



**KOZMOLOJİK EVREN İÇİN MÜKEMMEL OLMAYAN
AKIŞKAN KAYNAKLAR**

Derya KILIÇ

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Dilek KAZICI

2021

T.C.

TEKİRDAĞ NAMIK KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KOZMOLOJİK EVREN İÇİN MÜKEMMEL OLMAYAN AKIŞKAN
KAYNAKLAR**

Derya KILIÇ

FİZİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Doç. Dr. Dilek KAZICI

TEKİRDAĞ-2021

Her hakkı saklıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOZMOLOJİK EVREN İÇİN MÜKEMMEL OLMAYAN AKIŞKAN KAYNAKLAR

Derya KILIÇ

Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Dilek KAZICI

Genel Görelilikte, Einstein alan denklemleri, ikinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemler içerir. Bu denklemlerin çözümleri, uzay zamanın geometrisi ve içerdiği maddenin özelliklerinin anlaşılması bakımından önemlidir. Gözlemlenen evren, büyük ölçekte homejen ve izotropik olsada, küçük ölçeklerde homojenlikten sapmalar mevcuttur. Bu tezde, galaksi ve karadelik ölçeğinde, homojen olmayan yapıların geometrisi incelemiş, bu tür uzay zamanın homojen olmayan yapısı için ideal olmayan akışkan formunda enerji-momentum tensörü tanımlanmıştır. Bu ideal olmayan enerji-momentum tensörü, literatürde kozmolojik karadelik olarak tanımlanan Thakurta ve Sultana-Dyer geometrilerine uygulanarak Einstein alan denklemlerini sağlayan enerji yoğunluğu ve basınç gibi büyüklükler elde edilmiştir. İncelediğimiz her iki geometrinin yeterince uzak mesafelerde Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker geometrisine dönüştüğü vurgulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Einstein alan denklemleri, Enerji-momentum tensörü, Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Metriği, Homojen yapılar, Karadelikler, İdeal ve ideal olmayan akışkan

2021, 46 sayfa

ABSTRACT

MSc. Thesis

Derya KILIÇ

IMPERFECT FLUID SOURCES FOR THE COSMOLOGICAL UNIVERSE

Tekirdağ Namık Kemal University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Physics

Supervisor: Assoc.Prof. Dilek KAZICI

In General Relativity, Einstein field equations include second order nonlinear differential equations. The solutions of these equations are important for the understanding of the geometry of space time and the properties of matter contained. Although observed universe is homogeneous and isotropic at large scales, there are some deviations at small scales. In this thesis, the geometry of locally inhomogeneous structures at the galaxy and black hole scales are investigated and a energy-momentum tensor for an imperfect fluid is defined for the inhomogeneous structure of this type of space time. By applying this energy-momentum tensor to the Thakurta and Sultana-Dyer geometries, which are defined as cosmological black holes, the quantities such as energy density and pressure solving Einstein field equations are obtained. It was emphasized that at sufficiently large distances, these two geometries become Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker space time.

Key words: Einstein field equations, Energy-momentum tensor, Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Metric, Homogeneous structures, Black holes, Perfect fluid and imperfect fluid

2021, 46 pages

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL DİZİNİ.....	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	vii
TEŞEKKÜR.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	3
2.1. Genel Görelilik ve Einstein Alan Denklemleri.....	3
2.1.1. Dört Hız Vektörü	4
2.1.2. Killing Vektörleri.....	6
2.1.3. Genel Küresel Simetrik Geometri	7
2.2. Kozmoloji	10
2.2.1. Kozmolojik Metriğin Özellikleri ve Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Metriği.....	10
2.2.2. Enerji-Momentum Tensörü	12
2.3. Karadelikler	14
2.3.1. Schwarzschild Karadeligi	14
2.3.2. Reissner-Nordström Karadeligi	14
2.3.3. Kerr Karadeligi	16
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	20
3.1. Kozmolojik Karadelikler	20
3.2. Konformal Dönüşümler	22
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	24

4.1. Yüklü Thakurta Karadeligi	24
4.1.1. Thakurta Metriğinin Jeodezik Denklemleri.....	30
4.1.2. Fotonların Dairesel Yörüngeleri	32
4.2. Sultana-Dyer Karadeligi	33
SONUÇ	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	40



ŞEKİL DİZİNİ

Şekil 2.1. Şekil büyüdükçe tüm görelî mesafeler büyür	10
Şekil 2.2. Enerji-momentum tensörünün $T_{\mu\nu}$ bileşenlerinin gösterimi.....	13
Şekil 2.3. Kerr karadeliği olay ufukları ve ergosfer gösterimi	18



SİMGELER VE KISALTMALAR

$G_{\mu\nu}$: Einstein Tensörü Bileşenleri
$T_{\mu\nu}$: Enerji-Momentum Tensörü
$R_{\mu\nu}$: Ricci Tensörü Bileşenleri
R	: Ricci Skaleri
$g_{\mu\nu}$: Metrik Tensörünün Kovaryant Bileşenleri
G_N	: Newton Kütleçekim Sabiti
ρ	: Enerji Yoğunluğu Bileşeni
P	: Basınç Bileşeni
u_μ	: Dört Hız Vektörü Bileşenleri
q_μ	: Enerji Akısı Yoğunluğu Bileşenleri
k_μ	: Vektörel Bileşenleri
Λ	: Kozmolojik sabit
Q	: Elektrik yükü
M	: Kütle
r	: Yarıçap
\mathcal{L}	: Lie türevi
ξ	: Killing vektörü
κ	: Einstein kütle çekim sabiti
Ω	: Konformal faktör
\square	: D'Alembert operatörü
$F^{\mu\nu}$: Maxwell elektromanyetik alan tensörü
$a(t)$: Ölçek faktörü
A_μ	: Elektromanyetik potansiyel
∂_μ	: Kısmi türev operatörü
$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$: Christoffel sembolleri
e_μ	: Baz vektörleri
∇	: Nabla operatörü
FLRW	: Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Metriği

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımnda ve tez hazırlamam sırasında bilgi ve tecrübeleriyle bana her konuda yardımcı olan desteklerini esirgemeyen, beni cesaretlendirip motive eden, her koşulda yanımda olan, saygıdeğer danışman Hocam Sayın Doç. Dr. Dilek KAZICI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımnda maddi ve manevi beni destekleyen başta annem Naciye KILIÇ, babam Hasan KILIÇ olmak üzere abim Deniz KILIÇ, yengem Zümrüt KILIÇ ve çok sevdiğim yeğenim Doruk Bulut KILIÇ'a her zaman yanımda olup beni motive ettikleri için teşekkür ederim.

Ayrıca beni destekleyen ve çalışmama yardımcı olan tüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Bu çalışmamı okuyan herkese de saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Aralık, 2021

Derya KILIÇ

Fizik Öğretmeni

1. GİRİŞ

Genel Görelilik Teorisi, kütleçekim etkisinin incelenebileceği matematiksel altyapı oluşturmaktadır. Bu anlamda en sık kullanılan ve gözlemler ile uyuşan teoriler Einstein alan denklemleri kullanılarak yapılmakta, elde edilen uzay zaman geometrileri astrofiziksel ve kozmolojik veriler ile karşılaştırılmaktadır. Kozmoloji, evrenin oluşumunu ve bugüne kadar olan sürecini inceleyerek, gelecekteki muhtemel sonunu belirlemeye yönelik gözlemsel ve teorik araştırmaları bir araya getiren, zaman içinde değişim gösteren evren modelini oluşturmayı amaçlayan bilim dalıdır. Büyük Patlama'dan günümüze ve geleceğe kadar evrenin kökenini ve evrimini içeren kozmoloji biliminin tanımı NASA'ya göre, “evrenin bir bütün olarak geniş ölçekli özelliklerinin bilimsel çalışmasıdır” olarak yapılır. Tüm evrenin başlangıcından muhtemel sonuna kadar her aşamasını inceleyen kozmoloji, evrenin bir bütün olarak tarihini, evrimini, bileşimini ve dinamiğini inceler de diyebiliriz.

Kozmolojik evrende, uzay zamanın büyük ölçekte homojen ve izotropik olduğu gözlemsel olarak kanıtlanmıştır [1]. Evren, gezegenler, yıldızlar, galaksiler, galaksi kümeleri ve büyük boşluklar ile doludur. Galaksi kümelerinin oluşturduğu izotropik olmayan yapılar kozmolojik ölçekte ihmal edilir. Gözlenebilir madde miktarını oluşturan bu yapılar, evrenin içerdiği toplam madde miktarının sadece %4'ünü oluştururken, evrenin geri kalan %96'sını oluşturan bileşenlerinin yapısı ve içeriği ile ilgili yeterince bilgimiz yoktur. Oldukça büyük kısmını oluşturan bu bilinmezlik, bu alanda daha çok araştırma yapılması gerektiği sonucunu doğurur. Karanlık enerji ve karanlık madde olarak adlandırılan bu bilinmeyen kozmolojik yapıların varlığı gözlemsel olarak kanıtlanmış ancak madde içerikleri hakkında teorik ve gözlemsel yeterli bulgu henüz yoktur. Bu sebeple son yıllarda evrenin yapısını anlamak adına birçok çalışma yapılmaktadır. Klasik kozmolojide, evrenin ideal bir akışkan ile dolu olduğu varsayılır ve Einstein alan denklemleri çözülerek evrenin davranışı matematiksel olarak incelenir. Ancak bu yaklaşım gözlemsel veriler ile uyumlu olmakla beraber karanlık enerji ve karanlık madde konusuna yeterli açıklama getiremez. Biz bu tezde, ideal olmayan bir akışkan ile dolu çeşitli uzay zaman geometrileri elde ederek, evrendeki homojen olmayan yapıları içeren bir model elde etmeyi amaçlamaktayız. Evrendeki homojen olmayan durumlar, büyük oranda, merkezinde büyük karadeliklerin olduğu galaksi ve galaksi kümeleridir. Bu bilgiyi kullanarak, çeşitli karadelik geometrileri incelenerek bu geometriler için uygun enerji-momentum tensörleri elde edilecektir.

Bu tezde incelenen konular altı başlık altında sıralanmıştır. İkinci bölümde Genel Görelilik teorisi ve göreliliğin temel kavramları incelenmiştir. En genel küresel simetrik uzay zaman metriği için uygun enerji momentum tensörünün ideal olmayan enerji-momentum tensörü ile karakterize edilebileceği vurgulanarak (2.43)-(2.46) denklemlerinde, enerji yoğunluğu, basınç ve radyal doğrultudaki madde akısı ifadeleri basit eşitlikler ile verilmiştir. Daha sonraki bölümlerde, kozmolojik karadeliklerin yapıları bu denklemler kapsamında incelenmiştir. Üçüncü bölümde, klasik kozmoloji incelenerek literatürde mevcut olan uzay-zamanın özellikleri, kozmolojik çizgi elemanı ve ideal akışkan yapısına değinilmiştir. Dördüncü bölümde, karadelik çeşitleri ve özellikleri literatür kapsamında incelenmiştir. Beşinci bölümde, konformal dönüşümlerin matematiksel yapısı ifade edilerek konformal dönüşüm yöntemi ile statik karadeliklerin zaman içinde evrilen yapıda olabileceklerine değinilmiştir. Altıncı ve yedinci bölümlerde konformal dönüşümler ile elde edilen ve kozmolojik kara delik uzay zamanları olarak ifade edilebilen yüklü Thakurta metriği [2] ve Sultana-Dyer [3] metriği Genel görelilik kapsamında incelenmiş ve bu geometrilerin içerdiği madde yapısını veren ideal olmayan akışkanlara karşılık gelen enerji-momentum tensörleri elde edilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Genel Görelilik ve Einstein Alan Denklemleri

Kozmolojik bakış açısına göre, gökadarlar ve hatta gökada kümeleri bile çok küçük ölçekli yapılardır. Evreni büyük ölçekte teorik olarak anlamamız, Genel Görelilik teorisinin matematiksel yapısını kullanarak mümkündür. Genel Göreliliğin Newton teorisinden farkı, çok küçük yarıçapa sığan çok büyük kütleler, yüksek hızlarda hareket eden kütleli cisimler ve uzay zamanda kütle çekim etkisinin var olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu gibi sistemlerde Newton yasaları ve Özel Görelilik teorisi kapsamındaki matematiksel ifadeler yetersiz kalmaktadır. Bu anlamda ivmeli hareket eden referans sistemlerinin özelliklerini incelemek için, doğruluğu deneylerle kanıtlanmış en kabul gören matematiksel altyapı olan Einstein Genel Görelilik teorisini kullanmak uygundur. Einstein, 1915 yılında Genel Görelilik teorisini yayınlamış ve bu teoride, uzay-zaman eğriliği ile enerji-momentum tensörü arasında bir ilişki kurmuştur [4]. Yani, madde ile geometri arasında sıkı bir bağıntı bulunmaktadır. Wheeler'ın sözünde olduğu gibi; madde, uzay-zamanı büküyor ve bükülmüş uzay-zaman da parçacığa jeodezikler boyunca hareket etmesi gerektiğini söylüyordu [5]. Genel Görelilik teorisi (GG) üç temel düşünce üzerine kurulmuştur. Birincisi, uzay-zamanın eğri olduğu düşüncesidir. Burada dört boyutlu matematiksel yapı vardır ve bu yapıya Pseudo-Riemann manifoldu denir. Pseudo-Riemann teriminin Türkçe'de kullanımı "sanki-Riemann" şeklinde olabilir. Burada "sanki" ifadesinin sebebi uzaysal koordinatların yanında farklı olarak zaman koordinatının olmasındandır. Daha sonra da göreceğimiz gibi metrik işaretleri $(-,+,+,+...)$ olma durumu "pseudo" terimini kullanmamıza sebep olmaktadır. Tüm işaretlerin pozitif olması durumunda uzay Riemann manifoldu olarak tanımlanır. Genel Görelilik teorisinde uzay ve zaman kavramlarının birlikte kullanılmasının sebebi, Genel Göreliliğin yerel olarak Özel Göreliliği içermesi ve Özel Görelilik teorisinin temelinde dört boyutlu uzay-zaman kavramının yer almasındandır. Özel Göreliliğin Genel Görelilik teorisinden farkı şu şekilde açıklanabilir; Özel Görelilik, iki gözlemcinin birbirine göre sabit hızlar ile hareket ettiği durumu incelerken Genel Görelilikte gözlemciler birbirine göre ivmeli hareket etmektedir. Böylece Genel Görelilik teorisi, kütleçekim etkisinin olduğu referans çerçeveleri söz konusu olduğunda uygun fiziksel denklemler için matematiksel yapı sunar diyebiliriz. Uzay-zamanın her noktasında bir eylemsiz referans çerçevesi vardır ve serbest düşen parçacıkların da içinde bulunduğu bu referans çerçevesi lokal olarak düzdür. Bu lokal bölgede GG'nin Özel Görelilikten farkı hissedilmez.

Cisim sabit ivme ile hareket eder, kütle çekimi etkisi serbest düşme esnasındaki ivmelenme ile yok edilmiş olur. Böylece serbest düşme referans çerçevesi ile eylemsiz referans çerçevesi tam olarak aynı olur. Bu durum Genel Göreliliğin ikinci temel ilkesidir ve Einstein'ın ünlü *eşdeğerlilik prensibi* olarak bilinir. Kısaca Genel Görelilik, Özel Görelilik teorisinin eğri uzaydaki ifadesidir dersek yanlış olmaz. Genel Görelilik (GG) diğer önemli yapıtaşları, kütle ve momentum akısının uzay zamanı eğdiğini ve bu eğilme miktarının Einstein'ın alan denklemleri ile tanımlandığını ifade eder. Bu düşünce aynı zamanda GG'nin Newton kütleçekim teorisinden farkını da oluşturur. Newton bakış açısına göre kütleçekimi bir kuvvettir ve bu kuvvet, parçacıkları Öklit uzayında ivmelendirir. GG bakış açısına göre, kütleçekim kuvveti yoktur. Eğer elektromanyetik kuvvet veya başka hiçbir kuvvet yoksa, parçacıklar uzay-zamandaki kütle ve enerji tarafından eğilen yollar boyunca hareket ederler. Serbest düşen parçacıkların referans çerçevesi lokal eylemsiz referans çerçevesidir. Zaman ve uzay kavramları mutlak değildirler ve uzay-zaman adı altında dört boyutlu bir manifold olarak tanımlanan bir kavramda birleşirler. Bu teorisin matematiksel ifadesi, Einstein alan denklemleri ile aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Burada $R_{\mu\nu}$, Ricci tensörü ve R , Ricci skaleridir ve uzay-zamanın eğriliği ile ilgili büyüklüklerdir, eğer bir kozmolojik sabit Λ varsa, alan denklemleri aşağıdaki gibi değişir,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Bu denklemin sol tarafı uzay-zamanın geometrisi ile ilgilidir. Sağ tarafı ise bu uzay-zaman içindeki maddenin enerji-momentum tensörünü içerir. Böylece Einstein alan denklemlerinin, uzay-zamanın geometrisi ile maddeyi ilişkilendiren yapısı kolayca anlaşılabilir.

2.1.1. Dört Hız Vektörü

Minkowski uzayında bir gözlemci, hareket eden bir parçacığın yörüngesinde iki nokta arasındaki en küçük mesafeyi

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

$$= -c^2 dt^2 + (dx^i)^2, \quad (2.5)$$

$$= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.6)$$

olarak ölçer. Burada dt , gözlemcinin referans sistemindeki ölçtüğü zaman aralığıdır ve t , koordinat zamanı olarak adlandırılır. Diğer taraftan, parçacığın kendi referans çerçevesinde yani parçacığın durgun olduğu referans çerçevesinde uzaysal yer değiştirmeler sıfırdır ve $dx = dy = dz = 0$ olur. Bu durumda zaman aralığı, $d\tau$, öz zaman olur (bazı kaynaklarda has zaman olarak kullanılır ve “parçacığın kendi zamanı” anlamındadır). Minkowski metriği tüm referans çerçevelerinde değişmez (invariant) kalır ve

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.7)$$

ifadesi tüm referans çerçevelerinde geçerlidir. Böylece

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + \sum_i (dx^i)^2, \quad (2.8)$$

$$= -c^2 dt^2 \left(1 - \sum_i \frac{(dx^i)^2}{c^2 dt^2} \right), \quad (2.9)$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \sum_i \frac{(v^i)^2}{c^2} \right), \quad (2.10)$$

elde edilir. Burada $i = 1,2,3$ uzaysal koordinatlar üzerinden toplam var vardır ve $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, koordinat hız vektörüdür. Kısaca $v^2 = \sum_i^3 (v^i)^2$ olarak tanımlarsak $d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$ olur.

Burada $\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}$ tanımından öz zaman ve koordinat zaman arasında,

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad (2.11)$$

bağıntısı elde edilir.

Bir parçacığın dört hız vektörü, dört-konum vektörünün öz zamana göre değişimidir ve

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (c\gamma, v^i\gamma), \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır. Burada $x^\mu = (ct, x^i)$, dört konum vektördür. Böylece dört hız vektörü,

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.13)$$

$$U^\mu = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \frac{dx^2}{d\tau}, \frac{dx^3}{d\tau} \right), \quad (2.14)$$

$$= \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau} \right), \quad (2.15)$$

$$= \left(c\gamma, \frac{dx^i}{dt} \gamma \right), \quad (2.16)$$

$$= (c\gamma, v^i \gamma), \quad (2.17)$$

elde edilir [6]. Dört hız vektörünün büyüklüğü tüm referans çerçevelerinde aynı kalır. Bu özellik basitçe aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$U^2 = U_\mu U^\mu = U^\nu U^\mu \eta_{\nu\mu}, \quad (2.18)$$

$$= U^0 U^0 \eta_{00} + U^1 U^1 \eta_{11} + U^2 U^2 \eta_{22} + U^3 U^3 \eta_{33}, \quad (2.19)$$

$$= -c^2 \gamma^2 + v^2 \gamma^2, \quad (2.20)$$

$$= -c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (2.21)$$

$$= -c^2. \quad (2.22)$$

İnvariant nicelikler skaler büyüklüklerdir ve tüm koordinat sistemleri için değişmez kalırlar. Birçok notasyonda $c \equiv 1$ alınır ve kısaca $U^2 = U_\mu U^\mu = -1$ yazılır. Genel olarak dört hız vektörü parçacığın durgun olduğu referans çerçevesinde ifade edilir bu durumda $v = 0$ olur ve $c\gamma = c \equiv 1$ olduğundan (2.17) bağıntısından dört hız vektörü $U^\mu = (1,0,0,0)$ olarak elde edilir.

2.1.2. Killing Vektörleri

Killing vektörleri uzay-zamanın simetrisi ile ilgili kavramlardır. Metriğin simetrik olduğu doğrultuda bir Killing vektörü vardır ve bu Killing vektör yönünde hareket ettiğimizde uzay-zaman değişmez, aynı kalır. ξ , bir Killing vektör ise metriğin bu vektör yönünde sabit kalması demek $g_{\mu\nu}$ metriğinin ξ Killing vektörüne göre türevinin sıfır olması demektir, yani,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.23)$$

olmalıdır. Bir büyüklüğün bir vektöre göre değişiminin bulunması işlemine Lie türevi denir. Böylece (2.23) bağıntısı, bir metriğin Killing vektör doğrultusundaki Lie türevinin sıfır olduğunu ifade etmektedir. Metriğin Lie türevi alınarak aşağıdaki Killing denklemi elde edilir,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu - \nabla_\nu \xi_\mu = \nabla_{[\mu} \xi_{\nu]} = 0. \quad (2.24)$$

Bu denklemin çözümünü sağlayan ξ vektörleri doğrultusunda uzay-zaman simetriktir denir.

Eğer bir uzay-zaman bir Killing vektörüne sahip ise metriğin bu koordinattan bağımsız olduğu bir koordinat sistemi vardır. Örneğin, Schwarzschild metriği statik ve küresel simetriktir ve küresel koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılır,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.25)$$

Metrik bileşenleri t ve φ koordinatlarından bağımsız olduğundan uzay zaman bu koordinatlar yönünde simetriktir. Böylece Killing vektörler, $\xi_{(t)}^\mu = (1,0,0,0)$ ve $\xi_{(\varphi)}^\mu = (0,0,0,1)$ yazılır veya alt indis olarak,

$$\xi_{(t)\mu} = g_{\mu\nu} \xi_{(t)}^\nu = \left(-\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right), 0,0,0\right), \quad (2.26)$$

$$\xi_{(\varphi)\mu} = g_{\mu\nu} \xi_{(\varphi)}^\nu = (0,0,0, r^2 \sin^2 \theta), \quad (2.27)$$

ifade edilir. Farklı bir notasyonda Killing vektörleri, $\xi_{(t)} = \xi_{(t)}^\mu e_\mu = \xi_{(t)}^\mu \partial_\mu$ bağıntısından $\xi_{(t)} = \xi^t \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ zamansal Killing vektörü ve $\xi_{(\varphi)} = \xi_{(\varphi)}^\mu e_\mu = \xi_{(\varphi)}^\mu \partial_\mu$ bağıntısından $\xi_{(\varphi)} = \xi_{(\varphi)}^\varphi \partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ uzaysal Killing vektörüdür. Böylece Schwarzschild metriği t ve φ açısı doğrultusunda değişmez kalır yani bu doğrultularda simetriktir denir [7].

2.1.3. Genel Küresel Simetrik Geometri

Küresel simetrik geometride zaman içinde değişen köşegen en genel çizgi elemanı,

$$ds^2 = -A(t,r)^2 dt^2 + B(t,r)^2 dr^2 + C(t,r)^2 d\Omega^2, \quad (2.28)$$

ifadesi ile ifade edilir. Burada, $A(t, r)$, $B(t, r)$ ve $C(t, r)$ ölçek faktörleri t zaman ve r radyal koordinatların fonksiyonlarıdır. $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, küre yüzeyi denklemdir ve küresel simetriyi ifade eder.

Diğer taraftan Genel Görelilik teorisinde, homojen ve izotropik olmayan uzay zaman için en basit enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$T_{\mu\nu}^{(ipf)} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \epsilon k_\mu k_\nu, \quad (2.29)$$

burada ρ enerji yoğunluğu, P basınç ve ϵ , serbest parametredir. Bu enerji-momentum tensörü ideal olmayan akışkan (imperfect fluid) denklemi olarak adlandırılabilir [8]. u_μ , dört hız vektörü zamansaldır ve $u_\mu u^\mu = -1$ denklemini sağlar. q_μ , enerji akı yoğunluk vektörüdür ve uzaysaldır ($q_\mu q^\mu > 0$). k_μ , uzaysal dört vektördür ($k_\mu k^\mu > 0$) ve bu vektörlerin akışkan ile beraber hareket eden gözlemciye göre sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibidir,

$$u_\mu = (\pm A(t, r), 0, 0, 0), \quad (2.30)$$

$$q_\mu = (0, q_1, 0, 0), \quad (2.31)$$

$$k_\mu = (0, k_1, 0, 0). \quad (2.32)$$

Burada (2.28) metriği ve (2.29) bağıntısına göre $T_{\mu\nu}^{(ipf)}$ ideal olmayan akışkan için enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir,

$$T_{00} = \rho u_0^2, \quad (2.33)$$

$$T_{11} = (Pg_{11} + \epsilon k_1^2), \quad (2.34)$$

$$T_{01} = q_1 u_0, \quad (2.35)$$

$$T_{22} = Pg_{22}, \quad (2.36)$$

$$T_{33} = Pg_{33}. \quad (2.37)$$

Genel Görelilik teorisinde madde ve enerjinin geometriyle ilişkisini sağlayan eşitlik Einstein denklemidir ve,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(ipf)}, \quad (2.38)$$

olarak yazılır. (2.28) çizgi elemanı için Einstein tensörünün bileşenleri için (2.38) denklemi,

$$G_{00} = 8\pi\rho u_0^2, \quad (2.39)$$

$$G_{11} = 8\pi(Pg_{11} + \epsilon k_1^2), \quad (2.40)$$

$$G_{22} = 8\pi P g_{22}, \quad (2.41)$$

$$G_{01} = 8\pi q_1 u_0, \quad (2.42)$$

elde edilir. Böylece enerji yoğunluğu, basınç ve dört vektör bileşenleri Einstein tensörü bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır,

$$\rho = \frac{G_{00}}{8\pi u_0^2}, \quad (2.43)$$

$$P = \frac{G_{22}}{8\pi g_{22}}, \quad (2.44)$$

$$q_1 = \frac{G_{01}}{8\pi u_0}, \quad (2.45)$$

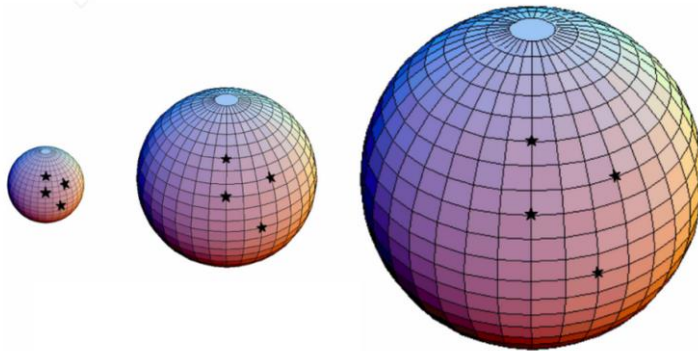
$$k_1 = \pm \sqrt{\frac{G_{11}}{8\pi\epsilon} - \frac{Pg_{11}}{\epsilon}}. \quad (2.46)$$

(2.29) denklemi ile ifade edilen enerji-momentum tensörü, küresel simetrik uzay-zaman geometrisi için en genel, ideal olmayan akışkan (imperfect fluid) denklemi olarak yazılabilir. Burada q_1 ve k_1 vektör bileşenleri uzay-zamanın radyal yöndeki gerilme miktarlarıyla ilgilidir. q_μ ve k_μ gibi uzaysal vektörleri kullanarak aksel simetrik uzay-zaman metrikleri de dahil olmak üzere bir çok farklı yapıda geometriler için Einstein alan denkleminin çözümlerini elde etmemiz mümkündür. Bu tezde, bazı karadelik geometrileri, zamana bağlı konformal faktör kullanılarak, genişleyen uzay-zaman geometrisine dönüştürülecek ve ideal olmayan enerji-momentum tensörü ile uzay zamanın yapısı Genel Görelilik teorisi kapsamında incelenecektir. Farklı uzay-zaman geometrileri için (2.43)-(2.46) denklemlerindeki büyüklükler elde edilecektir.

2.2. Kozmoloji

2.2.1. Kozmolojik Metriğin Özellikleri ve Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Metriği

Modern kozmolojide, gözlemsel olarak kozmolojik ilkenin test edilebilir iki yapısal sonucu, homojenlik ve izotropidir. Evrenin büyük patlama ile başladığı düşünülürse günümüze kadar gelen süreçte homojen ve izotropik dağılımın olması gerektiği kabul edilmektedir ve bu varsayım gözlemlerle de desteklenmektedir. Yeterince büyük ölçekte bakıldığında, evrenin özellikleri tüm gözlemciler için aynıdır. Genel Göreliliği kozmolojiye uygulamak için en basit yaklaşım, büyük ölçekli bir biçim bir geometri kullanarak mümkün olabilir. Kozmolojik gözlemlere göre, 10 mpc'den daha büyük ölçeklerde ortalama yoğunluk aynıdır. Evrenin her yerde aynı olabilmesi için erken evren evresinde enflasyon (şişme) denen bir dönemin olması gerektiği düşünülmektedir. Hesaplamalara göre, bu dönemde evren ışık hızından daha hızlı genişlemiş olmalıdır. Kozmik enflasyon teorisi ile evrenin homojenliği ve düzlüğü bilimsel olarak açıklanmaya çalışılır. 1929 yılında Edwin Hubble uzak galaksilerin ışığındaki kırmızıya kaymaları gözlemleyerek galaksilerin birbirinden uzaklaştığını keşfetmiştir [16]. Hubble'in gözlemlerine göre galaksiler uzaklıklarıyla doğru orantılı bir hız ile bizden uzaklaşmaktadır ve bu durum evrenin her noktası için aynıdır. İki cisim birbirinden çok uzak ise birbirinden uzaklaşma hızları da o kadar büyük olur [17].



Şekil 2.1. Şekil büyüdükçe tüm görelî mesafeler büyür (The Physics of Cosmology, G. Efstathiou, Cambridge)

Küresel bir yüzey üzerinde düzenli aralıklarla noktalar yerleştirelim ve daha sonra şişirelim küre genişledikçe herhangi iki nokta arasındaki mesafe, yüzeyi ile orantılı olarak artar, böylece

noktaların dağılımı homojenliğini korur. Bu durumda başlangıçta daha küçük olan evrenin çok daha yoğun ve sıcak olduğunu söyleyebiliriz. İlk evren döneminde evrenin serbest elektron, proton ve fotonlardan oluşan bir plazma halinde olduğu bilinmektedir. Bu dönemdeki yüksek sıcaklık elektron ve fotonların bir araya gelip atomların oluşmasını engellemektedir. Büyük patlamadan 379000 yıl sonra evren genişleyip yeterince soğuyunca elektron ve protonlar bir araya gelerek atomları oluşturmuşlardır. Bu birleşme esnasında ortamdaki fotonlar serbest kalarak evreni doldürmüşlardır. Günümüzde bu fotonları kozmik mikrodalga arka alan ışıması (CMBR) olarak gözlemleriz. Evrenin homojen ve izotropik olduğu, CMBR'nin gözlenmesiyle ortaya çıkmıştır. 1965 yılında Penzias ve Wilson 2.7K'lık kara cisim radyasyona karşılık gelen tek tip kozmik fotonlardan oluşan arka alan ışımasını farketmişlerdir [18]. Bu ışıma yaklaşık olarak evrende her yerde aynı sıcaklıktadır. Diğer taraftan daha hassas gözlemler, evrendeki bu ışımamın 10^{-5} mertebesinde homojensizlikler içerdiğini göstermektedir yani CMBR gökyüzünün bazı yerleri çok küçük oranda daha sıcak ya da daha soğuktur. Bu inhomojenlikler evrenin ilk dönemindeki madde dağılımının farklılıklardan kaynaklanır. Zaman içinde bu madde dağılım farklılıkları kütle çekiminin etkisi ile büyür ve böylece galaksi ve yıldızlar oluşur. Galaksiler ve galaksi kümeleri evrende yerel düzensizliklere örnek olarak gösterilebilir.

Edwin Hubble'nin 1920'lerdeki verilerinde, uzak yıldızların spektrumunda kırmızıya kaymalar sonucu evrenin sabit hızla genişlediği düşünülmüştür. Ancak 1998 yılında elde edilen süpernova patlamasının gözlemleri sonucunda evrenin ivmelenecek şekilde genişlediği anlaşılmıştır. Bu gözlem durağan evren teorisinin sonu olarak düşünülür. Kozmolojide, evrenin yaklaşık olarak homojen ve izotropik olması hesaplamalar için büyük kolaylık sağlar. Bu anlamda genişleyen ve maksimum simetriye sahip evren tanımına en uygun geometri, yani uzaysal izotropi, homojenlik, genişleyen uzay-zaman ve evrenin başlangıcını içeren model, genel görelilik teorisi kullanılarak açıklanmaya çalışılmaktadır. Bütün bu özelliklere sahip uzay-zaman geometrisi Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) çizgi elamanıyla aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right]. \quad (2.47)$$

Burada $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, iki boyutlu küre yüzeyini ve $a(t)$ ölçek faktörü zaman içerisinde evrenin evrildiğini ifade eder. k , eğrilik parametresidir ve $0, \mp 1$ değerlerini alır. Klasik kozmolojide uzay zaman FLRW metriği ile ifade edilir ve bir mükemmel akışkan için

Einstein alan denklemlerini sağlar ($G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$). Einstein tensörü $G_{\mu\nu}$, geometri ile ilgili büyüklüktür, κ Einstein kütle çekim sabitidir ve $\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$ değerine sahiptir. Burada G_N Newton kütle çekim sabitidir ve c ışık hızıdır. Kolaylık olması açısından $G_N \equiv 1$, $c \equiv 1$ notasyonu kullanılır. $T_{\mu\nu}$, enerji-momentum tensörüdür ve evrenin içerdiği madde yapısı ile ilgilidir. Klasik kozmolojide evrenin mükemmel akışkan yapısında bir madde ile dolu olduğu düşünülür ve aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$T_{\mu\nu}^{(pf)} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Mükemmel akışkanda, termal iletkenlik ve viskosite önemli değildir. Mükemmel akışkan için FLRW metriğinin Einstein denklemlerinden elde edilen eşitliklere Friedman denklemleri denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.49)$$

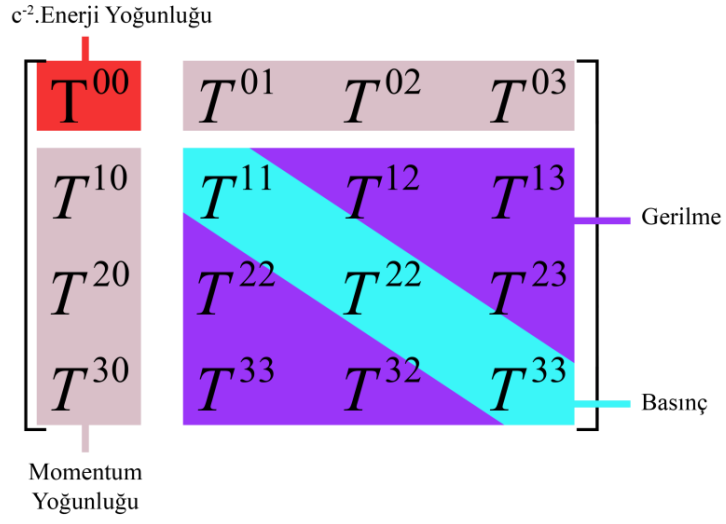
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.50)$$

Bu denklemlerden elde edilen ölçek faktörü ve enerji-momentum değerleri, evrenin durumu hakkında bilgi verir. Karanlık madde ve enerjiyi Λ CDM modelinde bu mükemmel akışkanın bileşenleri olarak ele alabiliyoruz. Bu sebeple teorik kozmolojide matematiksel yapı oluşturmak, günümüz için önemli problemlerden biridir.

2.2.2. Enerji-Momentum Tensörü

Enerji-momentum tensörü $T^{\mu\nu}$ uzayın içerdiği madde dağılımı ile ilgili tensördür. Burada μ, ν dört boyutlu uzay-zaman koordinatlarını ifade eden indislerdir ve $\mu, \nu = 0,1,2,3$ değerlerini alır, uzaysal koordinatlar için $i, j = 1,2,3$ değerleri kullanılmaktadır [19].

T^{00} bileşeni enerji yoğunluğunu, T^{0i} bileşeni, x^i sabit yüzey boyunca enerji akısını ifade eder. T^{i0} bileşeni, t sabit yüzeyi boyunca x^i yönündeki momentum yoğunluğudur, T^{ij} bileşeni ise i sabit yüzeyi boyunca j yönünde oluşan gerilimi ifade eder [20]. Herhangi bir geometri için, enerji-momentum tensörünü modellemek o sistemi tamamen anlamak için gereklidir.



Şekil 2.2. Enerji-momentum tensörünün $T_{\mu\nu}$ bileşenlerinin gösterimi

2.3. Karadelikler

2.3.1. Schwarzschild Karadeligi

Schwarzschild geometrisi, M kütleli, yüksüz, statik ve küresel bir cismin dışında kalan boşluğun geometrisi olarak ifade edilir. Einstein'ın, Genel Görelilik teorisini yapmasından hemen sonra, 1917 yılında Karl Schwarzschild, küresel simetrik cismin çevresindeki boş uzay için alan denklemlerini çözmüş ve en temel olası karadelik geometrisini elde etmiştir. Schwarzschild çizgi elemanı,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.51)$$

şeklindedir ve bu uzay zaman $G_{\mu\nu} = 0$ vakum için Einstein alan denklemlerini sağlar. Newton kuramı çerçevesinde kütlesi M ve yarıçapı R olan bir gezegenden fırlatılan bir cismin, gezegenin kütle çekim alanından kurtulabilmesi için fırlatılma kinetik enerjisinin kütle çekim potansiyel enerjisine eşit veya daha büyük olması gerekir. Bu durumda, $\frac{1}{2}v^2 = \frac{G_N M}{R}$ denkleminde kaçış hızı $v = \sqrt{\frac{2G_N M}{R}}$ olarak bulunur. Bu denkleme göre, M kütleli gezegenin yarıçapı ne kadar küçük olursa fırlatılma hızının o kadar büyük olması gerektiği anlaşılır. R yarıçapını yeterince küçültürsek v hızı c ışık hızına eşit olur. Daha küçük yarıçaplar için v kaçış hızının c ışık hızından daha büyük olması gerekir. Bu durumda bu kütle çekim alanından ışık bile kaçamaz denir. Böylece bir kritik yarıçaptan sonra M kütleli cisim karadelik olarak tanımlanır. Bu kritik yarıçapa Schwarzschild yarıçapı denir ve $r_s = \frac{2G_N M}{c^2}$ olarak ifade edilir. Schwarzschild metriğinde $r = r_s$ ve $r = 0$ noktalarında tekillik olduğu düşünülebilir oysaki $r = r_s$ noktasında tekillik yoktur, bir olay ufku vardır. Farklı koordinat sistemlerine dönüşüm yapılarak bu tekillikten kurtulunabilir. Böylece $r = 0$ noktasının, yani kara deliğin merkezinin, gerçek tekillik olduğu eğrilik skalerleri hesaplanarak gösterilebilir ve tüm koordinat sistemlerinde bu tekillikten kurtulunamaz.

2.3.2. Reissner-Nordström Karadeligi

Reissner-Nordström metriği, Hans Reissner (1916) ve Gunnar Nordström (1918) tarafından ayrı zamanlarda elde edilmiştir. Reissner-Nordström uzay-zaman metriği, Maxwell denklemlerini içeren Einstein alan denklemleri için küresel simetrik çözüm sağlar. Reissner-Nordström

karadelikliğini Schwarzschild karadelikinden ayıran özellik, M kütleli cismin Q elektrik yüküne sahip olmasıdır. Işık hızını ve yerçekimi sabitlerini uygun biçimde normalize ettikten ($c = G_N = 1$) sonra, Reissner-Nordström metriği aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.52)$$

Bu metrik asimptotik olarak düzdür ve (4.2) denkleminde $r \rightarrow \infty$ durumunda

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.53)$$

Minkowski metriği elde edilir. Metrik elemanlarından kütle M, yarıçap r ve elektrik yükü Q arasında aşağıdaki gibi bir ilişki mevcuttur.

$$\frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} < 1. \quad (2.54)$$

Reissner-Nordström metriği, elektrik yükü $Q=0$ olduğu durumda Schwarzschild metriğine, elektrik yükü ile kütle $Q=M=0$ olduğu durumda da Minkowski metriğine dönüşmektedir. Reissner-Nordström metriği için olay ufku,

$$0 = g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}, \quad (2.55)$$

durumu gerçekleştiğinde oluşur. $g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0$ bağıntısından $r^2 - 2Mr + Q^2 = 0$

denklemi çözüldüğünde r'ye bağlı ikinci dereceden denklemin kökleri,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (2.56)$$

elde edilir. Bu denklemde M ve Q'nun değerine bağlı olarak üç farklı durum mevcuttur.

Birinci durum için ($M^2 < Q^2$): $M^2 - Q^2 < 0$ olacağından kökler reel olmaz. Bu durumda $r > 0$ için olay ufku yoktur. Diğer taraftan, $r = 0$ noktasında halen bir tekillik mevcuttur. Bu durum, bu tür karadeliklere dışarıdan bakan gözlemcinin bu tekilliği göreceği anlamına gelir. Bu tür tekilliklere çıplak (naked) tekillik denir. Oysaki evrende büyük patlama tekilliği hariç hiç bir çıplak tekilliğin olamayacağı düşünülür. Bu sebeple $M^2 < Q^2$ durumu fiziksel olmayan çözüm olarak adlandırılır [21].

İkinci durum ($M^2 > Q^2$): bu seçenekte $M^2 - Q^2 > 0$ olacağından, iki reel kök vardır,

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \text{ ve } r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (2.57)$$

bulunur. Bu tekillikler koordinat sistemi seçimimiz ile ilgilidir. Farklı koordinat ekseninde bu tekillikler olmayabilir. Reissner-Nordstöm metriğinde bu noktalar olay ufku olarak adlandırılır.

Bu durumda uzay r 'nin değerine bağlı olarak üç bölgeye bölünebilir,

i) $r_+ < r < \infty$ bölgesi,

ii) $r_- < r < r_+$ bölgesi,

iii) $0 < r < r_-$ bölgesi.

Parçacık 1. bölgeden 2. bölgeye geçerken yani r_+ yarıçapını geçerken Schwarzschild yarıçapındaki durum gerçekleşir. Dışarıdaki bir gözlemci için bu cisimden gelen ışık sonsuz kırmızıya kayar, cisim olay ufkunu geçmemiş ve donmuş gibi görünür. 2. bölgede tüm kütleli ve kütsüz parçacıklar yarıçapın azalma yönünde hareket ederler. Cisim 3. bölgeye geldiğinde r 'nin azalma eğilimi durur. Parçacığın $r = 0$ tekilliğine düşmesine sebep olan bir etki yoktur.

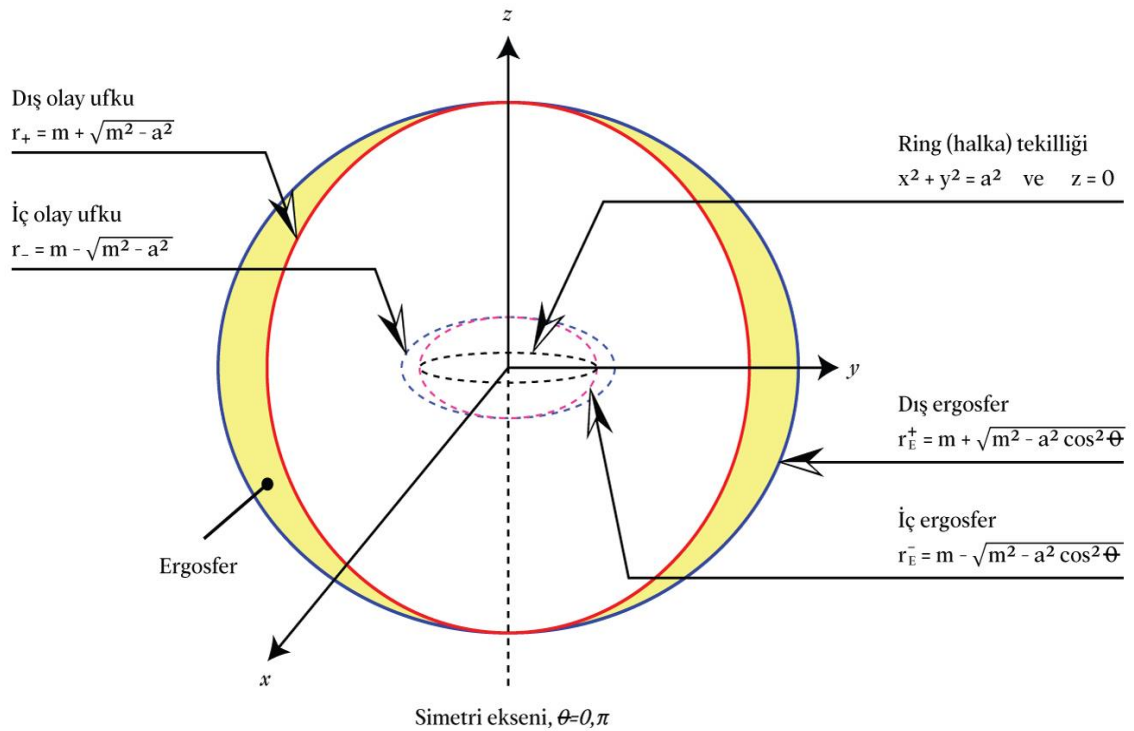
Üçüncü durum, $M^2 = Q^2$ olduğunda, $r = M$ noktasında tek bir olay ufku vardır. Bu tür kara deliklere ekstrem karadelikler denir. Bu durumda karadelik stabil değildir çünkü madde miktarındaki en küçük farklılaşma karadelinin ekstrem karadelik olma durumunu bozar ve uzay birinci veya ikinci duruma dönüşür [22,23].

2.3.3. Kerr Karadeligi

Dünya, Güneş, yıldızlar, gezegenler gibi astronomik cisimlerin hepsi olmasa bile çoğunun döndüğü bilinmektedir. Dönen karadelikler, Kerr metriği ile tanımlanır ve bu geometri, yüksüz, aksenal simetrik karadelinin etrafındaki boş uzay-zamanı tanımlar. Dönen karadelinin etrafındaki cisimler dönme yönünde sürüklenerek açısal momentum kazanırlar ve karadelik ile birlikte dönmeye başlarlar. Bu durum Kerr metriğinin uzay zamanı bükmesinden kaynaklıdır ve referans çerçevesinin sürüklenme etkisi (frame dragging) olarak bilinir. Kerr metriği, çoğunlukla Boyer-Linquist koordinatları ve Kerr-Schild koordinatları olmak üzere iki farklı şekilde ifade edilir. Küresel koordinatlarda ifade edilen Boyer-Lindquist metriğinin limit

durumu Schwarzschild metriğine indirgenirken, kartezyen koordinatlarında ifade edilen Kerr-Schild metriğinin limiti Eddington-Finkelstein karadelik metriğini vermektedir. Kerr karadeligi dış ve iç olmak üzere iki olay ufkuна sahiptir (Şekil 2.3). Dış olay ufku ve dış ergosfer arasında kalan bölgeye **ergosfer** denir ve bu bölgedeki cisimler, karadeligin dönme yönünde, ışık hızında sürüklenir. Ergosfere düşen parçacıklar hızlı hareket etmeye zorlanır ve bu durum onların daha fazla enerji kazanmalarına neden olur bu sebeple bu bölgeye yunanca “iş” anlamına gelen “ergon” kelimesinden türetilen ergosfer adı verilmiştir. Bu cisimler halen olay ufku dışında oldukları için karadelikten kaçabilirler. Penrose işlemi olarak bilinen bu durum, dönen karadeliklerden kaçan parçacıkların yüksek enerjili olacaklarını gösterir. Gözlemsel olarak astrofiziksel karadelikler, büyük enerji kaynaklarıdır ve gama ışını patlamaları gibi yüksek enerjili olayları açıklamak için kullanılır.

Dönen bir cisim, J açısal momentumu ile karakterize edilir. Astrofizik ve kozmolojide açısal momentum, genellikle birim kütle için açısal momentumu ile ifade edilir ve $a = J/M$ dönme parametresi ile tanımlanır. Kerr geometrisinde, karadeligin etrafındaki uzay-zamanın dönme miktarı $dt d\phi$ çapraz terimlerinden elde edilir. Bu terim belli zaman aralıklarında açıda değişime miktarını verir. Kerr metriği, Boyer-Lindquist koordinatlarında [24],



Şekil 2.3. Kerr karadeligi olay ufukları ve ergosfer gösterimi

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4amr\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr\sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (2.58)$$

olarak ifade edilir. Burada $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ ve $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ olarak tanımlanır.

Metrik bileşenlerinin t ve φ koordinatlarından bağımsız olmaları sebebiyle ∂_t ve ∂_φ Killing vektörlerdir ve uzay-zaman bu koordinatlara göre simetriktir denir. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ekvator düzleminde,

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)}, \quad (2.59)$$

olarak yazılır. Tekil noktalar için,

$$1 - \frac{2m}{r} + \frac{a^2}{r^2} = 0, \quad (2.60)$$

denkleminde,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (2.61)$$

olay ufku tekillik değerleri elde edilir. Dış ve iç ergosfer için, $g_{tt} = 1 - \frac{2mr}{\Sigma} = 0$ denkleminde,

$$r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta = 0, \quad (2.62)$$

$$r_{\text{E}}^{\pm} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4a^2\cos^2\theta}}{2}, \quad (2.63)$$

$$= m \pm \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}, \quad (2.64)$$

elde edilir. r_{\pm} ve r_{E}^{\pm} tekil noktaları koordinat tekiliğidir (Şekil 2.3). Farklı koordinat sistemi seçildiği takdirde bu tekilliklerden kurtulunabilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Kozmolojik Karadelikler

Gözlemlerle uyuşan karadelikler, dinamik bir arka alanda konumlanmış, çevresinde farklı kozmolojik cisimler olan ve bu cisimlerle etkileşim halinde bulunan objelerdir. Bu kozmolojik ortamda uzay-zaman eğridir. Diğer taraftan, çevresi ile hiçbir etkileşim halinde olmayan statik Schwarzschild karadeliği için Einstein alan denklemlerinin çözümleri, gözlemsel kozmolojiden daha ziyade büyük kütleçekimsel etkisi olan, durgun bir objenin matematiksel ifadesi olarak düşünülebilir. Bu tezde, kozmolojik bir arka alana gömülmüş, zaman içerisinde değişen, karadelikten yeterince uzak mesafede FLRW uzay zaman geometrisine yaklaşan daha gerçekçi ve gözlemlerle uyuşan geometriler incelenecektir.

Kozmolojik uzaya gömülmüş dinamik karadelikleri inceleyen birçok kütleçekim teorileri vardır. Schwarzschild-de Sitter/Kottler uzay zaman geometrisi yapılan ilk çalışmalardan biridir. Pozitif kozmolojik sabit içeren bu çözüm vakum Einstein denklemlerini sağlar [25].

Diğer bir önemli çalışma, McVittie uzay-zamanıdır [9],

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{m(t)}{2\sigma}\right)^2}{\left(1 + \frac{m(t)}{\sigma r}\right)^2} dt^2 + a(t)^2 \left(1 + \frac{m(t)}{\sigma r}\right)^4 (d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.1)$$

FLRW evrenine gömülmüş, merkezi bir objeyi ifade eden bu geometride negatif kozmolojik sabit ve/veya elektrik yükü içeren çözümler de mevcuttur. McVittie çözümü, lokal bir sistemde kozmolojik genişlemeyi sağlayan geometriyi oluşturmak üzere yapılmıştır. McVittie çözümü ideal akışkan (perfect fluid) madde yapısını desteklemektedir, ancak genelleşmiş McVittie

uzay-zaman geometrisi için ideal olmayan madde yapısı gereklidir. $G_{01} \neq 0$ terimlerinden kaynaklanan radyal yönde kozmik enerji akışı olmalıdır ve uygun enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu}^{(ipf)} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (3.2)$$

olarak tanımlanabilir. Burada $q^\mu = (0, q, 0, 0)$ uzaysal bir dört vektördür ve radyal yönde enerji akışını tanımlar.

McVittie metriğinde, hiçbir yığılma (accretion) olmaması durumunda, $G_{01} = 0$ şartı sağlanır ve bu durum, $m(t) = \frac{m_0}{a(t)}$ eşitliğini gerektirir. Böylece izotropik koordinatlarda McVittie metriği,

$$ds^2_{(MV)} = -\frac{\left(1 - \frac{m_0}{2\sigma a(t)}\right)^2}{\left(1 + \frac{m_0}{2\sigma a(t)}\right)^2} dt^2 + a(t)^2 \left(1 + \frac{m_0}{2\sigma a(t)}\right)^4 (d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2 + \sigma^2 \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır.

McVittie geometrisi, $a \equiv 1$ durumunda izotropik koordinatlarda Schwarzschild olurken, $m(t) = 0$ durumunda FLRW metriğine indirgenir. McVittie metriğinde, $m = \frac{m_0}{a(t)}$ kütle parametresi sabit alındığında,

$$r = \sigma \left(1 + \frac{m}{2\sigma}\right)^2, \quad (3.4)$$

bağıntısı ile dönmeyen Thakurta metriği ve McVittie metriği arasındaki ilişki elde edilir. Böylece, dönmeyen Thakurta metriği, Schwarzschild geometrisinin bir konformal formu olarak aşağıdaki gibi elde edilir [2],

$$ds^2_{(T)} = a(t)^2 \left[-\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right]. \quad (3.5)$$

Homojen olmayan bu geometrinin FLRW arka alanına gömülmüş karadeliği ifade ettiği düşünülebilir. Einstein denklemlerinin zamana bağlı çözümleri bu uzay zaman için uygun madde yapısı hakkında bilgi verir.

Bu metrik için Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri;

$$G_{00} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.6)$$

$$G_{01} = \frac{2m\dot{a}}{r^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)a}, \quad (3.7)$$

$$G_{11} = \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2 a^2}, \quad (3.8)$$

$$G_{22} = \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}, \quad (3.9)$$

$$G_{33} = \sin^2\theta G_{22}. \quad (3.10)$$

Bu geometri için uygun enerji-momentum tensörü;

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Bu madde yapısı, homojen olmayan izotropik geometriyi destekler ve mükemmel akışkandan farklı olarak T_{01} bileşeni vardır. Bu durum, radyal yönde enerji akısının sıfırdan farklı olduğu duruma karşılık gelmektedir.

Burada dört hız vektörü durgun referans sistemi için $u_\mu = (u_0, 0, 0, 0)$ olarak yazılır ve $u_\mu u^\mu = -1$ bağıntısından $u_0 = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}$ elde edilir. Dört akı vektörünün bileşenleri $q_\mu = (0, q_1, 0, 0)$ olmak üzere ve $q_\mu q^\mu > 1$ uzaysal bir vektör olarak tanımlanır. Böylece (2.38) ve (3.11) denklemleri kullanarak bu madde yapısına ait büyüklükler kolaylıkla,

$$\rho = \frac{G_{00}}{8\pi u_0^2}, \quad (3.12)$$

$$P = \frac{G_{22}}{8\pi g_{22}}, \quad (3.13)$$

$$q_1 = \frac{G_{01}}{8\pi u_0}, \quad (3.13)$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan, Sultana ve Dyer tarafından bir başka homojen olmayan kozmolojik karadelik metriği,

$$ds^2_{(SD)} = a(t)^2 \left[-d\tau^2 + \frac{2m}{r} (d\tau + dr)^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.14)$$

olarak elde edilmiştir. Bu geometri Thakurta metriğinden farklı görünse de

$$\tau(t, r) = t + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|, \quad (3.15)$$

dönüşümü yapıldığında,

$$ds^2_{(SD)} = a(t, r)^2 \left[- \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (3.16)$$

elde edilir. Thakurta metriğinden farklı olarak bu geometri, $a(t, r)^2$ radyal ve zaman koordinatlarına bağlı bir konformal faktör ile Schwarzschild metriği ile ilişkilidir. Ayrıca yukarıdaki dönüşümlerde ters dönüşüm yapılarak McVittie ile dönüşümü elde edilebilir.

McVittie [9], Thakurta [2] ve Sultana-Dyer'den [3] başka kozmolojik karadelikler ile ilgili literatürde farklı çalışmalar da mevcuttur. Bunlardan en bilinen, Vaidya [10], Lemaitre-Tolman-Bondi [11,12], Einstein-Strauss [5], Husain-Martinez-Nunes [13], Fonarev [14] ve Phantom Fonarev [15] olarak sıralanabilir.

3.2. Konformal Dönüşümler

Genel görelilikte $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ şeklinde tanımlanan konformal dönüşümler ile yeni ve daha genel uzay zaman geometrileri elde edilebilir. Bu yöntem, mevcut çözümler kullanılarak yeni analitik çözümler elde etmek için uygundur. Böylece Minkowski arka alanında tanımlanan statik karadelik çözümlerini FLRW arka alanında tanımlayabilmek için uygun yöntem olur.

$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ konformal dönüşümünde, Ω^2 konformal faktördür.

Bu dönüşüm altında Ricci tensörü,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{4\nabla_\mu \Omega \nabla_\nu \Omega}{\Omega^2} - \frac{2\nabla_\mu \nabla_\nu \Omega}{\Omega} - g_{\mu\nu} \left[\frac{\square \Omega}{\Omega} + \frac{\nabla_\lambda \Omega \nabla^\lambda \Omega}{\Omega^2} \right], \quad (3.17)$$

ve Ricci skaleri,

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} \left(R - \frac{6\square \Omega}{\Omega} \right) \text{ şeklinde dönüşüme uğrar.}$$

Burada \square , D'Alembert operatörüdür ve 3-boyutlu uzaydaki Laplasyen operatörüne karşılık gelir ve $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ şeklinde yazılır.

Einstein tensörü, bu dönüşüm altında,

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \frac{2}{\Omega} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Omega - g_{\mu\nu} \square \Omega) + \frac{1}{\Omega^2} (4 \nabla_\mu \Omega \nabla_\nu \Omega - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \Omega \nabla^\lambda \Omega), \quad (3.18)$$

$$\equiv \kappa (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\Omega)}), \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece Ω^2 gibi bir konformal faktör tanımlanırsa yeni madde formlarının olması gerekir. Birçok durumda bu yeni madde formları fiziksel olarak uygun olmayabilir veya negatif enerji yoğunluğuna sahip olabilir.

Diğer taraftan bu tür dönüşümler karadelik modellerin de sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin Husain-Martinez-Nunez çözümü Fisher çözümüne konformaldir [13]. Thakurta [2] ve Sultana-Dyer [3] çözümleri farklı konformal faktör altında Schwarzschild metriğine konformaldir. Bu geometriler için ideal olmayan enerji-momentum tensörü kullanarak, negatif olmayan enerji yoğunluğu elde edebilir. Bu tür uzay-zaman geometrileri için analitik incelemeler sonraki iki bölümde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yüklü Thakurta Karadeligi

Gözlemlenen astrofiziksel karadelikler elektrik olarak yüksüzdürler ve dönerler. Kara delikler izole objeler olmayıp asimtotik olarak kozmolojik evrene gömülmüşdürler. Bu sebeple Reissner-Nordstrom-de Sitter modeli Λ kozmolojik sabiti içerdiği için daha gerçekçidir. Astrofiziksel kara deliklerde asimtotik durumlar görelilikte ihmal edilir çünkü bu ölçekler Hubble yarıçapından çok küçüktür. Fakat bu durum her zaman geçerli olmayabilir çünkü küçük bir kozmolojik sabit büyük farklılıklar getirebilir. Bu sebeple gerçek karadeliklerin dinamik objeler olduğu ve etrafı ile etkileşim halinde bulunduğunu düşünmeliyiz. Statik veya durağan karadelik metriği zamana bağlı bir konformal faktör ile çarpılarak zaman içinde evrilen uzay-zaman geometrisi elde edilebilir. Daha önce de ifade ettiğimiz gibi, bu yöntemle elde edilen kozmolojik karadelik geometrilerine örnek olarak Thakurta metriği [2] ve Sultana-Dyer [3] metriği verilebilir.

Her ne kadar gözlemler karadeliklerin yüksüz olduklarını gösterse de kavramsal olarak ifade etmek için Thakurta metriğinin yüklü çözümlerini elde etmek uygundur. Böylece dönmeyen durum için yüklü Thakurta çizgi elemanı,

$$ds^2 = a(t)^2 \left[- \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (4.1)$$

olarak ifade edilir. Burada $a(t)$ ölçek faktörüdür. Burada $r \rightarrow \infty$ limitinde homojen ve izotropik FLRW uzay-zamanı elde edilmektedir. Einstein alan denklemleri,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [R - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + S^{(m)}, \quad (4.2)$$

Einstein-Maxwell eyleminden elde edilir. Burada R , Ricci skaleri ve $F^{\mu\nu}$ Maxwell elektromanyetik alan tensörüdür. $S^{(m)} = \int d^4x \sqrt{-g} L^{(m)}$, uzay-zamanın elektromanyetik radyasyon içermeyen madde yapısını ifade etmektedir. Einstein-Maxwell eyleminin $g^{\mu\nu}$ ile varyasyonu alan denklemlerini verir ve Einstein alan denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(EM)}. \quad (4.3)$$

(4.1) metriğinin tekil noktalarını incelemek için skaler büyüklükler kullanılır. Burada Ricci skaleri,

$$R = \frac{6}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} \frac{\ddot{a}}{a^3}, \quad (4.4)$$

elde edilir ve daha doğru analiz için ikinci dereceden skaler olan Ricci tensörünün karesi,

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 4 \frac{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2 Q^2 a^4 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) r^4 Q^2 a^3 \ddot{a} + 3r^8 (\dot{a}^4 - a\dot{a}^2\ddot{a} + a^2\ddot{a}^2)}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2 r^8 a^8} - \frac{2(m^2 - Q^2)r^4 a^2 \dot{a}^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2 r^8 a^8}, \quad (4.5)$$

olarak bulunur. Bu iki skaler nicelik bize, $r = 0$ noktası ve ölçek faktörünün $a(t) = 0$ değerinde tekil noktalar olduğunu gösterir. Mathematica ve GRtensorII programları kullanılarak, (4.1) metriğin Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$G_{00} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Q^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}{r^4}, \quad (4.6)$$

$$G_{01} = \frac{2(mr - Q^2)\dot{a}}{r^3 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) a}, \quad (4.7)$$

$$G_{11} = \frac{a^2 - 2a\ddot{a}}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2 a^2} - \frac{Q^2}{r^4 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}, \quad (4.8)$$

$$G_{22} = \frac{a^2 - 2a\ddot{a}}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2} - \frac{Q^2}{r^4 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}, \quad (4.9)$$

$$G_{33} = \sin^2\theta G_{22}, \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Elektromanyetik kısım için Maxwell alanının enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibidir,

$$T_{\mu\nu}^{(EM)} = 2 \left[F_{\mu\beta} F_{\nu\alpha} g^{\beta\alpha} - \frac{1}{4} F_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha} g_{\mu\nu} \right]. \quad (4.11)$$

Uzay-zamanın yük dağılımı için uygun elektromanyetik 4-potansiyel vektörü,

$$A_{\mu} = \left\{ \frac{-Q}{r}, 0, 0, 0 \right\} \quad (4.12)$$

olarak yazılır. Antisimetrik elektromanyetik alan tensörü, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ bağıntısından, radyal yönde elektrik alan elde edilir ve değeri,

$$F_{01} = \frac{-Q}{r^2}, \quad (4.13)$$

olur. Burada dört-türev operatörü $\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ 'dür.

Maxwell alanı için enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri (4.11) bağıntısından aşağıdaki gibi elde edilir,

$$T_{00}^{(EM)} = F_{01}^2 g^{11} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \frac{Q^2}{a^2 r^4}, \quad (4.18)$$

$$T_{11}^{(EM)} = F_{01}^2 g^{00} = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} \frac{Q^2}{a^2 r^4}, \quad (4.16)$$

$$T_{22}^{(EM)} = F_{01}^2 g^{22} = \frac{Q^2}{a^2 r^2}, \quad (4.17)$$

$$T_{33}^{(EM)} = T_{22}^{(EM)} \sin^2 \theta. \quad (4.18)$$

Burada metrik tensörün tersinin bileşenleri aşağıdaki gibidir,

$$g^{00} = - \frac{1}{a^2 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)}, \quad (4.19)$$

$$g^{11} = \frac{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)}{a^2}, \quad (4.20)$$

$$g^{22} = \frac{1}{a^2 r^2}, \quad (4.20)$$

$$g^{33} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.22)$$

Eğri uzayda Gauss-Amper yasası için Maxwell denklemi,

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu} = 0, \quad (4.23)$$

olur, böylece yüklü Thakurta uzay-zaman için yük ve akım yoğunluğunun sıfır olduğu sonucu elde edilir. Maxwell alanı için, enerji momentum tensörünün kovaryant türevi alınır,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}_{(EM)} = 0, \quad (4.24)$$

sonucu elde edilir. Böylece elektromanyetik enerji-momentum tensörü korunur.

Yüklü Thakura uzay zamanı homojen olmayan bir geometriye sahiptir. Bu sebeple bu uzay-zamanı dolduran madde yapısı, mükemmel olmayan akışkan denklemi olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir,

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = T_{\mu\nu}^{(f)} = (P + \rho)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu} + u_{\mu}q_{\nu} + u_{\nu}q_{\mu}. \quad (4.25)$$

Burada ρ enerji yoğunluğu, P basınç, u_{μ} dört hız vektörü, q_{μ} ideal olmayan sıvı terimidir ve enerji akısını temsil eder. Bu büyüklükler, zaman ve radyal koordinata bağlı fonksiyonlardır.

Dört hız vektörü $u^{\mu}u_{\mu} = -1$, zamansaldır ve $u_{\mu} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{|g^{00}|}}, 0,0,0 \right\} = \left\{ -\sqrt{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} a, 0,0,0 \right\}$

olur. Dört enerji akı vektörü uzaysaldır ve karesi $q^{\mu}q_{\mu} > 0$ olur, alan denklemleri çözülerek büyüklüğü elde edilir.

(4.25) bağıntısı kullanılarak enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$T_{00}^{(f)} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) a^2 \rho(t, r), \quad (4.26)$$

$$T_{01}^{(f)} = \sqrt{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} a q_1(t, r), \quad (4.27)$$

$$T_{11}^{(f)} = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} a^2 P(t, r), \quad (4.28)$$

$$T_{22}^{(f)} = r^2 a^2 P(t, r), \quad (4.29)$$

$$T_{33}^{(f)} = T_{22}^{(m)} \sin^2 \theta, \quad (4.30)$$

olarak elde edilir. Burada kısaca uzaysal kısım için $T_{ii}^{(f)} = P g_{ii}$ yazılabilir. Einstein denklemi,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu}^{(f)} + T_{\mu\nu}^{(EM)}), \quad (4.31)$$

yazılarak, (0,0) bileşeni için,

$$G_{00} = 8\pi(T_{00}^{(f)} + T_{00}^{(EM)}), \quad (4.32)$$

$$= 8\pi\rho u_0^2 + F_{01}^2 g^{11}, \quad (4.33)$$

bağıntısından (4.6), (4.18) ve (4.26) eşitlikleri kullanılarak enerji yoğunluğu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\rho = \frac{1}{8\pi u_0^2} (G_{00} - F_{01}^2 g^{11}), \quad (4.34)$$

$$= \frac{1}{8\pi a^2} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{Q^2(a^2-1)}{a^2 r^4} \right]. \quad (4.35)$$

Radyal yöndeki enerji akı yoğunluğu için, alan denklemlerinin (0,1) terimi yazılarak,

$$G_{01} = 8\pi T_{01}^{(f)} + T_{01}^{(EM)}, \quad (4.36)$$

$$= 8\pi q_1 u_0, \quad (4.37)$$

bağıntısından dört akı vektörü elde edilir ve radyal yöndeki bileşeni aşağıdaki gibi elde edilir,

$$q_1 = \frac{G_{01}}{8\pi u_0}, \quad (4.38)$$

$$= \frac{(mr-Q^2)}{4\pi r^3 \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{3/2}} \frac{\dot{a}}{a^2}. \quad (4.39)$$

Basınç değeri, uzaysal koordinatlarda her yönde aynı olacağından, uzaysal bileşenlerden herhangi biri kullanılarak elde edilebilir, (1,1) bileşenini seçersek,

$$G_{11} = 8\pi T_{11}^{(f)} + T_{11}^{(EM)}, \quad (4.40)$$

$$= 8\pi P g_{11} + F_{01}^2 g^{00}, \quad (4.41)$$

denkleminde değerler yerine yazılarak,

$$P = \frac{1}{8\pi g_{11}} (G_{11} - F_{01}^2 g^{00}), \quad (4.42)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} \frac{\dot{a}^2 - 2a\ddot{a}}{8\pi a^4} - \frac{Q^2(a^2-1)}{8\pi a^4 r^2}, \quad (4.43)$$

elde edilir. Enerji korunumu ifadesinden $\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{(f)} = 0$ sonucu enerjinin korunduğunu gösterir.

Burada, beklendiği gibi, $a(t) = 1$ değeri için alan denklemlerinin çözümü Reissner-Nordstrom uzay-zamanına indirgenmektedir. İdeal olmayan akışkan madde yapısı ortadan kalkar, enerji yoğunluğu, basınç ve akı gibi büyüklükler sıfır olur.

4.1.1. Thakurta Metriğinin Jeodezik Denklemleri

Eğri uzay zamanda bir parçacık hareket ederken bu uzay zamana özgü jeodezik eğriler olarak adlandırılan yolları takip eder.

Bir uzay zaman çizgi elemanı skaler büyüklüktür ve,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2, \quad (4.44)$$

olarak yazılır. Jeodezik eğri üzerindeki sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzay-zaman aralığı olan ds büyüklüğü için;

$ds^2 > 0$ durumu uzaysal aralık.

$ds^2 = 0$ durumu ışık tipi aralıktır ve fotonların hareketi bu geometrik eğriler üzerindedir.

$ds^2 < 0$ durumu zamansal aralıktır ve kütleli parçacıklar bu eğriler üzerinde hareket eder.

Jeodezik denklemi,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (4.45)$$

olarak yazılır. Burada $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, Christoffel sembolleridir, e_μ baz vektörleri düz uzay zamanda Kartezyen koordinatlarda sabit büyüklüklerdir. Eğri uzay zamanda yada eğrisel koordinatlarda ise bu baz vektörlerinin koordinat eğrilerine göre değişimleri Christoffel sembolleri ile

karakterize edilir. Matematiksel olarak bu ifade koordinat bazda, $\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha$ olarak ifade edilir. Bu bazda, $e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu}$ metrik tensörünü verir.

Statik karadelik geometrisinin zamana bağlı bir konformal faktör ile dönüşümü yapılarak elde edilen Thakurta metriği;

$$ds^2 = a(t)^2 \left[-f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2 \right], \quad (4.46)$$

olarak ifade edilmiştir. Burada yüklü karadelik için,

$f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ dir, fakat iş yükü bakımından işlemlerimizi kapalı formda devam ettirmek daha uygundur. (4.46) metriğinin Christoffel sembollerinin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \frac{f'}{2f}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{\dot{a}}{f^2 a}, \\ \Gamma^0_{22} &= \frac{r^2 \dot{a}}{f a}, & \Gamma^0_{33} &= \sin^2 \theta \Gamma^0_{22}, \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} f f', & \Gamma^1_{01} &= \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{-f'}{2f}, \\ \Gamma^1_{22} &= -rf, & \Gamma^1_{33} &= \sin^2 \theta \Gamma^1_{22}, \\ \Gamma^2_{02} &= \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -\cos \theta \sin \theta, \\ \Gamma^3_{03} &= \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot \theta. \end{aligned}$$

Basitlik için $c \equiv 1$ seçilirse ve küresel simetriden dolayı $\theta = \frac{\pi}{2}$ yazarsak jeodezik denkleminin $\alpha = 0$ bileşeni için,

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + \Gamma^0_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \text{ denkleminde,}$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma^0_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2\Gamma^0_{01} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma^0_{11} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \Gamma^0_{33} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (4.47)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{f'}{f} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{f^2 a} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{r^2 \dot{a}}{f a} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.48)$$

$\alpha = 1$ için,

$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$ denkleminde,

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^1_{01} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Gamma^1_{11} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^1_{33} \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{ff'}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} - \frac{f'}{2f} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r f \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (4.50)$$

$\alpha = 2$ için, $\theta = \frac{\pi}{2}$ düzleminde hareket eden parçacıklarda θ açısı sabit olduğundan bu koordinata bağlı jeodezik değişim yoktur.

$\alpha = 3$ için,

$\frac{d^2x^3}{d\tau^2} + \Gamma^3_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$ denkleminde,

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2\Gamma^3_{01} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + 2\Gamma^3_{13} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0, \quad (4.51)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} = 0, \quad (4.52)$$

elde edilir. Ayrıca metrik tensörden,

$$ds^2 = -a^2 f dt^2 + \frac{a^2}{f} dr^2 + a^2 r^2 d\varphi^2 = -\varepsilon d\tau^2, \quad (4.53)$$

$$a^2 f \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{a^2}{f} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + a^2 r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -\varepsilon, \quad (4.54)$$

denklemi elde edilir. Burada ε bir parametredir ve uzaysal, ışık tipi ve zamansal durmlar için $\varepsilon = 0, \pm 1$ değer alabilir.

(4.48), (4.50), (4.52), (4.54) denklemlerinin çözülmesi ile parçacığın hareketini belirleyen jeodezik yollar elde edilir. Fakat bu denklemleri çözmek zordur. Bu sebeple bazı koşulları sağlayan parçacıklar için çözümler elde etmek daha uygundur.

(4.52) denklemini $d\varphi/d\tau$ ' ya bölersek,

$$\frac{1}{d\varphi/d\tau} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{d\tau} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} = 0, \quad (4.55)$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d}{d\tau} \ln a^2 + \frac{d}{d\tau} \ln r^2 = 0, \quad (4.56)$$

$\frac{d}{d\tau} \ln \left(a^2 r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = 0$ ve $\ln \left(a^2 r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = \text{sabit}$ olur, logaritmanın içindeki terim sabittir. Bu sabite L dersek,

$$a^2 r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L = \text{sabit},$$

olur. Burada L hareket sabitlerinden biridir ve açısal momentuma karşılık gelir. Böylece açısal momentum korunur denir.

4.1.2. Fotonların Dairesel Yörüngeleri

Dairesel yörüngede hareket eden parçacıklarda radyal koordinat değişmediğinden $dr/d\tau = 0$ olur. Fotonlar ışık tipi jeodezikler boyunca hareket ederler ve bu durum $\varepsilon = 0$ değerine karşılık gelir. Böylece (4.54) denkleminde,

$$-a^2 f \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + a^2 r^2 \frac{L^2}{a^4 r^4} = 0, \quad (4.57)$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{L^2}{f a^4 r^2}, \quad (4.58)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.50) denkleminde dairesel yörüngeler için $dr/d\tau = 0$ yazılırsa,

$$\frac{ff'}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - r f \frac{L^2}{a^4 r^4} = 0, \quad (4.59)$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{2L^2}{f' a^4 r^3}, \quad (4.60)$$

(4.58) ve (4.60) denklemlerinden $\frac{f'r}{2} = f$ elde edilir. $f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ değeri yerine yazılırsa, fotonların dairesel yörünge denklemi, $r^2 - 3mr + 2Q^2 = 0$ ifadesine uyar ve bu ikinci dereceden denklemin çözümünden, $r_{\pm}^{(f)} = \frac{3m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 - 2Q^2}$ sonucu elde edilir. Bu sonuca göre, fotonun dairesel yörüngede hareketi sadece $r_+^{(f)}$ yarıçapında olur çünkü $r_-^{(f)}$ değeri $r_-^{(f)} < r_+ = m + \sqrt{m^2 - Q^2}$ olduğundan olay ufku içinde kalır ve gözlenemez.

4.2. Sultana-Dyer Karadeligi

Genel görelilik çözümleri ile karadelikleri ifade eden metriğin kozmolojik karşılığı olarak Sultana-Dyer metriği, daha öncede ifade ettiğimiz gibi, Schwarzschild uzay zamanı bir ölçek faktörü ile çarpılarak aşağıdaki gibi yazılabilir [3],

$$ds^2 = a^2(t, r) \left[- \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.61)$$

Bu bölümde, homojen olmayan bu uzay-zaman geometrisinin ideal olmayan madde yapısı incelenecektir. Bu geometride, standart kozmolojik Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker ideal akışkan madde yapısından farklı olarak, radyal yönde homejenliği bozan terimler mevcuttur. Uzay-zamanın simetrisi göz önüne alındığında, radyal yönde enerji akışına ek olarak bu yönde gerilim terimlerinin de olması beklenir.

Bu uzay zaman geometrisinde Einstein tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$G_{00} = \frac{3a_t^2}{a^2} + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \left(\frac{a_r^2}{a^2} - \frac{2a_{rr}}{a} \right) - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{2(2r-3m)a_r}{r^2 a}, \quad (4.62)$$

$$G_{01} = \frac{2m}{\left(1 - \frac{2m}{r} \right) r^2} \frac{a_t}{a} + 2 \left(\frac{2a_r a_t}{a^2} - \frac{a_{tr}}{a} \right), \quad (4.63)$$

$$G_{11} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2} \left(\frac{a_t^2}{a^2} - \frac{2a_{tt}}{a} \right) + \frac{3a_r^2}{a^2} + \frac{2(2r-3m)a_r}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) a}, \quad (4.64)$$

$$G_{22} = \frac{r^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} \right)} \left(\frac{a_t^2}{a^2} - \frac{2a_{tt}}{a} \right) - r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{a_r^2}{a^2} - \frac{2a_{rr}}{a} \right) + \frac{2r a_r}{a}, \quad (4.65)$$

$$G_{33} = \sin^2 \theta G_{22}, \quad (4.66)$$

olarak elde edilir. Thakurta metriğinden farklı olarak, bu geometrinin Einstein tensörünün uzaysal bileşenlerindeki farklılıklar, fazladan uzaysal bir dört vektör daha tanımlamamızı zorunlu kılar. Böylece (4.61) metriği için uygun enerji-momentum tensörünün,

$$T_{\mu\nu} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \epsilon k_\mu k_\nu, \quad (4.67)$$

olarak seçilmesi uygundur. Burada u_μ , 4 hız vektörü; q_μ , enerji akısı yoğunluğu; k_μ , radyal yönde uzaysal bir vektördür ve uzay-zamanın radyal yöndeki gerilme miktarı ile ilgilidir. ϵ , sabit parametredir.

Bu geometriyi sağlayan enerji-momentum tensörünün, Sultana-Dyer çözümü incelendiğinde, dörtlü vektörlerin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi olmalıdır,

$$u_\mu = \{u_0, 0, 0, 0\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|g^{00}|}}, 0, 0, 0 \right\} = \left\{ a \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, 0, 0, 0 \right\}, \quad (4.68)$$

$$q_\mu = \{0, q_1, 0, 0\}, \quad (4.69)$$

$$k_\mu = \{0, k_1, 0, 0\}. \quad (4.70)$$

Burda q_μ ve k_μ uzaysal vektörler, Einstein alan denklemi çözülerek elde edilebilir. Einstein denkleminde (4.67) enerji-momentum tensörü için (0,0) bileşeni,

$$G_{00} = 8\pi T_{00} = 8\pi \rho u_0^2, \quad (4.71)$$

yazılarak enerji yoğunluğu,

$$\rho = \frac{G_{00}}{8\pi u_0^2}, \quad (4.72)$$

$$= \frac{1}{8\pi a^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \left[\frac{3a_t^2}{a^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \left(\frac{a_r^2}{a^2} - \frac{2a_{rr}}{a} \right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{2(2r-3m)a_r}{r^2 a} \right], \quad (4.73)$$

elde edilir. q_1 , radyal enerji akı için (0,1) bileşeninden,

$$G_{01} = 8\pi T_{01} = 8\pi q_1 u_0, \quad (7.74)$$

$$q_1 = \frac{G_{01}}{8\pi u_0} = \frac{1}{8\pi a \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \left[\frac{2m}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)r^2} \frac{a_t}{a} + 2 \left(\frac{2a_r a_t}{a^2} - \frac{a_{tr}}{a} \right) \right], \quad (4.75)$$

elde edilir. P, basınç ifadesinin uzay-zamanın geometrisinin küresel simetrik olup homojen olmaması sebebiyle, (2,2) bileşeninden elde edilmesi daha uygundur.

Böylece,

$$G_{22} = 8\pi T_{22} = 8\pi P g_{22}, \quad (4.76)$$

denkleminde,

$$P = \frac{G_{22}}{8\pi g_{22}} = \frac{1}{8\pi a^2 r^2} \left[\frac{r^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \left(\frac{a_t^2}{a^2} - \frac{2a_{tt}}{a} \right) - r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{a_r^2}{a^2} - \frac{2a_{rr}}{a} \right) + \frac{2r a_r}{a} \right], \quad (4.77)$$

elde edilir. Radyal yöndeki gerilme miktarı, uzay-zamanın homojenliğinin ne ölçüde değiştiğini ifade eder ve Einstein denkleminin (1,1) bileşeni için,

$$G_{11} = 8\pi T_{11} = 8\pi (P g_{11} + \epsilon k_1^2), \quad (4.78)$$

denkleminde gerilim vektörü bileşeni,

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{G_{11}}{8\pi} - P g_{11} \right)} \quad (4.79)$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{2a_r^2}{a^2} - \frac{a_{rr}}{a} + \frac{r-3m}{a(r-2m)} \frac{a_r}{a} \right)}, \quad (4.80)$$

olarak elde edilir. Radyal yöndeki gerilimin büyüklüğü,

$$k_\mu k^\mu = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{2a_r^2}{a^2} - \frac{a_{rr}}{a} + \frac{r-3m}{a(r-2m)} \frac{a_r}{a} \right) > 0, \quad (4.81)$$

ifadesini sağlayan büyüklüklerden oluşur. Sultana-Dyer geometrisi için Ricci skaleri,

$$R = \frac{6a_{tt}}{a^3 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{12 \left(1 - \frac{m}{r}\right) a_r + 6r \left(1 - \frac{2m}{r}\right) a_{rr}}{ra^3}, \quad (4.82)$$

olarak elde edilir. Ricci skalerinde $r = 0$ 'da gerçek tekillik vardır. Schwarzschild yarıçapında $r_s = 2m$ olay ufku vardır ve koordinat seçimine göre bu tekillikten kurtulunabilir. $a(t,r)$ ölçek faktörüne bağlı olarak başka bir tekillik daha mevcuttur. Diğer taraftan, bu tekil noktalar aynı zamanda enerji yoğunluğu, momentum ve uzaysal dört vektörler gibi büyüklükler için de tekillik oluşturur. Bu sebeple erken evren dönemi için bu tür karadelik geometrileri uygun değildir.

SONUÇ

Klasik kozmolojide evreninin büyük ölçekte homojen ve izotropik olduğu kabul edilse de küçük oranda homojen olmayan yapıların olduğu gözlemlerle kanıtlanmıştır. Bu homojen olmayan yapılar galaksiler, galaksi kümeleri ve bu galaksilerin merkezindeki büyük karadeliklerden kaynaklanmaktadır. Bu düşünceden yola çıkarak, bu tezde, evrenin homojen olmayan yapısı için ideal akışkan ile değil fakat ideal olmayan akışkan ile dolu olması gerektiği vurgulanmıştır. Bu sebeple kozmolojik FLRW evrenine gömülmüş karadelik geometrisini incelemek uygundur. Bu geometriden kaynaklanan ideal olmayan madde yapısı ile uyumlu enerji-momentum tensörünün, karadeliklerde radyal enerji akışını tanımlayan bileşeni içerdiği elde edilmiştir. Bu radyal enerji akı terimi ısı akısı olarak nitelendirilmektedir. Tezin ilk bölümü, Genel Göreliliğin temel kavramları, statik ve durağan karadelik geometriler hakkında genel bilgileri içermektedir. Daha sonra, homojen olmayan izotropik kozmolojinin tanıtımı ve gerekliliği açıklanarak mümkün enerji-momentum formlarının nasıl olması gerektiği konusu vurgulanmıştır. Evrendeki homojen olmayan yapıların karadelikler ve etrafındaki yığılma disklerinin olduğu varsayılarak, iki farklı geometri için bu madde yapısı incelenmiştir. İlk geometri, yüklü Thakurta metriği olarak adlandırılan Reisner-Nörstom metriğinin FLRW evrenine gömülmesi ile elde edilen geometridir. Bazı çalışmalarda bu geometrinin bir karadeliliğin ilk dönemlerini ifade etmediği söylene de homojen olmayan yapıların incelenmesi bakımından doğaya uygun bir teoridir. İkinci geometri, Sultana-Dyer karadeliliği olarak adlandırılan kozmolojik zaman ve radyal koordinatlara bağlı bir konformal faktör ile Schwarzschild karadeliliğinin homojen olmayan bir uzay zaman geometrisine dönüştürülmesi ile elde edilmiştir. Her iki geometrinin dezavantajı, uzay zamandaki tekil noktaların aynı zamanda enerji yoğunluğu ve basınçta da mevcut olmasıdır. Diğer taraftan, gerçek karadeliklerin evrende inhomejenlikler oluşturduğu bilgisini gözönüne alırsak bu teori ideal bir model oluşturabilir. Homojen ve izotropik geometri kısıtlaması olmadığı durumlarda Einstein alan denklemlerinin analitik çözümleri oldukça kolay olmakta ve tüm büyüklükler Einstein tensörünün bileşenleri cinsinden yazılabilmektedir. Böylece hangi tensör bileşeninin hangi büyüklüğe karşılık geldiği kolaylıkla anlaşılabilir. Bu anlamda bu çalışma temel düzeyde Einstein alan denklemlerinin yapısının anlaşılmasında yararlı olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] Sean M. Carroll, Lecture Notes on General Relativity “NASA/IPAC Extragalactic Database internet sitesi” Aralık, 1997 [Çevrimiçi]. Erişim adresi: <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll8.html> [Erişim tarihi 31 Temmuz 2021].
- [2] S.N.G. Thakurta, “Kerr metric in an expanding universe,” *Indian J. Phys.* 55B, 304, 1981.
- [3] J. Sultana and C.C. Dyer, *J. Math. Phys.* 45, 4764, 2004.
- [4] A. Einstein, “The Field Equations of Gravitation,” *König, Preuss, Akad, Wiss, Vol. 844*, 1915.
- [5] A. Einstein and E.G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* 17, 120, 1945. ; A. Einstein and E.G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* 18, 148, 1946.
- [6] E. Howard, Haber, *Fizik 171 (General Relativity) 2015*. [Çevrimiçi]. Erişim adresi: <http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph171/uvector15.pdf>. [Erişim tarihi 29 Temmuz 2021].
- [7] Ø. Grøn, S. Hervik “Einstein's General Theory of Relativity,” With Modern Applications in Cosmology. Springer-Verlag, 538p, New York, USA, 2007.
- [8] C. Gao, X. Chen, Y.-G. Shen, and V. Faraoni, *Phys. Rev. D* 84, 104047, 2011.
- [9] G.C. McVittie, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 93, 325, 1933.
- [10] P. C. Vaidya and Yashodhara P. Shah, *Current Science* 36, 120, 1966.
- [11] C. Gao, X. Chen, Y.-G. Shen, and V. Faraoni, *Phys. Rev. D* 84, 104047, 2011.
- [12] I. Booth, L. Brits, J.A. Gonzalez, and V. Van den Broeck, *Class. Quantum Grav.* 23, 413, 2006.
- [13] V. Husain, E.A. Martinez, and D. Nuñez, *Phys. Rev. D* 50, 3783, 1994.
- [14] O.A. Fonarev, *Class. Quantum Grav.* 12, 1739, 1995.
- [15] O.A. Fonarev, “Exact Einstein scalar field solutions for formation of black holes in a cosmological setting,” *Class. Quantum Grav.*, 12, 1739-1752, doi:10.1088/0264-9381/12/7/016, 1995.

- [16] Supernova Search Team Collaboration, A. G. Riess et al., Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *Astron. J.* 116, 1009–1038, (1998) [astro-ph/9805201].
- [17] Supernova Cosmology Project Collaboration, S. Perlmutter et al., Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae, *Astrophys. J.* 517, 565–586, (1999) [astro-ph/9812133].
- [18] Ögetay Kayalı “Rasyonalist internet sitesi” 18 Ocak, 2021 [Çevrimiçi]. Erişim adresi: <https://rasyonalist.org/yazi/kozmic-mikrodalga-arkaplan-isinini-cmbr/> [Erişim tarihi 31 Temmuz 2021].
- [19] M.S. Madsen, *Class. Quantum Grav.* 5, 627, 1988.
- [20] V. Faraoni *Phys. Rev. D* 85, 024040, 2012.
- [21] B. Okutmuştu “Reissner-Nordström Uzay-zaman Geometrisinde Burgers Modelleri için Şok ve Seyrelme Dalgalarının Yayılımı,” Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Cilt 22, Özel Sayı, 448-459, 2018.
- [22] M. Arene, “Instability of extreme ReissnerNordström black holes,” Imperial College London, Master Thesis, London, 2014.
- [23] R.M. Wald. “General Relativity, 1st edition,” The University of Chicago Press, 506s, 1984.
- [24] McMahon, D. (2006). *Relativity Demystified*. Chapter 11, “The Kerr Black Hole.” (244-248). New York: McGraw Hill.