

**UYARLAMALI ÇOKLU HIZLI İŞARET İŞLEME YÖNTEMLERİYLE  
İŞARETLERİN GERİ ELDE EDİLMESİ**

**Korhan CENGİZ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman: Prof. Dr. Cevat ERDAL**

**Eş Danışman: Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN (İ.T.Ü)**

**2010**

**T.C.  
NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**UYARLAMALI ÇOKLU HIZLI İŞARET İŞLEME YÖNTEMLERİYLE  
İŞARETLERİN GERİ ELDE EDİLMESİ**

**Korhan CENGİZ**

**ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN: PROF. DR. CEVAT ERDAL**

**EŞ DANIŞMAN: PROF. DR. AHMET HAMDİ KAYRAN (İ.T.Ü)**

**TEKİRDAĞ-2010**

Prof. Dr. Cevat ERDAL danışmanlığında ve Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN(İ.T.Ü) eş danışmanlığında Korhan CENGİZ tarafından hazırlanan bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Cevat ERDAL

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan DEMİR

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdiç UZUN

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 31.12.2010 tarih ve 47/10 sayılı

kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Fatih KONUKCU

**Enstitü Müdürü**

## ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYARLAMALI ÇOKLU HIZLI İŞARET İŞLEME YÖNTEMLERİYLE İŞARETLERİN  
GERİ ELDE EDİLMESİ

Korhan CENGİZ

Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cevat ERDAL

Eş Danışman: Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN ( İ.T.Ü )

Çoklu hızlı işaret işleme teknikleri son yıllarda, konuşma ve görüntü sıkıştırma, istatistiksel ve uyarlamalı işaret işleme, sayısal radyo yayını gibi uygulama alanları için geliştirilmektedirler. Çoklu hızlı istatistiksel ve uyarlamalı işaret işleme yöntemleri, farklı hızlarda örneklenmiş gözlem işaretleri kullanarak, orijinal işaretin yeniden elde edilmesi probleminde çözüm sağlayabilmektedir.

Hazırlanmış olan bu yüksek lisans tezinde, farklı örnekleme hızlarında örneklenmiş gözlem işaretlerinden faydalanılarak işaretlerin, en küçük ortalama kareler (LMS) ve normalize en küçük ortalama kareler (NLMS) uyarlamalı algoritmaları yardımıyla geri elde edilmesi işlemi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** En Küçük Ortalama Kareler, Normalize En Küçük Ortalama Kareler,  
Çoklu Hızlı Sistemler

2010, 59 sayfa

## **ABSTRACT**

### **MASTER OF SCIENCE THESIS**

#### **SIGNAL RECONSTRUCTION WITH ADAPTIVE SIGNAL PROCESSING METHODS**

**Korhan CENGİZ**

**Namık Kemal University**

**Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**Department of Electronics and Communication Engineering**

**Supervisor : Prof. Dr. Cevat ERDAL**

**Co-Supervisor : Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN (I.T.U)**

Multirate digital signal processing techniques have been developed in the recent years for a wide range of applications, such as speech and image compression, statistical and adaptive signal processing, digital audio. Multirate statistical and adaptive signal processing methods provide solution to the problem of original signal reconstruction using observation signals sampled at different rates.

In this thesis, the signal reconstruction process were studied and the results which were obtained were compared with least mean squares (LMS) and normalized least mean squares (NLMS) methods by using of observation signals which were sampled at different sampling rates.

**Keywords :** Least Mean Squares, Normalized Least Mean Squares, Multirate Systems.

**2010, 59 pages**

## ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında değerli katkılarından dolayı, tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Cevat ERDAL' a, eş tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN' a, her türlü konu hakkında bilgisini esirgemeyen Araş. Gör. Korhan TANÇ' a, bütün Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği öğretim üyeleri ve araştırma görevlilerine, tez çalışmam boyunca her konuda yardımlarını esirgemeyen ev arkadaşlarım Ahmet SAYGILI ve Can Burak ÖZKAL' a, manevi ve maddi desteklerini benden esirgemeyen annem Neşe CENGİZ, babam Sabri CENGİZ, kardeşim Sinan Can CENGİZ ve anneannem Şükriye YÜKSEL' e, teşekkürü bir borç bilirim.

Korhan CENGİZ

## KISALTMALAR DİZİNİ

<b>ACF</b>	: Özilişki Fonksiyonu
<b>AFD</b>	: Ayrık Fourier Dönüşümü
<b>AR</b>	: Özbağlanımlı
<b>AWGN</b>	: Toplamsal Beyaz Gauss Gürültüsü
<b>BGAD</b>	: Birleşik Geniş Anlamda Durağan
<b>ÇGAD</b>	: Çevrimsel Geniş Anlamda Durağan
<b>DAT</b>	: Sayısal Ses Teypi
<b>GAD</b>	: Geniş Anlamda Durağan
<b>LMS</b>	: En Küçük Ortalama Kareler
<b>LPTV</b>	: Doğrusal Zamanla Periyodik Değişen
<b>LSTV</b>	: Doğrusal Anahtarlama Zamanla Değişen
<b>LTİ</b>	: Doğrusal Zamanla Değişmeyen
<b>MİMO</b>	: Çok Girişli Çok Çıkışlı
<b>MMSE</b>	: Minimum Ortalama Karesel Hata
<b>MRMR</b>	: Çoklu çözünürlü Çoklu Hızlı
<b>MSE</b>	: Ortalama Karesel Hata (Mean Square Error)
<b>NLMS</b>	: Normalize En Küçük Ortalama Kareler
<b>SİSO</b>	: Tek Girişli Tek Çıkışlı
<b>SNR</b>	: İşaret Gürültü Oranı
<b>TAMSE</b>	: Zaman Ortalamalı Ortalama Karesel Hata

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
ÖNSÖZ .....	iii
KISALTMALAR DİZİNİ .....	iv
İÇİNDEKİLER .....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vii
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. İŞARET İŞLEME VE MATEMATİKSEL KAVRAMLAR</b> .....	4
2.1 İşaretler .....	4
2.1.1 Deterministik işaretler ve diziler .....	4
2.1.2 Rasgele işaretler ve diziler .....	5
2.2 Rasgele İşaretlerin İstatistiksel Gösterimi .....	5
<b>3. ÇOKLU HIZLI SİSTEMLER</b> .....	8
3.1 Çoklu Hızlı Sistemlere Giriş .....	8
3.2 Temel Kavramlar .....	9
3.3 Çoklu Hızlı İşaret İşleme .....	12
3.3.1 Örnek seyreltme .....	12
3.3.2 Ara değerlendirme .....	15
3.3.3 Örnekleme hızı dönüştürme .....	18
3.4 Alt ve Üst Örneklemenin İstatistiksel Özellikleri ve Çevrimsel Durağanlık .....	20
3.5 Matris Gösterimleri .....	22
3.5.1 Alt örneklemenin matris gösterimi .....	22
3.5.2 Üst örneklemenin matris gösterilimi .....	22
<b>4. ÇOKLU HIZLI EN KÜÇÜK ORTALAMA KARELER</b> .....	24
4.1 En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi .....	24
4.2 Çoklu Hızlı En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi .....	25
4.3 Normalize En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi .....	26
4.4 Çoklu Hızlı Normalize En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi .....	27
<b>5. GİRİŞ İŞARETLERİNİN ÖNERİLEN KESTİRİM YÖNTEMLERİ</b> .....	29
5.1 Giriş .....	29
5.2 Temel Kavramlar .....	29
5.2.1 Birinci Dereceden Özbağlanımlı Süreç (Model) .....	29



5.2.2 İşaret-Gürültü Oranı (SNR).....	29
5.3 Sistem Tanımı .....	30
5.4 Benzetimlerin Açıklanması.....	30
5.5 Benzetim Sonuçları ve Sonuçların Yorumlanması .....	33
5.5.1. (5.4) eşitliği ile gösterilen giriş işareti için benzetim sonuçları .....	33
5.5.2 Şekil 5.1 ile gösterilen stereo ses işareti için benzetim sonuçları.....	39
<b>6. SONUÇ VE TARTIŞMA .....</b>	<b>47</b>
<b>7. KAYNAKLAR.....</b>	<b>48</b>
ÖZGEÇMİŞ .....	50

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1: Çoklu Hızlı Sistem Gösterimi.....	9
Şekil 3.2: Farklı Örnekleme Frekansına Sahip İki İşaret.....	10
Şekil 3.3: Sistem Periyodu ve Alt Örnekleme Çarpanlarının Gösterimi .....	12
Şekil 3.4: Alt Örnekleme.....	13
Şekil 3.5: $L=2$ için Alt Örnekleme İşleminin Bir Örneği .....	13
Şekil 3.6: Alt Örnekleme için Frekans Spektrumu Gösterimi.....	14
Şekil 3.7: Örnek Seyreltme Diyagramı .....	14
Şekil 3.8: Zaman Ötelemeli Alt Örnekleme Diyagramı .....	15
Şekil 3.9: Maksimum-Örnek Seyreltilmiş İşaret Kümesi ( $L = 3$ ) .....	15
Şekil 3.10: Üst Örnekleme Blok Diyagramı .....	16
Şekil 3.11: Üst Örnekleme İşlemi ( $I = 3$ ).....	16
Şekil 3.12: Üst Örnekleme İçin Frekans Spektrumu Gösterimi ( $I = 2$ ) .....	17
Şekil 3.13: Ara Değerleme Diyagramı.....	17
Şekil 3.14: Ara Değerleyicideki İşaretler.....	18
Şekil 3.15: Rasyonel Bir Çarpanla Örnekleme Hızı Dönüştürme .....	19
Şekil 3.16: (a) Örnekleme Hızı Dönüştürücüsü Girişinin Frekans Cevabı (b) Alçak Geçiren Süzgeç Çıkışındaki ve Örnekleme Hızı Dönüştürücüsü Çıkışındaki Frekans Cevabı .....	19
Şekil 3.17: Alt ve Üst Örnekleme Hızlarının Kaskat Bağlantıları.....	20
Şekil 4.1: Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Diyagramı .....	25
Şekil 4.2: Çoklu Hızlı NLMS Algoritmasının Diyagramı .....	27
Şekil 5.1: Çoklu hızlı kestirici sistemi .....	30
Şekil 5.2: Sistem girişine uygulanan stereo ses işareti .....	31
Şekil 5.3: Stereo Ses İşaretinin Bir Kanalına Ait Bileşeni.....	32
Şekil 5.4: SNR=20 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .	33
Şekil 5.5: SNR=20 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Kestirimi Grafiği.....	34
Şekil 5.6: SNR=20dB için (5.4)' deki işaretin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	35
Şekil 5.7: SNR=20 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin NLMS Kestirimi Grafiği.....	35
Şekil 5.8: SNR=20 dB için (5.4) işaretinin LMS-NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	36
Şekil 5.9: SNR=10 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .	37
Şekil 5.10: SNR=10 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Kestirimi Grafiği .....	37
Şekil 5.11: SNR=20 ve SNR=10 dB için (5.4) işaretinin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	38
Şekil 5.12: SNR=10 dB için (5.4) işaretinin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği.....	38
Şekil 5.13: SNR=10 dB için (5.4) işaretinin NLMS Kestirimi Grafiği .....	39
Şekil 5.14: SNR=20 ve SNR=10 dB için (5.4)' ün NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği....	39
Şekil 5.15: SNR=10 dB için Şekil 5.3 işaretinin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	40
Şekil 5.16: SNR=10 dB için Şekil 5.3 işaretinin LMS Kestirimi Grafiği.....	41
Şekil 5.17: SNR=10 dB için Şekil 5.3 işaretinin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	41
Şekil 5.18: SNR=10 dB için Şekil 5.3 ile verilen işaretin NLMS Kestirimi Grafiği .....	42
Şekil 5.19: SNR=10 dB için Şekil 5.3 ile verilen işaretin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	42
Şekil 5.20: SNR=10 dB için Şekil 5.1 ile verilen işaretin LMS Kestirimi Grafiği .....	43

Şekil 5.21: SNR=10 dB, Şekil 5.3 ile verilen işaretin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği	44
Şekil 5.22: SNR=10 dB için Şekil 5.3 ile verilen işaretin NLMS Kestirimi Grafiği .....	45
Şekil 5.23: SNR=10 dB, Şekil 5.3' deki işaretin LMS-NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği .....	45

## 1. GİRİŞ

İşaret işleme konusunun önemli bir parçasını oluşturan çoklu hızlı (multirate) işaret işleme, son on yılda, hızlı bir gelişme göstermiştir. Bu alan, farklı hızlarda örneklenmiş işaretleri içeren sistemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Haberleşme sistemlerinde ve işaret işlemenin birçok uygulamasında, farklı örnekleme hızlarındaki işaretlerle ve işaretlerin örnekleme hızlarının değiştirilmesi sorunlarıyla karşılaşılabilir.

Çoklu hızlı işaret işleme teknikleri, görüntü ve konuşma sıkıştırma, sayısal ses kodlama, istatistiksel ve uyarlamalı işaret işleme, ayrık-zamanlı çok boyutlu işaret işleme, yüksek çözünürlüklü görüntü elde etme v.b. alanlarda uygulanmaktadır.

Özellikle, son on yıldaki gelişmeleri incelediğimizde, karşımıza Therrien, Cristi ve Koupatsiaris (2000)' in yaptıkları çalışma çıkmaktadır. Therrien ve çalışma arkadaşları biri diğerinin iki katı örnekleme hızına sahip ve gözlem sonucu elde edilmiş iki işareten yararlanarak bir rasgele sürecin kestirimi üzerine çalışmışlardır. Yapılan çalışmada, bu problem için en uygun süzgecin, katsayıları periyodik olarak değişen doğrusal süzgeç olduğu gösterilmiştir.

Sarkar ve Poor (2001), çoklu hızlı işaret işleme üzerine bir çalışma yapmışlar ve çoklu hızlı çevrimsel işaret işleme sistemlerinin temel konularını çalışmalarında incelemişlerdir. Jahromi ve ark. (2001), çalışmalarında, çoklu hızlı doğrusal sistemler için bir bilgi ölçüsü ortaya koymuşlardır. Yine aynı yılda Therrien (2001), yaptığı çalışmada, çoklu hızlı istatistiksel işaret işlemedeki temel konulardan bahsetmiş ve hız değişimi altında durağanlık kavramı ile çoklu hızlı Wiener süzgeçlemeyi incelemiştir. Jahromi ve ark. (2001), yaptıkları bir başka çalışmada, farklı örnekleme hızlarında ve çok sayıda gözlemciden alınmış gözlemlere dayanan rasgele işaretlerin kestirilmesi problemini açıklamışlardır.

Papoulis ve Stathaki (2002), uyarlamalı süzgeçleme için çoklu hızlı yapının yakınsaklık analizini yapmışlar ve bir uyarlamalı süzgeç yapısının alt bantlarında bulunan yapısal alt bant ayrışmasının, tekrar birleştirilebilme yolunu göstermişlerdir. Sayısal karmaşıklıkta önemli bir artış olmadığı durumda da, yakınsama hızının arttırılabileceğini tespit etmişlerdir. Aynı yılda, Therrien ve Hawes (2002), farklı örnekleme hızlarına sahip çoklu hızlı gözlem dizileri mevcut olduğunda, en küçük kareler yaklaşımı kullanılarak, uyarlamalı süzgeçlemenin nasıl yapılacağı üzerinde durmuşlardır. Kullandıkları süreçler, ortaklaşa çevrimsel durağandır ve doğrusal süzgeç çıkışları da zamana göre periyodik olarak değişmektedir.

Jahromi ve Aarobi (2003), çoklu hızlı ölçümleri kullanarak, birbiri ile kaynaşmış iki düşük hızlı sensörden, zaman gecikmesine sahip yüksek çözünürlüklü bir işaretin geri çatılması sorununa çözüm önermişlerdir. Hawes ve Therrien (2003) de, çoklu hızlı gözlemlerle, en küçük ortalama kareler (LMS) yöntemi ile uyarlamalı süzgeçleme yapmışlardır. Çalışmalarında, farklı örnekleme hızlarında bulunan, iki veya daha fazla gözlem dizisinin LMS metodu kullanılarak uyarlamalı süzgeçleme işlemini, kalıcı durum davranışları zamana göre periyodik olarak değişen süzgeçlerle gerçekleştirmişlerdir. Kullandıkları metodu girişim bastırma uygulamasında test etmişler ve girişim bastırma işlemini konuşma işaretinin dar bant ve geniş bant girişim kaynaklarında uygulamışlardır. Yong ve ark. (2003), radar ekranındaki hedef tanınmasında çoklu hızlı işaret modellenmesi üzerine bir çalışma yapmışlardır. Therrien ve Kuchler (2003) de, farklı örnekleme hızlarındaki gözlemlerden oluşan birkaç kanal için optimum süzgeçleme problemini çözümlenmişler ve Wiener-Hopf denklemlerinin belirgin formlarını ve tahmin hatasının varyansını elde etmişlerdir.

Jahromi ve ark. (2004), işaretin kendisinin bulunmadığı fakat düşük çözünürlüklü ölçümlerinin bulunduğu durumda, durağan rasgele işaretin güç spektral yoğunluğunun tahmin edilmesiyle ilgilenmişlerdir. Bir dizi çoklu hızlı sensör çıkışından elde edilmiş bir işaret düşünmüşler, her bir sensörden, orijinal işaretin örnekleme hızına göre tamsayı olmayan örnekleme hızlarına sahip gözlem işaretleri elde etmişlerdir. Bu gözlem işaretlerini kullanarak giriş işaretinin güç spektral yoğunluğunu tahmin etmişlerdir.

Son beş yıla baktığımızda, Jahromi ve ark. (2005), çoklu hızlı sensör dizilerinin teorileri ve tasarımı üzerine bir çalışma yapmışlardır. Kullandıkları çoklu hızlı sensör dizisinin içerisindeki her bir sensör düğümü, düşük çözünürlüklü ölçme sonucunun, merkezi işlem birimi ile haberleşmesini sağlamaktadır. Scrofani ve Therrien (2005) de yüksek çözünürlüklü işaret geri çatma işlemine, istatistiksel yaklaşmışlar ve düşük hızda örneklenmiş gürültü ve bozulma eklenmiş işaretlerden yüksek örnekleme hızına sahip işaret elde etme konusunda çözüm getirmişlerdir.

Milic ve Saramaki (2006), çoklu hızlı süzgeçlere genel bir bakış yapıp, aşamalı örnekleme hızı dönüştürmesini, çok kademeli süzgeçlemeyi ve giriş ile çıkışları eşit hızlı olan süzgeçleri incelemişlerdir.

Masud ve ark. (2007), çoklu hızlı işaret işlemede çok kullanışlı olan bazı grafik sonuçları elde etmişlerdir. Çalışmalarında, örnekleme konusuna basit anlamda genel bir bakış yapıp, alt örnekleme ile üst örnekleme konularında farklı ihtimalleri araştırıp, elde ettikleri grafiksel yorumları, bazı ilginç sonuçlarla birlikte açıklamışlardır.

Son iki yıla geldiğimizde, Hang ve Hong (2008), uyarlamalı süzgecin katsayılarını güncellemek için çoklu hızlı bir algoritma geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri algoritma, otomatik olarak güncelleme hızını ayarlayabilmekte ve minimum hata ile güncelleme hızı arasında doğrusal olmayan bir ilişki kurmaktadır. Aynı yılda Mizumoto ve ark. (2008), uyarlamalı çıkış kestiricili çoklu hızlı örneklenmiş sistemlerin, çıkış geri beslemesi kontrolü üzerine bir çalışma yapmışlardır. Çıkış örnekleme hızı düşük ve giriş güncelleme hızı yüksek olan çoklu hızlı örneklenmiş sistemler için denetleyici tasarımı yapmışlardır.

Gelecekteki sistemlere öncülük edecek bir çalışma Baig ve Mughal (2009) tarafından yapılan, “Güç Hatları Üzerinde Yüksek Hızlı Haberleşme İçin Çoklu Hızlı İşaret İşleme Teknikleri” adındaki çalışmadır. Aynı yılda Sreelatha ve ark. (2009) yaptıkları çalışmada, uygun düşük çözünürlüklü örnekler kullanarak, geniş anlamda durağan rasgele işaretin güç spektral yoğunluğunu kestirebilmek için yeni bir teknik geliştirmişlerdir.

Hazırlanmış olan bu yüksek lisans tezinde, farklı örnekleme hızlarında örneklenmiş gözlem işaretlerinden faydalanılarak işaretlerin, en küçük ortalama kareler (LMS) ve normalize en küçük ortalama kareler (NLMS) uyarlamalı algoritmaları yardımıyla geri elde edilmesi işlemi gerçekleştirilmiştir. Sistem giriş işareti önce varyansı 1 olan, özbağlanımlı süreçten elde edilmiş beyaz gürültü işareti olarak düşünülmüş ve bu işareten, farklı örnekleme hızlarına sahip iki gözlem işareti elde edilmiştir. Gözlem işaretlerinden birincisi, alçak geçiren süzgeçten geçirilmiş, alt örnekleme katsayısı iki olarak seçilerek, ölçüm gürültüsü eklenmiş ve devamında da iki katsayısı ile üst örneklenecek kestirici giriş işaretlerinden birincisi elde edilmiştir. İkinci gözlem işareti ise, bant geçiren süzgeçten geçirilmiş, alt örnekleme katsayısı üç olarak seçilerek, ölçüm gürültüsü eklenmiş ve devamında da üç ile üst örneklenecek kestirici giriş işaretlerinden ikincisi elde edilmiştir. Bu kestirici giriş işaretleri kullanılarak, en küçük ortalama kareler ve en küçük normalize ortalama kareler yöntemleriyle girişteki işaretin kestirimi gerçekleştirilmiştir. Kestirim sonuçları grafiklerle açıklanmış ve bu sonuçlar yorumlanmıştır. Sistem girişine uygulanan ikinci işaret, stereo ses işaretinin bir kanalına ait bileşenidir. Aynı işlemler, bu işarete uygulanmış ve bu sonuçlar da grafiklerle açıklanmıştır. Ses işaretinin veri uzunluğunun yarattığı zorluklardan dolayı, bu işaret bloklara bölünerek, aynı işlemler uygulanarak sonuçlar elde edilmiş ve yorumlanmıştır.

## 2. İŞARET İŞLEME VE MATEMATİKSEL KAVRAMLAR

İşaret işleme konusu, işaretlerin gösterimi, işlenmesi, dönüşümü ve taşıdıkları bilgiyle ilgilenir. Bir radar ekranındaki hedefin sınıflandırılması gibi işarettten bilginin çıkartılması ve bir işarettteki gürültünün azaltılması örnek olarak verilebilir ( Hayes 1996 ). Sayısal işaret işleme, işaretlerin sayısal bilgisayar ya da özel amaçlı sayısal donanım kullanılarak bir sayılar dizisi olarak gösterilmesi ve bu işaret dizisi üzerinde çeşitli işlemler yaparak istenen bilgi ya da büyüklüğün diziden çıkarılmasına dayanmaktadır (Kayran ve Ekşioğlu 2004). İşaret işlemenin çeşitli uygulamalarında birçok kavram kullanılır. Bu bölümde çoklu hızlı işaretleri ve sistemleri tanımlamak için kullanılacak olan çeşitli matematiksel kavramlar ve işaret işleme kavramları açıklanacaktır.

### 2.1 İşaretler

İşaret kelimesi, Latince “signum” kelimesinden türetilmiştir. Genellikle, bir fiziksel sistemin davranışına ya da durumuna ilişkin bilgi taşıyan ve bir veya birden fazla işareti bağımsız değişkene bağlı olarak değişen her türlü büyüklüğe işaret denir. Konuşma işareti, elektrokardiyograf çıkışındaki işaret, bir elektronik devrede ölçülen gerilim değişimi işaretlere örnek olarak verilebilir. Bir işaret bilginin farklı biçimlerini taşıyabilir. Buna, elektromanyetik dalgaların video ve ses bilgisini bir radyo ya da televizyon vericisinden, bir alıcıya taşınması örnek olarak verilebilir (Oppenheim ve Schafer 1975). Bu bölümde çeşitli işaretler ve diziler kısaca tanıtılacaktır.

#### 2.1.1 Deterministik işaretler ve diziler

Deterministik işaret genellikle zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanır. İşaretin her  $t \in R$ ,  $R$ : Reel Sayılar Kümesi, için aldığı değerler belirlidir. İşaret, matematiksel bir ifade, kural veya tablodan belirlenebilir. Deterministik işaretin gelecek değerleri, geçmiş değerlerinden elde edilebilir. Bir deterministik analog işaret  $\{x(t)\}$  veya  $x(t)$  ile gösterilir. İşaretin değerleri reel sayılardan oluşuyorsa, işarete reel değerli analog işaret denir. Eğer işaretin değerleri kompleks sayılardan oluşuyorsa, işarete kompleks değerli analog işaret denir. İşaretleri tanımlarken birçok özellikten faydalanırız. Çoklu hızlı sistemlerdeki en önemli özellik periyodiktir. Bir işaret tüm  $t$  değerleri ve pozitif bir reel  $T_p$  için

$$x(t) = x(t + T_p) \quad (2.1)$$

koşulunu sağlıyorsa periyodiktir. (2.1)'deki en küçük  $T_p$  değerine periyot denir. Deterministik dizi,  $\{x[n]\}$  ya da  $x[n]$  ile gösterilen ve her  $n \in Z$ ,  $Z$ : Tamsayılar Kümesi, için aldığı değerleri belirli olan dizidir. Eğer dizinin bütün değerleri reel ise dizi, reel değerli dizidir.

Dizinin bütün değerleri kompleks ise dizi kompleks değerli dizidir.  $x[n]$  dizisinin periyodik olması için bütün  $n$  değerlerinin

$$x[n] = x[n + N] \quad (2.2)$$

koşulunu sağlaması gerekir. (2.2)' deki en küçük  $N$  değerine dizinin periyodu denir. Periyodik analog işaretin örneklenmesiyle elde edilen bütün diziler periyodik olmayabilir.  $x(t)$  analog işaretinin örneklenmesiyle,  $x[n] = x(nT)$  olarak tanımlanan dizi elde edilir. Dizideki  $n$ , indis değişkenidir. Bağımsız değişken  $n$ ' in zamanı göstermesi gerekli olmamasına rağmen  $x[n]$ ' den genellikle zamanın fonksiyonu olarak söz edilir. Bir deterministik ayrık zamanlı işaret  $\{x_t(t)\}$  veya  $x_t(t)$  ile gösterilir ve her  $t \in \Omega_t$ ,  $\Omega_t$ : Ayrık Zamanlı İşaret Dizisi, için belirli bir değer alır. Zamanın belirli anlarında tanımlanmıştır. Buradan  $\Omega_t = \{nT_o; n \in Z\}$  ve  $T_o$  örnekleme periyodu olarak tanımlanır.

$$x_t(t) = \{x[n], T\} = \{x[n], F_o\}, \quad n \in Z. \quad (2.3)$$

Ayrık zamanlı bir işaret (2.3)'de gösterildiği gibi bir dizi ve  $F_o = 1/T_o$  örnekleme frekansıyla tanımlanabilir. Tek hızlı sistemlerde örnekleme hızından bahsedilmeyebilir. Fakat, çoklu hızlı sistemlerde, farklı örnekleme hızları mevcut olduğu için ayrık zamanlı işaretlerden bahsederken örnekleme hızlarının belirtilmesi gerekir. Örneğin,  $y[m]$  ve  $x[n]$  dizileri farklı örnekleme hızlarına sahip ayrık zamanlı işaretlerdir.

### 2.1.2 Rasgele işaretler ve diziler

Bir işaretin herhangi bir anda aldığı değer kesin değilse ve alabileceği değerlerin olasılık dağılımı biliniyorsa, işarete, rasgele işaret denir. Bir rasgele işaretin gelecek değerleri doğru olarak tahmin edilemeyebilir. Öyle ki, her  $t \in R$  için, uygun bir  $X(t)$  rasgele değişkenin var olduğu rasgele değişkenler kümesine, reel rasgele işaret denir ve  $\{X(t)\}$  ile gösterilir. Her  $n \in Z$  değerine karşılık bir  $X[n]$  rasgele değişkenin var olması koşuluyla, rasgele değişkenler kümesine reel rasgele dizi denir ve  $\{X[n]\}$  ile gösterilir. Her  $t \in \Omega_t$ , için uygun bir  $X_t(t)$  rasgele değişkenin var olduğu rasgele değişkenler kümesine deterministik ayrık domen işareti veya zaman serileri denir.  $\{X_t(t)\}$  ile gösterilir ve  $T$  örnekleme aralığıdır.

### 2.2 Rasgele İşaretlerin İstatistiksel Gösterimi

Rasgele süreçler için yöntem ve model geliştirmek isteniliyorsa rasgele süreçlerin istatistiksel özelliklerinin tanımlanması gereklidir. Bir rasgele süreç, sonsuz sayıda gerçekleştirilebilir. Bu sebeple, rasgele sürecin tanımlanması için öncelikle olasılık yoğunluk



fonksiyonunun tanımlanması önem kazanır. Bir rasgele sürecin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun tamamen tanımlanamadığı durumlarda, süreç, birinci ve ikinci dereceden momentler kullanılarak tanımlanır. Eğer süreç Gauss tipi ise birinci ve ikinci dereceden momentler, süreci tanımlamak için yeterlidir. Eğer rasgele süreçler Gauss tipi değilse, ikinci dereceden moment analizi, bütün sistemlerde, işaretler arasındaki istatistiksel ilişkiyi belirlemek için yeterlidir.  $X[n]$  rasgele süreci verildiğinde, rasgele sürecin birinci dereceden momenti ya da ortalaması

$$\mu_x[n] = E\{X[n]\} \quad (2.4)$$

bağıntısı ile bulunur. Burada  $E$  beklenti operatörünü göstermektedir. Ortalama, genellikle zamana bağlı bir fonksiyondur ve geniş anlamda durağan (GAD) işaretler için sabittir. Çoklu hızlı işaret ve sistemlerde ortalama, genellikle, zamanın periyodik bir fonksiyondur,

$$\mu_x[n] = E\{X[n+M]\} \quad (2.5)$$

şeklinde gösterilip burada  $M$  periyottur.

Bir rasgele sürecin ikinci dereceden momentleri özilişki ve çapraz ilişki fonksiyonlarından yararlanılarak tanımlanabilir. Bir rasgele sürecin özilişki fonksiyonu (ACF) (2.6) denkleminde şöyle tanımlanır:

$$R_x[n_0, n_1] = E\{X[n_0]X^*[n_1]\} \quad (2.6)$$

Zamana bağlı ilişki fonksiyonu da,

$$R_x[n; l] = E\{X[n]X^*[n-l]\} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer süreç geniş anlamda durağan ise, ortalama değeri  $\mu_x$  sabit ve ilişki fonksiyonu da  $n$  ve  $n-l$  gözlem zamanları arasındaki farka bağlı bir fonksiyondur ve

$$R_x[n; l] = R_x[l] \quad (2.8)$$

olarak ifade edilir.

Aynı hızda örneklenmiş  $X[n]$  ve  $Y[n]$  rasgele süreçlerinin herhangi iki örneği arasındaki ilişki ise,

$$R_{xy}[n; l] = E\{X[n]Y^*[n-l]\} \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilir. Burada  $R_{xy}[n; l]$ , zamana bağlı çapraz ilişki fonksiyonudur. Geniş Anlamda Durağan iki süreç arasındaki çapraz ilişki fonksiyonu sadece zaman farkına bağlı bir fonksiyondur ve

$$R_{xy}[n; l] = R_{xy}[l] \quad (2.10)$$

olarak gösterilir.

Rasgele işaretlerin analizinde, sınırlı uzunluklu dizileri diğer bir deyişle vektörleri kullanırız. Verilen  $X$  rastgele vektörü için ortalama değer  $\mu_x = E\{X\}$  şeklinde ifade edilir. Rasgele süreç GAD ise, vektörün ortalaması sabit değerlerden oluşmaktadır.  $X$ , rasgele vektörünün ilişki matrisi

$$R_x = E\{XX^{*t}\} = \begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[-1] & \dots & R_x[-N+1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \dots & R_x[-N] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

ile gösterilir.

$X$ ,  $N$  uzunluklu bir rasgele vektör ve  $Y$  ise  $M$  uzunluklu bir rasgele vektör olsun. Rasgele iki süreç de GAD ise,  $X$  ve  $Y$  arasındaki çapraz ilişki fonksiyonu

$$R_{xy} = E\{XY^{*t}\} = \begin{bmatrix} R_{xy}[0] & R_{xy}[-1] & \dots & R_{xy}[-N+1] \\ R_{xy}[1] & R_{xy}[0] & \dots & R_{xy}[-N] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{xy}[N-1] & R_{xy}[N-2] & \dots & R_{xy}[0] \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ile ifade edilir.

Bu bölümde, çoklu hızlı işaret işleme uygulamalarında gerekli olan bazı temel ve matematiksel kavramlar açıklanmıştır. Deterministik ve rasgele işaret kavramları tanımlanmış, ortalama değer, özilişki fonksiyonu, çapraz ilişki fonksiyonu ve ilişki matrisi kavramları matematiksel ifadelerle gösterilmiştir.

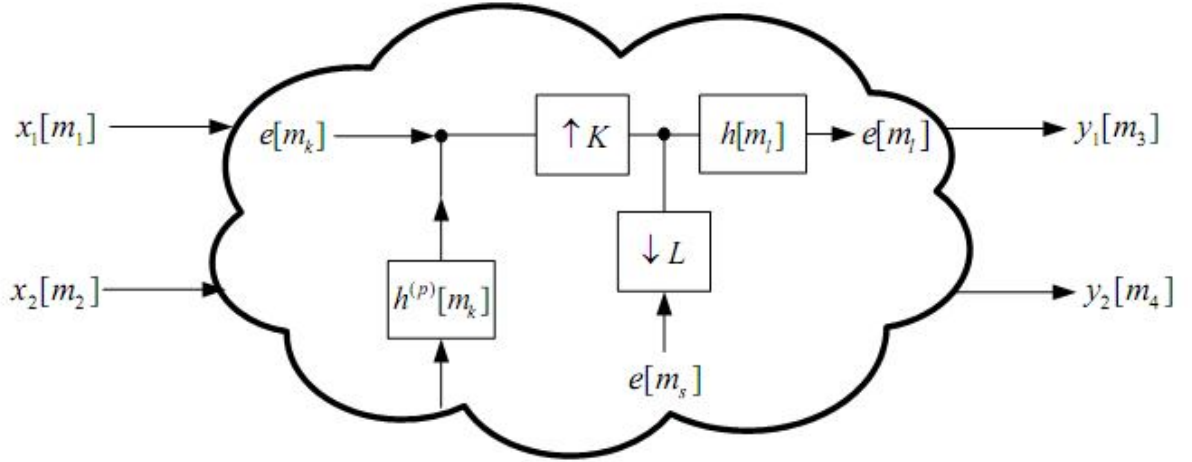
### 3. ÇOKLU HIZLI SİSTEMLER

Bu bölümde çoklu hızlı sistemler tanıtılmaya çalışılmıştır (Haykin 2002, Karaağaç 2007). Tek girişli tek çıkışlı (SISO) sistemler ve tüm işaretlerin aynı örnekleme hızına sahip olduğu çok girişli çok çıkışlı sistemler için işaret işleme teknikleri geliştirilmiş bulunmaktadır. İşaret işlemenin bazı uygulamalarında ise gözlem işaretleri farklı hızlarda örneklenirler. Kestirim, öngörü, sınıflandırma ya da algılama gibi çeşitli işlemleri uygulamak için bu işaretlerin birlikte işlenmesi gerekmektedir. Bu tür problemlere temel oluşturmak amacıyla tek hızlı işaret ve sistemler için kullanılan kuramın, çoklu hızlı kurama uygun olarak genişletilmesi gerekir. Çoklu hızlı istatistiksel işaret işleme için geliştirilen kuram tek hızlı, tek kanallı veya tek hızlı, çok kanallı problemlere indirgenebilmelidir. Bu bölümde, çoklu hızlı sistemler için geliştirilen kuram anlatılmış ve çoklu hızlı bir sistemdeki temel işlemler tanıtılmıştır. İstatistiksel çok kanallı sistem ve işaretleri tanımlamak için bazı kavramlar belirtilmiştir. Çoklu hızlı bir sistemdeki çeşitli işaretlerin ortak domende gösterimi ve çoklu hızlı işlemlerin matris formunda gösterimi incelenmiştir.

#### 3.1 Çoklu Hızlı Sistemlere Giriş

Sayısal işaret işlemenin birçok uygulamasında, sayısallaştırılmış bir işaretin örnekleme frekansının değiştirilmesi problemiyle karşı karşıya kalınır. Örneğin CD çalar, sayısal ses teypi (DAT) ve sayısal yayın (digital broadcasting) farklı örnekleme frekanslarına sahiptirler. Sayısal yayın 32 kHz, DAT'lar 48 kHz, CD'ler 44.1 kHz örnekleme frekansına sahiptirler. Avrupa ve Amerika'da standartların tamamen farklı olduğu video işaretleri için de durum buna benzerdir. Birçok uygulamada, ses işaretlerinin örnekleme hızlarının birbirleri arasında dönüştürülmesi gerekir. Bazı sistemlerde ise farklı örnekleme hızlarındaki ayrık zamanlı işaretlerin birbirine uydurulması gerekir. Örnek olarak, 44.1 kHz bir CD sisteminden 48 kHz DAT sistemine müzik kaydedilmesi verilebilir. Bazı durumlarda, kullanılan aşırı örnekleme, gereksiz uzunlukta bir bant genişliği şartını koştduğundan ve bu da maliyeti arttırdığından dolayı sistem hızı düşürülmelidir. Sayısallaştırılmış bir işaretin örnekleme hızının değiştirilmesinin bir diğer nedeni de daha iyi bir sistemin geliştirilmek istenmesidir. Örneğin, bir CD çalarda örnekleme frekansı 44.1 kHz iken ses işaretinin bant genişliği 22 kHz'dir. Analog yeniden elde etme süzgeci 22 kHz'e kadar olan bütün frekans bileşenlerini geçirir ve  $(44.1/2)=22.05$  kHz üzerindeki geçirmez. Keskin geçiş bölgesi olan bir analog süzgeç tasarlamak çok pahalıdır ve yüksek frekanslardaki faz bozulması işaretin kalitesini kötüleştirir. Ses işaretinin yüksek frekansları, analog yeniden elde etme süzgecinin geçirme bandından çok yüksek değerde olduğundan, kaliteli bir sistem oluşturmak için örnekleme

frekansı arttırılmalıdır. Böylece sınırlı faz bozulması sağlanır. Birçok uygulamada farklı örnekleme hızındaki çeşitli işaretleri içeren sistemler kullanılır. Örneğin, farklı örnekleme hızında çalışan iki alt sistem haberleştiğinde örnekleme hızları birbirlerine göre uygun olmalıdır. Bir geniş bantlı sayısal işaretin, çeşitli dar bant kanallarda iletilmesi için ayrıştırılması, bu konuda bir örnek olarak verilebilir. Bu tür sistemler, genellikle, çoklu hızlı sistemler olarak adlandırılır. Çoklu hızlı sistemler sayısal süzgeç tasarımından işaret kodlama ve sıkıştırmaya kadar, birçok uygulamada kullanılır. Bir çoklu hızlı sistem Şekil 3.1’de gösterilmiştir:



Şekil 3.1: Çoklu Hızlı Sistem Gösterimi

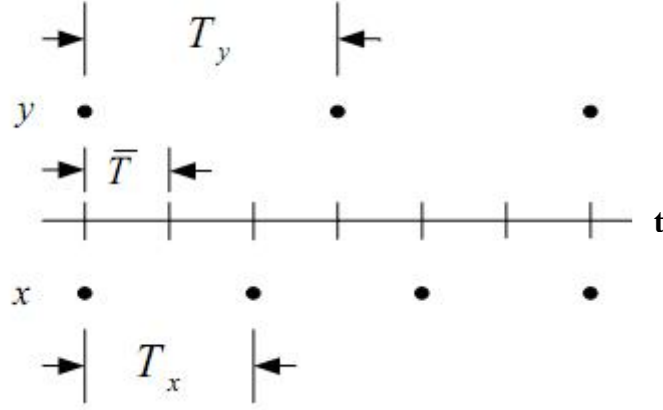
### 3.2 Temel Kavramlar

Çoklu hızlı bir sistemde, farklı örnekleme hızlarındaki işaretleri ortak bir domende tanımlamak için, bazı kavramların açıklanması gerekir. Şekil 3.1’de görüldüğü gibi işaretlerin örnekleme hızlarının bazıları aynı olmasına rağmen uygulamada, genellikle, birbirlerinden farklıdırlar. İşaretlerin örnekleme hızlarının birbirlerinden farklı olması dolayısıyla gözlemler, sürekli zamanda farklı yerlerde gözleniyor olabilirler; yani  $m_i$  indisleri aynı hızda olmayabilir. Açıklama için, 3000 Hz’ de örneklenmiş bir  $x$  işareti ile 2000 Hz’ de örneklenmiş  $y$  işaretini içeren çoklu hızlı bir sistem ele alınacaktır. Burada, örnekleme hızları  $F_x$  ve  $F_y$  değerleri, tamsayı alınacaktır. Bu iki ayrık işaret, analog iki işaretin örneklenmesiyle şu şekilde elde edilir:

$$x[n_x] = x(n_x T_x) = x(t) \Big|_{t=n_x T_x} \quad n_x \in Z \quad (3.1)$$

$$y[n_y] = y(n_y T_y) = y(t) \Big|_{t=n_y T_y} \quad n_y \in Z \quad (3.2)$$

$T_x$  ve  $T_y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  işaretlerine ait örnekleme aralıklarıdır. Burada  $t = 0$  anında her iki işaretin de örneği varsa, iki işaretin gözlemlerinin bulunduğu  $t$  anları Şekil 3.2'deki gibi gösterilebilir.



**Şekil 3.2:** Farklı Örnekleme Frekansına Sahip İki İşaret

Çoklu hızlı sistemdeki bütün işaretleri ortak bir domende gösterebilmek için temel katman (fundamental layer) diye adlandırılan bir kavram tanımlanır. Temel katman, sistem seviyesi olarak da belirtilir. Şekil 3.2'de,  $x$  işaretinin örnekleri ile  $y$  işaretinin örnekleri arasında gösterilen çizgi sistem ızgarası olarak belirtilir.

Her bir işaret, gerçek örnekleme hızının bir tamsayı ile çarpılarak bulunan bir örnekleme hızında ifade edilebilir.  $F_x = 3000$  Hz ve  $F_y = 2000$  Hz örnekleme hızlarına sahip  $x$  ve  $y$  işaretleri için sistem hızının yani temel hızın tanımlanması gerekir.  $x$  ve  $y$  işaretlerinin bütün örneklerini gösterebilmek için, iki işaretin örnekleme hızlarının ortak katlarının en küçüğünün tersi olan bir örnekleme aralığı belirlenmelidir. Bu örnekleme aralığı  $\bar{T}$  ile gösterilir ve sistem örnekleme aralığı olarak tanımlanır. Şekil 3.2' de verilen sistem için  $\bar{T}$  gösterilmiştir.  $\bar{T} = 1/\bar{F}$  olmak üzere,  $\bar{F}$  pozitif tamsayı,  $F_x$  ve  $F_y$ ' nin en küçük ortak katı olarak şöyle tanımlanır:

$$\bar{F} = \text{okek}(F_x, F_y) \quad (3.3)$$

Burada,  $\bar{F}$ , sistem hızı ya da temel hız olarak adlandırılır.

Şekil 3.2' deki sistemde temel hız ( $\bar{F}$ ), 6000 Hz olarak bulunur. Sistem hızı, çoklu hızlı sistemdeki bütün işaretleri tanımlamak için gerekli olan minimum örnekleme hızıdır. Şekil 3.2'deki işaretler temel katmanda  $n$  ortak indisiiyle,  $\bar{x}[n]$  ve  $\bar{y}[n]$  olarak, gösterilir. (3.3)' deki ifade, M adet farklı örnekleme hızlarındaki işaretlerden oluşan çoklu hızlı sistem için,

$$\bar{F} = \text{okek}(F_1, F_2, \dots, F_M) \quad (3.4)$$

olarak ifade edilebilir. Şekil 3.2' deki işaretler için sistem hızı şu şekilde ifade edilebilir:

$$\bar{F} = K_x F_x \text{ ve } \bar{F} = K_y F_y, \quad (3.5)$$

Burada,  $K_x$  ve  $K_y$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  işaretlerine ait örnek seyreltme ya da alt örnekleme çarpanıdır.  $M$  adet işaretten oluşan çoklu hızlı bir sistem için,

$$K_i = \frac{\bar{F}}{F_i} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.6)$$

elde edilir. Yani, alt örnekleme çarpanı, sistem örnekleme hızı ( $\bar{F}$ )' in,  $i$ . işaretin örnekleme hızı ( $F_i$ )' ye oranıdır. Çoklu hızlı sistemdeki her bir ayrık işaret,  $\bar{F}$  sistem hızına sahip sürekli işaretin alt örnekleme hızıyla elde edilebilir. Diğer bir deyişle,  $x(t)$  sürekli işaretinin  $F_x$  hızında örnekleme hızıyla elde edilen ayrık işaret,  $x(t)$  sürekli işaretinin  $\bar{F}$  hızında örnekleme hızından sonra  $K_x$  çarpanıyla alt örnekleme hızıyla elde edilen işarete denktir. Alt örnekleme çarpanı,  $i$ . işaretin örnekleme aralığı ( $T_i$ )' nin sistem örnekleme aralığı ( $\bar{T}$ )' ye oranı olarak da ifade edilebilir.

$$K_i = \frac{T_i}{\bar{T}} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.7)$$

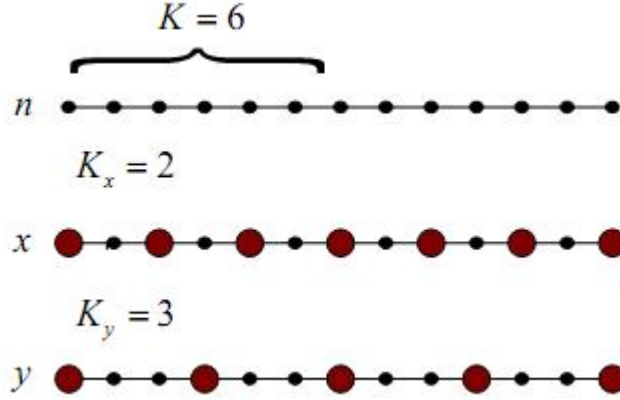
Çoklu hızlı sistemde önemli bir kavram da periyodiktir. Sistem periyodu, sistemdeki bütün işaretlerin minimum ortak periyodudur.  $K_i$ , çoklu hızlı sistemdeki  $i$ . işaretin alt örnekleme çarpanı olup sistem periyodu,

$$K = \text{okek}(K_1, K_2, \dots, K_M) \quad (3.8)$$

olarak gösterilir.  $i$ . işarettaki periyot başına örnek sayısı,

$$M_i = \frac{K}{K_i} \quad (3.9)$$

olarak bulunur.  $K$ , sistem seviyesinde bir periyottaki adım sayısıdır.  $M_i$ ,  $i$ . işaretin bir sistem periyodundaki adım sayısıdır. Şekil 3.3' de, sırasıyla,  $F_x = 3000$  Hz ve  $F_y = 2000$  Hz örnekleme hızlarına sahip  $x$  ve  $y$  işaretleri için, alt örnekleme çarpanları ve sistem periyodu gösterilmektedir.



**Şekil 3.3:** Sistem Periyodu ve Alt Örnekleme Çarpanlarının Gösterimi

Şekil 3.3’ de görüldüğü gibi  $K_x = 2$  ve  $K_y = 3$  olmak üzere sırasıyla  $x$  ve  $y$  işaretlerine ait alt örnekleme çarpanlarıdır. Sistem periyodu  $K = 6$ ’ dır.  $K_x$  ve  $K_y$ , bir işaretin sistem seviyesinde art arda gözlenen örnekleri arasındaki adım sayısıdır.  $M_x$  ve  $M_y$ , sırasıyla  $x$  ve  $y$  işaretlerinin periyot başına örnek sayılarıdır ve burada, sırasıyla,  $M_x = 3$  ve  $M_y = 2$ ’ dir.  $t = n$  anında,  $x$  ve  $y$ ’ nin örneklerinin birbirine göre durumu,  $t = n + K_i$  anındaki durumlarına eşdeğerdir. Sistem fazı  $k$ , şöyle tanımlanır:

$$n = mK + k \text{ ya da } n \equiv k \pmod{K} \quad (3.10)$$

Burada  $n$  sistem seviyesindeki zaman,  $K$  sistem periyodu olup,

$$m = \left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor \quad (3.11)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.

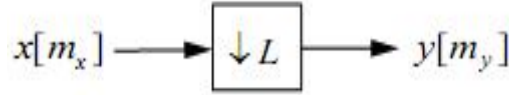
### 3.3 Çoklu Hızlı İşaret İşleme

Örnekleme hızı dönüştürme işleminde iki temel adım vardır. Bunlardan biri tamsayı çarpanı  $L$  ile örnekleme hızını düşürme; ikincisi ise tamsayı çarpanı  $I$  ile örnekleme hızını arttırmadır.  $L$  çarpanıyla, örnekleme hızını düşürme işlemine, örnek seyreltme;  $I$  çarpanıyla örnekleme hızını arttırma işlemine, ara değerlendirme denir. Alt örnekleme giriş-çıkış ilişkisi ve üst örnekleme giriş-çıkış ilişkisi hem zaman hem frekans domeninde açıklanacaktır. Kısaca, çoklu hızlı işaret işleminin temel işlemleri alt örnekleme, üst örnekleme ve süzgeçlemedir. Bölümün kalan kısmında bu işlemleri göreceğiz.

#### 3.3.1 Örnek seyreltme

Çoklu hızlı sistemlerde uygulanan örnek seyreltme işlemi iki adımdan oluşmaktadır. Bunlar, süzgeçleme ve alt örneklemedir. Alt örnekleme çarpanı  $L$ ,  $L > 0$  olmak üzere tamsayı olarak verilsin. Alt örnekleme,  $x[m_x]$  giriş işaretinin, ilk örneğinden itibaren her  $L$ .

örneğin alınıp, her adımda, aralarda kalan  $L-1$  tane örneğin atılmasıyla,  $y[m_y]$  çıkış işaretinin oluşturulması işlemidir. Alt örnekleme, giriş işaretinin örnekleme hızını  $L$  çarpanıyla azaltır. Alt örnekleme çıkışındaki işaretin örnekleme hızı  $F_y = F_x / L$  olarak elde edilir.

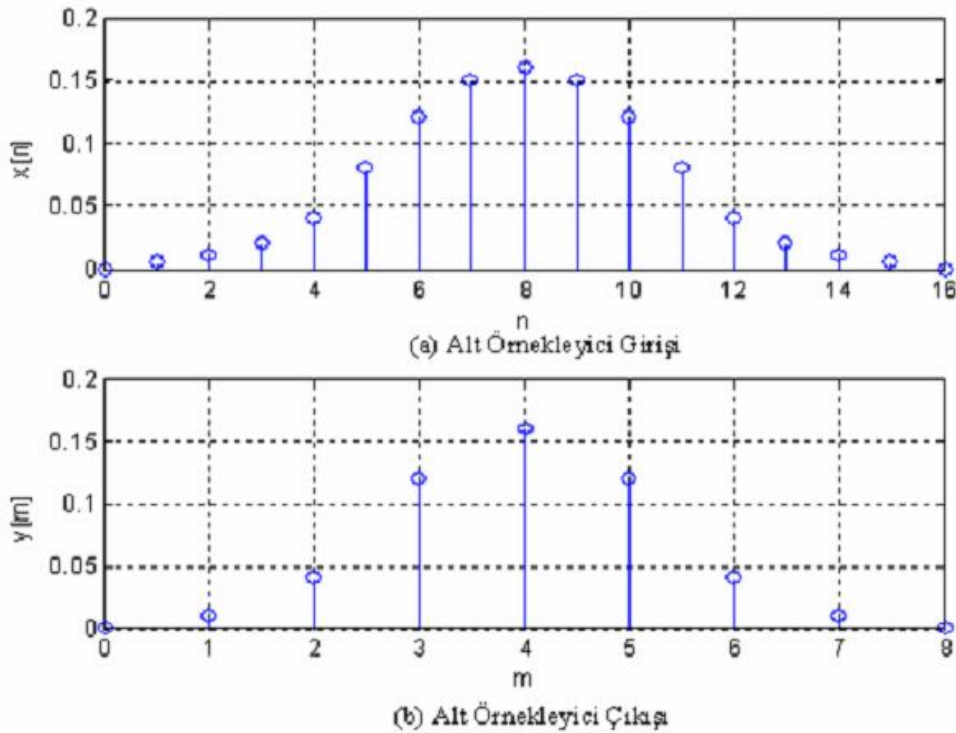


**Şekil 3.4:** Alt Örnekleme

Şekil 3.4' de blok diyagramı ile gösterilen alt örnekleme işlemi,

$$y[m_y] = x[Lm_y], \quad m_y = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (3.12)$$

olarak ifade edilir. Burada  $m_y$ , alt örneklenmiş işaretin indisidir ve giriş işaretinin indisiyle arasındaki ilişkisi  $m_x = Lm_y$  şeklindedir. Şekil 3.5' de,  $L = 2$  alındığı durum için girişe  $x[n]$  işareti uygulandığında çıkış işaretinin, örnekleme oranı değişmiş  $y[m]$  işareti olduğu görülmektedir. Alt örnekleme çıkışındaki işaret, girişin zamanda sıkıştırılmış şeklidir. Alt örnekleme işleminde bilgi kaybı olmasından dolayı  $x[m_x]$  işareti  $y[m_y]$  çıkış işaretinden geri elde edilemez sadece yakın değerler alır.



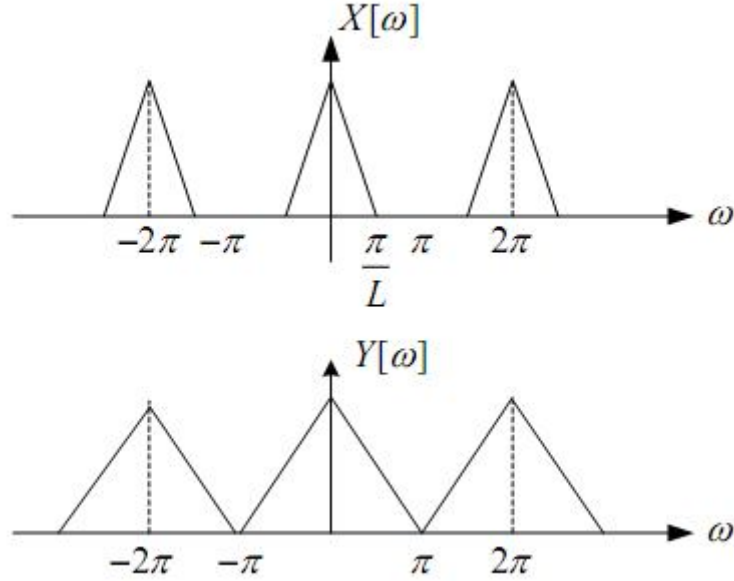
**Şekil 3.5:**  $L=2$  için Alt Örnekleme İşleminin Bir Örneği

Orijinal işaretin frekans spektrumu  $X(\omega)$  olmak üzere çıkış işaretinin spektrumu  $Y(\omega)$ ,



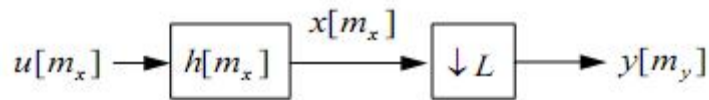
$$Y(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} X\left(\frac{\omega - 2\pi k}{L}\right) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. (3.13) denkleminde çıkış spektrumunun adım adım nasıl elde edildiği açıklanabilir.  $X[\omega/L]$ ' yi elde etmek için  $X[\omega]$ ,  $L$  çarpanıyla genişletilir ve genişletilmiş spektrum,  $X[\omega/L]$ ,  $2\pi$ ' nin katlarıyla ötelenerek  $L-1$  tane ötelenmiş spektrum elde edilir. Genişletilen spektrumun bütün ötelenmiş biçimleri toplanır ve  $L$ ' ye bölünür. Şekil 3.6' da giriş işareti  $x[m_x]$  ile alt örnekleme işlemi  $y[m_y]$ ' nin frekans spektrumu gösterilmiştir. Alt örnekleme işlemi giriş işaretinin zamanda sıkıştırılmış şeklidir. Zamanda sıkıştırma frekansta genişlemeye yol açar. Orijinal işaretin spektrumu  $|\omega| > \pi/L$  aralığında sıfır değilse, yani orijinal işaret  $\pi/L$  ile bant sınırlı değilse, alt örnekleme işlemi çıkışta örtüşme meydana gelir. Örtüşme olduğunda  $x[m_x]$  işareti,  $y[m_y]$  çıkış işaretinden elde edilemez. Örtüşmeyi önlemek için alt örneklemeden önce, kesim frekansı  $\pi/L$ ' den yüksek olmayan, alçak geçiren bir süzgeç kullanılmalıdır. Bu süzgece örnek seyreltme süzgeci ya da örtüşme-önler süzgeci denir.



**Şekil 3.6:** Alt Örnekleme için Frekans Spektrumu Gösterimi

Alt örnekleme işlemi alçak geçiren süzgeçlemeyi takip ettiği yapıya örnek seyreltme denir. Şekil 3.7' de örnek seyreltme diyagramı görülmektedir.



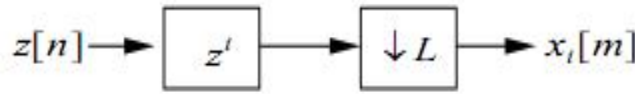
**Şekil 3.7:** Örnek Seyreltme Diyagramı

Şekil 3.7' de  $u[m_x]$ ' in uygulandığı süzgeçleme işlemi doğrusal ve zamanla değişmeyen olmasına rağmen, süzgeçleme ile birlikte yapılan alt örnekleme işlemi, yani örnek seyreltme,

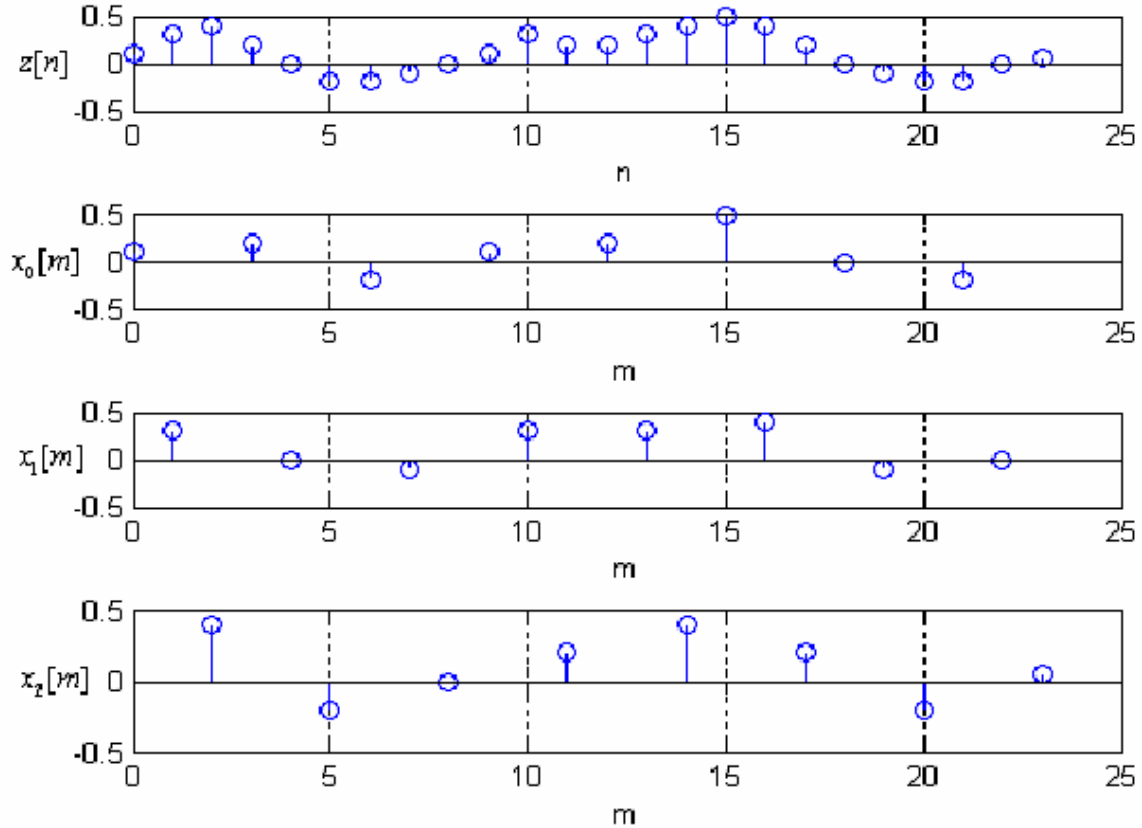
zamanla değişen bir sistemdir. Çünkü, alt örnekleme işlemi zamanla değişen bir işlemdir.  $F_z$ , örnekleme hızında  $z[n]$  ayrık işareti ele alınsın. Temel hızdaki işarete, zamanda öteleme uygulandıktan sonra alt örnekleme yapılarak  $L$  adet farklı alt örneklenmiş işareten oluşan bir küme,  $\{x_0[m], x_1[m], \dots, x_{L-1}[m]\}$  şeklinde elde edilir. Bu kümeye maksimum-örnek-seyreltilmiş işaret kümesi denir. Elde edilen  $L$  adet alt örneklenmiş işaretin hızları aynıdır ve

$$x_i[m] = z[i + mL] \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (3.14)$$

olarak gösterilir. Şekil 3.8’ de zaman ötelemeli alt örnekleme diyagramı verilmiş ve  $L = 3$  için elde edilmiş maksimum-örnek seyreltilmiş işaret kümesi Şekil 3.9’da gösterilmiştir.



Şekil 3.8: Zaman Ötelemeli Alt Örnekleme Diyagramı



Şekil 3.9: Maksimum-Örnek Seyreltilmiş İşaret Kümesi ( $L = 3$ )

### 3.3.2 Ara değerlendirme

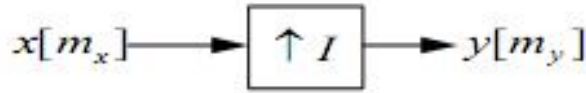
Ara değerlendirme, örnek seyreltmenin tersi bir işlemdir. Ara değerlendirmeyle işaretin örnekleme hızında artış olur. Ara değerlendirme iki işlemden oluşur. Bunlar, sırasıyla, üst örnekleme ve süzgeçlemedir. Üst örneklemede, işaretin art arda gelen örnekleri arasına sıfırlar eklenerek örnekleme hızı arttırılır. İşaret  $I$  çarpanıyla üst örneklenirse işaretin ardışık her iki

örneği arasına  $I - 1$  tane sıfır eklenir ve böylece örnekleme hızı  $I$  çarpanıyla arttırılmış olur. Üst örnekleme şu şekilde elde edilir:

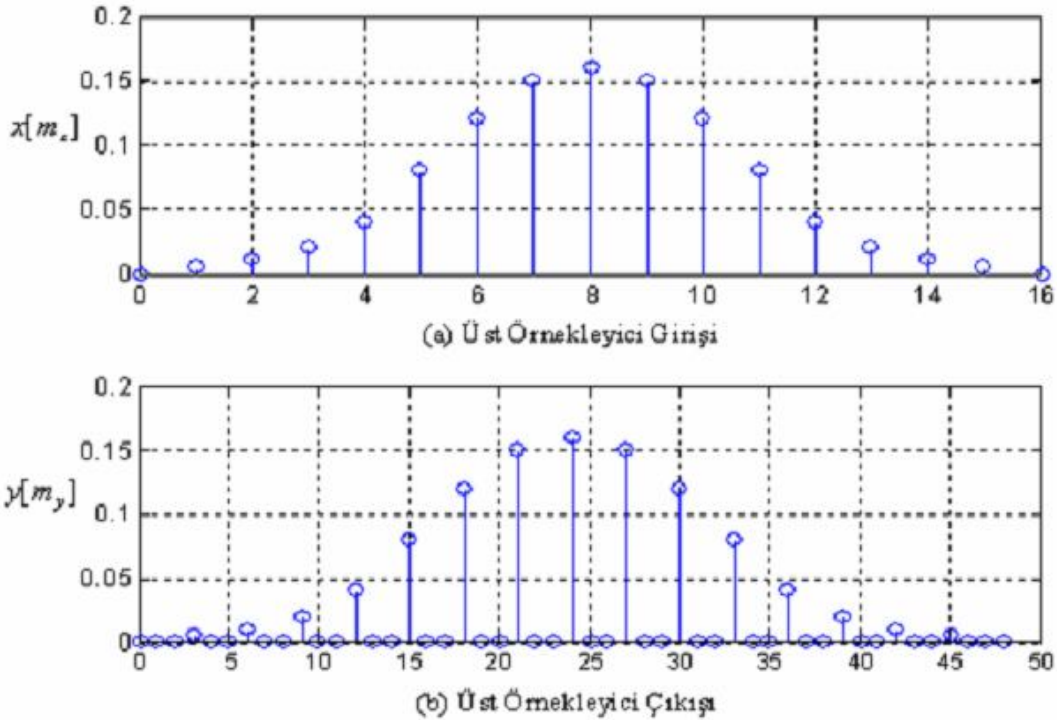
$$y[m_y] = \begin{cases} x[m_y / I] & m_y = A \\ 0 & m_y \neq A \end{cases} \quad (3.15)$$

Burada  $m_y = A$  tamsayıdır.

Üst örnekleme blok diyagramı Şekil 3.10'da ve  $I = 3$  için, üst örnekleme işlemi de Şekil 3.11'de gösterilmiştir.



Şekil 3.10: Üst Örnekleme Blok Diyagramı



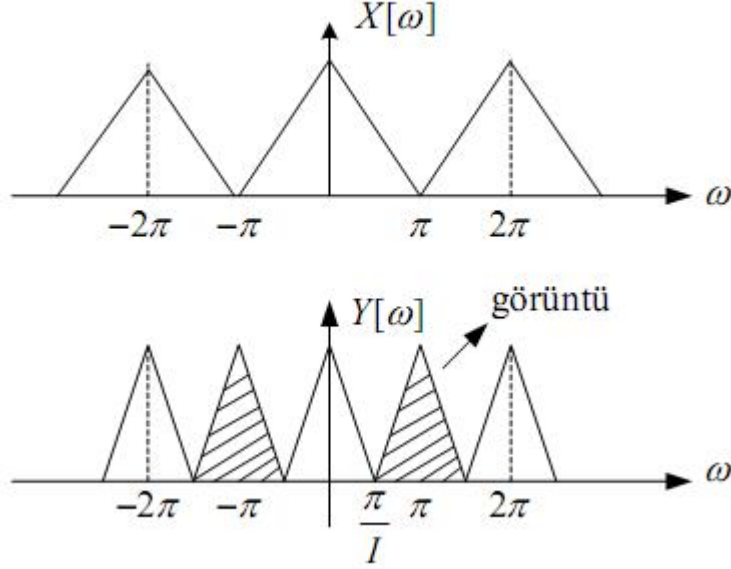
Şekil 3.11: Üst Örnekleme İşlemi ( $I = 3$ )

Giriş işareti  $x[m_x]$ ' in spektrumu ile üst örneklenmiş işaret  $y[m_y]$ ' nin spektrumu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$Y[\omega] = X[\omega L] \quad (3.16)$$

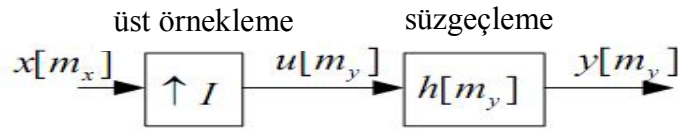
Bu ifadeden,  $Y[\omega]$  çıkış spektrumunun, orijinal spektrum  $X[\omega]$ ' nin,  $L$  çarpanıyla, frekansta sıkıştırılmış şekli olduğu çıkarılır. Üst örneklemenin frekans spektrumundaki etkisi sıkıştırmadır. Şekil 3.12'de görüldüğü gibi orijinal işaretin spektrumu  $2\pi$  ile periyodiktir.

Üst örnekleme işlemi her  $2\pi/I$  değerinde temel spektrumun kopyalarını oluşturur. Buna görüntüleme etkisi denir. Orijinal spektrumun kopyalarına da görüntü denir. Şekil 3.12’de üst örnekleme çıkış spektrumu,  $Y[\omega]$  eğrisinde, görüntüler taralı bölgeler olarak gösterilmiştir.

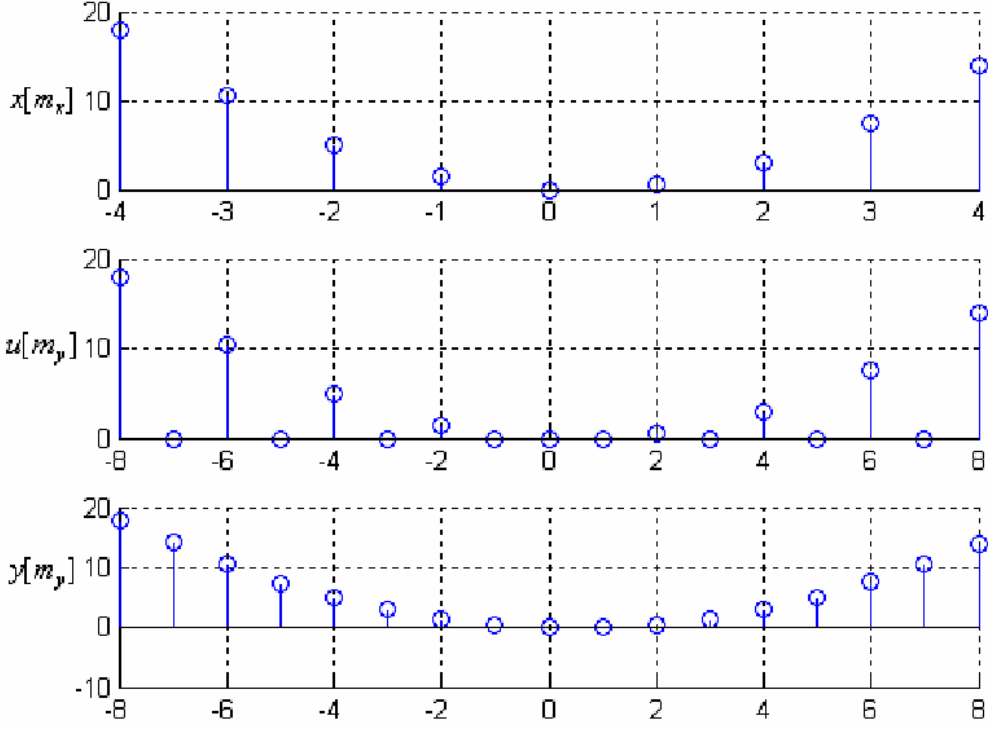


**Şekil 3.12:** Üst Örnekleme İçin Frekans Spektrumu Gösterimi (  $I = 2$  )

Üst örnekleme işlemi sonucu  $[0,2\pi]$  aralığında,  $I-1$  tane istenmeyen görüntü oluşacaktır. Görüntüleme etkisini yok etmek, yani istenmeyen görüntü spektrumlarını kaldırmak için üst örneklemeden sonra kazancı  $I$  ve kesim frekansı  $|\omega_s| \leq \pi/I$  olan, ideal alçak geçiren bir süzgeç kullanılır. Bu süzgece ara değerlendirme süzgeci denir. Sırasıyla, süzgeçleme ve üst örnekleme yapıldığı işleme ara değerlendirme denir. Ara değerlendirme diyagramı Şekil 3.13 ile gösterilmiştir.



**Şekil 3.13:** Ara Değerleme Diyagramı



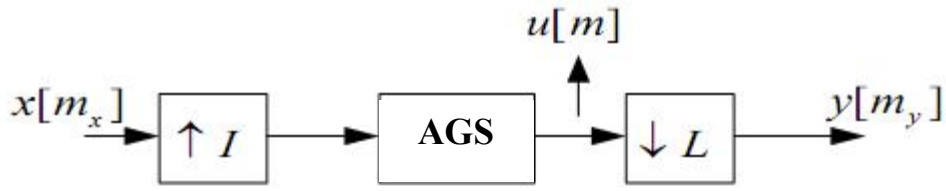
**Şekil 3.14:** Ara Değerleyicideki İşaretler

Üst örneklemeyle elde edilen sıfır değerli örnekler, alçak geçiren süzgeç kullanıldıktan sonra “ara değerlenmiş” değerlere dönüşürler; yani “ara değerlenmiş” değerler, sıfır değerli örneklerin yerini alırlar. Ara değerleyici çıkışındaki işaret, zaman domeninde ara değerlenmiş örneklere sahiptir ve üst örnekleme çıkışındaki işaret ile süzgeç katsayılarının konvolüsyonu sonucu elde edilir. Şekil 3.14’de ara değerlendirme işlemindeki işaretlerin değişimi gösterilmiştir.

Alt örnekleme gibi, üst örnekleme de doğrusal olarak zamanla değişen bir işlemdir. Bu yüzden, ara değerlendirme de doğrusal olarak zamanla değişen bir işlemdir. Üst örnekleme işlemi, bilgi kaybına neden olmadığından, giriş işareti çıkış işaretinden elde edilebilir. Üst örnekleme çıkışındaki işaret,  $L = I$  olacak şekilde alt örnekleme çarpanıyla alt örnekleme girişindeki işaret bulunmuş olacaktır.

### 3.3.3 Örnekleme hızı dönüştürme

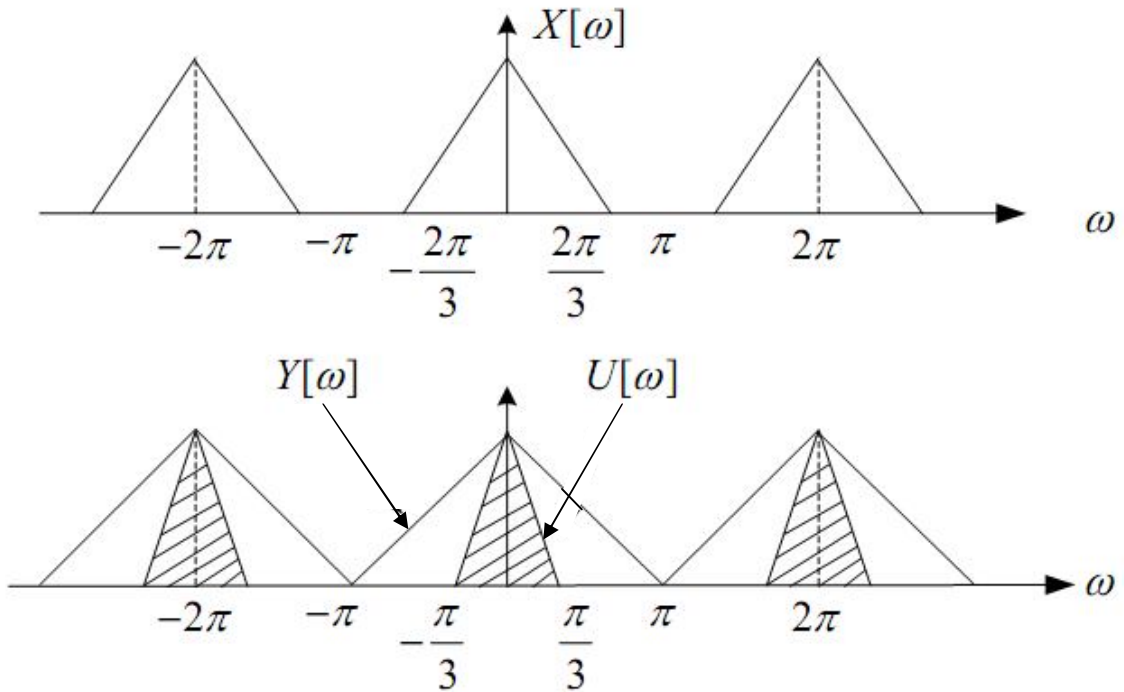
Bazı uygulamalarda, örnekleme hızının, rasyonel bir çarpan ( $I/L$ ) kullanılarak değiştirilmesi gerekebilir. Bunu gerçekleştirmek için Şekil 3.15’deki yapı kullanılır. Bu yapıda,  $I$  ve  $L$  aralarında asaldır.  $I$  çarpanına sahip ara değerleyici ile  $L$  çarpanına sahip örnek seyreltici kaskad bağlanması sonucu rasyonel çarpanla örnekleme hızı dönüştürme gerçekleştirilir. Şekil 3.15’deki yapı sırasıyla üst örnekleme, alçak geçiren süzgeçleme (AGS) ve alt örneklemeden oluşmaktadır.



**Şekil 3.15:** Rasyonel Bir Çarpanla Örnekleme Hızı Dönüştürme

Giriş işareti  $x[m_x]$ ,  $F_x$  örnekleme hızındadır. Çıkış işaretinin örnekleme hızı ise  $F_y = F_x I / L$  ' dir. Sistem hızı ise  $\bar{F} = F_x L$  ' dir. Alçak geçiren süzgeç ise  $F_x I$  hızında çalışmaktadır. Alçak geçiren süzgeç üst örneklemeyle oluşan görüntüleri yok eder ve aynı zamanda alt örneklemenin neden olabileceği örtüşmeyi engeller. Alçak geçiren süzgecin kesim frekansı  $\omega_s = \min(\pi / L, \pi / I)$  değerine eşit veya bu değerden daha küçük olmalıdır.

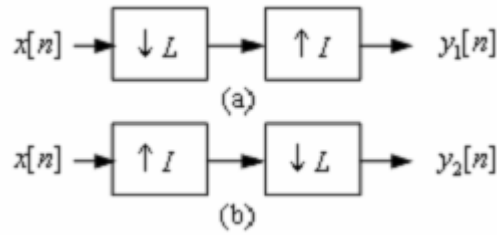
Şekil 3.16'da  $L / I = 3 / 2$  için, örnekleme hızı dönüştürme gösterilmiştir. Burada  $X[\omega]$ , örnekleme hızı dönüştürücüsüne ait giriş işaretinin spektrumunu,  $U[\omega]$  alçak geçiren süzgeç çıkışındaki işaretin spektrumunu ve  $Y[\omega]$ , örnekleme hızı dönüştürücüsüne ait çıkış işaretinin spektrumunu göstermektedir. Şekil 3.16 için ideal alçak geçiren süzgecin kesim frekansı  $\pi / 3$  ' dür.  $X[\omega], Y[\omega]$  ve  $U[\omega]$  spektrumlarının hepsi  $2\pi$  periyoda sahiptirler.



**Şekil 3.16:** (a) Örnekleme Hızı Dönüştürücüsü Girişinin Frekans Cevabı (b) Alçak Geçiren Süzgeç Çıkışındaki ve Örnekleme Hızı Dönüştürücüsü Çıkışındaki Frekans Cevabı

### 3.4 Alt ve Üst Örneklemenin İstatistiksel Özellikleri ve Çevrimsel Durağanlık

En iyi süzgeçlemede, kestirilen işaret ile gözlenen işaret geniş anlamda durağan varsayılmaktadır. Her iki işaretin örnekleme hızları aynı olup, kullanılan süzgeç, doğrusal, zamanla değişmeyen süzgeçtir. Doğrusal zamanla değişmeyen süzgeç, durağanlığı korumaktadır. Çoklu hızlı sistemlerde ise durum farklıdır. Çoklu hızlı sistemlerde periyodiklik söz konusudur. Alt ve üst örnekleme doğrusal zamanla değişen işlemler olduğundan, çoklu hızlı sistemlerde, durağanlık kavramı yerine çevrimsel durağanlık kavramı önem kazanmaktadır. Durağanlık bu sistemlerde korunmamaktadır. Şekil 3.17’de alt ve üst örneklecinin art arda bağlanması gösterilmektedir.



Şekil 3. 17: Alt ve Üst Örnekleycilerin Kaskad Bağlantıları

. Çıkış işareti,

$$y_1[n] = \begin{cases} x[n] & n = 2r \quad r = \dots, -1, 0, 1, \dots \\ 0 & n \neq 2r \end{cases} \quad (3.17)$$

dir.

Şekil 3.17’deki  $y_1[n]$  işareti  $L = I = 2$  için doğrusal, zamanla periyodik olarak değişen işarettir.

Bu sistem, giriş işaretinin çift sayılara karşı düşen değerlerinde ve sıfırda “bir” değerini alan ve tek sayılarda “sıfır” olan bir çarpıcıya eşdeğerdir ve zamanla periyodik olarak değişen katsayılara sahip doğrusal bir sistemdir. Rasgele bir giriş işareti için, çıkış işareti geniş anlamda durağan olmaz. Bu durumda, çevrimsel durağanlık kavramından bahsedilir. Çoklu hızlı bir sistem girişine geniş anlamda durağan (GAD) bir işaret uygulandığında, sistem boyunca işaretin istatistiksel davranışında değişiklik olmaktadır. GAD bir işaret alt örnekleyciye uygulandığında çıkıştaki işaret GAD olurken üst örnekleyciye uygulanması durumunda çıkıştaki işaret, çevrimsel geniş anlamda durağan olmaktadır. Birçok yayında, çoklu hızlı sistemlerde çevrimsel durağanlık açıklanmış ve çoklu hızlı sistem boyunca, işaretin istatistiksel davranışının nasıl değişeceği incelenmiştir. Bir çevrimsel durağan süreç, zaman domeninde, çevrimsel ilişki fonksiyonuyla, frekans domeninde ise çevrimsel spektral

yoğunluğuyla belirtilmektedir (Ohno ve Sakayi 1996 ). İlişki fonksiyonu,

$$R_x[n_1, n_0] = \varepsilon \{X[n_1]X^*[n_0]\} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanan sıfır ortalamalı bir  $X[n]$  sürecinin, çevrimsel geniş anlamda durağan olması için, her  $n_1$  ve her  $n_0$  değerlerinde,

$$R_x(n_1, n_0) = R_x(n_1 + N, n_0 + N) \quad (3.19)$$

eşitliğinin sağlanması, yani ilişki fonksiyonunun periyodik olması gereklidir. Periyodik rasgele bir sürecin ortalaması  $N$  ile periyodik olup,  $k_0$  ve  $k_1$  herhangi iki tamsayı için ilişki fonksiyonu (her  $n_1$  ve her  $n_0$  için ),

$$R_x(n_1, n_0) = R_x(n_1 + k_1 N, n_0 + k_0 N) \quad (3.20)$$

koşulunu sağlamalıdır. (3.20) eşitliği, sadece,  $k_1 = k_0$  için sağlanıyorsa, süreç çevrimsel durağandır denir. Bütün periyodik süreçler çevrimsel durağandır. Fakat tersi doğru değildir. Periyodik süreçlerin zamana bağlı ilişki fonksiyonu şu koşulu sağlar:

$$R_x(n, l) = R_x(n + k_0 N, l + (k_1 - k_0)N) \quad (3.21)$$

Periyodik rasgele süreçler için zamana bağlı ilişki fonksiyonunun her iki değişkeni de periyodiktir.

$k_1 = k_0$  için, (3.21) denklemi, çevrimsel durağan süreçlere ait zamana bağlı ilişki fonksiyonunun sağlaması gereken koşulu verir:

$$R_x(n, l) = R_x(n + k_0 N, l) \quad (3.22)$$

Çevrimsel durağan sürecin zamana bağlı ilişki fonksiyonunun, sadece ilk değişkeni periyodiktir.  $y[m_y] = x[Lm_y]$ ' dir.

Alt örnekleme denklemini kullanarak, alt örnekleyici çıkışındaki işaretin öz ilişki fonksiyonu ile giriş işaretinin öz ilişki fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$R_y[m_0, m_1] = \varepsilon \{x[Lm_0]x^*[Lm_1]\} = R_x[Lm_0, Lm_1] \quad (3.23)$$

Zamana bağlı ilişki fonksiyonu için,

$$R_y[m; l] = \varepsilon \{x[Lm]x^*[L(m-l)]\} = R_x[Lm; Ll] \quad (3.24)$$

elde edilir. Eğer giriş işareti GAD ise, ilişki fonksiyonu  $m$  değişkeninden bağımsız olur ve (3.24)' den,

$$R_y[l] = R_x[Ll] \quad (3.25)$$

elde edilir. Alt örnekleyici çıkış işaretinin GAD olduğu buradan görülebilmektedir. Üst örneklemede, sıfırların eklenmesinden dolayı giriş işareti GAD ise, çıkış işareti hiçbir zaman



GAD olamaz. Giriş işareti GAD ise, çıkış işareti çevrimsel geniş anlamda durağandır (ÇGAD).

### 3.5 Matris Gösterimleri

Çoklu hızlı sistemlerde kullanılan alt örnekleme, üst örnekleme gibi temel işlemleri vektör ve matrisler cinsinden ifade etmek, işlemlerin daha basit bir şekilde yapılmasını sağlar. Burada temel işlemlerden olan alt örnekleme ve üst örneklemenin matris gösterimleri verilecektir.

#### 3.5.1 Alt örneklemenin matris gösterimi

Alt örnekleme diyagramı Şekil 3.4'de gösterilmiş olup, giriş çıkış ilişkisi (3.12) denklemiyle verilmiştir. Alt örnekleme girişine

$$x = \left[ x[0] \ x[1] \ \dots \ x[LM-1] \right]^T \quad (3.26)$$

vektörü uygulanırsa çıkış vektörü:

$$y = \left[ x[0] \ x[L] \ \dots \ x[L(M-1)] \right]^T \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. Burada,  $M$ , çıkış vektörünün uzunluğudur. Alt örnekleme matrisi  $D_L$ ,

( $M \times ML$ ) boyutunda bir matris olup şu şekilde tanımlanır:

$$D_L = I \otimes d^T \quad (3.28)$$

Burada  $I$ , ( $M \times M$ ) boyutunda birim matris;  $d$  ise  $[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  olarak ifade edilen ve ilk değeri 1 diğer değerleri 0 olan ( $L \times 1$ ) boyutunda bir vektör,  $\otimes$ , Kronecker çarpım operatörüdür. Alt örnekleme giriş-çıkış ilişkisi de

$$y = D_L x \quad (3.29)$$

olarak elde edilir.

#### 3.5.2 Üst örneklemenin matris gösterimi

Üst örnekleme diyagramı Şekil 3.11'de gösterilmiş olup giriş çıkış ilişkisi (3.16) denklemiyle verilmiştir. Üst örnekleme girişine

$$x = \left[ x[0] \ x[1] \ \dots \ x[LM-1] \right]^T \quad (3.30)$$

vektörü uygulandığında ve  $O = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  de ( $1 \times L - 1$ ) boyutunda bir vektör olduğunda, çıkış vektörü:

$$y = \left[ x[0] \ O \ x[1] \ O \ \dots \ x[LM-1] \ O \right]^T \quad (3.31)$$

olarak elde edilir. Alt örnekleme matrisi  $U_L$ , ( $M \times M$ ) boyutunda bir matris olup şu şekilde tanımlanır:

$$U_I = I \otimes d \quad (3.32)$$

Burada  $I$ ,  $(M \times M)$  boyutunda birim matris;  $d$  ise  $[1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  olarak ifade edilen ve ilk değeri 1 diğer değerleri 0 olan,  $(L \times 1)$  boyutunda bir vektördür. Üst örnekleme giriş çıkış ilişkisi de

$$y = U_I x \quad (3.33)$$

olarak bulunur. Alt örnekleme ve üst örnekleme arasındaki ilişki  $L = I$  için  $D_L = (U_I)^T$  olarak gösterilebilir.

Bu bölümde, çoklu hızlı işaret işleme konusunda kullanılan temel işlemler gösterilmiştir. Alt örnekleme, örnek seyreltme, üst örnekleme, ara değerleme ve çevrimsel durağanlık kavramları blok diyagramlar ve örnekler yardımıyla açıklanmıştır.

#### 4. ÇOKLU HIZLI EN KÜÇÜK ORTALAMA KARELER

En küçük ortalama kareler en iyi süzgeçleme problemi, bilinen ya da kestirilen ikinci dereceden istatistiklere değil ölçülen veriye dayanmaktadır. Bu yöntemle arzulan veri dizisi ile gözlenen veri dizisi ölçülür, kaydedilir ve süzgeç tasarlamak için kullanılır. En küçük kareler metodundaki ölçüt, hata terimlerinin karelerinin toplamının minimize edilmesidir. En küçük kareler algoritmasını kullanan çoklu hızlı en iyi süzgeçleme Therrien ve öğrencileri tarafından açıklanmıştır (Therrien 2002). Bu süzgeçle her iki gözlem dizisinin kullanılmasının sadece yüksek hızlı ya da düşük hızlı gözlem dizilerinin kullanılmasına göre daha düşük ortalama karesel hata sağlayacağı gösterilmiştir. İlerleyen bölümlerde farklı hızdaki iki ya da daha fazla gözlem dizisi için en küçük ortalama kareler (LMS) uyarlamalı süzgeç yapısı açıklanacaktır.

##### 4.1 En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi

Widrow ve Hoff tarafından 1960'da gerçekleştirilen LMS algoritması, stokastik gradyant algoritması olarak da adlandırılır. LMS algoritması ve onun türevleri uyarlamalı süzgeçlemenin geniş bir alanını kapsar. Tek hızlı LMS algoritması uyarlamalı süzgeçlemeye basit bir çözüm getirir ve LMS algoritmasında matris tersi alma işlemi bulunmamaktadır. Bu sebeple LMS algoritması tüm uyarlamalı doğrusal süzgeç algoritmaları içinde en fazla kullanılan algoritmadır. LMS algoritması özyineli bir algoritmadır. Süzgeç katsayı vektörü için başlangıç değeri seçilir ve katsayılar her  $n$  zaman adımında yani her yeni gözlemde güncellenir. Eğer veri geniş anlamda durağansa ve adım boyu parametresi uygun seçilirse süzgeç katsayıları Wiener-Hopf denklemleriyle tanımlanan en iyi katsayılara yakınsayacaktır. Eğer veri geniş anlamda durağan değilse ve zamanla değişiyorsa süzgeç katsayıları en iyi zamanla değişen süzgeci izlemeye eğilimlidir. Eğer her iterasyonda gradyant vektör tam olarak ölçülebilse ve adım boyu parametresi uygun seçilse, hızlı iniş(steepest descent) algoritması kullanılarak hesaplanan katsayı vektörü gerçekten optimum Wiener çözümüne yakınsar. Gradyan vektörü şu şekilde tanımlanır (Hayes 1996):

$$\nabla[n] = -2p + 2R\omega[n] \quad (4.1)$$

Gradyan vektörü  $\nabla[n]$ ' nin tam olarak hesaplanması için  $R$  ilişki matrisi ve  $p$  çapraz ilişki vektörünün önceden bilinmesi gerekmektedir. Ancak, gerçekte gradyan vektörü tam olarak bulmak mümkün değildir.  $\nabla[n]$  gradyan vektörü kestirimini elde etmek için ilişki matrisi  $R$ ' nin ve çapraz ilişki  $p$ ' nin kestirimleri kullanılır.  $R$  ve  $p$ ' nin en basit kestirimleri giriş vektörünün ve istenen işaretin örneklerine dayalı ani kestirimleridir. Gradyan vektörünün kestirimi kullanılarak süzgeç katsayı vektörü  $\omega$ ' nın güncellenmesi için (4.3) eşitliğiyle

gösterilen yeni bir özyineli ilişki elde edilir.  $\hat{d}[n]$  kestirilen işareti,  $x[n]$  gözlem vektörünü göstermektedir. Kestirilen işaret

$$\hat{d}[n] = \omega^T x[n] \quad (4.2)$$

ile gösterilir. En küçük ortalama kareler metodu

$$\omega[n+1] = \omega[n] + \mu e[n] x[n] \quad (4.3)$$

$$e[n] = d[n] - \omega^T[n] x[n] \quad (4.4)$$

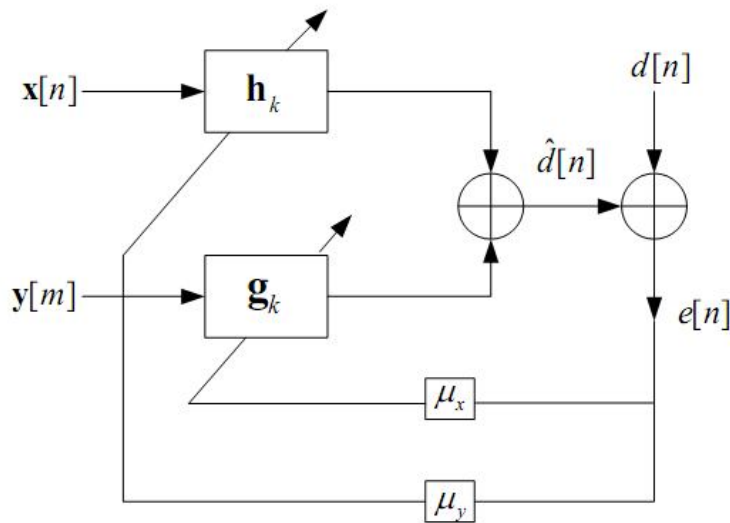
denklemleriyle ifade edilir. Burada  $\mu$  adım boyu parametresidir.  $d[n]$  arzulanan (istenen) işareti göstermektedir. (4.4) eşitliği, katsayı vektörü  $\omega[n]$ ' in şimdiki kestirimine dayalı olarak kestirim hatasını ( $e[n]$ ) tanımlar. LMS algoritması,  $d[n]$  işareti ile  $x[n]$  giriş vektörünün deterministik olması durumunda da kullanılabilir. Eğer adım boyu değeri uygun seçilirse ağırlık katsayıları Wiener süzgecin çözümüne yakın bir çözüme yakınsayacaktır. Adım boyundaki koşul şu şekildedir:

$$0 < \mu < [2/(PR_x[0])] \quad (4.5)$$

Burada  $P$  süzgeç derecesidir,  $R_x[0]$ , giriş işaretinin özilişki fonksiyonunun sıfır zaman gecikmesindeki değeri, yani işaretin gücüdür.

#### 4.2 Çoklu Hızlı En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi

Çoklu hızlı LMS kestirim algoritması farklı örnekleme hızında birçok giriş işaretinin olduğu durum için geliştirilmiştir. Bu sebeple çoklu hızlı durum için denklemler biraz daha karmaşıktır. Şekil 4.1' de görüldüğü gibi iki giriş işareti mevcuttur ve bu işaretler  $d[n]$  arzulanan işaretini kestirmek için birlikte kullanılır.



Şekil 4.1: Çoklu Hızlı LMS Algoritmasının Diyagramı

$x$  girişi ile kestirim aynı hızdadır.  $y$  girişinin hızı,  $x$  girişinin hızının  $1/L$  'sine eşittir.  $h_k$  ve  $g_k$  terimleri sırasıyla yüksek hızlı ve düşük hızlı filtrelere ait katsayı vektörlerini ifade eder.  $m$  düşük hızlı işaretin indisini gösterir.  $k = 0,1,2,\dots, L-1$  için  $n = Lm + k$  yazılır. Yüksek hızlı gözlem vektörü ile düşük hızlı gözlem vektörü sırasıyla

$$x[n] = [x[n] \ x[n-1] \ \dots \ x[n-(P-1)]]^T \quad (4.6)$$

$$y[m] = [y[m] \ y[m-1] \ \dots \ y[m-(Q-1)]]^T \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $P$  ve  $Q$ ,  $h_k$  ve  $g_k$  ile gösterilen iki sonlu dürtü yanıtı (FIR) süzgecin derecelerini gösterir. Kestirim de şu şekli alır:

$$\hat{d}[n] = h_k^T x[n] + g_k^T y[m]; \quad n = Lm + k \quad (4.8)$$

Süzgeç katsayıları periyodiktir. Çoklu hızlı LMS algoritmasında katsayı vektörleri zamanla güncellenir. Herhangi bir  $n$  anındaki katsayı vektörleri,  $h_k[m]$  ve  $g_k[m]$  ile gösterilir ve kestirim

$$\hat{d}[n] = h_k^T[m]x[n] + g_k^T[m]y[m]; \quad k \equiv n(\text{mod } L) \quad (4.9)$$

olarak yazılır. Hata  $e[n]$ ,  $d[n] - \hat{d}[n]$  'e eşittir.  $\mu_x$  ve  $\mu_y$  adım boyu parametreleri olmak üzere çoklu hızlı LMS algoritmasının süzgeç katsayılarının güncellendiği kısım şu şekildedir:

$$h_k[m+1] = h_k[m] + \mu_x e[n] x[n] \quad (4.10)$$

$$g_k[m+1] = g_k[m] + \mu_y e[n] y[m] \quad (4.11)$$

### 4.3 Normalize En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi

LMS algoritması oluşturulması basit olmakla birlikte, giriş işaretinin özdeğer değişimi hızlı olduğunda kötü bir yakınsamaya sahiptir. Bu algoritmanın işlem karmaşıklığının biraz artırılmasıyla elde edilen normalize en küçük ortalama kareler (NLMS) algoritması bu problemi çözer. LMS algoritmasının, giriş işaretinin süzgeç uzunluğu kadar kısmının gücü ile normalize edilmesiyle NLMS algoritması elde edilir. NLMS algoritması

$$\omega[n+1] = \omega[n] + \frac{\mu x[n] e[n]}{\alpha + x^T[n] x[n]} \quad (4.12)$$

olarak yazılabilir, burada paydada olası bir sıfıra bölme işlemine engel olması için küçük bir  $\alpha > 0$  katsayısı kullanılır. NLMS algoritması tahminlerinin kararlı bir şekilde optimum parametre değerlerine yakınsayabilmesi için  $\mu$  adım parametresi,

$$0 < \mu < 2 \quad (4.13)$$

aralığında seçilmelidir (Haykin 2002). Her adımda yapılan normalizasyon işlemi  $\mu$  adım parametresinin  $\lambda_{\max}$  özdeğerine olan bağımlılığını ortadan kaldırır. Böylece  $\mu$  adım parametresinin sayısal değeri algoritmanın daha hızlı yakınsayabilmesi için rahatlıkla büyük seçilebilir. Normalize en küçük ortalama kareler (NLMS) algoritmasının gerçekleştirilmesinde yapılan normalizasyon işleminden dolayı çarpma sayısı ilk bakışta  $(3M + 2)$  gibi görünse de,  $x^T[n]x[n]$  ifadesinin değerinin hesaplanması için gereken işlem sayısı  $M$  ' den 1 ' e düşürülebilir. Burada NLMS algoritmasındaki  $x^T[n]x[n]$  çarpımı

$$x^T[n]x[n] = x^2[n] + x^2[n-1] + \dots + x^2[n-M+1] \quad (4.14)$$

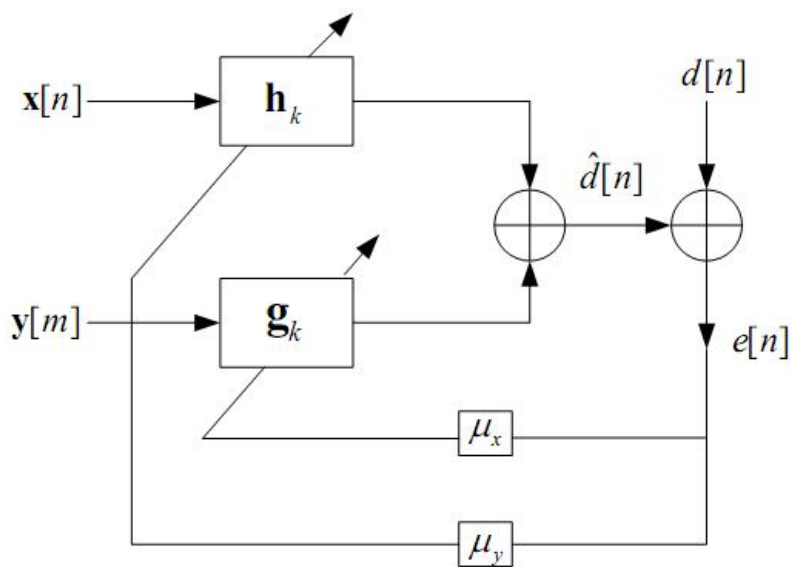
şeklinde yazılabilir. Buradan  $x^T[n+1]x[n+1]$  çarpımı da,

$$x^T[n+1]x[n+1] = x^T[n]x[n] + x^2[n+1] - x^2[n-M+1] \quad (4.15)$$

şeklinde, daha önce hafızada saklanan toplama bir sonraki adımda sadece  $x^2[n+1]$  çarpımı ilave edilip önceden hesaplanmış olan son terim  $x^2[n-M+1]$  çıkarılarak elde edilebilir. Yani sadece  $x^2[n+1]$  çarpımından dolayı çarpma sayısı 1 (Treichler ve ark. 1987). Bu durumda NLMS algoritmasının gerçekleştirilmesi için yapılan çarpma sayısı LMS algoritmasına göre 2 artarak  $(2M + 3)$  olmaktadır.

#### 4.4 Çoklu Hızlı Normalize En Küçük Ortalama Kareler Yöntemi

Çoklu hızlı normalize en küçük ortalama kareler (multirate-NLMS) kestirim algoritması farklı örnekleme hızında birçok giriş işaretinin olduğu durum için geliştirilmiştir. Bu sebeple çoklu hızlı durum için denklemler biraz daha karmaşıktır.



Şekil 4.2: Çoklu Hızlı NLMS Algoritmasının Diyagramı

$x$  girişi ile kestirim aynı hızdadır.  $y$  girişinin hızı,  $x$  girişinin hızının  $1/L$  ' sine eşittir.  $h_k$  ve  $g_k$  terimleri sırasıyla yüksek hızlı ve düşük hızlı süzgeçlere ait katsayı vektörlerini ifade eder.  $m$  düşük hızlı işaretin indisini gösterir.  $k = 0,1,2,\dots, L-1$  için  $n = Lm + k$  yazılır. Yüksek hızlı gözlem vektörü ile düşük hızlı gözlem vektörü sırasıyla,

$$x[n] = \begin{bmatrix} x[n] & x[n-1] & \dots & x[n-(P-1)] \end{bmatrix}^T \quad (4.16)$$

$$y[m] = \begin{bmatrix} y[m] & y[m-1] & \dots & y[m-(Q-1)] \end{bmatrix}^T \quad (4.17)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $P$  ve  $Q$ ,  $h_k$  ve  $g_k$  ile gösterilen iki FIR süzgecin derecelerini gösterir. Kestirim de şu şekli alır:

$$\hat{d}[n] = h_k^T x[n] + g_k^T y[m]; \quad n = Lm + k \quad (4.18)$$

Süzgeç katsayıları periyodiktir. Çoklu hızlı NLMS algoritmasında katsayı vektörleri zamanla güncellenir. Herhangi bir  $n$  anındaki katsayı vektörleri,  $h_k[m]$  ve  $g_k[m]$  ile gösterilir ve kestirim

$$\hat{d}[n] = h_k^T[m] x[n] + g_k^T[m] y[m]; \quad k \equiv n \pmod{L} \quad (4.19)$$

olarak yazılır. Hata  $e[n]$ ,  $d[n] - \hat{d}[n]$  'e eşittir.  $\mu_x$  ve  $\mu_y$  adım boyu parametreleri olmak üzere çoklu hızlı NLMS algoritmasının süzgeç katsayılarının güncellendiği kısım şu şekildedir:

$$h_k[m+1] = h_k[m] + \frac{\mu_x x[n] e[n]}{\alpha + x^T[n] x[n]} \quad (4.20)$$

$$g_k[m+1] = g_k[m] + \frac{\mu_y y[m] e[n]}{\alpha + y^T[m] y[m]} \quad (4.21)$$

Bu bölümde, çoklu hızlı en küçük ortalama kareler ile çoklu hızlı normalize en küçük ortalama kareler yöntemleri açıklanmıştır. Bu yöntemlerle ilgili matematiksel eşitlikler ve temel kavramlar gösterilmiştir.

## 5. GİRİŞ İŞARETLERİNİN ÖNERİLEN KESTİRİM YÖNTEMLERİ

### 5.1 Giriş

Bu bölümde, çoklu hızlı sistemlerde uyarlamalı işaret işleme yöntemleriyle işaretlerin geri edilmesi işlemi gerçekleştirilmiştir. Kullanılan yöntemler, çoklu hızlı en küçük ortalama kareler (multirate-LMS) ve çoklu hızlı normalize en küçük ortalama kareler (multirate-NLMS) yöntemleridir. Bu yöntemler, farklı veri dizileri ve farklı ölçüm gürültüleri için denenmiş, sonuçlar, ayrı ayrı, grafiklerle verilmiş ve yorumlanmıştır. Uygulamalar için gerekli temel kavramlar, problem tanımı, kullanılan sistemin yapısı ve yapılmış benzetimlerin sonuçları, sırayla, bu bölümde açıklanmıştır.

### 5.2 Temel Kavramlar

#### 5.2.1 Birinci Dereceden Özbağlanımlı Süreç (Model)

Bu yüksek lisans tezinde, gerçekleştirilen ilk benzetimlerde, giriş işaretlerinin birinci dereceden özbağlanımlı süreçten (auto regressive-AR) elde edildiği varsayılmıştır. Birinci dereceden özbağlanımlı süreç şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$x[n] = c + \alpha x[n-1] + u[n] \quad (5.1)$$

Burada,  $x[n]$ ,  $n$  anındaki değeri;  $x[n-1]$ ,  $n$  anından bir önceki değeri;  $c$  sabit değeri;  $\alpha$  model parametresini;  $u[n]$  ise beyaz gürültüyü göstermektedirler.  $u[n]$ , beyaz gürültüsünün, ortalaması 0 ve varyansı  $\sigma_{u[n]}^2$  olarak varsayılmıştır.  $\alpha$  model parametresinin  $|\alpha| < 1$  değerleri için, süreç, geniş anlamda durağan olmaktadır. Eğer,  $\alpha = 1$  olursa,  $x[n]$  işareti sonsuz varyansa sahip olur ve bu yüzden geniş anlamda durağan olmaz.  $c$  sabit değerinin sıfır değeri için sürecin ortalaması “sıfır” olmaktadır.

#### 5.2.2 İşaret-Gürültü Oranı (SNR)

İşaret-gürültü oranı şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$SNR = \frac{P_{\text{isaret}}}{P_{\text{gürültü}}} \quad (5.2)$$

SNR, işaret ile gürültü arasındaki güç oranı olarak tanımlanmaktadır. Burada  $P_{\text{isaret}}$ , işaretin ortalama gücüdür. İşaret ve gürültü güçlerinin her ikisi de bir sistemde aynı noktalarda ölçülmüş olmalıdır. SNR, uygulamalarda çoğunlukla logaritmik desibel bareminde kullanılmaktadır. Logaritmik desibel bareminde SNR şu şekilde tanımlanır:

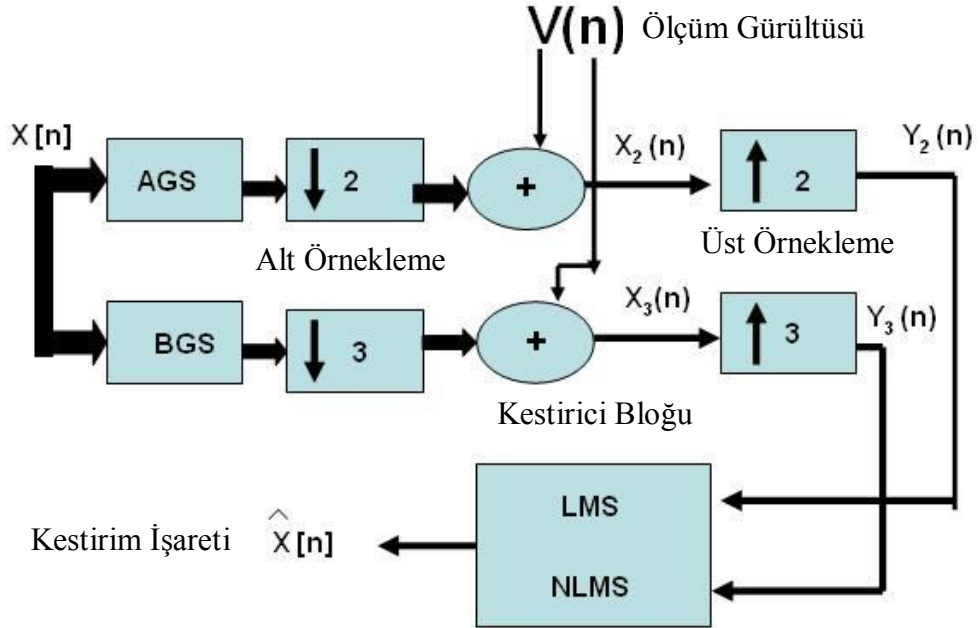
$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{isaret}}}{P_{\text{gürültü}}} \right) = P_{\text{isaret},dB} - P_{\text{gürültü},dB} \quad (5.3)$$



### 5.3 Sistem Tanımı

Tasarlanan çoklu hızlı kestirici sistemi Şekil 5.1’ de gösterilmiştir. Sistem girişine uygulanan ilk işaret, birinci dereceden özbağlanımlı süreçten elde edilmiş, rasgele beyaz gürültü işaretidir. Daha sonra, elde edilen bu giriş işareti, iki farklı süzgeçten geçirilmiştir. Bu süzgeçlerden biri alçak geçiren süzgeç, diğeri ise bant geçiren süzgeçtir. Süzgeçlemeler sonucu elde edilen gözlem işaretleri alt örneklemeden geçirilmiş, elde edilen gözlem işaretlerine ölçüm gürültüsü eklenmiş ve devamında da gürültülü gözlem işaretleri üst örneklemeden geçirilmiştir. Bu işlemler sonucu elde edilen gözlem işaretleri, çoklu hızlı LMS ve çoklu hızlı NLMS algoritmaları yardımıyla, giriş işareti ile karşılaştırılmış ve ortalama karesel hata minimize edilerek, giriş işaretinin kestirimi işlemi tamamlanmıştır.

Sistem girişine uygulanan ikinci işaret, stereo bir ses işaretidir. Bu ses işareti 2,02 saniye boyunca kaydedilmiş, 22.05 kHz örnekleme frekansında örneklenmiş ve iki kanallı bu ses işaretinin, bir kanalına ait olan bileşenleri giriş işareti olarak alınmıştır. Yaklaşık yüz bin adet bileşeni olan bu ses işareti, öncelikle, tek veri dizisi olarak işlenmiş, daha sonra bloklar halinde işlenmiştir. Girişe uygulanan bu ses işaretlerine de, özbağlanımlı süreçten elde edilen işarete uygulanan işlemlerin aynısı uygulanmış ve kestirim işlemi tamamlanmıştır.



Şekil 5. 1: Çoklu hızlı kestirici sistemi

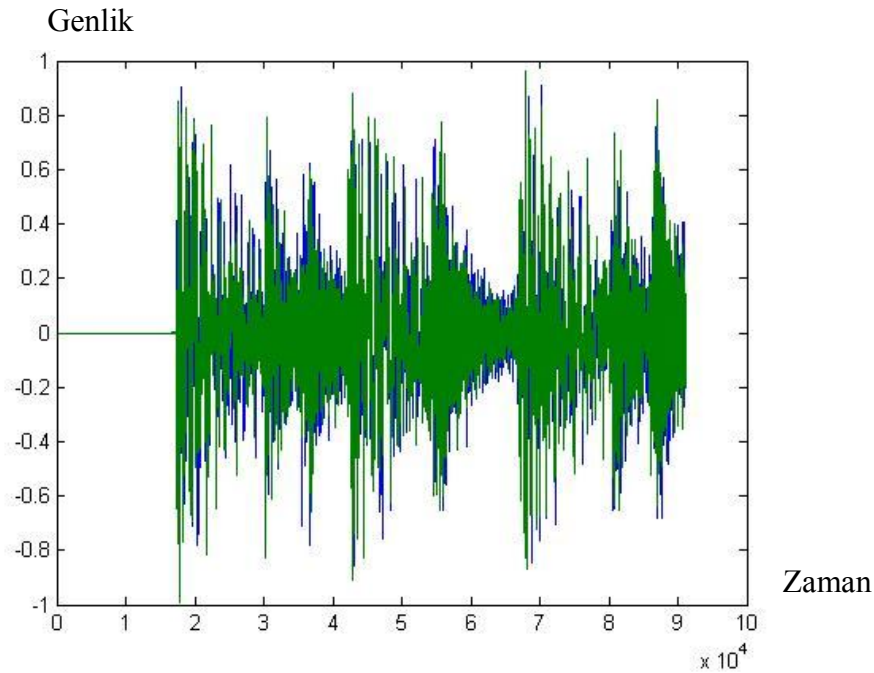
### 5.4 Benzetimlerin Açıklanması

Birinci dereceden özbağlanımlı süreçten elde edilmiş ilk işaret,

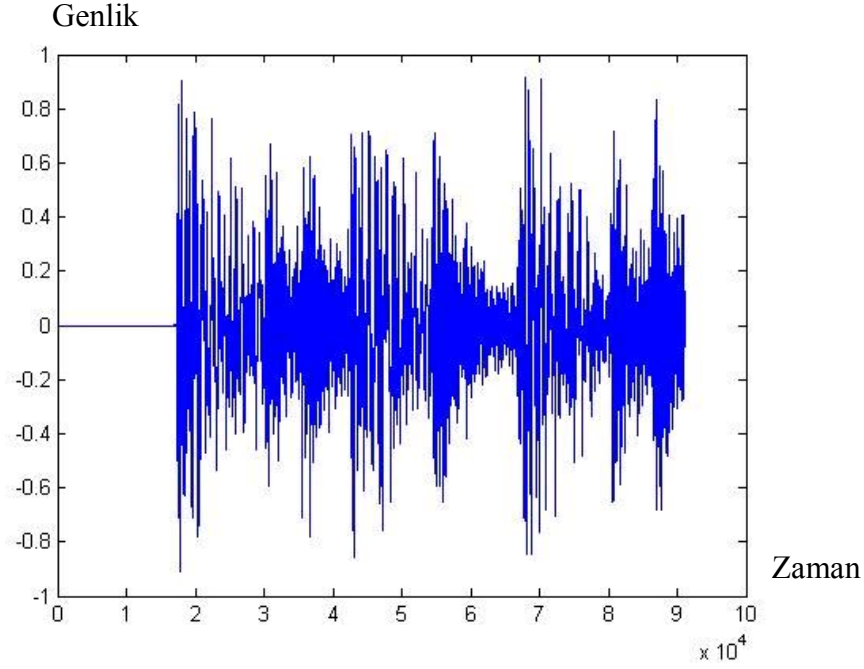
$$x[n] = 0.97 * x[n - 1] + u[n] \quad (5.4)$$

şeklindedir. Burada  $u[n]$  işareti, ortalaması 0, varyansı 0,0591 olan beyaz gürültü şeklinde;  $x[n]$  işareti ise ortalaması 0, varyansı 1 olan işaret şeklinde seçilmişlerdir.  $x[n]$  işaretinin varyansı 1 olduğundan dolayı, 10 dB işaret-gürültü oranı (SNR) sağlayabilmek için, gürültünün varyansı 0,1 olarak alınmış ve benzetimlere uygulanmıştır. Yine aynı şekilde 20 dB işaret-gürültü oranı (SNR) sağlayabilmek için, gürültünün varyansı 0,01 olarak alınmış, benzetimlere uygulanmıştır.

Sistem girişine uygulanan ikinci işaret, Şekil (5.2)' de gösterilen stereo ses işaretidir. Girişe uygulanan stereo ses işaretinin varyansı 0,0416 olduğundan dolayı, 10 dB işaret-gürültü oranı (SNR) sağlayabilmek için, gürültünün varyansı 0,00416 olarak alınmış ve benzetimlere uygulanmıştır.



Şekil 5.2: Sistem girişine uygulanan stereo ses işareti



**Şekil 5.3:** Stereo Ses İşaretinin Bir Kanalına Ait Bileşeni

Daha sonra bu iki işaret; iki farklı süzgeçten geçirilmiştir. Bu süzgeçlerden birincisi alçak geçiren süzgeçtir ve süzgece ilişkin katsayı vektörü şu şekildedir:

$$h_{AGS} = [0.2357 \quad 0.9428 \quad 0.2357] \quad (5.5)$$

İkincisi ise bant geçiren süzgeçtir ve o süzgece ilişkin katsayı vektörü de şu şekilde alınmıştır:

$$h_{BGS} = [0.4950 \quad -0.8098 \quad -0.3148] \quad (5.6)$$

Süzgeçlerin birinin alçak geçiren, diğerinin de bant geçiren olarak alınmasının sebebi çeşitliliktir (diversity). Burada süzgeçlemenin temel sebebi bant genişliğini sınırlamaktır. Alçak geçiren süzgeç çıkışındaki gözlem işareti  $x_2[n]$ , bant geçiren süzgeç çıkışındaki gözlem işareti de  $x_3[n]$  olarak elde edilmiştir. Daha sonra  $x_2[n]$  gözlem işareti alt örnekleme oranı 2 olan alt örnekleyciden geçirilmiş, devamında  $x_2[n]$  gözlem işaretine ölçüm gürültüsü eklenmiş ve son olarak da üst örnekleme oranı 2 olan üst örnekleyciden geçirilmiştir. Aynı işlemler  $x_3[n]$  gözlem işaretine, alt ve üst örnekleme oranları 3 olacak şekilde tekrarlanmıştır. Burada alt örnekleme işleminin temel amacı örnekleme frekansını sınırlamaktır. Üst örnekleme amacı ise benzetimlerde indislerin eşlenmesini sağlamaktır. Bu işlemler sonucu  $x_2[n]$  gözlem işaretinden,  $y_2[n]$  kestirici giriş işareti;  $x_3[n]$  gözlem işaretinden de  $y_3[n]$  kestirici giriş işareti elde edilmiştir. Alt örnekleme oranlarının ortak katlarının en küçüğü 6 olduğundan dolayı, uyarlamalı süzgeçlemede,  $y_2[n]$  ve  $y_3[n]$  işaretleri, altılı bloklar halinde uyarlamalı süzgeç katsayıları ile çarpılarak kestirim işareti elde edilmiştir. Süzgeç katsayıları her iki algoritmada da başlangıç değerleri 0 olacak şekilde seçilmiştir. En iyi

kestirimi sağlayan LMS ve NLMS süzgeçlerinin katsayıları, periyodik olarak zamanla değişen katsayılardır. Kestirim hatası,

$$e[n] = x[n] - x_c[n] \quad (5.7)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Uyarlamalı süzgeç katsayıları (LMS veya NLMS katsayıları), kestirim işareti ve adım boyu parametresi yardımıyla, her bir adımda, güncellenmiştir. Algoritmalarda, adım boyu parametreleri deneysel olarak seçilmiştir. Ortalama karesel hatayı elde etmek için birden fazla benzetim yapmak gerekmektedir. Bu yüzden benzetim yüz defa tekrarlanmış ve her bir tekrarda, yeni üretilen giriş işareti ile kestirim işareti arasındaki hata hesaplanmış ve bu hesaplanan değerler toplanmış, benzetim sayısına bölünerek ortalama karesel hata bulunmuştur.

### 5.5 Benzetim Sonuçları ve Sonuçların Yorumlanması

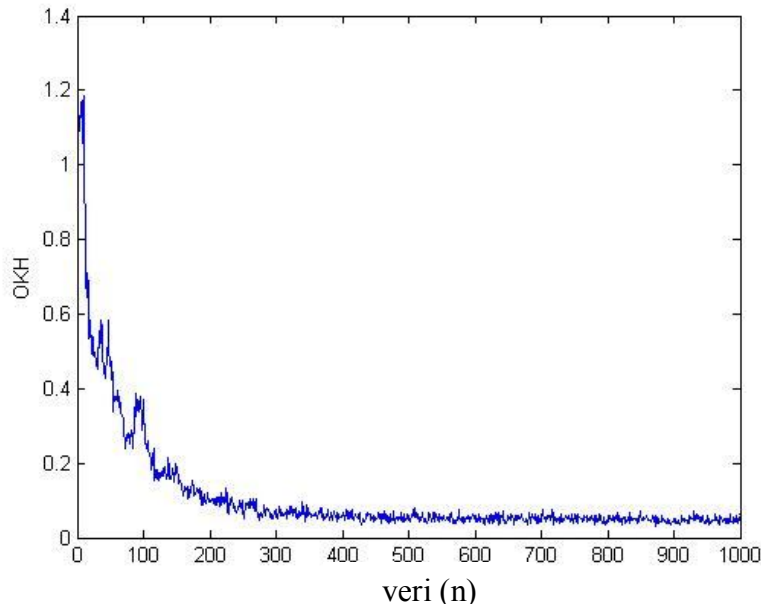
Benzetim sonuçları farklı ölçüm gürültüleri eklenerek, İki farklı giriş işareti için, grafiklerle gösterilmiştir.

#### 5.5.1. (5.4) eşitliği ile gösterilen giriş işareti için benzetim sonuçları

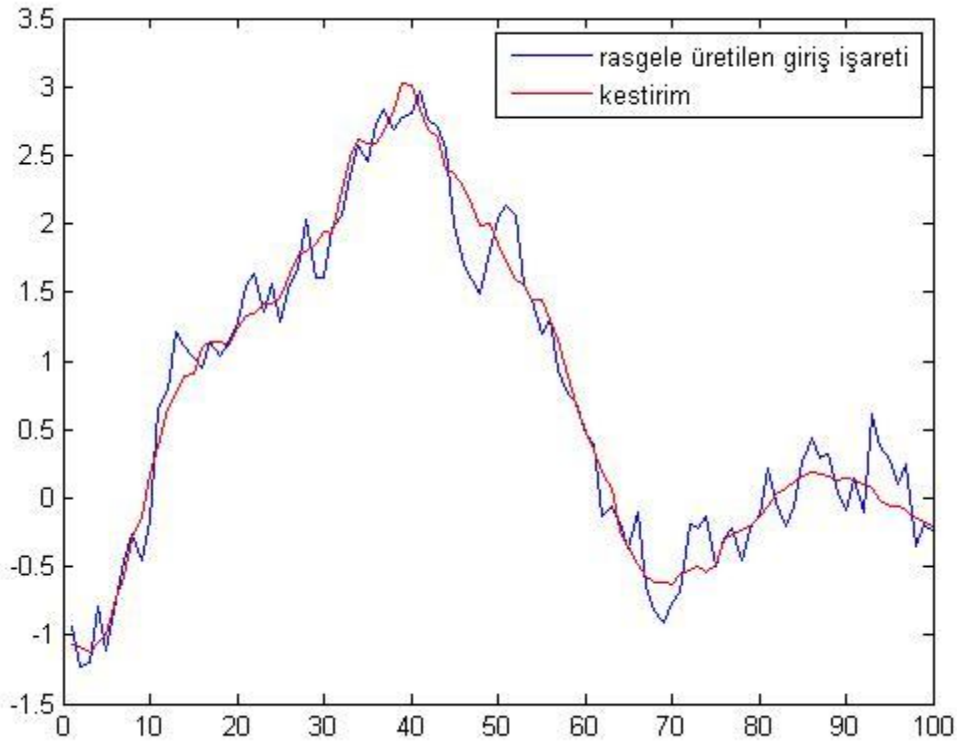
##### a) SNR=20 dB için benzetim sonuçları

##### 1) LMS algoritmasıyla elde edilen sonuçlar:

Grafiklerdeki OKH, ortalama karesel hatayı temsil etmektedir.



Şekil 5.4: SNR=20 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

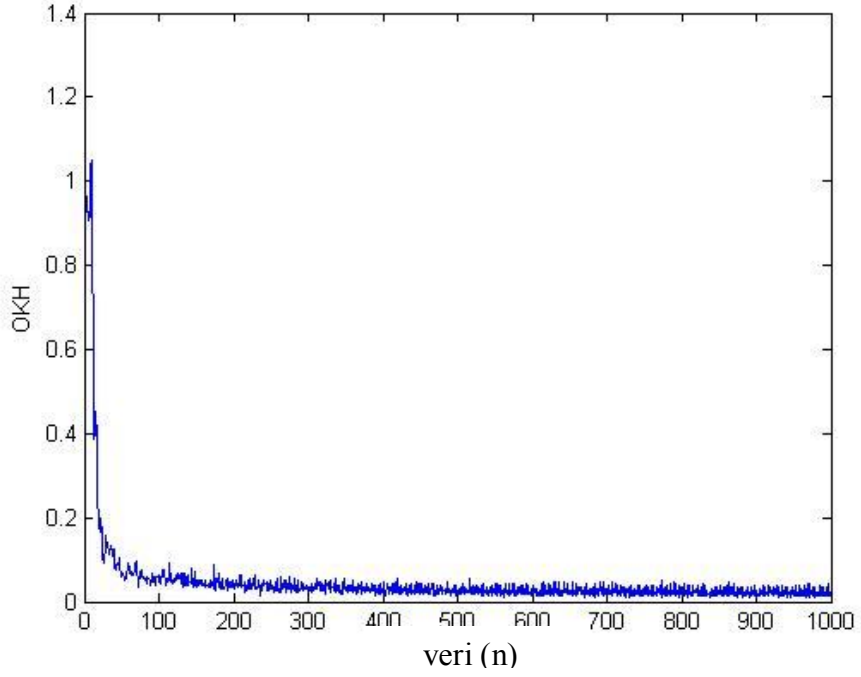


**Şekil 5.5:** SNR=20 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Kestirimi Grafiği

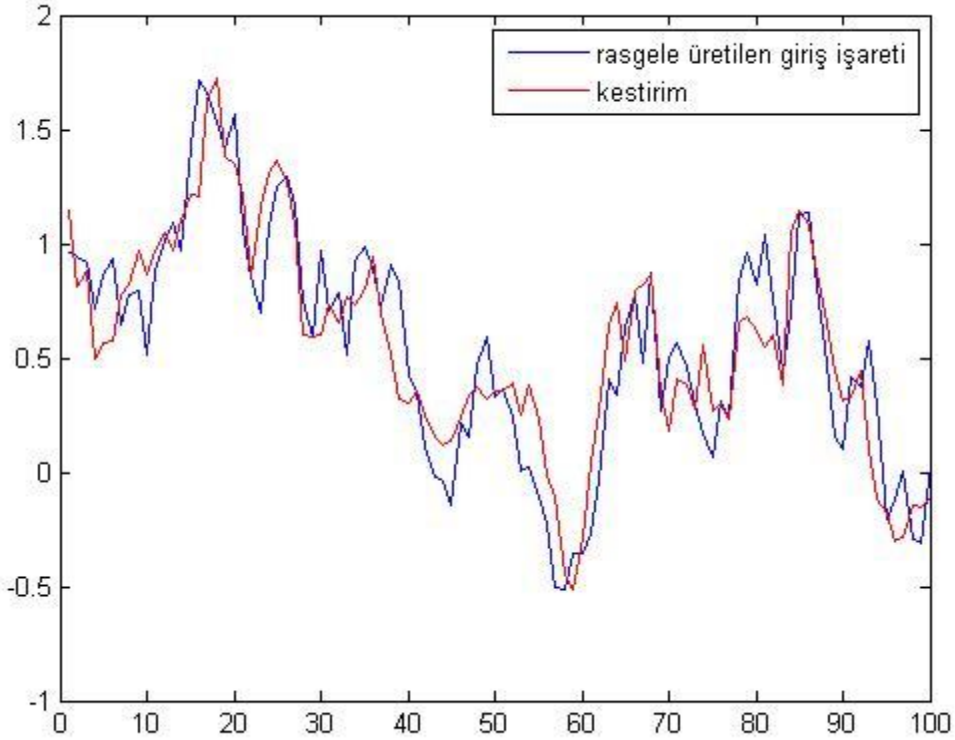
Şekil 5.4 incelendiğinde, yaklaşık 200. iterasyondan sonra algoritmanın yakınsama sağladığı ve olabilecek en düşük ortalama karesel hata değerinde kararlı bir öğrenme eğrisi takip ettiği görülmektedir. Bu grafik, adım boyu parametresi  $\mu = 0.005$  için elde edilmiştir. Adım boyu parametresi, kararsızlığa neden olmayacak şekilde en büyük seçilmiştir. Eğer adım boyu parametresi çok küçük seçilirse her bir adım, katsayı vektörleri üzerinde küçük değişimlere sebep olacak ve algoritma yavaş çalışacaktır. Adım boyu çok büyük seçilirse algoritma kararsız hale gelebilir.

Şekil 5.5 incelendiğinde kestirimin başarılı olduğu görülmektedir. Kestirilen işaret, orijinal işareti olabildiğince izlemektedir. Burada tam bir kestirim sağlanamamasının sebeplerinden birisi alt örnekleme işlemidir. Alt örnekleme işlemleri sonucunda, 1000 uzunluklu veri dizisi yaklaşık 833 uzunluklu bir veri dizisine dönüşmektedir, yani veri kaybı olmaktadır. Bu yüzden kestirim tam hatasız bir şekilde yapılamamaktadır. Ayrıca diğer bir sebep de eklenen ölçüm gürültüsüdür. Ölçüm gürültüsü de kestirimin performansını olumsuz etkilemektedir.

## 2) NLMS algoritmasıyla elde edilen sonuçlar:



Şekil 5.6: SNR=20dB için (5.4)' deki işaretin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği



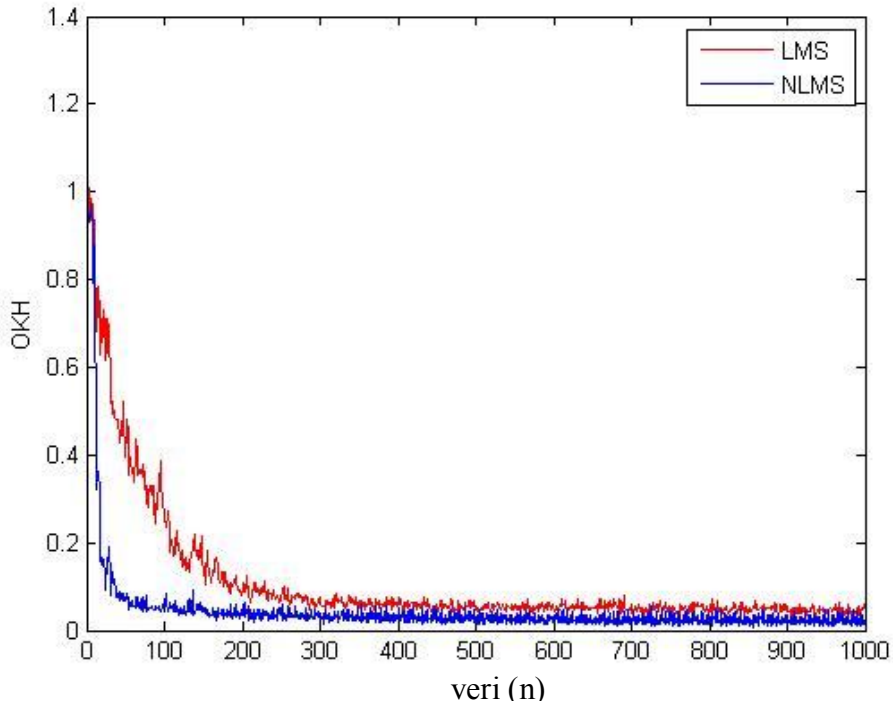
Şekil 5.7: SNR=20 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin NLMS Kestirimi Grafiği

Şekil 5.6 incelendiğinde, yaklaşık 100. iterasyondan sonra algoritmanın yakınsama sağladığı ve olabilecek en düşük ortalama karesel hata değerinde kararlı bir öğrenme eğrisi

takip ettiği görülmektedir. Bu grafik, adım boyu parametresi  $\mu = 0.5$  için elde edilmiştir. Adım boyu parametresi, kararsızlığa neden olmayacak şekilde en büyük seçilmiştir.

Şekil 5.7 incelendiğinde, kestirimin başarılı olduğu görülmektedir. Kestirilen işaret, orijinal işareti olabildiğince izlemektedir. Burada tam bir kestirim sağlanamamasının sebeplerinden birisi alt örnekleme işlemidir. Alt örnekleme işlemleri sonucunda, 1000 uzunluklu veri dizisi yaklaşık 833 uzunluklu bir veri dizisine dönüşmektedir, yani veri kaybı olmaktadır. Bu yüzden kestirim tam hatasız bir şekilde yapılamamaktadır. Ayrıca diğer bir sebep de eklenen ölçüm gürültüsüdür. Ölçüm gürültüsü de kestirimin performansını olumsuz etkilemektedir.

### 3) LMS ile NLMS sonuçlarının birlikte gösterilmesi:

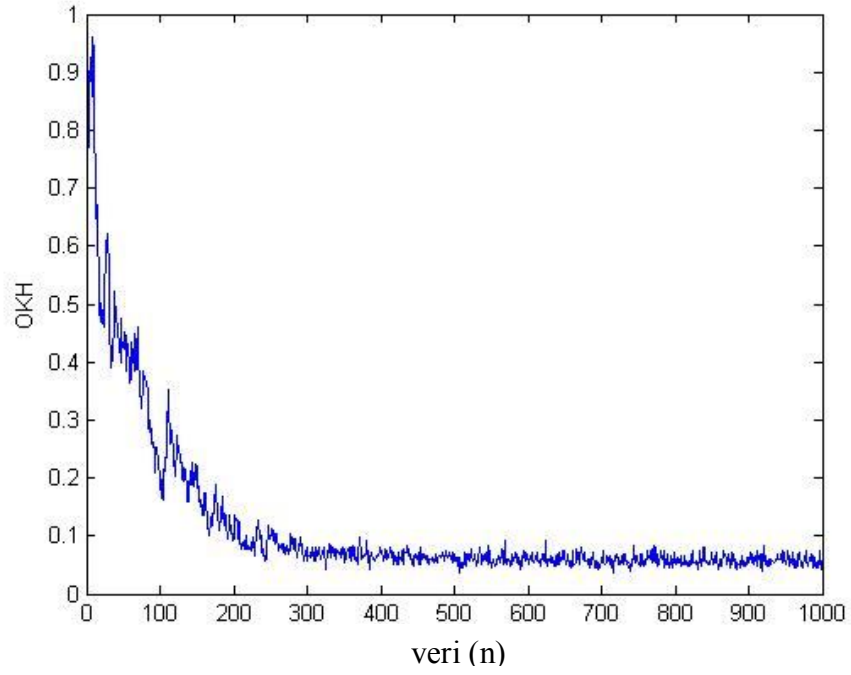


**Şekil 5.8:** SNR=20 dB için (5.4) işaretinin LMS-NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

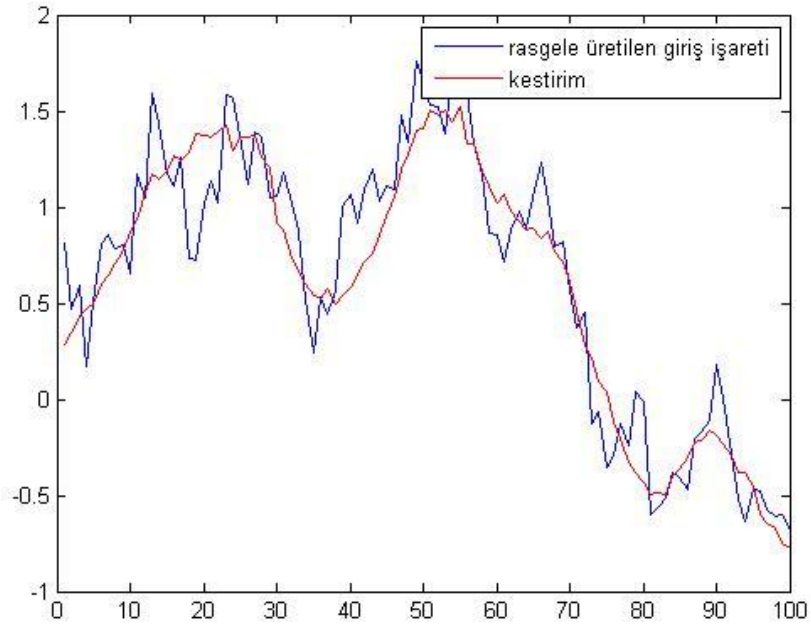
Şekil 5.8 incelendiğinde, NLMS algoritmasının LMS algoritmasına göre daha hızlı yakınsadığı ve daha düşük ortalama karesel hataya sahip olduğu görülmektedir. Bunun temel sebebi, LMS algoritmasının, giriş işaretinin özdeğer değişimi hızlı olduğunda kötü bir yakınsamaya sahip olmasıdır. LMS algoritmasının işlem karmaşıklığının biraz artırılmasıyla, elde edilen NLMS algoritması bu problemi çözmektedir. Çünkü NLMS algoritmasında, adım büyüklüğü giriş gücü ile normalize edilmektedir. Böylece yakınsamanın giriş işaretine olan bağımlılığı ortadan kalkmaktadır. Sonuç olarak NLMS algoritması, LMS algoritmasına göre daha iyi performans sağlamaktadır.

### b) SNR=10 dB için benzetim sonuçları

### 1) LMS algoritmasıyla elde edilen sonuçlar:

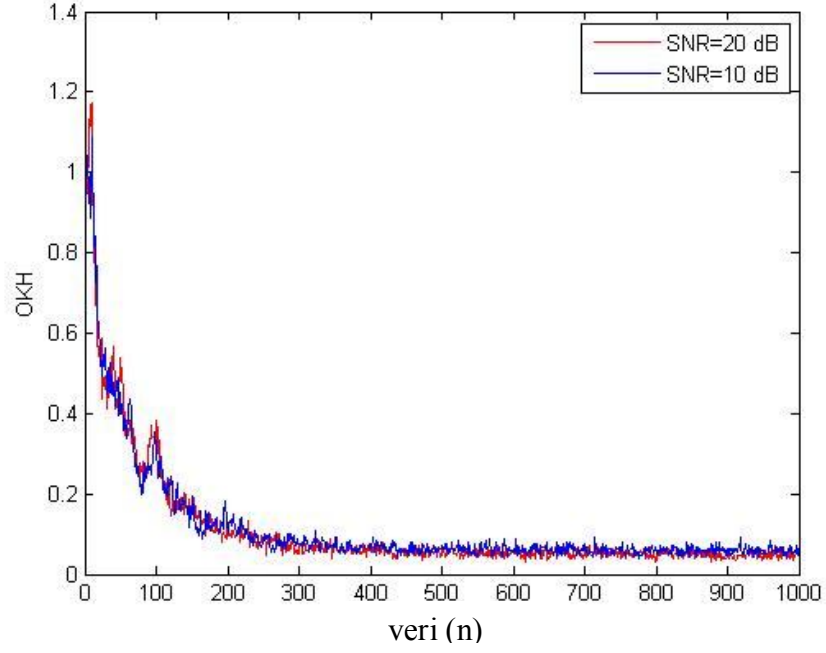


Şekil 5.9: SNR=10 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği



Şekil 5.10: SNR=10 dB için (5.4) eşitliğindeki işaretin LMS Kestirimi Grafiği

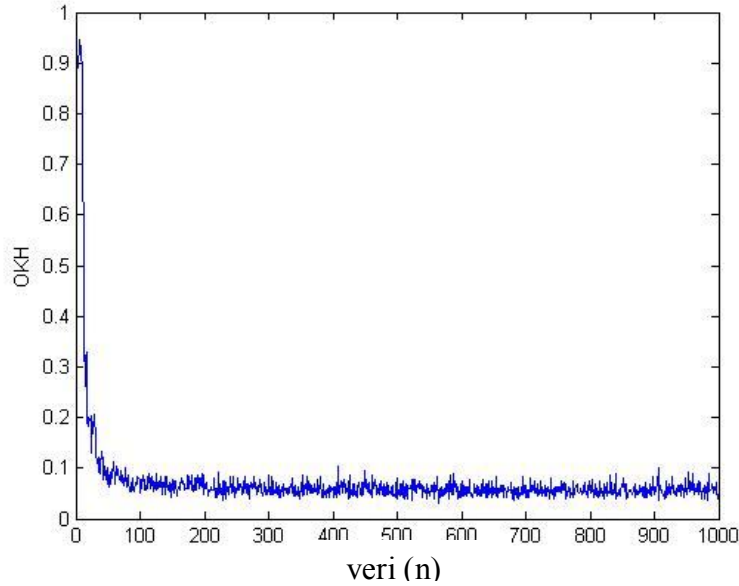




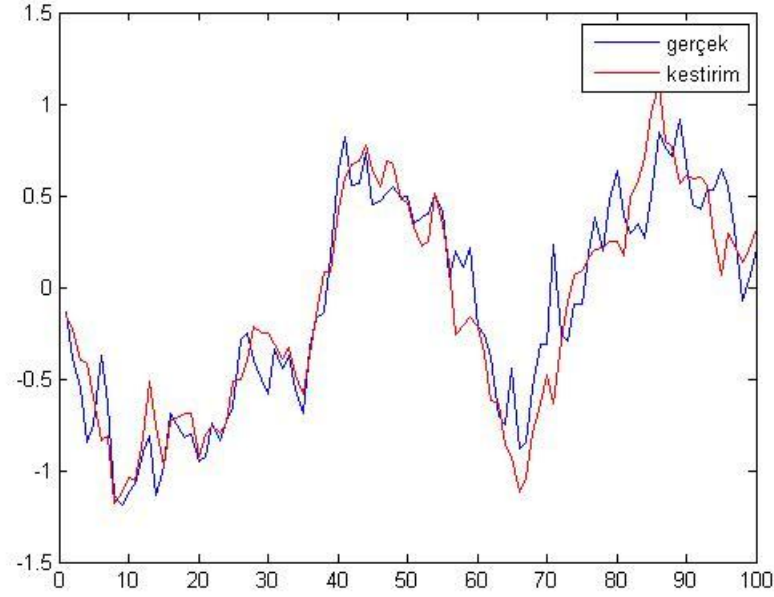
**Şekil 5.11:** SNR=20 ve SNR=10 dB için (5.4) işaretinin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

Şekil 5.11 incelendiğinde, LMS algoritmasında, ölçüm gürültüsünün SNR değeri, 20 dB değerinden 10 dB değerine yükseltildiğinde, ortalama karesel hatanın arttığı görülmektedir.

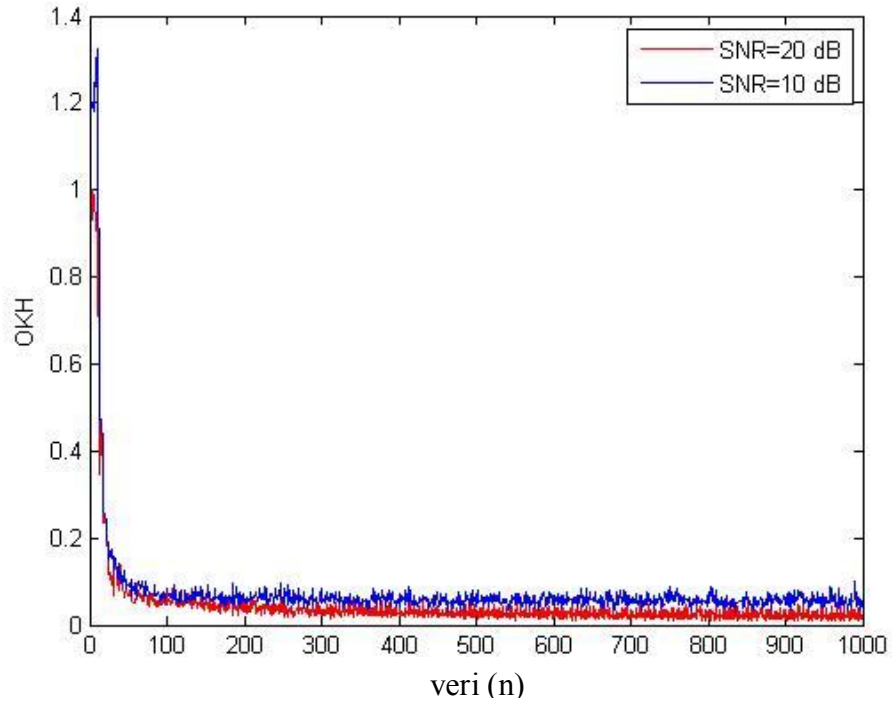
## 2) NLMS algoritmasıyla elde edilen sonuçlar:



**Şekil 5.12:** SNR=10 dB için (5.4) işaretinin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği



Şekil 5.13: SNR=10 dB için (5.4) işaretinin NLMS Kestirimi Grafiği



Şekil 5.14: SNR=20 ve SNR=10 dB için (5.4)' ün NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

Şekil 5.14 incelendiğinde NLMS algoritmasında, ölçüm gürültüsünün SNR değeri, 20 dB değerinden 10 dB değerine yükseltildiğinde ortalama karesel hatanın arttığı görülmektedir.

### 5.5.2 Şekil 5.1 ile gösterilen stereo ses işareti için benzetim sonuçları

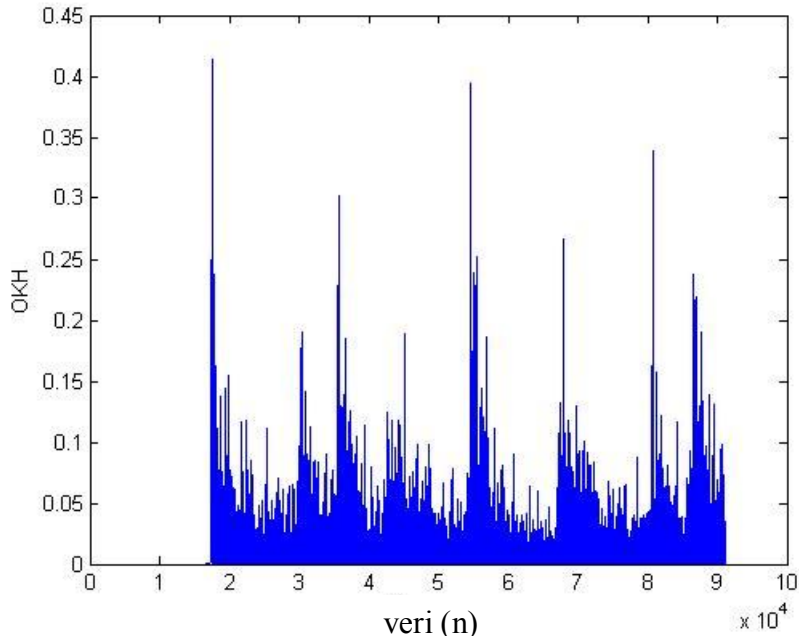
İkinci giriş işareti olarak alınan stereo ses işareti için, LMS ve NLMS algoritmaları uygulama sonuçları ayrı ayrı, grafiklerle gösterilmiştir. Ses işareti öncelikli olarak tek veri dizisi halinde sistemin girişine uygulanmıştır. Benzetimlerde oluşan kararsızlıklar ve uzun

boyutlu verinin işlenmesinden kaynaklanan zorluklardan dolayı, ses işareti bloklara ayrılmıştır ve bloklar halinde işlenmiş ses işareti için de ayrıca benzetim sonuçları elde edilmiştir.

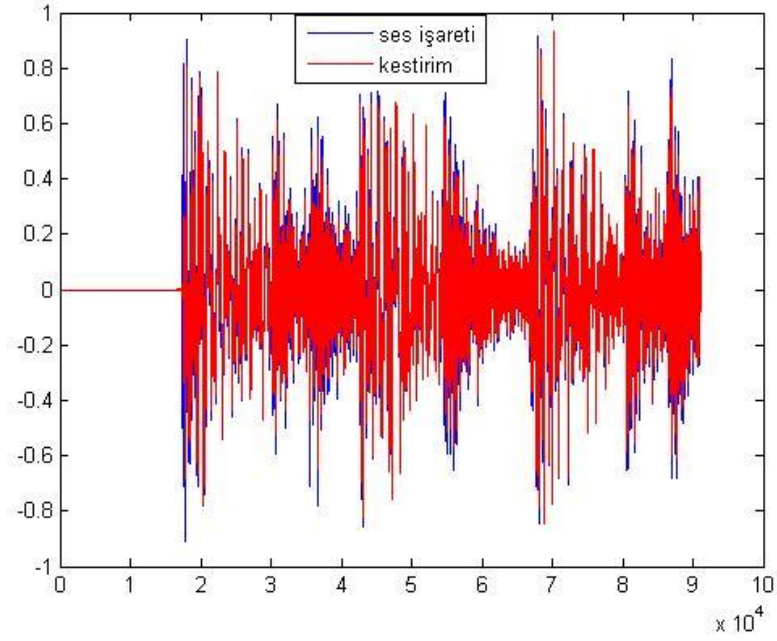
### SNR=10 dB için benzetim sonuçları

#### 1) LMS Sonuçları

Öncelikli olarak 2,02 saniyelik 22,05 kHz örnekleme frekansında örneklenmiş stereo ses işaretinin, bir kanalına ait ses veri dizisi tek bir dizi olarak sisteme uygulanmıştır. LMS ve NLMS algoritmaları yardımıyla bu işaret kestirilmiş, kestirim işlemlerine ait grafikler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

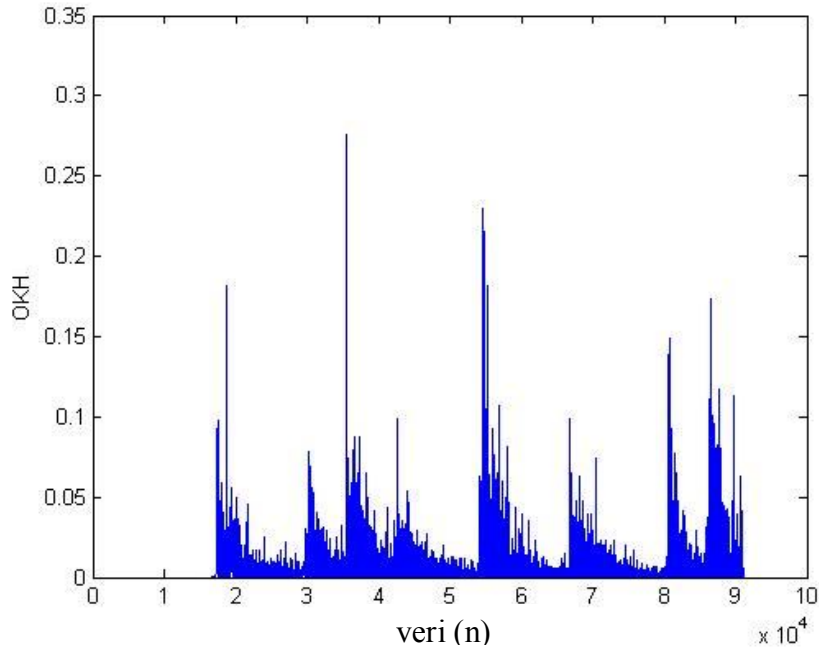


Şekil 5.15: SNR=10 dB için Şekil 5.3 işaretinin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

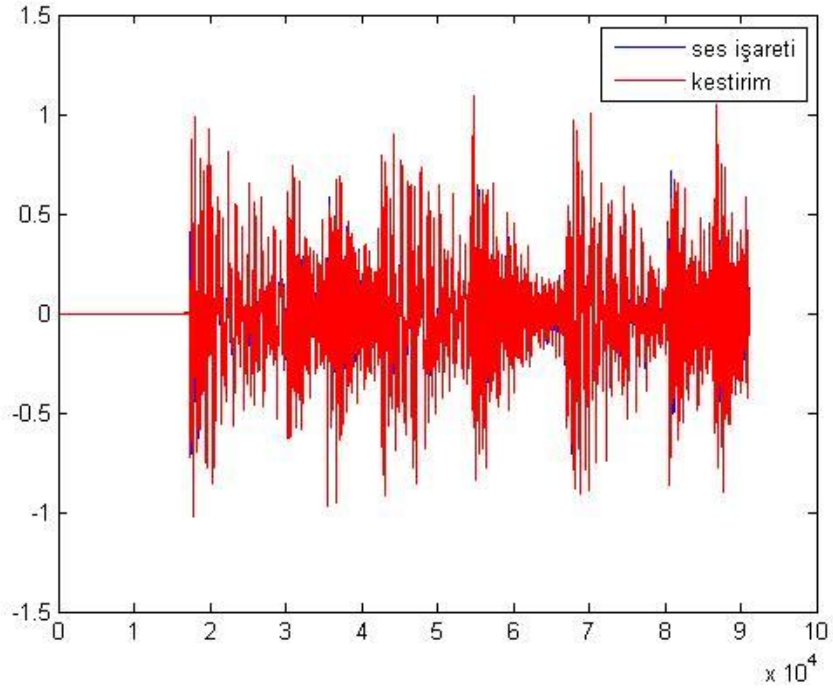


Şekil 5.16: SNR=10 dB için Şekil 5.3 işaretinin LMS Kestirimi Grafiği

## 2) NLMS Sonuçları



Şekil 5.17: SNR=10 dB için Şekil 5.3 işaretinin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

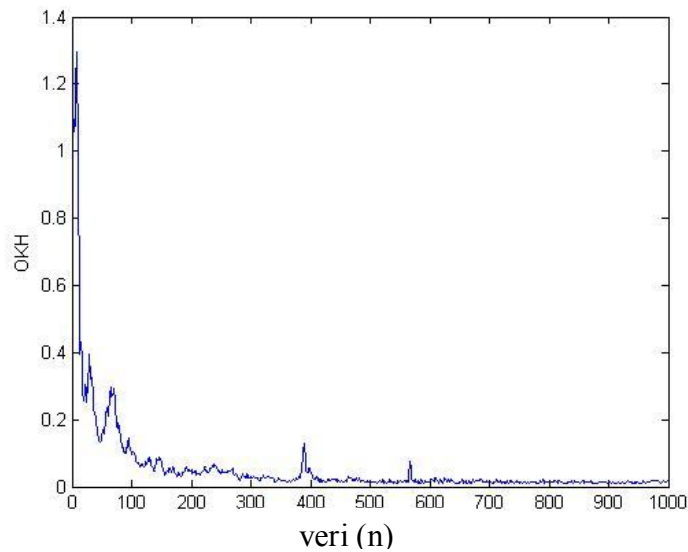


**Şekil 5.18:** SNR=10 dB için Şekil 5.3 ile verilen işaretin NLMS Kestirimi Grafiği

Yukarıdaki, Şekil 5.15, 5.16, 5.17 ve 5.18 incelendiğinde kestirim işleminde NLMS algoritmasının daha iyi performans sağladığı açıkça görülmüştür. Ortalama karesel hata grafiklerinde ilk değerlerin yüksek çıkmasının sebebi, verinin ilk kısımlarının kararsız olmasıdır. Ortalama karesel hatanın daha kararlı bir şekilde elde edilmesi için verinin bloklara ayrılarak işlenmesi gerekmektedir. Girişe uygulanan ses işaretinin yaklaşık 100.000 adet bileşeni olmasından dolayı verinin işlenmesi zor olduğundan, veri bloklara ayrılmıştır.

### **SNR=10 dB için bloklara ayrılmış ses işaretinin benzetim sonuçları**

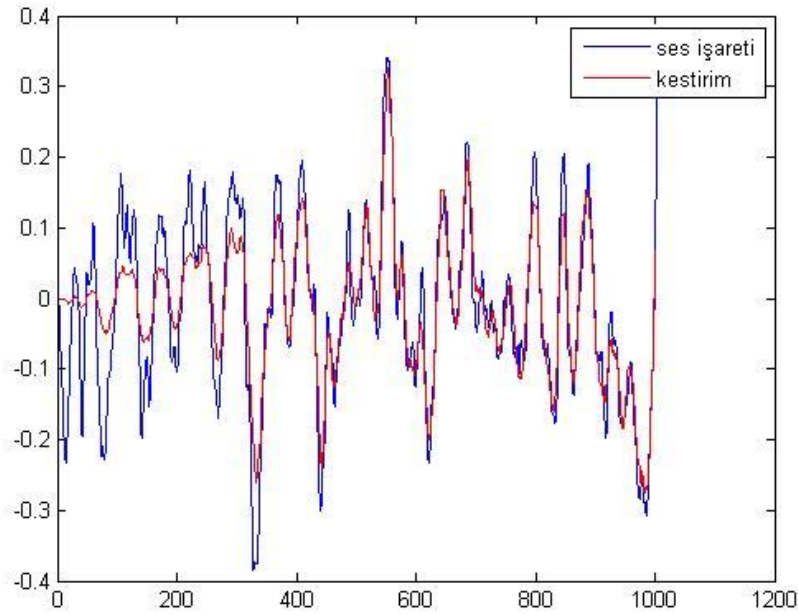
#### **1) LMS Sonuçları**



**Şekil 5.19:** SNR=10 dB için Şekil 5.3 ile verilen işaretin LMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

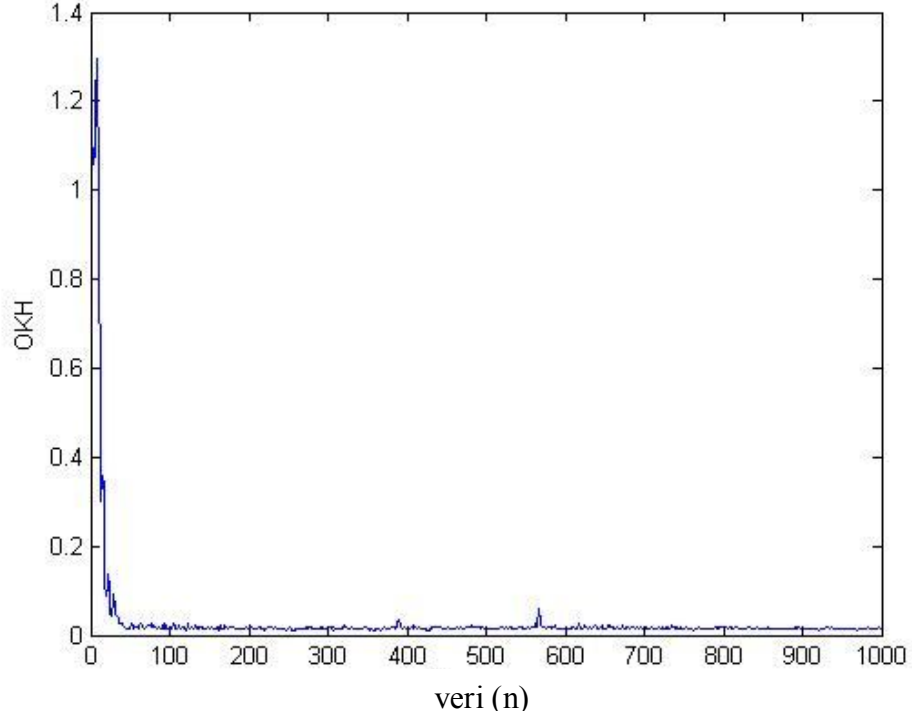
Şekil 5.19 incelendiğinde, yaklaşık 100. iterasyondan sonra algoritmanın yakınsama sağladığı ve olabilecek en düşük ortalama karesel hata değerinde kararlı bir öğrenme eğrisi takip ettiği görülmektedir. Bu grafik, adım boyu parametresi  $\mu = 0.13$  için elde edilmiştir. Adım boyu parametresi, kararsızlığa neden olmayacak şekilde en büyük seçilmiştir. Eğer adım boyu parametresi çok küçük seçilirse her bir adım, katsayı vektörleri üzerinde küçük değişimlere sebep olacak ve algoritma yavaş çalışacaktır. Adım boyu çok büyük seçilirse algoritma kararsız hale gelebilir.

Şekil 5.20 incelendiğinde, kestirimin başarılı olduğu görülmektedir. Kestirilen işaret, orijinal işareti olabildiğince izlemektedir. Burada tam bir kestirim sağlanamamasının sebeplerinden birisi alt örnekleme işlemidir. Alt örnekleme işlemleri sonucunda veri kaybı olmaktadır. Bu yüzden kestirim tam hatasız bir şekilde yapılamamaktadır. Ayrıca diğer bir sebep de eklenen ölçüm gürültüsüdür. Ölçüm gürültüsü de kestirimin performansını olumsuz etkilemektedir.



Şekil 5.20: SNR=10 dB için Şekil 5.1 ile verilen işaretin LMS Kestirimi Grafiği

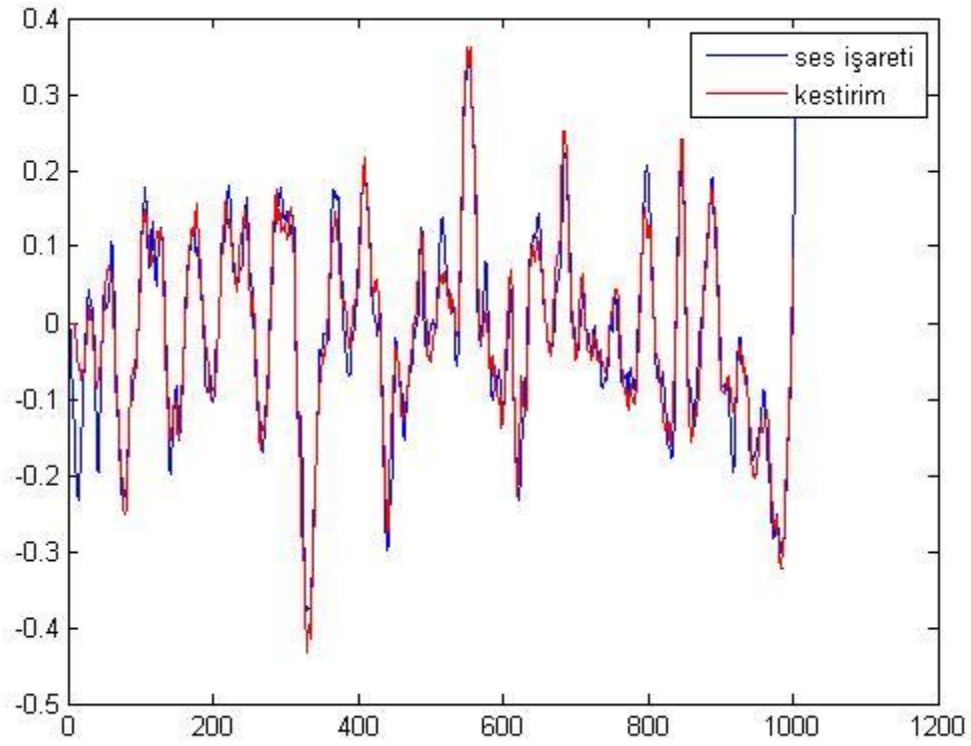
## 2) NLMS Sonuçları



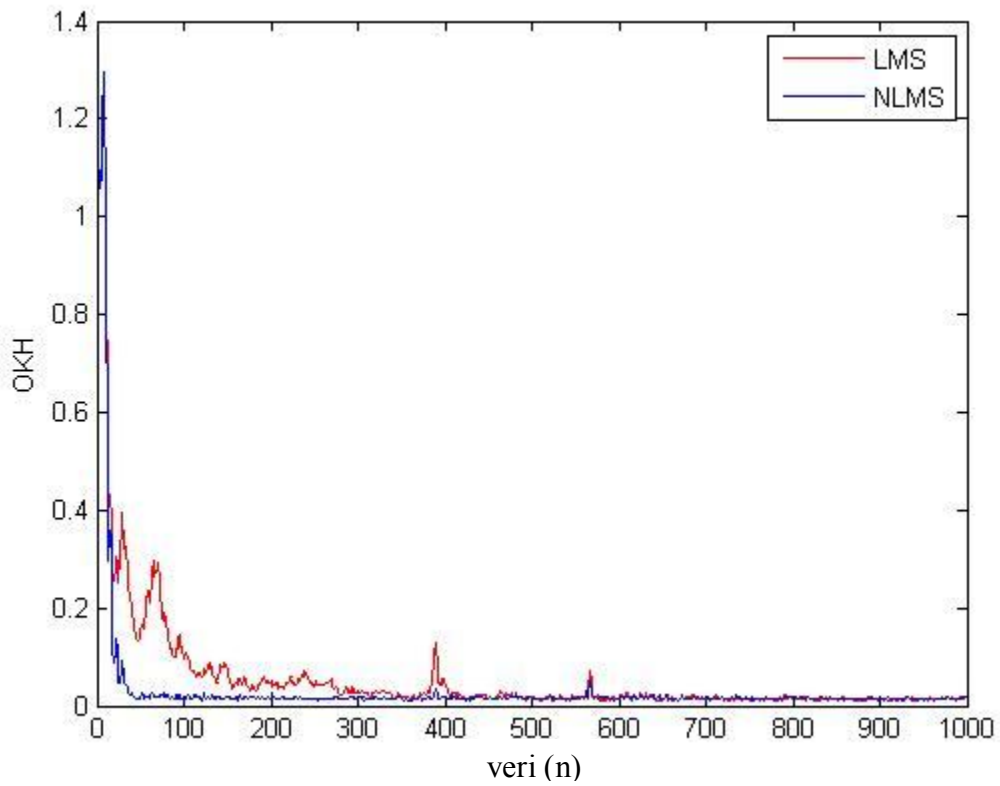
**Şekil 5.21:** SNR=10 dB, Şekil 5.3 ile verilen işaretin NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

Şekil 5.21 incelendiğinde, yaklaşık 40. iterasyondan sonra algoritmanın, yakınsama sağladığı ve olabilecek en düşük ortalama karesel hata değerinde, kararlı bir öğrenme eğrisi takip ettiği görülmektedir. Bu grafik, adım boyu parametresi  $\mu = 0.5$  için elde edilmiştir. Adım boyu parametresi, kararsızlığa neden olmayacak şekilde en büyük seçilmiştir.

Şekil 5.22 incelendiğinde, kestirimin başarılı olduğu görülmektedir. Kestirilen işaret, orijinal işareti olabildiğince izlemektedir. Burada tam bir kestirim sağlanamamasının sebeplerinden birisi alt örnekleme işlemidir. Alt örnekleme işlemleri sonucunda veri kaybı olmaktadır. Bu yüzden, kestirim tam hatasız bir şekilde yapılamamaktadır. Ayrıca diğer bir sebep de eklenen ölçüm gürültüsüdür. Ölçüm gürültüsü de kestirimin performansını olumsuz etkilemektedir.



Şekil 5.22: SNR=10 dB için Şekil 5.3 ile verilen işaretin NLMS Kestirimi Grafiği



Şekil 5. 23: SNR=10 dB, Şekil 5.3' deki işaretin LMS-NLMS Ortalama Karesel Hata Grafiği

Şekil 5.23 incelendiğinde, NLMS algoritmasının LMS algoritmasına göre daha hızlı yakınsadığı ve daha düşük ortalama karesel hataya sahip olduğu görülmektedir. Bunun temel



sebebi, LMS algoritmasının, giriş işaretinin özdeğer değişimi hızlı olduğunda, kötü bir yakınsamaya sahip olmasıdır. LMS algoritmasının işlem karmaşıklığının biraz artırılmasıyla elde edilen NLMS algoritması bu problemi çözmektedir. Çünkü NLMS algoritmasında, adım büyüklüğü giriş gücü ile normalize edilmektedir. Böylece yakınsamanın giriş işaretine olan bağımlılığı ortadan kalkmaktadır. Sonuç olarak NLMS algoritması, LMS algoritmasına göre daha iyi performans sağlamaktadır.

## 6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Yapılan bu yüksek lisans tezinde, çoklu hızlı sistem kuramının temel kavramları olan sistem periyodu, sistem hızı ve temel hız açıklanmıştır. Çoklu hızlı sistemlerde işaretlerin ortak zaman domeninde gösterilmesini sağlayan sistem ızgarası kavramı verilmiş ve bu sistemlerde kullanılan temel bloklar, hem zaman hem de frekans domeninde gösterilmiştir. Çoklu hızlı sistem kuramında önemli yer tutan alt örnekleme ve üst örnekleme kavramları açıklanmış, bu kavramlar için matris gösterimleri verilmiştir.

En çok kullanılan uyarlamalı süzgeçleme yöntemleri olan, en küçük ortalama kareler (LMS) ve normalize en küçük ortalama kareler (NLMS) yöntemleri açıklanmış, bu yöntemlerin çoklu hızlı sistemlere uyarlanması gösterilmiştir.

Özbağlanımlı süreçten elde edilmiş rasgele işaret sistem girişine uygulanmış, farklı ölçüm gürültüleri altında çoklu hızlı LMS ve çoklu hızlı NLMS yöntemleri kullanılarak, girişe uygulanan işaretin kestirilmesi işlemi gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen benzetimler, grafiklerle gösterilmiş ve sonuçlar farklı durumlar için yorumlanmıştır. Girişe uygulanan ikinci işaret ise, stereo ses işaretinin bir kanalına ait bileşenlerini içeren işarettir. Özbağlanımlı süreçten elde edilmiş işarete uygulanan işlemlerin aynıları stereo ses işarete uygulanmış ve sonuçlar açıklanmıştır.

Yapılan benzetimler sonucunda, NLMS yöntemi, farklı işaret dizilerinde, farklı gürültü seviyelerinde LMS yöntemine göre daha hızlı yakınsama sağlamış ve daha düşük ortalama karesel hata vermiştir. Sonuç olarak, bütün durumlar için NLMS yönteminin, LMS yönteminden daha yüksek bir performans sağladığı gösterilmiştir.

Çoklu hızlı istatistiksel işaret işleme alanında birçok araştırma konusu mevcuttur. En iyi süzgeçlemenin diğer yöntemleri araştırılabilir. Çoklu hızlı yinelemeli en küçük kareler (RLS) metodu, çoklu hızlı LMS ve çoklu hızlı NLMS metoduna dayanarak geliştirilebilir. Örnekleme hızlarının tamsayı olmadığı durumlar için uygulamalar geliştirilebilir. Anlatılan çoklu hızlı istatistiksel ve uyarlamalı süzgeçler tek boyutta değil de iki boyutta gerçekleştirilebilir. Günümüzde çoklu hızlı süzgeçleme, sonlu dürtü yanıtı (FIR) süzgeçlerle gerçekleştirilmektedir, gelecekteki çalışmalarda sonsuz dürtü yanıtı (IIR) süzgeçlerle uygulanabilir.

## 7. KAYNAKLAR

- Baig S, Mughal M.J (2009). Multirate Signal Processing Techniques for High Speed Communication Over Power Lines. IEEE Communications Magazine, Volume 47, 70-76.
- Cristi R, Koupatsiaris D.A, Therrien C.W (2000). Multirate Filtering and Estimation: the multirate Wiener Filter. IEEE Signals, Systems and Computers Conference 2000, Volume 1,450-454, Pacific Grove, CA, USA.
- Dong H, Sun H (2008). Multirate Algorithm for Updating the Coefficients of Adaptive Filters. IEEE First International Intelligent Networks and Intelligent Systems Conference, 581-584, Wuhan.
- Hawes A.H, Therrien C.W (2003). LMS Adaptive Filtering with Multirate Observations. IEEE Signals, Systems and Computers Conference 2003, Volume 1, 567-570.
- Hayes M.H (1996). Statistical Digital Signal Processing And Modeling. John Wiley & Sons, Inc., 658, Toronto, Canada.
- Haykin S.S (2002). Adaptive Filter Theory 4th Edition, Prentice-Hall, Inc., USA.
- Jahromi O, Aarabi P (2003). Time Delay Estimation and Signal Reconstruction Using Multirate Measurements. IEEE International Acoustics, Speech and Signal Processing Conference, Volume 6, 113-116.
- Jahromi O, Aarabi P (2005). Theory and Design of Multirate Sensor Arrays. IEEE Signal Processing Transactions, Volume 53, 1739-1753.
- Jahromi O, Francis B.H, Kwong R.H (2004). Spectrum Estimation Using Multirate Observations. IEEE Signal Processing Transactions, Volume 52, 1878-1890.
- Jahromi O, Kwong R.H, Francis B.H (2001). Information theory of multirate systems. 2001 IEEE International Symposium on Information Theory 2001 Proceedings, 188, Washington,DC.
- Jahromi O, Kwong R.H, Francis B.H (2001). Multirate signal estimation. IEEE Electrical and Computer Engineering Canadian Conference, Volume 1, 147-152, Toronto.
- Karaağaç E (2007). Çoklu Hızlı İşaret İşleme Yöntemleriyle İşaretlerin Elde Edilmesi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.
- Kayran A.H, Ekşioğlu E.M (2004). Bilgisayar Uygulamalarıyla Sayısal İşaret İşleme. Birsen Yayınevi, İstanbul, Türkiye.
- Kuchler R.J, Therrien C.W (2003). Optimal Filtering with Multirate Observations. IEEE Signals, Systems and Computers Conference 2003, Volume 1, 1208-1212.
- Liu Y.X, Li X, Zhuang Z.W (2003). Modeling of Multirate Signal in Radar Target Recognition. IEEE International Neural Networks and Signal Processing Conference, Volume 2, 1604-1606.
- Masud U, Iram Baig M, Malik T.N (2007). Multirate Signal Processing: Some Useful Graphical Results. IEEE International Emerging Technologies Conference, 257-262, Islamabad.
- Milic L, Saramaki T, Breeovic R (2006). Multirate Filters: An Overview. IEEE Asia Pacific Circuits and Systems Conference, 912-915.

- Mizumoto I, Ohdaira S, Watanabe N, Tomonaga T, Iwai Z (2008). Output Feedback Control of Multirate Sampled Systems with An Adaptive Output Estimator. IEEE SICE Annual Conference, 1419-1424, Tokyo.
- Oppenheim A.V, Schafer R.W (1975). Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Papoulis E.V, Stathaki T (2002). Design and Convergence Analysis of a Multirate Structure for Adaptive Filtering. IEEE Electronics, Circuits and Systems 9th International Conference, Volume 3, 863-866.
- Sarkar S, Poor H.V (2001). Multirate signal processing on finite fields. Vision, Image and Signal Processing, IEEE Proceedings, Volume 148, 254-262.
- Scrofanì J.W, Therrien C.W (2005). A Stochastic Multirate Signal Processing Approach to High Resolution Signal Reconstruction. IEEE International Acoustics, Speech and Signal Processing Conference, Volume 4, 561-564.
- Sreelatha M, Kumar T, Mathur S (2009). A New Technique for Power Spectrum Estimation Using Multirate Observations. IEEE 3rd International Anti-Counterfeiting, Security and Identification in Communication Conference, 46-49, Hong Kong.
- Therrien C.W (2001). Issues in multirate statistical signal processing. IEEE Signals, Systems and Computers Conference 2001, Volume 1, 573-576, Pacific Grove, CA, USA.
- Therrien C.W, Hawes A.H (2002). Least Squares Optimal Filtering with Multirate Observations. IEEE Signals, Systems and Computers Conference 2002, Volume 2, 1782-1786.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Korhan CENGİZ, 10.02.1986 tarihinde Uzunköprü’de doğdu. İlk öğrenimini Uzunköprü Şinasi İlköğretim Okulu’nda, orta öğrenimini Özel Edirne Beykent Anadolu Lisesi’nde, lise öğrenimini de Özel Edirne Fen Lisesi’nde bitirmiştir. Lisans öğrenimini Kocaeli Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü’nde tamamlamıştır. 2009 Şubat ayında Kadir Has Üniversitesi Elektronik Mühendisliği (İngilizce) bölümünde burslu yüksek lisans öğrenimine başlamış, daha sonra 2010 Eylül ayında Namık Kemal Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği yüksek lisans öğrenimine yatay geçiş yapmıştır. 2010 Eylül ayından beri Namık Kemal Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Telekomünikasyon Ana Bilim Dalı’nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.