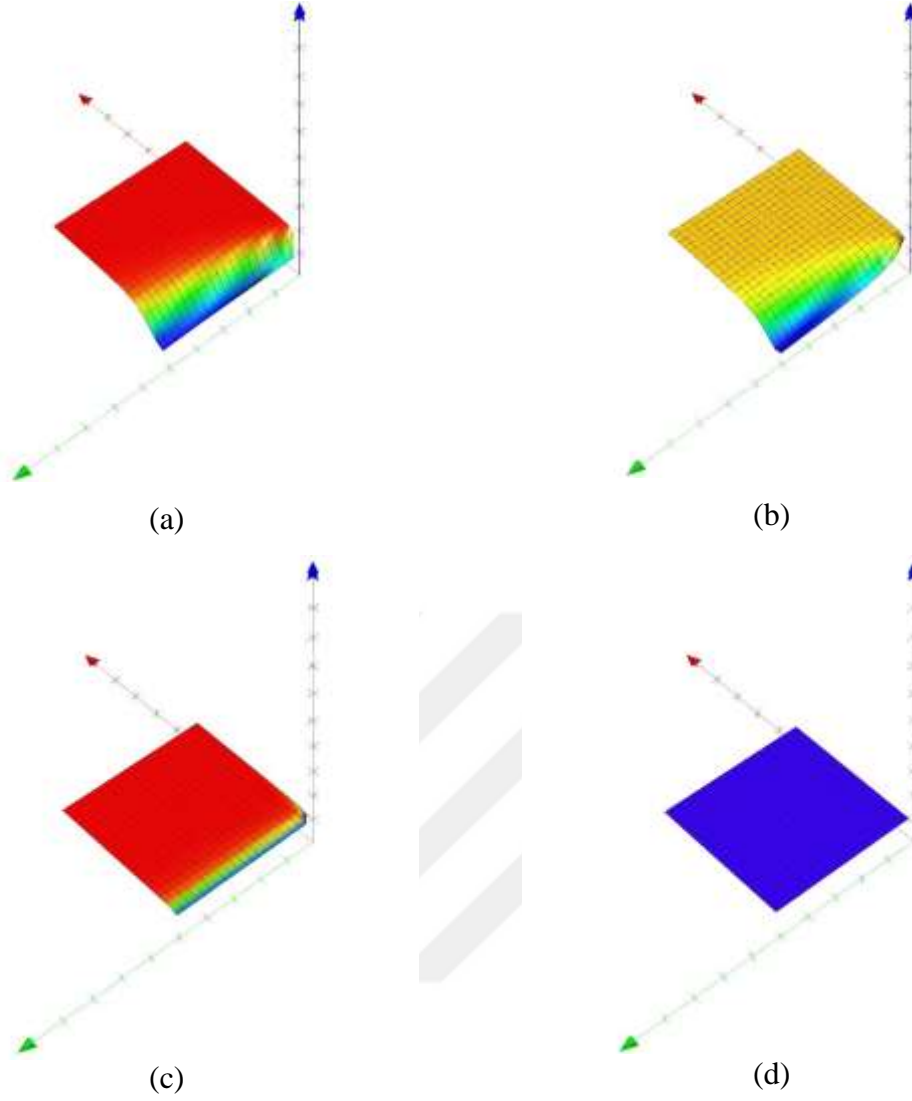
$$\cos \theta \left(\frac{9}{10}, x, y \right) = \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{64x^{11/5}}{(11/10)^2} + y^{1/5}}} \left(\frac{64x^{21/10}}{(11/10)} + y^{1/10} \right)$$

elde edilir.

- $\alpha = 1$ olsun. Bu durumda $\cos \theta(1, x, y) = 1$ olduğu açıktır.

Aynı zamanda bu parabol \mathbb{R}^2 düzleminde bulunduğundan yukarıdaki değerler α –teğeti vektör alanı T^α ile birim teğeti vektör alanı T^1 arasındaki açının kosinüsleridir.

Bu açı fonksiyonlarının grafikleri Şekil 3.4. deki gibi gösterilebilir:



Şekil 3.4. $y - 4x^2 = 0$ parabolünün, birim α – normal vektör alanı N^α ve birim normal vektör alanı N^1 arasındaki açı fonksiyonu için $\alpha = 0.1$ (a), $\alpha = 0.5$ (b), $\alpha = 0.9$ (c) ve $\alpha = 1$ (d) değerleri

Şekil 3.4. den aşağıdaki ifadeler söylenebilir.

- $0 < x, y \leq 5$ seçilerek grafik yüzeyleri gösterildi.
- x –ekseni kırmızı renk ile, y –ekseni yeşil renk ile ve z –ekseni mavi renk ile gösterildi.
- Şekiller z –ekseni boyunca yükseklik arttıkça renkleri daha açık hale getirilerek çizildi.

Yukarıdaki açı fonksiyonları Çizelge 3.3. ile ifade edilebilir:

Çizelge 3.3. $y - 4x^2 = 0$ parabolünün birim α –normal vektör alanı N^α , birim normal vektör alanı N^1 ve bu vektör alanları arasındaki açının kosinüs fonksiyonları

α değeri	N^1	N^α	Açı Fonksiyonu
1/10	$\frac{(-8x, 1)}{\sqrt{64x^2 + 1}}$	$\frac{\left(\frac{-8x^{19/10}}{19/10}, y^{9/10}\right)}{\sqrt{\frac{64x^{19/5}}{(19/10)^2} + y^{9/5}}}$	$\frac{\left(\frac{64x^{29/10}}{(19/10)} + y^{9/10}\right)}{\sqrt{64x^2 + 1} \sqrt{\frac{64x^{19/5}}{(19/10)^2} + y^{9/5}}}$
5/10		$\frac{\left(\frac{-8x^{3/2}}{3/2}, \sqrt{y}\right)}{\sqrt{\frac{64x^3}{(3/2)^2} + y}}$	$\frac{\left(\frac{64x^{5/2}}{(3/2)} + \sqrt{y}\right)}{\sqrt{64x^2 + 1} \sqrt{\frac{64x^3}{(3/2)^2} + y}}$
9/10		$\frac{\left(\frac{-8x^{11/10}}{11/10}, y^{1/10}\right)}{\sqrt{\frac{64x^{11/5}}{(11/10)^2} + y^{1/5}}}$	$\frac{\left(\frac{64x^{21/10}}{(11/10)} + y^{1/10}\right)}{\sqrt{64x^2 + 1} \sqrt{\frac{64x^{11/5}}{(11/10)^2} + y^{1/5}}}$
1		$\frac{(-8x, 1)}{\sqrt{64x^2 + 1}}$	1

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Caputo kesirli türev operatörü kullanılarak kapalı formda verilen düzlem eğrilerinin (seviye eğrilerinin) geometrisi incelenmiştir. Bir eğrinin α – mertebeden regüler olma, birim α – teğet ve birim α – normal vektör alanı gibi kavramları tanımlandı. Standart teğet ve normal vektör alanları ile aralarında ilişkiler incelendi. Örnekler, şekil ve çizelgelerle desteklendi.

Teğet ve normal vektör alanları tanımlanırken parametrik formda verilen eğriler yerine kapalı formda verilen eğriler tercih edildi. Bunun sebebi parametrik formda verilen bir düzlem eğrisinin teğet ve normal vektör alanları tanımlanırken, bu kavramların parametrizasyonun seçiminden bağımsız olması beklenir. Bu beklenti zincir kuralı kullanılarak ispatlanır. Ancak, Caputo kesirli türev operatörü için bileşke fonksiyonun türevi sonsuz seriler yardımıyla verildiğinden bahsi geçen beklentinin ispatı pratikte mümkün değildir.

Bu tez çalışmasını takiben kapalı formda verilen bir düzlem eğrisinin eğriliği kavramı tanımlanabilir. Eğriler bu yeni eğrilik türünden analiz edilebilir. Gene bu eğrilik türünden eğri çiftleri tanımlanıp incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I.: Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, London, 1993.
- [2] Bagley, R.L., Torvik, P.J.: A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J. Rheol.* 27 (3), 201–210, 1983.
- [3] El-Nabulsi, R.A.: On a new fractional uncertainty relation and its implications in quantum mechanics and molecular physics. *Proc. Royal Society A* 476, 20190729, 2020.
- [4] Dokuyucu MA, Celik E, Bulut H, Baskonus HM. Cancer treatment model with the Caputo-Fabrizio fractional derivative. *Eur Phys J Plus*; 133(3):92, 2018.
- [5] Yajima T, Nagahama H. Geometric structures of fractional dynamical systems in non-Riemannian space: Applications to mechanical and electromechanical systems. *Ann Phys (Berlin)*; 530(5):1700391, 2018.
- [6] Caputo, M.: Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 13 (5), 529-539, 1967.
- [7] Kilbas, A., Srivastava, H., Trujillo, J.J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *Math. Studies.* North-Holland, New York, 2006.
- [8] Aydin M.E., Bektas M., Ogrenmis A.O., Yokus A., Differential geometry of curves in Euclidean 3-space with fractional order, *International Electronic Journal of Geometry* 14(1), 132-144, 2021.
- [9] Gozutok U., Coban H. A., Sagiroglu Y., Frenet frame with respect to conformable derivative, *Filomat*, 33(6), 1541-1550, 2019.
- [10] Lazopoulos K., Lazopoulos A.K., Fractional differential geometry of curves & surfaces, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2(3), 169-186, 2016.
- [11] Tarasov, V. E., Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems *J. Phys. A: Math.Gen* 38, doi: 10.1088/0305-4470/38/26/007, 2005.
- [12] Yajima, T., Oiwa, S. ve Yamasaki, K. , Geometry of curves with fractional-order tangent vector and Frenet-Serret formulas, *Fract. Calc. Appl. Anal.* cilt 21(6), ss. 1493-1505, 2018.
- [13] Yajima T., Yamasaki K., Geometry of surfaces with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(6), 065201, 2012.
- [14] Yajima T, Oiwa S, Yamasaki K., Geometry of curves with fractional-order tangent vector and Frenet-Serret formulas. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 21(6), 1493-1505, 2018.
- [15] Ogrenmis, M., Geometry of curves with fractional derivatives in Lorentz plane, *Journal of New Theory*, 38(1), 88-98, 2022.
- [16] Aydin, M.E., Mihai, A., Yokus, A., Applications of fractional calculus in equiaffine geometry: plane curves with fractional order, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(17) 1-11, 2021.
- [17] Yilmaz, B., A new type electromagnetic curves in optical fiber and rotation of the polarization plane using fractional calculus, *Optik*, 247, 1-12, 2021.
- [18] Yilmaz, B., Has, A, Obtaining fractional electromagnetic curves in optical fiber using fractional alternative moving frame, *International Journal for light and Electron Optics*, to appear.

- [19] Baleanu D., Vacaru S.I., Constant curvature coefficients and exact solutions in fractional gravity and geometric mechanics. Central European Journal Physics, 9(5),1267-1279, 2011.
- [20] Baleanu D., Vacaru S.I., Fractional almost Kähler-Lagrange geometry, Nonlinear Dynamics, 64(4), 365-373, 2011.
- [21] Hacısalihoğlu, H.H. , Diferansiyel Geometri Cilt:1, Hacısalihoğlu Yayıncılık, 1998.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ ESERLER

Çavdar N., Ergüt M. Fractional derivative approaches on differential geometry of curves. 19th International Geometry Symposium, June 27-30, 2022

Çavdar N., Ergüt M., Eğrilerin Kesirli Türev Yardımıyla İncelenmesi, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi BAP NKUBAP.01.YL.21.347

